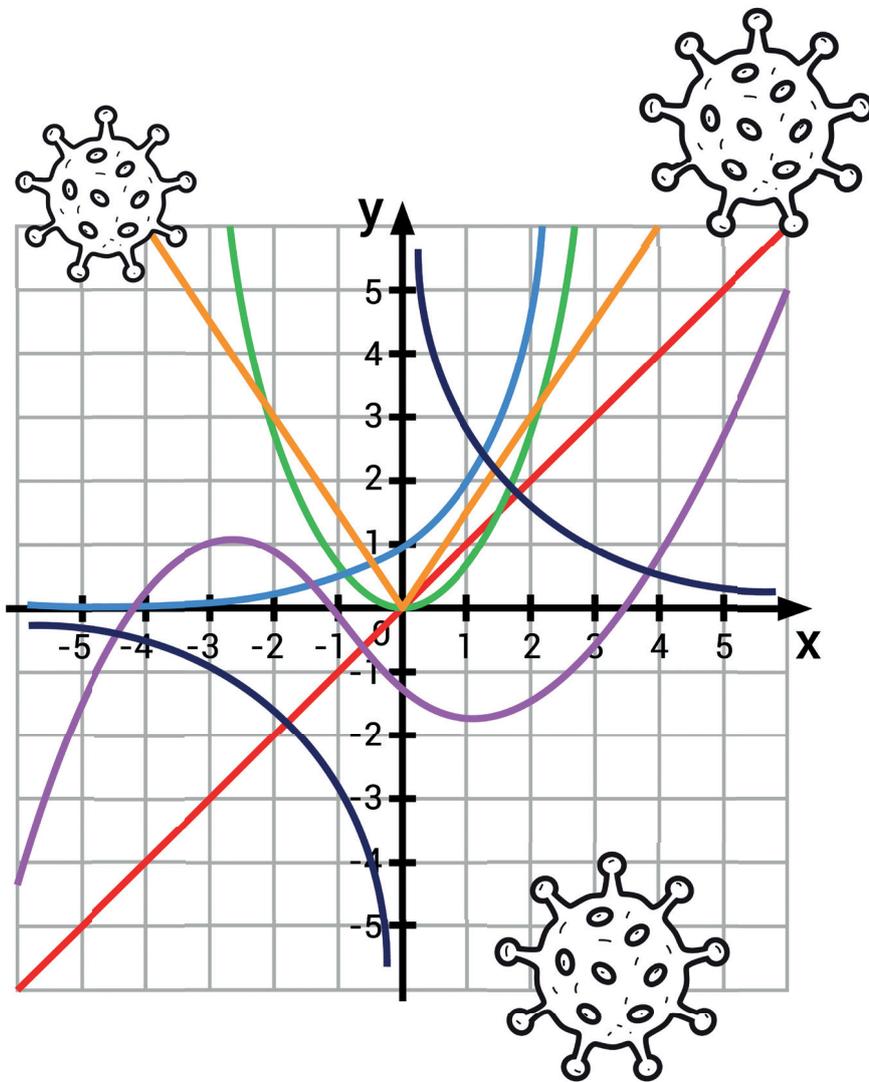


# Exponentielles Wachstum

## beschreiben & modellieren



Wachstumsprozesse beschreiben  
& berechnen von Ötzi bis zur  
Pandemie. **Praxisnah!**



Lernen mit Erfolg

**KOHL** VERLAG

# Exponentielles Wachstum beschreiben & modellieren / Band 2

1. Digitalauflage 2023

© Kohl-Verlag, Kerpen 2023  
Alle Rechte vorbehalten.

Inhalt: Barbara Theuer  
Umschlagbild: © Zizo, Muhamad & Alexandr - AdobeStock.com  
Redaktion: Kohl-Verlag  
Grafik & Satz: Eva-Maria Noack / Kohl-Verlag

**Bestell-Nr. P12 929**

**ISBN: 978-3-98841-444-1**

© Kohl-Verlag, Kerpen 2023. Alle Rechte vorbehalten.

