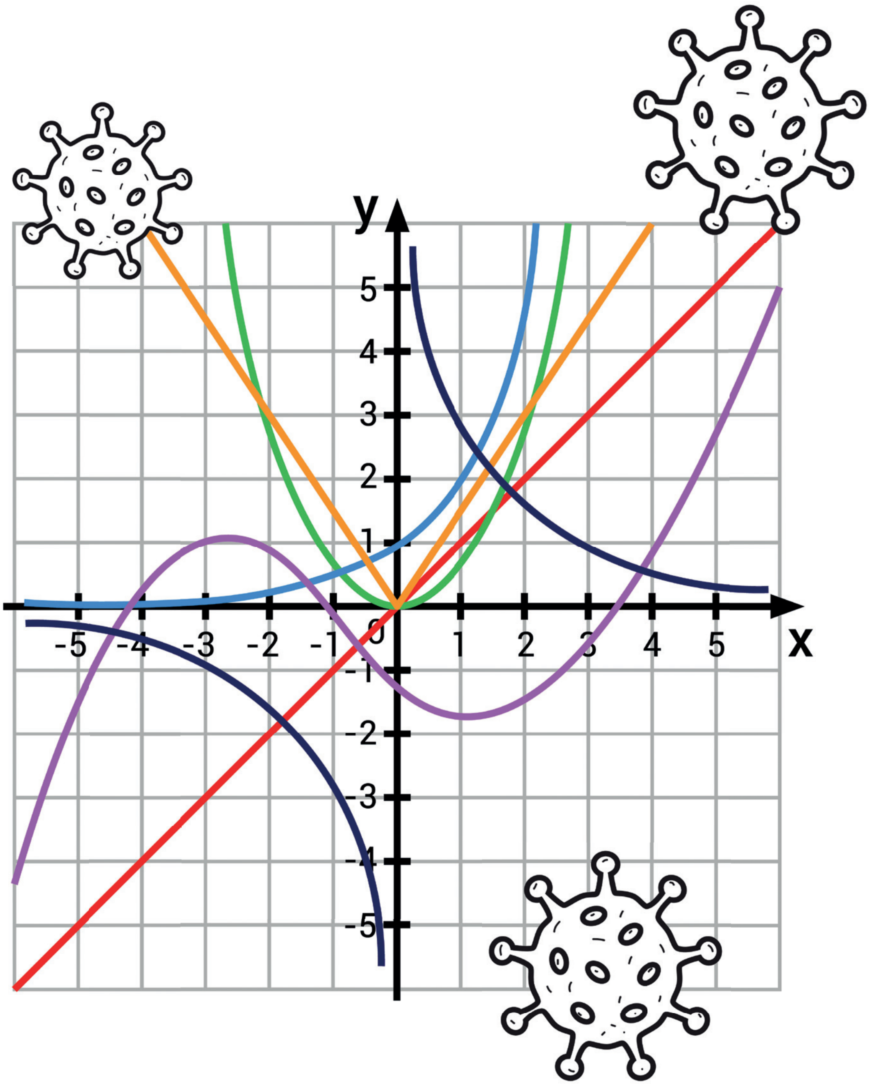
9.-13. Schuljahr

Barbara Theuer

Exponentielles Wachstum

beschreiben & modellieren



2

Wachstumsprozesse beschreiben & berechnen von Ötzi bis zur Pandemie. ***Praxisnah!***

