Sekundarstufe

Barbara Theuer

Bruchterme & -gleichungen

$$\frac{4}{x} + \frac{2x - 2}{x + 2} = \frac{3x^2}{x^2 + 2x}$$

Kleinschrittig erklärt & umgesetzt

Lernen mit Erfolg
KOHL VERLAG
www.kohlverlag.de

Inhalt

KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

Vorwort

Im Bildungsplan des Landes Baden-Württemberg wie auch der anderen Bundesländer wird als Ziel des Kompetenzerwerbes für den mittleren Abschluss unter anderem gefordert: „Ich kann quadratische Gleichungen und lineare Gleichungssysteme sowie Bruch- und Potenzgleichungen lösen“. Wie im Jahr 2018 gibt es in den meisten Jahren bei den Prüfungsaufgaben zum Realschulabschluss in Baden-Württemberg eine Aufgabe zum Lösen einer anspruchsvollen Bruchgleichung, wie auch das Titelbild dieses Heftes verrät.

Im Schulalltag lautet hingegen die widerspenstige Antwort vieler Schüler auf die oben geforderte Kompetenz „Wozu braucht man denn das…?“. Wir kennen alle die Zweifel der Schüler an der Notwendigkeit Bruchgleichungen lösen zu müssen – geboren aus den Schwierigkeiten beim Umgang mit diesem Typ von Gleichungen. Und obwohl die Schüler dieses Stoffgebiet gerne umgehen möchten, sind wir Lehrer um so mehr gefordert, speziell bei der Behandlung der Bruchgleichungen zu zeigen, wie man mit dem Werkzeug bekannten Wissens sowie mit Sorgfalt und Ausdauer diese Gleichungen lösen kann.

Zum Motivieren unter dem Vorsatz, dass Bruchgleichungen benötigt werden, um Sachverhalte aus Naturwissenschaft und Technik mathematisch zu modellieren bzw. mit Hilfe von entsprechenden Formeln gesuchte Größen zu ermitteln sowie beim Erlangen von Fertigkeiten beim Lösen dieser Gleichungen, kann der Einsatz vorliegender Arbeitsmaterialien hilfreich sein.

Auf den ersten Seiten soll den Schülern anhand einer Auswahl von repräsentativen Aufgaben wie zum Beispiel einer historischen Aufgabe des Heron von Alexandria und Zahlenrätseln sowie einem Überblick über die Schwerpunkte beim Lösen von Bruchgleichungen ein Eindruck davon vermittelt werden, worum es in diesem Stoffgebiet geht.

Als Bruchgleichungen sind ja bekanntlich solche Gleichungen definiert, bei welchen die Variable mindestens einmal im Nenner der Bruchterme, aus welchen sich die Bruchgleichungen zusammensetzen, vorkommt. Daraus folgt, dass bei der Belegung der Variablen einige Zahlen ausgeschlossen werden müssen, da Division durch Null nicht möglich ist. Eine Vielzahl von Aufgaben fordert deshalb die Bestimmung des Definitionsbereiches von Bruchtermen und Bruchgleichungen – der Menge der für die Belegung der Variablen zugelassenen Zahlen.

Zum Handwerkszeug beim Lösen von Bruchgleichungen gehören insbesondere auch Kenntnisse und Fähigkeiten beim Ermitteln des Hauptnenners als kleinstes gemeinsames Vielfaches der auftretenden Nenner, Faktorisieren von Summen sowie Gleichnamigmachen und Erweitern von Brüchen – wobei alles, was für Brüche gilt, nun auf Bruchterme übertragen werden muss.

Deshalb werden in diesem Arbeitsheft zahlreiche Aufgaben zur „Kleinarbeit“ mit Termen vorangestellt, bevor es an das Lösen von Bruchgleichungen mit aufsteigendem Schwierigkeitsgrad geht. Die entsprechenden Seiten dazu bilden den Schwerpunkt des Heftes. Hier gibt es Aufgaben – angefangen von den einfachsten Formen bis hin zu Bruchgleichungen, die nach dem Umformen zu quadratischen Gleichungen führen – mit Orientierung an den entsprechenden Aufgaben zum Realschulabschluss in Baden-Württemberg.

Dabei werden die Schüler mit ausführlich erläuterten Beispielen und Lösungshilfen an das selbstständige Lösen dieser Aufgaben herangeführt.

Sachaufgaben zu physikalischen Anwendungen im letzten Kapitel und „Röhrenaufgaben“– wie schon zu Herons Zeiten bekannt – sollen dazu beitragen, den Schülern bewusst zu machen, dass Bruchgleichungen in der Praxis gelöst werden müssen und runden unter fachübergreifendem Aspekt das Thema Bruchgleichungen ab.

