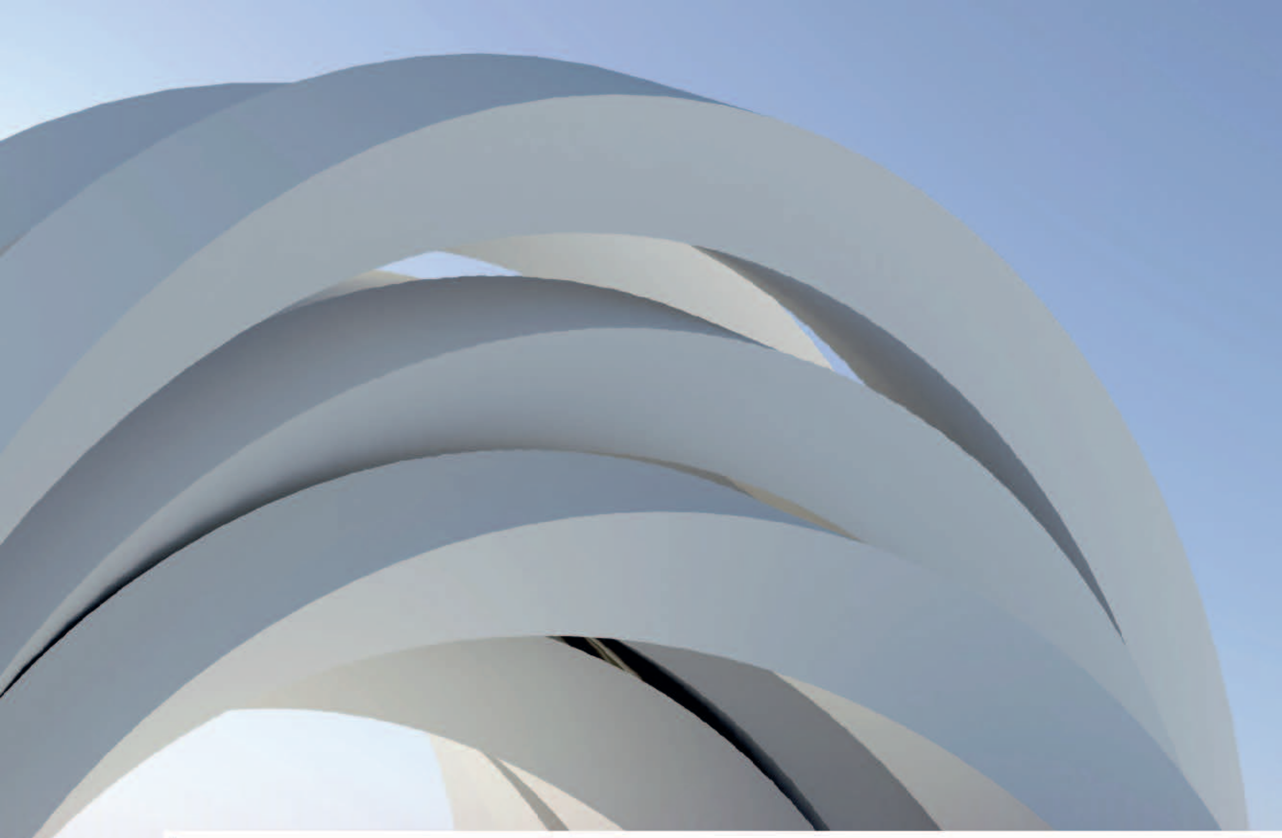


Analysis

2., aktualisierte Auflage

Theo de Jong

Pearson

EXTRAS ONLINE

Analysis

Analysis

2., aktualisierte Auflage

Theo de Jong

Pearson

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

25 24 23 22 21 20

ISBN 978-3-86894-380-1 (Buch)
ISBN 978-3-86326-877-0 (E-Book)

www.pearson.de
A part of Pearson plc worldwide

Programmleitung: Birger Peil, bpeil@pearson.de
Korrektorat: Katharina Pieper, Berlin
Coverabbildung: Chernetskiy, Shutterstock
Herstellung: Philipp Burkart, pburkart@pearson.de
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck und Verarbeitung: Drukkereij Wilco, Amersfoort

Printed in the Netherlands

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die zweite Auflage dieses Buches ist gründlich überarbeitet und erweitert worden und dient als Grundlage für eine dreisemestrige Vorlesung in der Analysis. Die ersten sechs bzw. sieben Kapitel (je nach Anfang im Sommer- oder Wintersemester) sind für das erste Semester gedacht. Nach dem Bearbeiten der Kapitel 8 bis 10, welche für den ersten Teil des zweiten Semesters konzipiert sind, kann man entweder mit Differenzialgleichungen (Kapitel 13) anfangen oder man beginnt mit Volumenberechnung und mehrdimensionaler Integration (Kapitel 11).