Lernen mit Erfolg
KOHL VERLAG
www.kohlverlag.de

Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2

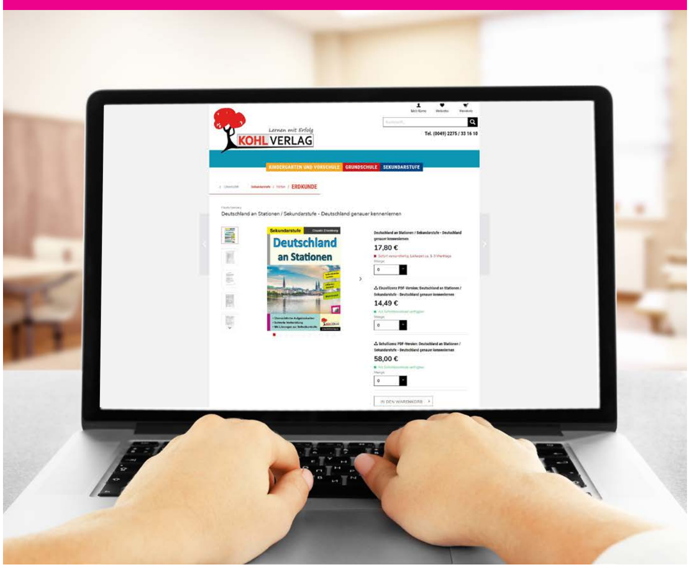
1. Digitalauflage 2023

Inhalt: Barbara Theuer
Umschlagbild: © Zizo, Muhamad & Alexandr - AdobeStock.com
Redaktion: Kohl-Verlag
Grafik & Satz: Eva-Maria Noack / Kohl-Verlag

Bestell-Nr. P12 929

ISBN: 978-3-98841-444-1

Unsere Lizenzmodelle



Der vorliegende Band ist eine PDF-Einzellizenz

Sie wollen unsere Kopiervorlagen auch digital nutzen? Kein Problem – fast das gesamte KOHL-Sortiment ist auch sofort als PDF-Download erhältlich! Wir haben verschiedene Lizenzmodelle zur Auswahl:

	Print-Version	PDF-Einzellizenz	PDF-Schullizenz	Kombipaket Print & PDF-Einzellizenz	Kombipaket Print & PDF-Schullizenz
Unbefristete Nutzung der Materialien	x	x	x	x	x
Vervielfältigung, Weitergabe und Einsatz der Materialien im eigenen Unterricht	x	x	x	x	x
Nutzung der Materialien durch alle Lehrkräfte des Kollegiums an der lizensierten Schule			x		x
Einstellen des Materials im Intranet oder Schulserver der Institution			x		x

Die erweiterten Lizenzmodelle zu diesem Titel sind jederzeit im Online-Shop unter www.kohlverlag.de erhältlich.

Inhalt

Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

Vorwort

Leben und Wachstum – ob erwünschtes oder unerwünschtes Wachstum – sind untrennbar miteinander verbunden, bedingen einander.

Auch in der unbelebten Natur findet Wachstum statt.

Die Aufgabe, Wachstumsprozesse zu beschreiben und mittels Wachstumsfunktionen zu berechnen, ist eine Herausforderung für die interdisziplinäre Zusammenarbeit von Mathematikern, Informatikern, Mikrobiologen, Epidemiologen, Medizinern, Ökonomen und Technikern.

In diesem Band sollen elementare mathematische Grundlagen wiederholt und ihre Anwendung bei der Berechnung interessanter, motivierender Wachstums- und Zerfallsprozesse gezeigt und geübt werden.

Lineares, potenzielles und exponentielles Wachstum mit Ausblick auf logistisches Wachstum werden als idealisierte Wachstumsformen, die in Grenzen unter bestimmten Bedingungen gelten, behandelt.

Besondere Bedeutung kommt dabei dem exponentiellen Wachstum zu. Das zunächst schleichende Anwachsen der Bestandsgröße, welches sich nach einer bestimmten Zeit in ein immenses Anwachsen dieser Größe wandelt, spiegelt natürliches Wachstum – allerdings nur bis zu einer bestimmten Sättigungsgrenze – wider. Analoges gilt für Zerfallsprozesse. Interessante Anwendungsbeispiele aus den Bereichen Kernphysik und Altertumsforschung sollen die Schüler* motivieren, ihre Kenntnisse der Exponential- und Logarithmusfunktion zu festigen.

