

Sekundarstufe

Barbara Theuer

Unendlichkeit in der Mathematik

Rechnen mit ... ∞



**Von unendlich groß bis
unendlich klein - endlich
spannend erklärt!**



Lernen mit Erfolg

KOHL VERLAG

www.kohlverlag.de

Unendlichkeit der Mathematik

Rechnen mit ∞

2. Digitalauflage 2020

© Kohl-Verlag, Kerpen 2019
Alle Rechte vorbehalten.

Inhalt: Barbara Theuer
Coverbild: © spaxiax & Miceking - AdobeStock.com
Redaktion: Kohl-Verlag
Grafik & Satz: Kohl-Verlag

Bestell-Nr. P12 315

ISBN: 978-3-96624-555-5

© Kohl-Verlag, Kerpen 2020. Alle Rechte vorbehalten.

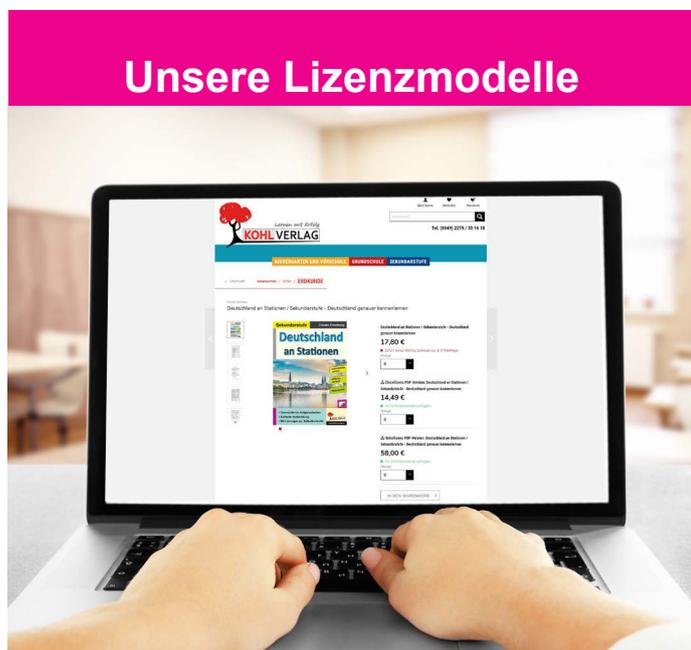
Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und unterliegen dem deutschen Urheberrecht. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages (§ 52 a UrhG). Weder das Werk als Ganzes noch seine Teile dürfen ohne Einwilligung des Verlages an Dritte weitergeleitet, in ein Netzwerk wie Internet oder Intranet eingestellt oder öffentlich zugänglich gemacht werden. Dies gilt auch bei einer entsprechenden Nutzung in Schulen, Hochschulen, Universitäten, Seminaren und sonstigen Einrichtungen für Lehr- und Unterrichtszwecke. Der Erwerber dieses Werkes in PDF-Format ist berechtigt, das Werk als Ganzes oder in seinen Teilen für den Gebrauch und den Einsatz zur Verwendung im eigenen Unterricht wie folgt zu nutzen:

- Die einzelnen Seiten des Werkes dürfen als Arbeitsblätter oder Folien lediglich in Klassenstärke vervielfältigt werden zur Verwendung im Einsatz des selbst gehaltenen Unterrichts.
- Einzelne Arbeitsblätter dürfen Schülern für Referate zur Verfügung gestellt und im eigenen Unterricht zu Vortragszwecken verwendet werden.
- Während des eigenen Unterrichts gemeinsam mit den Schülern mit verschiedenen Medien, z.B. am Computer, Tablet via Beamer, Whiteboard o.a. das Werk in nicht veränderter PDF-Form zu zeigen bzw. zu erarbeiten.