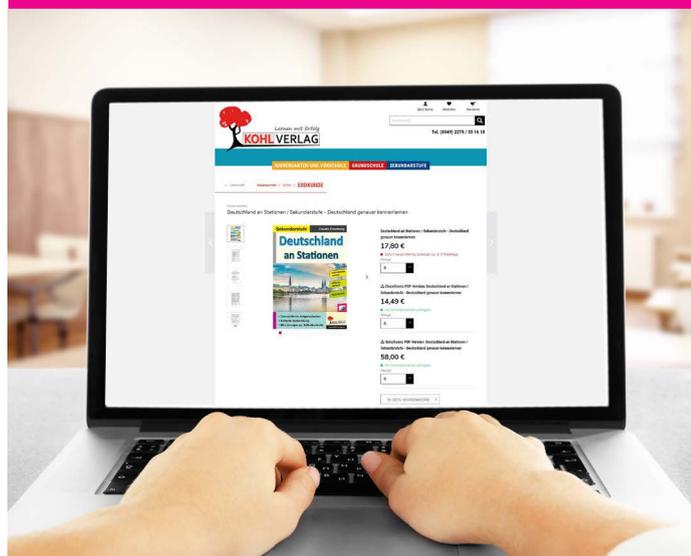
Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und unterliegen dem deutschen Urheberrecht. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages (§ 52 a UrhG). Weder das Werk als Ganzes noch seine Teile dürfen ohne Einwilligung des Verlages an Dritte weitergeleitet, in ein Netzwerk wie Internet oder Intranet eingestellt oder öffentlich zugänglich gemacht werden. Dies gilt auch bei einer entsprechenden Nutzung in Schulen, Hochschulen, Universitäten, Seminaren und sonstigen Einrichtungen für Lehr- und Unterrichtszwecke. Der Erwerber dieses Werkes in PDF-Format ist berechtigt, das Werk als Ganzes oder in seinen Teilen für den Gebrauch und den Einsatz zur Verwendung im eigenen Unterricht wie folgt zu nutzen:

- Die einzelnen Seiten des Werkes dürfen als Arbeitsblätter oder Folien lediglich in Klassenstärke vervielfältigt werden zur Verwendung im Einsatz des selbst gehaltenen Unterrichts.
- Einzelne Arbeitsblätter dürfen Schülern für Referate zur Verfügung gestellt und im eigenen Unterricht zu Vortragszwecken verwendet werden.
- Während des eigenen Unterrichts gemeinsam mit den Schülern mit verschiedenen Medien, z.B. am Computer, Tablet via Beamer, Whiteboard o.a. das Werk in nicht veränderter PDF-Form zu zeigen bzw. zu erarbeiten.

Jeder weitere kommerzielle Gebrauch oder die Weitergabe an Dritte, auch an andere Lehrpersonen oder pädagogische Fachkräfte mit eigenem Unterrichts- bzw. Lehrauftrag ist nicht gestattet. Jede Verwertung außerhalb des eigenen Unterrichts und der Grenzen des Urheberrechts bedarf der vorherigen schriftlichen Zustimmung des Verlages. Der Kohl-Verlag übernimmt keine Verantwortung für die Inhalte externer Links oder fremder Homepages. Jegliche Haftung für direkte oder indirekte Schäden aus Informationen dieser Quellen wird nicht übernommen.

Kohl-Verlag, Kerpen 2023

## Unsere Lizenzmodelle



## Der vorliegende Band ist eine PDF-Einzellizenz

Sie wollen unsere Kopiervorlagen auch digital nutzen? Kein Problem – fast das gesamte KOHL-Sortiment ist auch sofort als PDF-Download erhältlich! Wir haben verschiedene Lizenzmodelle zur Auswahl:



	Print-Version	PDF-Einzellizenz	PDF-Schullizenz	Kombipaket Print & PDF-Einzellizenz	Kombipaket Print & PDF-Schullizenz
Unbefristete Nutzung der Materialien	X	X	X	X	X
Vervielfältigung, Weitergabe und Einsatz der Materialien im eigenen Unterricht	X	X	X	X	X
Nutzung der Materialien durch alle Lehrkräfte des Kollegiums an der lizenzierten Schule			X		X
Einstellen des Materials im Intranet oder Schulserver der Institution			X		X

Die erweiterten Lizenzmodelle zu diesem Titel sind jederzeit im Online-Shop unter [www.kohlverlag.de](http://www.kohlverlag.de) erhältlich.