Als „Klassiker“ aus dem Geschichtsbuch der Mathematik wird den Schülern als einfaches, aber überzeugendes Beispiel die Legende von der Erfindung des Schachspiels vorgestellt. Denn so, wie die Anzahl der Reiskörner auf dem Schachbrett nach der Vorschrift des Erfinders anwächst, vermehren sich auch Bakterien und Viren.

Dieser Sachverhalt bietet einen passenden aktuellen und fachübergreifenden Bezug zur Corona-Pandemie. Die Begriffe Sieben-Tage-Inzidenz und R-Faktor werden als Größen zur Beschreibung der Ausbreitung der Pandemie erklärt und einfache Aufgabenbeispiele zum Umgang mit diesen Größen angeboten. Rätsel zu Begriffen rund um die Pandemie runden dieses fachübergreifende Kapitel ab.

Das Aufgabenmaterial in diesem Heft ist sowohl zur Ergänzung des Unterrichts als auch für Hausaufgaben und Freiarbeit gedacht.

Viel Erfolg bei der Beschäftigung mit Wachstum wünschen das Team des Kohl-Verlags und

Barbara Theuer

* *Aufgrund der besseren Lesbarkeit wird im Folgenden die männliche Form Schüler bzw. Lehrer usw. verwendet. Gemeint sind damit selbstverständlich auch die weiblichen Personen.*

1 Wachstum in Natur und Gesellschaft – Einführung

Wachstum gehört zu den elementaren und bedeutsamen Prozessen in der unbelebten, besonders aber in der belebten Natur.
So wachsen Bäume, Pflanzen und Früchte zum Nutzen der Menschen. Die Körpermasse von Zuchttieren nimmt bei guter Fütterung zu. Haare wachsen, was erwünscht ist oder als lästig empfunden wird. Algen wachsen infolge der Erderwärmung und verpesten die Meere. Auch mikroskopisch kleine Lebewesen, wie zum Beispiel Bakterien oder winzige, leblose Viren, vermehren sich unter günstigen Bedingungen sehr stark exponentiell. Neben nützlichen Bakterien greifen allerdings viele Bakterienarten und besonders auch Viren bei einer Übertragung auf den Menschen dessen Gesundheit an. Steckt ein erkrankter Mensch weitere Menschen an, spricht man von der Ausbreitung der Infektion – die Zahl der Infizierten wächst bei fehlenden Maßnahmen zum Infektionsschutz exponentiell.
Auch in der Technik gibt es Wachstum. So ist zum Beispiel der Eiffelturm an heißen Sommertagen bis zu 30 cm höher als an kalten Wintertagen, da sich Stahl bei Erwärmung ausdehnt. Während der Eiffelturm beliebig in die Höhe wachsen kann, ohne Schaden anzurichten, führt eine unerwünschte Wärmeausdehnung von Baumaterialien mitunter zur Zerstörung von Bauwerken, Brücken usw. Bei Flüssigkeitsthermometern hingegen wird die Wärmeausdehnung einer Flüssigkeit zur Anzeige der Temperatur angewendet. In diesen Fällen liegt lineares Wachstum zugrunde.
Untersucht man in der Physik den Zuwachs des Weges bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in Abhängigkeit von der Zeit, so erkennt man quadratisches Wachstum.
In der Ökonomie und im Finanzwesen spielen Wirtschaftswachstum und Anwachsen von Kapital eine bedeutende Rolle.
Die Mathematik hat sich der Aufgabe angenommen, Wachstumsprozesse zu modellieren und die Wachstumsgrößen mittels mathematischer Funktionen zu berechnen, um beispielsweise Biologen, Medizinern, Epidemiologen und Ökonomen Voraussagen über die Entwicklung dieser Größen zu ermöglichen.