Jeder weitere kommerzielle Gebrauch oder die Weitergabe an Dritte, auch an andere Lehrpersonen oder pädagogische Fachkräfte mit eigenem Unterrichts- bzw. Lehrauftrag ist nicht gestattet. Jede Verwertung außerhalb des eigenen Unterrichts und der Grenzen des Urheberrechts bedarf der vorherigen schriftlichen Zustimmung des Verlages. Der Kohl-Verlag übernimmt keine Verantwortung für die Inhalte externer Links oder fremder Homepages. Jegliche Haftung für direkte oder indirekte Schäden aus Informationen dieser Quellen wird nicht übernommen.

Kohl-Verlag, Kerpen 2020

Unsere Lizenzmodelle



Der vorliegende Band ist eine PDF-Einzellizenz

Sie wollen unsere Kopiervorlagen auch digital nutzen? Kein Problem – fast das gesamte KOHL-Sortiment ist auch sofort als PDF-Download erhältlich! Wir haben verschiedene Lizenzmodelle zur Auswahl:



	Print-Version	PDF-Einzellizenz	PDF-Schullizenz	Kombipaket Print & PDF-Einzellizenz	Kombipaket Print & PDF-Schullizenz
Unbefristete Nutzung der Materialien	X	X	X	X	X
Vervielfältigung, Weitergabe und Einsatz der Materialien im eigenen Unterricht	X	X	X	X	X
Nutzung der Materialien durch alle Lehrkräfte des Kollegiums an der lizenzierten Schule			X		X
Einstellen des Materials im Intranet oder Schulserver der Institution			X		X

Die erweiterten Lizenzmodelle zu diesem Titel sind jederzeit im Online-Shop unter www.kohlverlag.de erhältlich.

Inhalt

	<u>Seite</u>
Vorwort	4
1 Die unendliche Geschichte.....	5–6
Vorstellung der Menschen vom Unendlichen	5–6
2 Begriffe rund um die Unendlichkeit	7
3 Endlich oder ohne Ende?	8–9
4 Im Land der großen Zahlen	10–12
4.1 Von der Mücke zum Elefanten – groß aber endlich groß	10–11
4.2 Unendlich groß	12
5 Im Land der kleinen Zahlen	13–17
5.1 Von der Mücke zum Atom – klein aber endlich klein	13–15
5.2 Unendlich klein	16–17
6 Allgemeine Zahlenfolgen	18
7 Eine spezielle Zahlenfolge: Die Fibonacci-Folge.....	19–23
8 Arithmetische Folgen	24
9 Partialsummenfolgen	25
10 Die Formel von Gauß.....	26
11 Geometrische Folgen	27
12 Arithmetische und geometrische Folgen.....	28
13 Durch Papierfalten bis zum Mond	29
14 Legende von der Erfindung des Schachspiels	30
15 Der Grenzwert von Zahlenfolgen.....	31–34
16 Der Begriff „Limes“ und das Unendlichkeitssymbol	35
17 Summenfolgen mit und ohne Grenzwert	36–40
18 Fragen nach der Unendlichkeit in der Antike	41–42
19 Rätsel um Achilles – griechische Mythologie	43–44
20 Paradoxon: Wettlauf des Achilles mit einer Schildkröte	45–48
21 Rechnen mit unendlich kleinen Größen.....	49–50
Ausblick auf die Infinitesimalrechnung	49–50
22 Lösungen.....	51–67

Vorwort

Bis zum Verständnis der Infinitesimalrechnung in der gymnasialen Oberstufe führt ein langer Weg, der seinen Ursprung bereits in der Neugier jüngerer Schüler nach dem Unendlichen hat. „Wie lange dauert eine Ewigkeit?“ „Ist das Weltall unendlich groß?“ „Wie heißt die größte Zahl?“

Wie oft hören Eltern und Lehrer diese Fragen und wie oft fallen die Antworten knapp aus. Gelingt es jedoch, die Beschäftigung der Kinder mit dieser Problematik in einer dem Alter angemessenen Form zu fördern, können so im Ansatz Grundlagen für das Verständnis weltanschaulicher und mathematischer Denkweisen gelegt werden und der Übergang zur Auseinandersetzung mit der Oberstufenmathematik erleichtert werden.