Ab dem neunten Kapitel werden manchmal einige Kenntnisse aus der linearen Algebra benutzt. Bei Bezügen zur linearen Algebra verweise ich hin und wieder auf mein Buch „Lineare Algebra“, welches ebenfalls beim Pearson Verlag erschienen ist.

Die wichtigsten Änderungen in den ersten sechs Kapiteln sind:

1. Die Darstellung über reelle Zahlen im 1. Kapitel ist deutlich vereinfacht worden.
2. Kapitel 2 und 3 sowie Kapitel 5 und 6 sind vertauscht worden.
3. Der Begriff des Flächeninhalts wird früher im 3. Kapitel behandelt und das Winkelmaß wird mithilfe des Flächeninhalts von Kreissektoren eingeführt.

Beim Schreiben dieses Buches habe ich versucht, die Vorkenntnisse und Fertigkeiten der Anfänger zu berücksichtigen. Ich habe es vermieden, zu viele Abstraktionen zu verwenden. Nicht, weil ich Abstraktionen für unwichtig halte, sondern da man zunächst ausreichende Mathematikkenntnisse besitzen muss, um Abstraktionen verstehen und würdigen zu können. Ich arbeite nach dem Motto:

> *Wenn man die einfachen Sachen gut versteht, kommen die schwierigen Sachen fast von alleine.*

Jedes Kapitel beginnt mit einer ausführlichen Einführung. Hier werden die wichtigsten Definitionen und Sätze erläutert. Darauf folgen auf den linken Seiten die mathematischen Definitionen, Sätze und Beispiele. Ist ein kurzer Beweis des Satzes möglich, so wird dieser ebenfalls auf den linken Seiten aufgeschrieben. Diese Beweise sind absichtlich kurz gehalten. Der Vorteil ist, dass man nicht lange nach dem Wesentlichen eines Argumentes suchen muss. Der Nachteil ist, dass man öfter etwas länger bei einer Zeile verweilt.

Direkte Berechnungen werden manchmal dem Leser überlassen. Diese durchzuführen ist eine gute Übung. Ist der Beweis eines Satzes länger, so wird er auf zwei Zwischenseiten ausführlicher dargestellt. Für das Weiterlernen ist es nicht unbedingt erforderlich, diese langen Beweise (sofort) durchzuarbeiten. Bei kurzen Beweisen ist die Absicht, dass die Studenten den Beweis so lange studieren, bis sie ihn verstanden haben. Allerdings sollte man nicht zu schnell frustriert sein. Das Verstehen von Beweisen muss geübt werden und es kann manchmal Wochen, Monate oder gar Jahre dauern, bevor man einen Beweis wirklich zu 100 % versteht.

Lösungen & Lehrvideos

Auf den rechten Seiten finden Sie die passenden Aufgaben. Diese Aufgaben sind mit den Informationen aus den Definitionen und den Sätzen von der vorherigen linken Seite lösbar. Lösungen der Aufgaben sind online verfügbar, jedoch sollte man vorher ernsthaft versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen. Man lernt Mathematik nicht, indem man nur zuschaut. Ebenfalls werden Lehrvideos online auf der Seite zum Buch erhältlich sein.

Es ist natürlich möglich, dass Sie eine andere Lösung einer Aufgabe finden. Teilen Sie mir bitte Ihre Lösung mit, wenn Sie meinen, dass Ihre Lösung einfacher ist als meine.

Die mit einem Sternchen * versehenen Abschnitte können ohne schlechtes Gewissen beim ersten Durchlesen übersprungen werden.

Bedanken möchte ich mich bei Cynthia Hog-Angeloni für Verbesserungsvorschläge in der ersten Auflage. Weiterhin gilt mein Dank dem Pearson-Verlag für die angenehme Zusammenarbeit. Vor allem jedoch danke ich meiner Frau Petra. Ihre Unterstützung und das Korrekturlesen waren eine wesentliche Voraussetzung für die Fertigstellung des Buches. Auch danke ich meiner Familie für die aufgebrachte Geduld und unserem Hund für die Streitschlichtung.

Ich, als Holländer, habe mein Bestes getan, um Fehler im Deutschen zu vermeiden, jedoch ist dies nie zu 100 % möglich. Für Hinweise auf Fehler im Buch bin ich sehr dankbar. Wenn Sie welche finden, bitte ich Sie, mich zu benachrichtigen.