EA **Aufgabe 1**: *Gib je ein Beispiel für Wachstum aus drei verschiedenen Bereichen an und charakterisiere die Art des Wachstums. Nutze dazu auch den Einführungstext.*

____

____

____

____

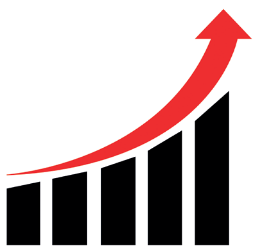
____

EA **Aufgabe 2**: *Informiere dich im Internet über die Entwicklung der Weltbevölkerung. Mache Notizen über ihr Wachstum seit 1950.*

____

____

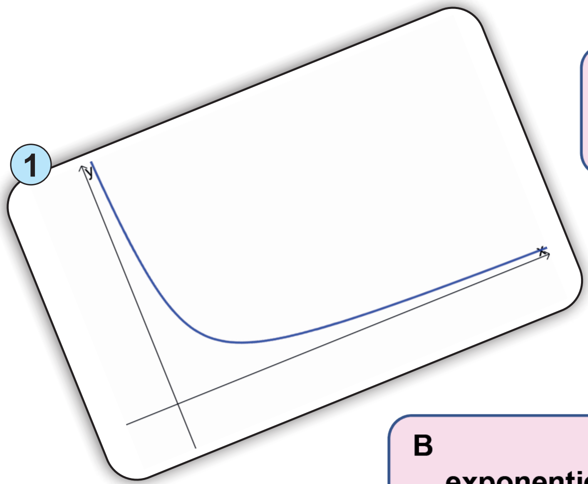
____



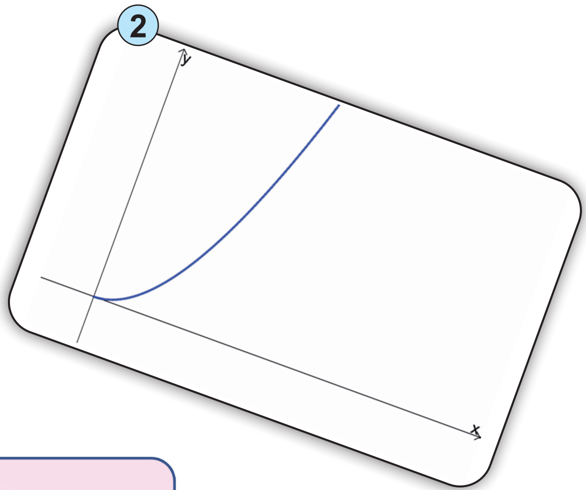
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg
Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929

2 Wachstumsformen im Diagramm (Blatt 1)

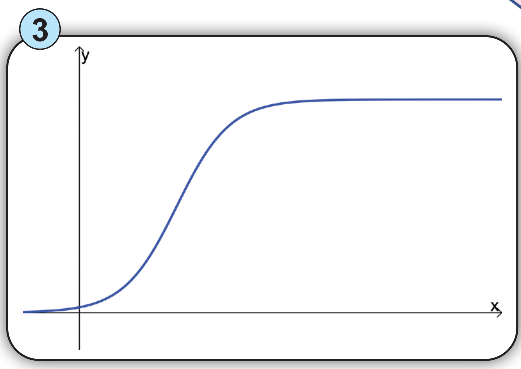
EA **Aufgabe 1**: *Ordne den Diagrammen die passende Beschreibung zu.*