Das vorliegende Material soll einen Beitrag dazu leisten.

Ausgehend von der Erfahrungswelt der Schüler wie beispielsweise der Frage nach der Zahl der Körner in einer Sanduhr oder dem Brauch des „Schafe zählen“ vor dem Einschlafen bis hin zu Fragen nach der Unendlichkeit des Kosmos und der Teilbarkeit der Körper finden sich auf den ersten Seiten dieses Heftes Texte, Aufgaben und Rätsel zur allgemeinen Problematik der Unendlichkeit.

Die Schüler werden weiterhin mit Beispielen für sehr große – aber endlich große – und sehr kleine – aber endlich kleine – Größen und Zahlen bekanntgemacht und mit Beispielen dafür sensibilisiert, dass man unter „Unendlich groß“ keine Zahl, sondern einen Prozess „des immer weiter Zählens“ und unter „Unendlich klein“ einen Prozess „des immer weiter Teilens“ verstehen kann.

Ein Blick in die Geschichte der Mathematik zeigt den Schülern, dass sich Forscher seit der Antike mit der Problematik des Unendlichen beschäftigten. Ausführlich wird Zenons Paradoxon von Achilles und der Schildkröte vorgestellt.

Den Schwerpunkt des Heftes bilden vielfältige Aufgaben zu Zahlen- und Partialsummenfolgen (Reihen) beginnend mit Zahlenreihen, in welchen fehlende Zahlen zu ergänzen sind. Rätsel oder die Suche nach einem Bildungsgesetz kommen als Strategien zum Lösen der Aufgaben infrage. Historische Beispiele wie die Fibonacci-Folge und die Legende von der Erfindung des Schachspieles sind mit Texten und entsprechenden Aufgaben eingebunden.

Interessant wird es dann, wenn endlos viele Folgenglieder addiert werden und dennoch die Summe einen endlichen Wert – den Grenzwert – nicht überschreitet.

Der Ausblick auf das Rechnen mit unendlich kleinen Größen, was in der Antike nicht gelang, aber seit dem Wirken von Leibnitz und Newton, die als Begründer der Infinitesimalrechnung gelten, möglich wurde, rundet das Material ab, welches sowohl zur Ergänzung im Unterricht der Mittelstufe, in Freiarbeit, zur Vorbereitung auf die Einführung der Analysis in der Oberstufe oder aber auch als häusliche Lektüre für interessierte Schüler eingesetzt werden kann.

In diesem Sinne viel Erfolg bei der Beschäftigung mit dem „Unendlichen“ wünschen das Team des Kohl-Verlags und

Barbara Theuer



1 Die unendliche Geschichte

Vorstellung der Menschen vom Unendlichen

Aus den Mythen

• Sisyphos

Sisyphos soll um das Jahr 1400 v. Chr. gelebt haben. Heute ist er vor allem als eine Figur der griechischen Mythologie bekannt. In der Sage werden Sisyphos Weisheit und große Verdienste als König von Korinth zugeschrieben. Sisyphos galt aber auch als ein die Götter verachtender Frevler, was wohl einer der Gründe war, um von Hermes in die Unterwelt verbannt zu werden. Dort musste er zur Strafe für seine Frevel einen Felsblock auf einen Berg hinaufwälzen, der, wenn er fast den Gipfel erreicht hatte, jedes Mal wieder ins Tal rollte; sodass Sisyphos mit seiner Arbeit wieder von vorne beginnen musste – eine ewig währende Strafe. Der Grundgedanke der Sisyphos-Sage lebt in dem geflügelten Wort „Sisyphos-Arbeit“ noch heute, denn damit bezeichnet man eine Aufgabe, die trotz großer Mühen in endlicher Zeit niemals abgeschlossen werden kann.