Viel Erfolg beim Einsatz dieser Arbeitsmaterialien wünschen das Kohl-Verlagsteam und

Barbara Theuer

Bruchterme und Bruchgleichungen - Bestell-Nr. P12 292

KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

1 Worum es geht?

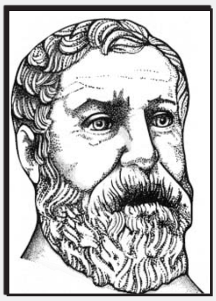
1.1 Eine Aufgabe zur Einführung

Aufgabe 1: *Welche Erkenntnisse auf mathematischem Gebiet schreibt man Heron von Alexandria zu? Nenne zwei bedeutsame Beispiele.*

____

____

Eine historische Aufgabe



Heron von Alexandria gehört neben Pythagoras, Euklid, Aristoteles und Archimedes, um nur einige zu nennen, zu den bedeutendsten Forschern der antiken Wissenschaften.

Er lebte wahrscheinlich – seine Lebensdaten sind nicht exakt belegt – im ersten Jahrhundert nach Christus. Herons Schriften zeugen von seinen Forschungen auf dem Gebiet der Mathematik, Naturwissenschaft und Technik.

In seinem Werk „Metrica" findet sich folgende Aufgabe in Form eines Epigramms:

Vier Springbrunnen es gibt, die Zisterne
anfüllet der erste täglich; der andere
braucht zwei Tage dazu, und der dritte
drei, und der vierte gar vier.

Welche Zeit nun brauchen zugleich sie?*

* Entnommen aus dem Artikel des Landesbildungsservers Baden-Württemberg „Der Beitrag griechischer Mathematiker", http://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/zahl/terme/geschichte/4griechen.html

Aufgabe 2: *Schätze, welche Zeit zum Füllen der Zisterne benötigt wird, wenn alle vier Brunnen zugleich laufen. Kreuze an.*

- ☐ **A** 10 Tage
- ☐ **B** 4 Tage
- ☐ **C** 1 Tag
- ☐ **D** etwa $\frac{1}{2}$ Tag
- ☐ **E** $\frac{1}{4}$ Tag
- ☐ **F** etwa $\frac{1}{10}$ Tag

Aufgabe 3: *Welche Gleichungen sind zum Lösen der Aufgabe passend? Kreuze an.*

- ☐ **A** $1 + 2 + 3 + 4 = x$
- ☐ **B** $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{1}{x}$
- ☐ **C** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{x}$
- ☐ **D** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = x$
- ☐ **E** $\frac{4}{10} = \frac{1}{x}$
- ☐ **F** $\frac{12}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{x}$

Aufgabe 4: *Löse Herons Aufgabe auf einem Extrablatt.*

Bruchterme und Bruchgleichungen - Bestell-Nr. P12 292
KOHL VERLAG

1 Worum geht es?

1.2 Zahlenrätsel als Beispiel

1. Ein einfaches Zahlenrätsel

Wenn man das Doppelte einer um $\frac{1}{2}$ vermehrten Zahl durch das Dreifache dieser um $\frac{1}{2}$ verminderten Zahl dividiert, erhält man 1.
Um welche Zahl handelt es sich?

Lösungsschritte:

➲ Gleichung aufstellen: $\dfrac{2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)}{3 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)} = 1$

➲ Definitionsbereich ermitteln: D = R \ { $\frac{1}{2}$ }, da der Nenner nicht Null werden darf

➲ Umformung der Bruchgleichung: Beide Seiten der Gleichung mit Nenner multiplizieren

$\rightarrow \quad 2 \cdot (x + \frac{1}{2}) = 3 \cdot (x - \frac{1}{2})$ | Klammern ausmultiplizieren

$2x + 1 = 3x - \frac{3}{2}$ | -3x | -1

$-x = -\frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{5}{2}; \quad \frac{5}{2} \in D$

Antwort: Die gesuchte Zahl heißt $\frac{5}{2}$.

2. Ein Zahlenrätsel für Experten

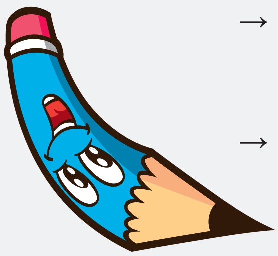
Gibt es eine Zahl, für die gilt:
Der Quotient aus dem um 1 verminderten Quadrat dieser Zahl und der um 1 verminderten Zahl soll gleich dem Doppelten der gesuchten Zahl sein.

Lösungsschritte:

– Gleichung aufstellen: $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2x$

– Definitionsbereich ermitteln: D = R \ { 1 }, da der Nenner nicht Null werden darf

– Umformung der Bruchgleichung: Beide Seiten der Gleichung mit Nenner multiplizieren



$\rightarrow \quad x^2 - 1 = 2x \cdot (x - 1)$ | Klammer ausmultiplizieren

$x^2 - 1 = 2x^2 - 2x$ | Zusammenfassen und ordnen bis zur Normalform

$\rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$

– Lösen der quadratischen Gleichung: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 1} = 1$

Antwort: ______________________________

Begründung: ______________________________

____

Aufgabe: *Ergänze die Antwort zum zweiten Zahlenrätsel und begründe deine Entscheidung.*