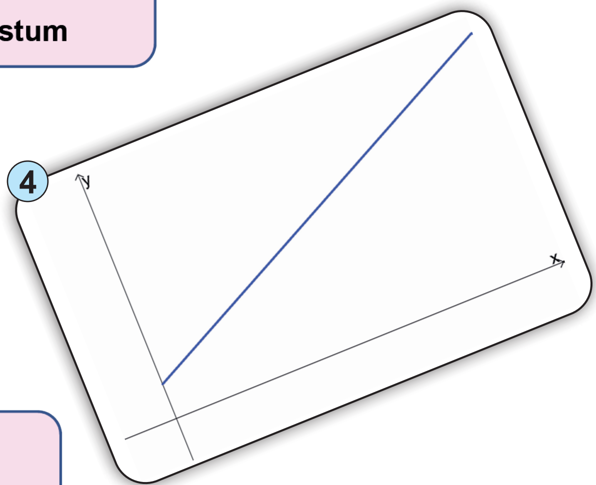
A
lineares Wachstum



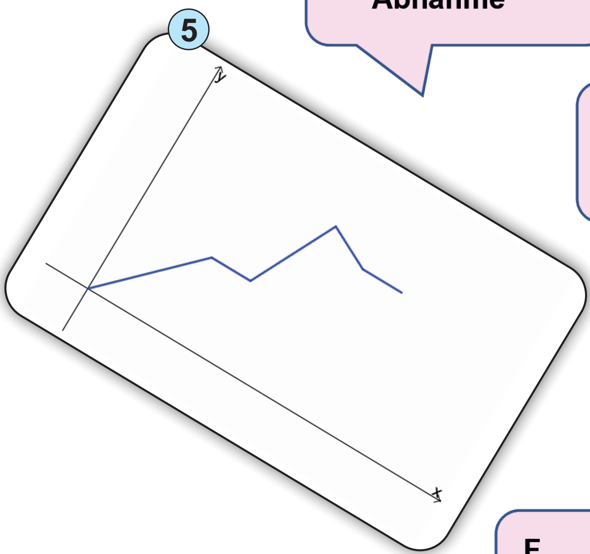
B
exponentielles Wachstum



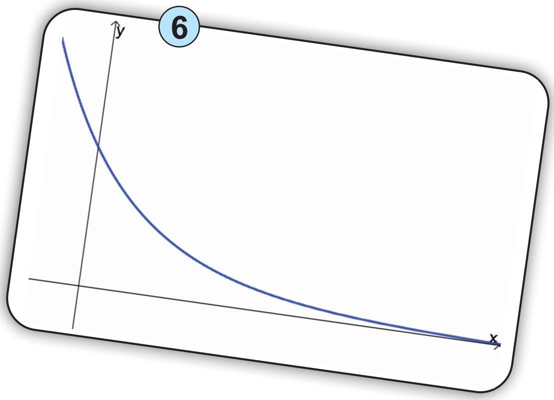
C
kein Wachstum



D
quadratische Abnahme



E
lineare Abnahme

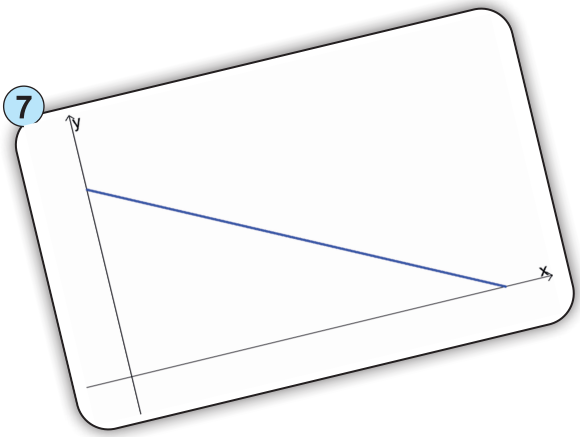


F
quadratisches Wachstum

Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929
KOHL VERLAG

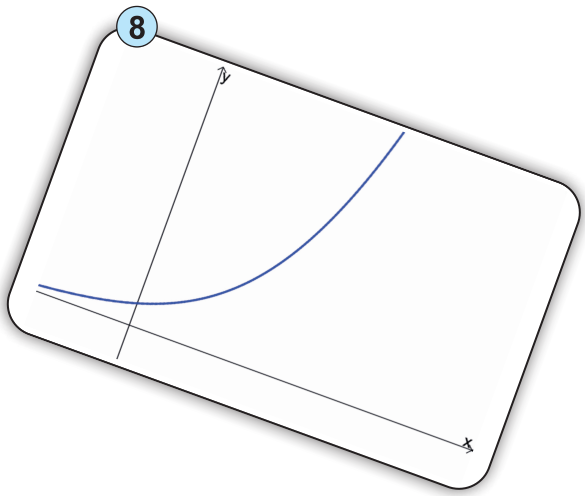
2 Wachstumsformen im Diagramm (Blatt 2)