E-Mail: dejong@mathematik.uni-mainz.de

Eine Liste mit Fehlern wird online zur Verfügung stehen.

Mainz

Kapitel 0
Mengen und Funktionen

Der Begriff der Menge kommt in der Mathematik fast überall vor. Georg Cantor beschreibt eine Menge auf folgende Weise:

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedlichen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Die Objekte, von denen Cantor spricht, nennen wir Elemente.

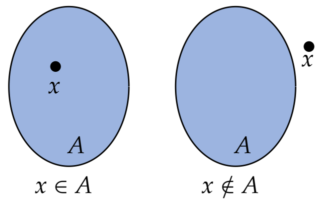
Oft, aber nicht immer, werden Großbuchstaben für Mengen, Kleinbuchstaben für Elemente benutzt. Enthält die Menge A das Objekt (Element) x, so schreibt man $x \in A$ und sagt

x ist ein Element von (der Menge) A.

Enthält A nicht das Element x, so schreibt man $x \notin A$ und sagt

x ist kein Element von A.

Zur Veranschaulichung benutzt man oft Diagramme, wie in der nebenstehenden Figur, sogenannte Venn-Diagramme.



Hat eine Menge nur endlich viele Elemente, so kann diese Menge durch die Aufzählung ihrer Elemente, eingeschlossen in geschweifte Klammern, sogenannte Akkoladen, aufgeschrieben werden. So ist

$$A = \{1, 4, \text{Affe}, \text{Pferd}\}$$

eine Menge, welche nur die Elemente $1, 4$, Affe und Pferd besitzt. Die Menge, die überhaupt keine Elemente hat, nennt man die leere Menge. Diese wird mit dem Symbol $\emptyset$ bezeichnet.

Die Aufzählung funktioniert nur, wenn die Menge endlich viele Elemente hat. Trotzdem benutzt man sie auch, wenn klar ist, wie die Elemente aus der Menge aussehen. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ notiert man manchmal mit

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}\,.$$

Mit $\mathbb{N}_0$ bezeichen wir die Menge der natürlichen Zahlen und Null $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, mit $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Eine andere oft benutzte Methode ist die der Aussonderung von Elementen aus einer gewissen bekannten Menge. So könnte man die Menge der geraden natürlichen Zahlen auch folgendermaßen aufschreiben:

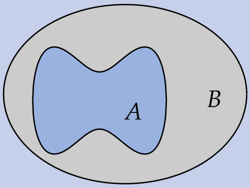
$$\{a \in \mathbb{N} : a \text{ ist durch 2 teilbar}\}\,.$$

Mit $\#$ oder auch $|A|$ bezeichen wir die Anzahl der Elemente von A. Insbesondere gilt $\#\emptyset = |\emptyset| = 0$. Hat A unendlich viele Elemente, so schreiben wir $\#A = \infty$.

Eine Menge A heißt Teilmenge der Menge B, wenn jedes Element von A ebenfalls eine Element von B ist. Notation:

$$A \subset B \text{ oder } B \supset A.$$

Wir nennen A eine echte Teilmenge von B, wenn $A \subset B$ und es ein Element $x \in B$ gibt mit $x \notin A$. Wir benutzen die Notation $A \subsetneqq B$ oder $B \supsetneqq A$.

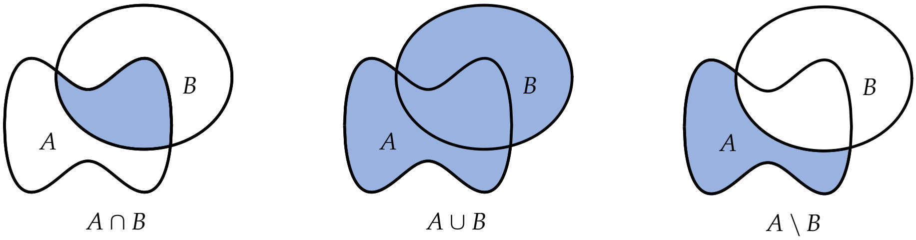


Es seien A und B Mengen.

1. Mit dem Durchschnitt $A \cap B$ bezeichnet man die Menge der Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.
2. Mit der Vereinigung $A \cup B$ bezeichnet man die Menge der Elemente, die entweder in A oder in B (oder in beiden) enthalten sind.
3. Mit der Differenz oder dem Komplement von B in A, Notation $A \setminus B$ bezeichnet man die Menge der Elemente von A, die nicht in B enthalten sind. Wird A stillschweigend als bekannt vorausgesetzt, so schreiben wir oft B^c statt $A \setminus B$ und reden dann einfach vom Komplement von B.
4. Ist I eine Menge und für jedes $i \in I$ eine Menge A_i gegeben, so bezeichnen wir mit der Vereinigung $\cup_{i \in I} A_i$ die Menge aller Elemente, die in einer der A_i liegt.