# Inhalt

	<u>Seite</u>
Vorwort .....	4
<b>1</b> Wachstum in Natur und Gesellschaft – Einführung.....	<b>5</b>
<b>2</b> Wachstumsformen im Diagramm (Blatt 1–2) .....	<b>6–7</b>
<b>3</b> Mathematische Definition der Begriffe Wachstum und Zerfall .....	<b>8</b>
<b>4</b> Lineares Wachstum und lineare Abnahme .....	<b>9–16</b>
4.1 Allgemeine mathematische Grundlagen .....	9
4.2 Einführungsbeispiel (Blatt 1–2) .....	10–11
4.3 Übungsaufgaben (Blatt 1–5) .....	12–16
<b>5</b> Potenzielles Wachstum und potenzielle Abnahme .....	<b>17–29</b>
5.1 Allgemeine mathematische Grundlagen (Blatt 1–4) .....	17–20
5.2 Einführungsbeispiel (Blatt 1–2) .....	21–22
5.3 Übungsaufgaben (Blatt 1–7) .....	23–29
<b>6</b> Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall .....	<b>30–50</b>
6.1 Eine mathematische Geschichte zur Einführung (Blatt 1–2) .....	30–31
6.2 Ein mathematisches Experiment .....	32
6.3 Der Klassiker: Die Legende von der Erfindung des Schachspiels .....	33
6.4 Exponentialfunktionen – Allgemeine mathematische Grundlagen (Blatt 1–8) .....	34–41
6.5 Grundlagen zur Berechnung von exponentiellen Wachstums- und Zerfallsprozessen.....	42
6.6 Beispiel zur Anwendung von Exponentialfunktionen (Blatt 1–2).....	43–44
6.7 Übungs- und Anwendungsaufgaben (Blatt 1–6) .....	45–50
<b>7</b> 7. Ausblick auf logistisches Wachstum (Blatt 1–4).....	<b>51–54</b>
<b>8</b> 8. Bezug zur Coronapandemie .....	<b>55–66</b>
8.1 Beschreibung der Pandemie mit mathematischen Kenngrößen .....	55–63 (Blatt 1–9)
8.2 Wachstum – Kreuz und Quer durch die Pandemie (Blatt 1–3) .....	64–66
Lösungen .....	<b>67–87</b>
Bildquellen .....	<b>88</b>

# Vorwort

Leben und Wachstum – ob erwünschtes oder unerwünschtes Wachstum – sind untrennbar miteinander verbunden, bedingen einander.

Auch in der unbelebten Natur findet Wachstum statt.

Die Aufgabe, Wachstumsprozesse zu beschreiben und mittels Wachstumsfunktionen zu berechnen, ist eine Herausforderung für die interdisziplinäre Zusammenarbeit von Mathematikern, Informatikern, Mikrobiologen, Epidemiologen, Medizinern, Ökonomen und Technikern.

In diesem Band sollen elementare mathematische Grundlagen wiederholt und ihre Anwendung bei der Berechnung interessanter, motivierender Wachstums- und Zerfallsprozesse gezeigt und geübt werden.

Lineares, potenzielles und exponentielles Wachstum mit Ausblick auf logistisches Wachstum werden als idealisierte Wachstumsformen, die in Grenzen unter bestimmten Bedingungen gelten, behandelt.

Besondere Bedeutung kommt dabei dem exponentiellen Wachstum zu. Das zunächst schleichende Anwachsen der Bestandsgröße, welches sich nach einer bestimmten Zeit in ein immenses Anwachsen dieser Größe wandelt, spiegelt natürliches Wachstum – allerdings nur bis zu einer bestimmten Sättigungsgrenze – wider. Analoges gilt für Zerfallsprozesse. Interessante Anwendungsbeispiele aus den Bereichen Kernphysik und Altertumsforschung sollen die Schüler\* motivieren, ihre Kenntnisse der Exponential- und Logarithmusfunktion zu festigen.

Als „Klassiker“ aus dem Geschichtsbuch der Mathematik wird den Schülern als einfaches, aber überzeugendes Beispiel die Legende von der Erfindung des Schachspiels vorgestellt. Denn so, wie die Anzahl der Reiskörner auf dem Schachbrett nach der Vorschrift des Erfinders anwächst, vermehren sich auch Bakterien und Viren.