7



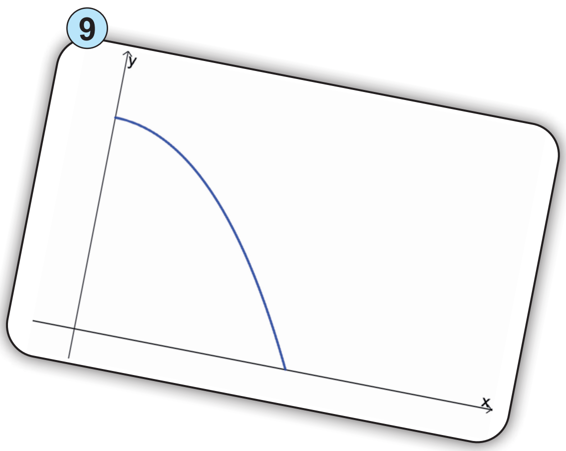
G
logistisches Wachstum

8



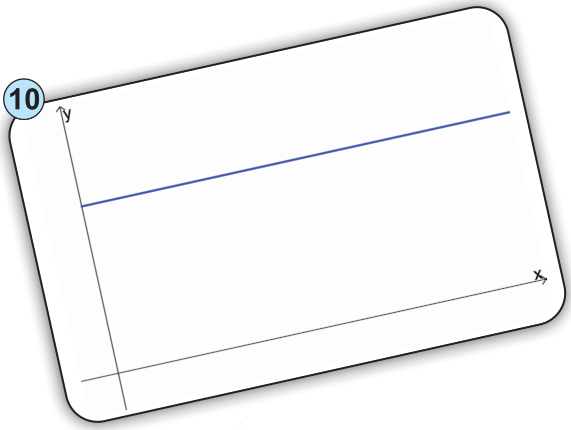
H
Abnahme bei indirekter Proportionalität

9



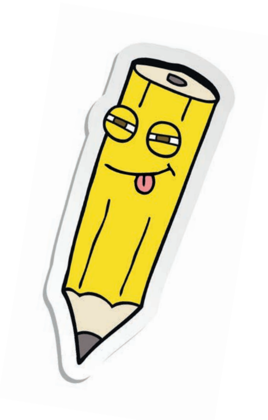
I
unregelmäßiges Wachstum

10



J
exponentieller Zerfall

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929
KOHL VERLAG

3 Mathematische Definition der Begriffe Wachstum und Zerfall

Wachstum
Unter dem allgemeinen Begriff Wachstum versteht man das zeitliche Verhalten einer Bestandsgröße b (Messgröße).
Wenn gilt: Aus $t_1 < t_2 \quad \rightarrow \quad b(t_1) < b(t_2)$,
spricht man von Wachstum (positivem Wachstum).
Wenn gilt: Aus $t_1 < t_2 \quad \rightarrow \quad b(t_1) > b(t_2)$,
spricht man von Abnahme bzw. Zerfall (negativem Wachstum).

Wachstumsfunktion
Eine Wachstumsfunktion b(t) beschreibt einen Bestand b als Funktion der Zeit t.
Um Wachstumsfunktionen zu beschreiben, werden folgende Begriffe verwendet:

Anfangsbestand (Anfangswert) b_0
Dieser gibt den Wert zu Beginn der Messung an und zeigt sich im Funktionsgraph als Ordinate des Schnittpunktes der Wachstumsfunktion mit der y-Achse.

Wachstumsrate
Bei Wachstumsvorgängen wird die momentane ***Änderungsrate*** so genannt. Die Berechnung der Änderungsrate erfolgt mittels erster Ableitung der Wachstumsfunktion b'(t).
Bei linearem Wachstum ist die Wachstumsrate zu jedem beliebigen Zeitwert konstant.
Die Wachstumsrate ist ein Maß für die ***Wachstumsgeschwindigkeit***.

Halbwertszeit (Verdopplungszeit)
Das ist die Zeitspanne, in der sich ein Bestand halbiert (verdoppelt) hat.