   Der Durchschnitt $\cap_{i \in I} A_i$ ist die Menge aller Elemente, die in jedem A_i enthalten sind.

   Ist $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$, so schreiben wir oft $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ statt $\cup_{i \in I} A_i$. Analog für $\cap$ und wenn $I = \{1, \ldots, n\}$.



Die Aussage $A \subset B$ ist äquivalent zu einer der nachfolgenden Aussagen:

1. $A = A \cap B$,
2. $A \setminus B = \emptyset$,
3. $B = A \cup B$.

Es ist wenig sinnvoll, solche Aussagen auswendig zu lernen, weil sie sich schnell im Kopf herleiten lassen.

Sind A, B zwei Mengen, so ist das kartesische Produkt $A \times B$ die Menge der Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Es ist hier erlaubt, dass $A = B$. Dann schreibt man oft A^2 statt $A \times A$. Das wichtigste Beispiel für uns ist die Menge $\mathbb{R}^2$, welche die Ebene darstellt.

1. Eine Abbildung, auch Funktion genannt, ist eine Vorschrift $f\colon A \to B$, die jedem $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuordnet.
   (Dieser Begriff wird in der Schule etwas anders gehandhabt. Wir bestehen darauf, dass f in allen Punkten von A definiert ist.)
2. Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen, so ist die Verknüpfung $g \circ f\colon A \to C$ gegeben durch $g \circ f(a) := g(f(a))$ für alle $a \in A$.

Ist $h\colon C \to D$ eine weitere Abbildung, so gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

$f\colon A \to B$ heißt

- surjektiv, wenn die Gleichung $b = f(a)$ für jedes $b \in B$ mindestens eine Lösung $a \in A$ hat.
- injektiv, wenn die Gleichung $b = f(a)$ für jedes $b \in B$ höchstens eine Lösung $a \in A$ hat.
- bijektiv, wenn die Gleichung $b = f(a)$ für jedes $b \in B$ genau eine Lösung $a \in A$ hat.

Bei einer **bijektiven** Abbildung kann man jedem Element von b genau ein Element a von A zuordnen. Wir erhalten die sogenannte inverse Abbildung oder Umkehrabbildung (oder -funktion)

$$f^{-1}\colon B \to A$$

mit den grundlegenden Eigenschaften

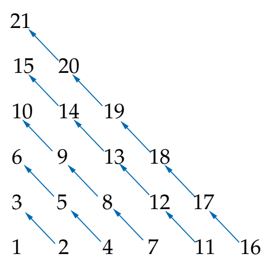
$$f(a) = b \iff a = f^{-1}(b)$$

und hieraus $f^{-1}(f(a)) = a$ für alle $a \in A$ und $f(f^{-1}(b)) = b$ für alle $b \in B$.
Dies bedeutet $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$. Hierbei ist für eine beliebige Menge A die identische Abbildung $\mathrm{Id}_A\colon A \to A$ gegeben durch $\mathrm{Id}_A(a) = a$ für alle $a \in A$. Diese Abbildung tut also nichts.

Existiert eine Bijektion $\sigma\colon \mathbb{N} \to A$, so nennt man A abzählbar oder abzählbar unendlich. Dies bedeutet, dass man die Elemente der Menge A auflisten kann:

$$A = \{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \}\,.$$

Äquivalent dazu ist, dass eine Menge A unendlich viele Elemente hat und es eine Surjektion $\sigma\colon \mathbb{N} \to A$ gibt. Die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen ist wiederum abzählbar. Es gilt nach Cantor, dass die Vereinigung einer abzählbaren Menge von abzählbare Mengen wiederum abzählbar ist. Insbesondere ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine abzählbare Menge. Cantors Aussage wird ersichtlich aus dem nebenstehenden Diagramm.



Es gibt auch Mengen mit unendlich vielen Elementen, die nicht abzählbar sind. Betrachte dazu die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aller Abbildungen

$$f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}\,.$$

Der Nachweis, dass diese Menge nicht abzählbar ist, erfolgt mit dem sogenannten *zweiten cantorschen Diagonalverfahren*. Nehmen wir an, es gäbe eine Abzählung

$$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Dann kommt die Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ gegeben durch

$$f(i) = 1 - f_i(i), \quad i = 1,2,3,\ldots\,.$$

nicht in dieser Liste vor, denn $f(i) \neq f_i(i)$, also $f \neq f_i$ für alle i.