Dieser Sachverhalt bietet einen passenden aktuellen und fachübergreifenden Bezug zur Corona-Pandemie. Die Begriffe Sieben-Tage-Inzidenz und R-Faktor werden als Größen zur Beschreibung der Ausbreitung der Pandemie erklärt und einfache Aufgabenbeispiele zum Umgang mit diesen Größen angeboten. Rätsel zu Begriffen rund um die Pandemie runden dieses fachübergreifende Kapitel ab.

Das Aufgabenmaterial in diesem Heft ist sowohl zur Ergänzung des Unterrichts als auch für Hausaufgaben und Freiarbeit gedacht.

Viel Erfolg bei der Beschäftigung mit Wachstum wünschen das Team des Kohl-Verlags und

**Barbara Theuer**

---

\* Aufgrund der besseren Lesbarkeit wird im Folgenden die männliche Form Schüler bzw. Lehrer usw. verwendet. Gemeint sind damit selbstverständlich auch die weiblichen Personen.

# 1 Wachstum in Natur und Gesellschaft – Einführung

Wachstum gehört zu den elementaren und bedeutsamen Prozessen in der unbelebten, besonders aber in der belebten Natur.

So wachsen Bäume, Pflanzen und Früchte zum Nutzen der Menschen. Die Körpermasse von Zuchttieren nimmt bei guter Fütterung zu. Haare wachsen, was erwünscht ist oder als lästig empfunden wird. Algen wachsen infolge der Erderwärmung und verpesten die Meere. Auch mikroskopisch kleine Lebewesen, wie zum Beispiel Bakterien oder winzige, leblose Viren, vermehren sich unter günstigen Bedingungen sehr stark exponentiell. Neben nützlichen Bakterien greifen allerdings viele Bakterienarten und besonders auch Viren bei einer Übertragung auf den Menschen dessen Gesundheit an. Steckt ein erkrankter Mensch weitere Menschen an, spricht man von der Ausbreitung der Infektion – die Zahl der Infizierten wächst bei fehlenden Maßnahmen zum Infektionsschutz exponentiell.

Auch in der Technik gibt es Wachstum. So ist zum Beispiel der Eiffelturm an heißen Sommertagen bis zu 30 cm höher als an kalten Wintertagen, da sich Stahl bei Erwärmung ausdehnt. Während der Eiffelturm beliebig in die Höhe wachsen kann, ohne Schaden anzurichten, führt eine unerwünschte Wärmeausdehnung von Baumaterialien mitunter zur Zerstörung von Bauwerken, Brücken usw. Bei Flüssigkeitsthermometern hingegen wird die Wärmeausdehnung einer Flüssigkeit zur Anzeige der Temperatur angewendet. In diesen Fällen liegt lineares Wachstum zugrunde.

Untersucht man in der Physik den Zuwachs des Weges bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in Abhängigkeit von der Zeit, so erkennt man quadratisches Wachstum. In der Ökonomie und im Finanzwesen spielen Wirtschaftswachstum und Anwachsen von Kapital eine bedeutende Rolle.

Die Mathematik hat sich der Aufgabe angenommen, Wachstumsprozesse zu modellieren und die Wachstumsgrößen mittels mathematischer Funktionen zu berechnen, um beispielsweise Biologen, Medizinern, Epidemiologen und Ökonomen Voraussagen über die Entwicklung dieser Größen zu ermöglichen.



**Aufgabe 1:** *Gib je ein Beispiel für Wachstum aus drei verschiedenen Bereichen an und charakterisiere die Art des Wachstums. Nutze dazu auch den Einführungstext.*



---

---

---

---

---

---

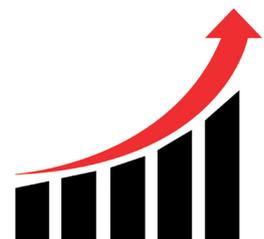


**Aufgabe 2:** *Informiere dich im Internet über die Entwicklung der Weltbevölkerung. Mache Notizen über ihr Wachstum seit 1950.*