EA **Aufgabe 1**: *Erläutere die Begriffe (Tabelle oben) am Beispiel des Kapitalwachstums bei einer Anlage nach Verzinsung mit Zinseszins.*

EA **Aufgabe 2**: *Nenne je ein praktisches Beispiel für die Bedeutung der Wachstumsgrößen Halbwertszeit und Verdopplungszeit.*

Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929
KOHL VERLAG

4 Lineares Wachstum und lineare Abnahme

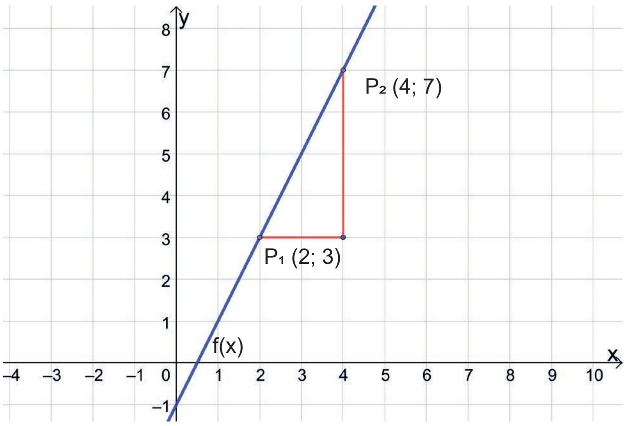
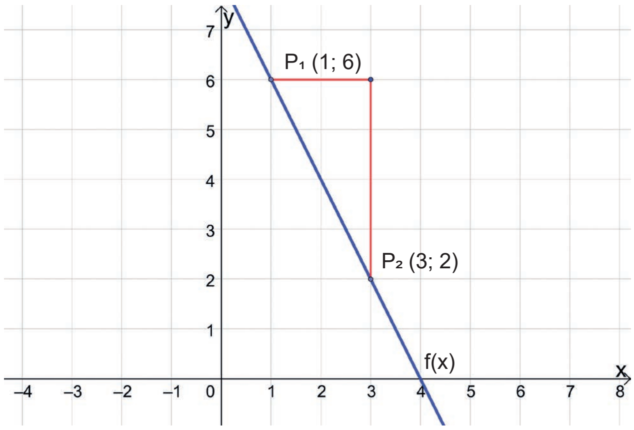
4.1 Allgemeine mathematische Grundlagen

Lineares Wachstum lässt sich mittels linearer Funktionen $y = f(x) = m \bullet x + n$ beschreiben. Der Anstieg m stellt dabei die Änderungsrate (Wachstumsrate) der Funktion dar.

Es gilt: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$,

wobei m dem Anstieg der Sekante durch die Punkte $P_1(x_1; y_1) \in f$ und $P_2(x_2; y_2) \in f$ entspricht.

Beispiele:

$f(x) = 2x - 1$ P_1 (2; 3) und P_2 (4; 7) $\in$ f $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$ Die Funktion f ist für alle $x \in R$ monoton steigend und stellt eine lineare Zunahme der Bestandsgröße dar.	$f(x) = -2x + 8$ $P_1(1; 6)$ und $P_2(3; 2) \in$ f $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-6}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2$ Die Funktion f ist für alle $x \in R$ monoton fallend und stellt eine lineare Abnahme der Bestandsgröße dar.
 	

EA

Aufgabe: *Der Graph der Funktion f verlaufe durch die Punkte P_1 und P_2. Welche Aussagen treffen für die Funktion $f(x) = mx + n$ zu? Kreuze an.*

P1 $\in$ f und P2 $\in$ f	Aussage	wahr	falsch
$P_1(2; -2)$ und $P_2(-1; 4)$	m negativ		
	$P_3(1; 0) \in$ f		
$P_1(-3; -3)$ und $P_2(6; 3)$	f ist monoton fallend		
	$n = -1$		
$P_1(-1; 4)$ und $P_2(-2; 5)$	$m = -\frac{1}{3}$		
	f ist monoton fallend		

Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2 – Bestell-Nr. P12 929