• Achilles und die Schildkröte

Der antike griechische Philosoph Zenon von Elea (490 v. Chr. bis 430 v. Chr.) beschäftigte sich unter anderem mit der Frage, ob die Welt in diskrete Einheiten zerlegbar ist, es also Teilbarkeit gibt, oder ob die Welt eine kontinuierliche Einheit bildet. Die Annahme von Teilbarkeit führte zu dem Problem, dass entweder alles unendlich teilbar ist oder aber es letzte Elementarquanten von Raum und Zeit geben muss. Zenon beschreibt in einem seiner Paradoxa einen unendlich währenden fiktiven Wettlauf zwischen Achilles, den Homer in der Ilias als nahezu unverwundbaren, mutigen, starken und schnellen Heros beschreibt, und einer Schildkröte. Das Paradoxe besteht darin, dass der schnelle Achilles die langsame Schildkröte niemals einholt, da diese mit einem Vorsprung gestartet ist; und immer, wenn Achilles, der zehnmals schneller ist als die Schildkröte, den Vorsprung der Schildkröte bewältigt hat, ist die Schildkröte um den zehnten Teil ihres bisherigen Vorsprungs weitergelaufen – der Wettlauf dauert nach Zenon folglich ewig.

Aufgabe 1: Kennst du weitere Beispiele, in denen die Unendlichkeit in Mythen, Märchen und Geschichten eine Rolle spielt? Notiere deine Antwort in Stichpunkten.



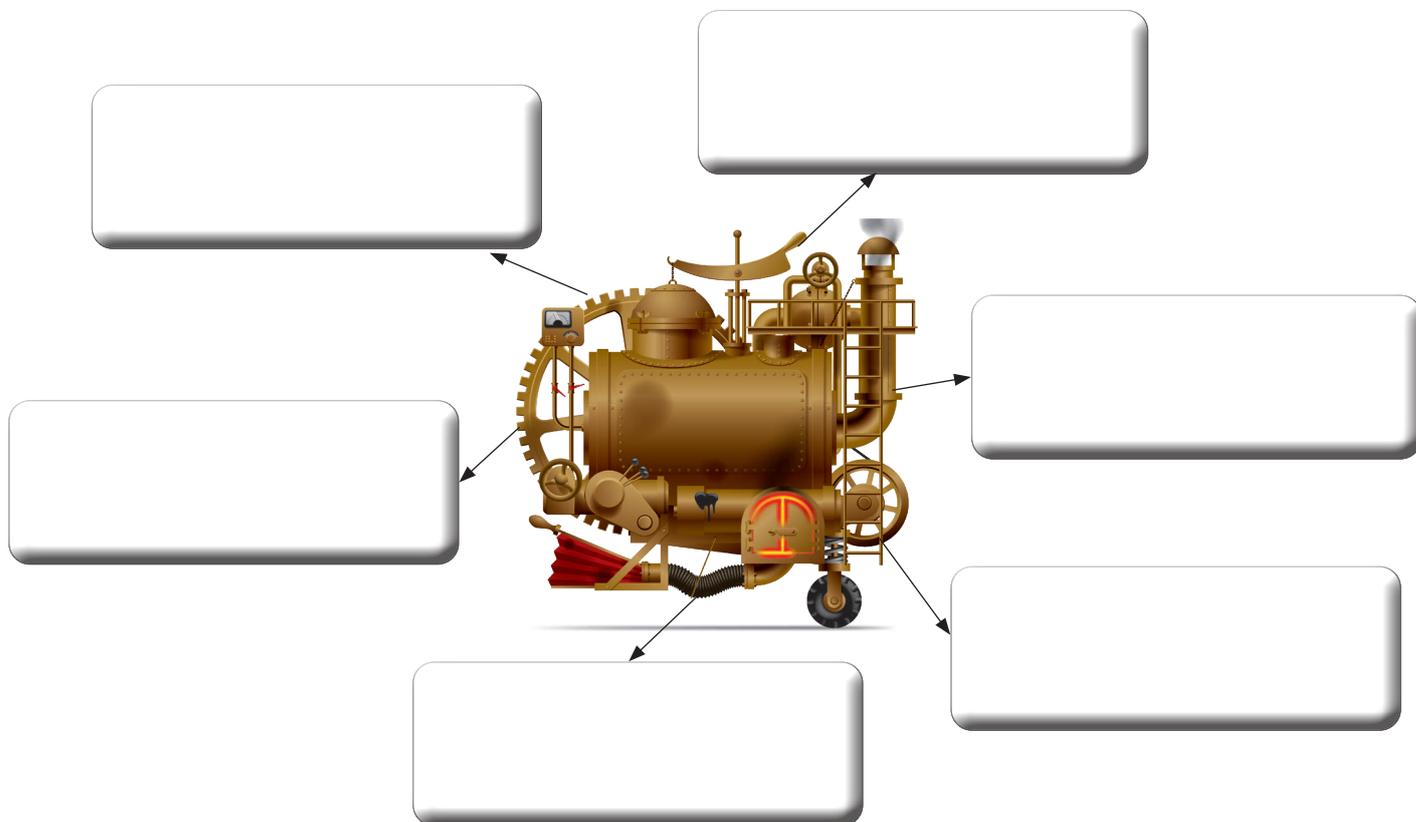
Aufgabe 2: Welches andere Wort wird in den Texten oben anstatt „unendlich“ verwendet? Welche Größe wird in den Mythen von Sisyphos und Achilles unendlich groß?