---

---

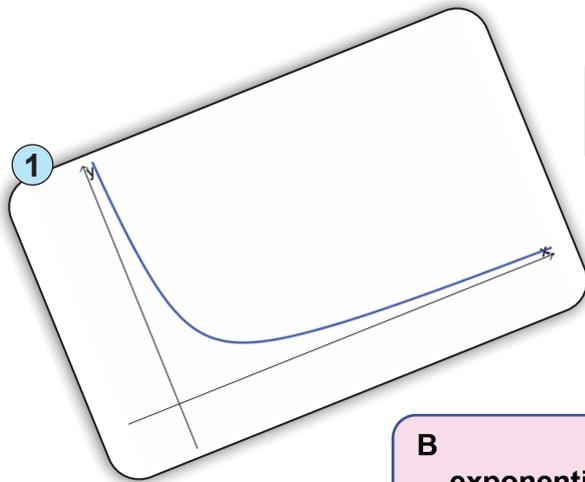
---



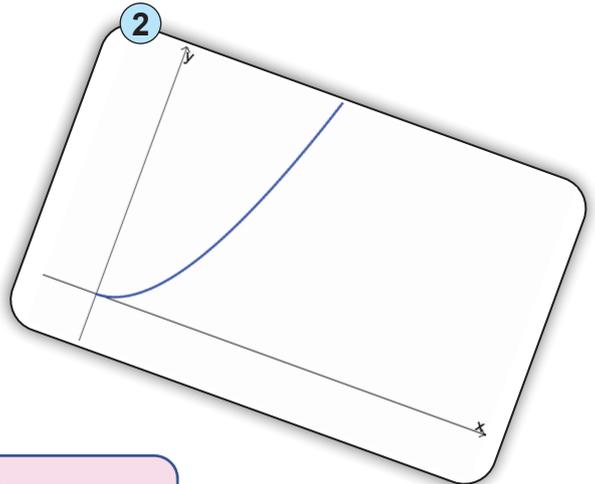
## 2 Wachstumsformen im Diagramm (Blatt 1)



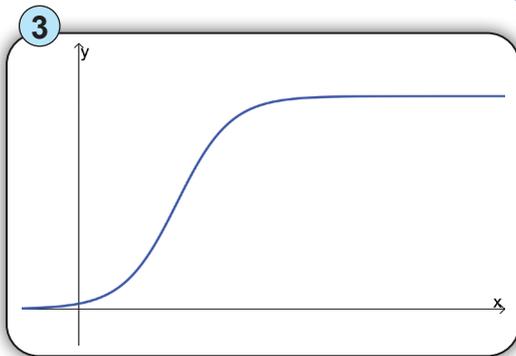
**Aufgabe 1:** Ordne den Diagrammen die passende Beschreibung zu.