Tip: Interessantes und Aufgaben zur Berechnung der Wegstrecke, die Achilles laufen muss, bis er die Schildkröte eingeholt hat, findest du in den Kapiteln 19 und 20.

1 Die unendliche Geschichte

Aufgabe 3: *Im Traum arbeitest du als Wissenschaftler an einem Projekt zur Verbesserung der Energiesituation auf der Welt. Zu diesem Zweck sind neuartige Fahrzeuge und Maschinen zu konstruieren.*

Lass deine Phantasie spielen und notiere deine Wunschvorstellungen von den Eigenschaften solcher Vorrichtungen.



Aus der Naturwissenschaft

Das Perpetuum mobile

Ein *Perpetuum mobile* (lat.: sich ständig Bewegendes) erster Art ist ein hypothetisches Gerät, welches – einmal in Gang gesetzt – ohne weitere Energiezufuhr ewig in Bewegung bleibt und dabei möglicherweise auch noch Arbeit verrichtet, was mit der Abgabe von Nutzenergie verbunden ist. Die Abgabe von Nutzenergie ohne Zufuhr einer gleichwertigen Energiemenge in anderer Form widerspricht drastisch dem Energieerhaltungssatz. Selbst wenn keine Nutzenergie mit dem „Perpetuum mobile“ gewonnen wird, verhindern versteckte Energieumwandlungen (beispielsweise durch Reibung) den ewigen Dauerbetrieb.

Die Idee eines Perpetuum mobile 2. Art ist es, aus Umgebungswärme Arbeit zu gewinnen. Das heißt, die durch örtliche Abkühlung gewonnene Wärme soll komplett in mechanische Arbeit umgesetzt werden. Das ist nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht möglich.



Aufgabe 4: *Wie lässt sich eine relativ lange Laufzeit mechanischer Geräte ermöglichen?*



2

Begriffe rund um die Unendlichkeit

Oft begegnen uns in wissenschaftlichen Sendungen, Zeitungsartikeln oder utopischen Filmen Begriffe zum Thema der Unendlichkeit, die wir nur annähernd deuten können, die uns aber weitere Fragen und Rätsel zu diesem interessanten Thema aufgeben. Wir wollen deshalb hier zunächst einige Begriffe zu dieser Problematik zusammentragen.

Aufgabe 1: In dem abgebildeten kosmischen Buchstabennebel findest du waagrecht und senkrecht Wörter, die mit „unendlich“ in Zusammenhang gebracht werden können. Markiere die entsprechenden Felder und schreibe die Wörter auf.



(ß = SS, Ö = OE)

Waagrecht: 

Senkrecht:

Aufgabe 2: Ergänze weitere Begriffe zum Thema „unendlich“.