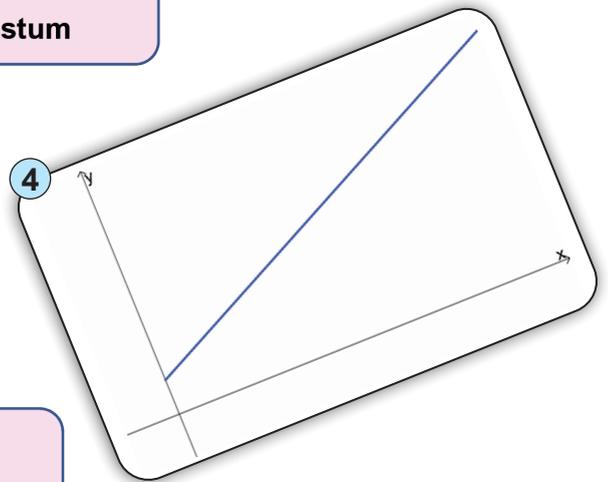
**A**  
lineares  
Wachstum



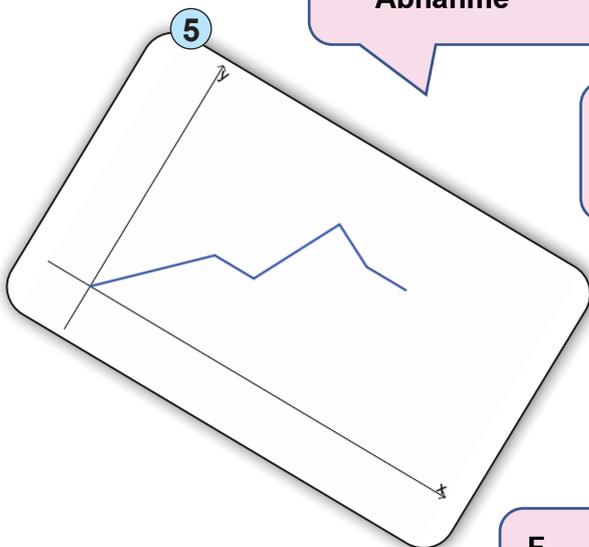
**B**  
exponentielles  
Wachstum



**C**  
kein  
Wachstum

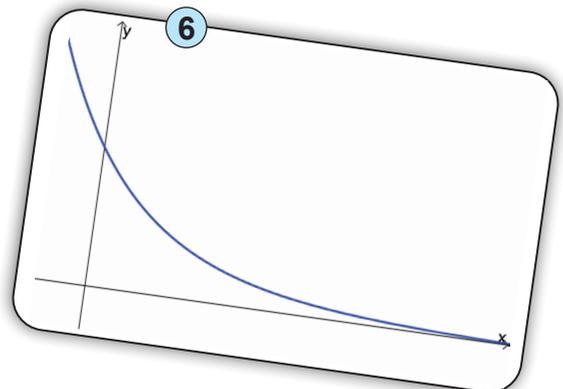


**D**  
quadratische  
Abnahme



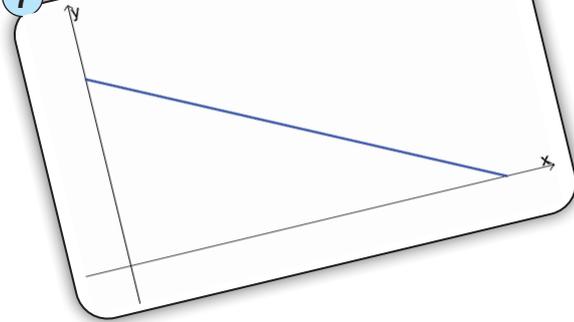
**E**  
lineare  
Abnahme

**F**  
quadratisches  
Wachstum



## 2 Wachstumsformen im Diagramm (Blatt 2)

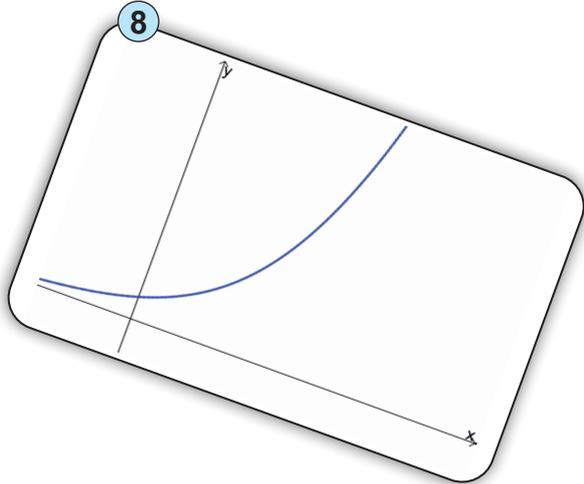
7



G

logistisches  
Wachstum

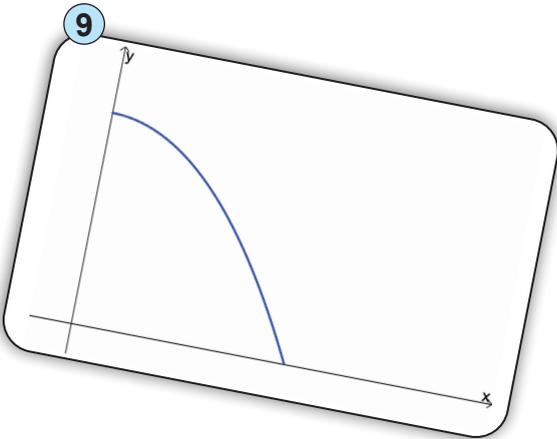
8



H

Abnahme bei  
indirekter  
Proportionalität

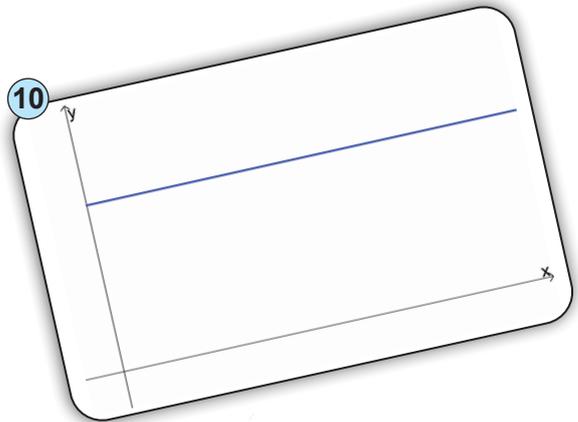
9



I

unregelmäßiges  
Wachstum

10



J

exponentieller  
Zerfall

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



# Mathematische Definition der Begriffe Wachstum und Zerfall



## Wachstum

Unter dem allgemeinen Begriff Wachstum versteht man das zeitliche Verhalten einer Bestandsgröße  $b$  (Messgröße).

Wenn gilt: Aus  $t_1 < t_2 \rightarrow b(t_1) < b(t_2)$ ,  
spricht man von Wachstum (positivem Wachstum).

Wenn gilt: Aus  $t_1 < t_2 \rightarrow b(t_1) > b(t_2)$ ,  
spricht man von Abnahme bzw. Zerfall (negativem Wachstum).

## Wachstumsfunktion

Eine Wachstumsfunktion  $b(t)$  beschreibt einen Bestand  $b$  als Funktion der Zeit  $t$ .  
Um Wachstumsfunktionen zu beschreiben, werden folgende Begriffe verwendet:

### Anfangsbestand (Anfangswert) $b_0$

Dieser gibt den Wert zu Beginn der Messung an und zeigt sich im Funktionsgraph als Ordinate des Schnittpunktes der Wachstumsfunktion mit der y-Achse.

### Wachstumsrate

Bei Wachstumsvorgängen wird die momentane **Änderungsrate** so genannt. Die Berechnung der Änderungsrate erfolgt mittels erster Ableitung der Wachstumsfunktion  $b'(t)$ .  
Bei linearem Wachstum ist die Wachstumsrate zu jedem beliebigen Zeitwert konstant.  
Die Wachstumsrate ist ein Maß für die **Wachstumsgeschwindigkeit**.

### Halbwertszeit (Verdopplungszeit)

Das ist die Zeitspanne, in der sich ein Bestand halbiert (verdoppelt) hat.



**Aufgabe 1:** Erläutere die Begriffe (Tabelle oben) am Beispiel des Kapitalwachstums bei einer Anlage nach Verzinsung mit Zinseszins.




---



---



---



---



---



**Aufgabe 2:** Nenne je ein praktisches Beispiel für die Bedeutung der Wachstumsgrößen Halbwertszeit und Verdopplungszeit.

---



---



---



---



# 4 Lineares Wachstum und lineare Abnahme

## 4.1 Allgemeine mathematische Grundlagen

Lineares Wachstum lässt sich mittels linearer Funktionen  $y = f(x) = m \cdot x + n$  beschreiben. Der Anstieg  $m$  stellt dabei die Änderungsrate (Wachstumsrate) der Funktion dar.

Es gilt:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ,

wobei  $m$  dem Anstieg der Sekante durch die Punkte  $P_1(x_1; y_1) \in f$  und  $P_2(x_2; y_2) \in f$  entspricht.



Beispiele:

<p><math>f(x) = 2x - 1</math>  <math>P_1(2; 3)</math> und <math>P_2(4; 7) \in f</math></p> <p><math>m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2</math></p> <p>Die Funktion <math>f</math> ist für alle <math>x \in \mathbb{R}</math> monoton steigend und stellt eine lineare Zunahme der Bestandsgröße dar.</p>	<p><math>f(x) = -2x + 8</math>  <math>P_1(1; 6)</math> und <math>P_2(3; 2) \in f</math></p> <p><math>m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-6}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2</math></p> <p>Die Funktion <math>f</math> ist für alle <math>x \in \mathbb{R}</math> monoton fallend und stellt eine lineare Abnahme der Bestandsgröße dar.</p>
--	--



**Aufgabe:** Der Graph der Funktion  $f$  verlaufe durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$ . Welche Aussagen treffen für die Funktion  $f(x) = mx + n$  zu? Kreuze an.

P1 $\in$ f und P2 $\in$ f	Aussage	wahr	falsch
P1(2; -2) und P2(-1; 4)	m negativ		
	P3(1; 0) $\in$ f		
P1(-3; -3) und P2(6; 3)	f ist monoton fallend		
	n = -1		
P1(-1; 4) und P2(-2; 5)	m = -1/3		
	f ist monoton fallend		