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
f_1 & = & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
f_2 & = & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
f_3 & = & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
f_4 & = & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
f_5 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
f_6 & = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
f_7 & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
f_8 & = & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & \cdots \\
f_9 & = & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 & \cdots \\
f_{10} & = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & \\
f & = & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots
\end{array}
$$

Reelle Zahlen

1

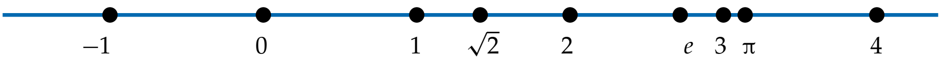
ÜBERBLICK

LERNZIELE

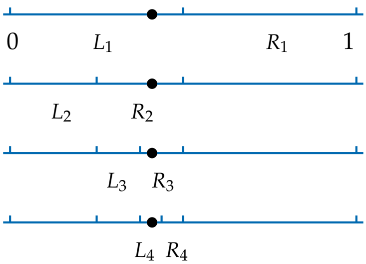
- Die Definition der reellen Zahlen; Binär- und Dezimalentwicklung
- Die Rechengesetze der reellen Zahlen
- Kleinste obere Schranke und größte untere Schranke
- Begriff des Häufungspunktes einer Menge von reellen Zahlen

> Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.
> (L. KRONECKER (1866))
>
> Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.
> (R. DEDEKIND: „Was sind und was sollen die Zahlen“)

Wir betrachten die Zahlengerade:



Es gibt auf dieser Geraden den ausgezeichneten Punkt 0 und weiter auf dieser Geraden die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$ sowie die negativen ganzen Zahlen $-1, -2, -3, -4, \ldots$. Ebenfalls möchten wir die anderen Punkte auf der Zahlengerade beschreiben. Dies machen auf folgende Weise zunächst für die Zahlen rechts von 0. Sei x ein Punkt auf dieser Geraden, zum Beispiel zwischen 0 und 1.Wir haben im folgenden Bild die Situation vergrößert dargestellt.



Um x zu lokalisieren, schauen wir auf die Mitte der Strecke $\frac{1}{2}$ zwischen 0 und 1. Den Teil links von $\frac{1}{2}$ nennen wir L_1, den Teil rechts R_1. Der Punkt $\frac{1}{2}$ liegt definitionsgemäß in R_1. Sonst liegt x links oder rechts von $\frac{1}{2}$. Liegt x links von $\frac{1}{2}$, also in L_1, dann definieren wir $a_{-1} = 0$ und $I_2 = L_1$. Liegt x rechts von $\frac{1}{2}$ oder ist x gleich $\frac{1}{2}$, so setzen wir $a_{-1} = 1$ und $I_2 = R_1$.

Als nächsten Schritt teilen wir I_2 in zwei gleiche Teile L_2 und R_2 auf, wobei die Mitte definitionsgemäß in R_2 liegt. Liegt x in L_2, so schreiben wir $a_{-2} = 0$ und $I_3 = L_2$. Liegt x in R_2, so schreiben wir $a_{-2} = 1$ und $I_3 = R_2$. Dann teilen wir I_3 in zwei gleiche Teilen L_3 und R_3 auf usw. Wir erhalten die Folge von Bits, d. h., Elemente von $\{0, 1\}$:

$$a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \ldots$$

Fast alle solche Folgen von Bits kommen vor, jedoch man muss Folgendes beachten:[1] Liegt x bei $\frac{1}{2}$, so erhalten wir $a_{-1} = 1$ und $0 = a_{-2} = a_{-3} = \cdots$. Hätten wir stattdessen die Konvention genommen, dass $\frac{1}{2}$ in L_1 liegt, so hätten wir $a_{-1} = 0, 1 = a_{-2} = a_{-3} = \cdots$ erhalten. Um eine doppelte Bezeichnung zu vermeiden, haben wir x in R_1 gewählt.

1 In Dezimalentwicklung: $1{,}00000\cdots$ ist erlaubt, aber $0{,}99999\cdots$ ist nicht erlaubt.

Für eine einheitliche Schreibweise, benutzen wir auch die binäre Schreibweise von natürlichen Zahlen. Im Binärsystem ist $23 = 10\,111 = 1{\cdot}2^4 + 0{\cdot}2^3 + 1{\cdot}2^2 + 1{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0$. Wir schreiben $a_0 = a_1 = a_2 = a_4 = 1$ und $a_3 = 0$. Auch $0 = a_5 = a_6 = a_7 = \cdots$. Wir erhalten folgende Beschreibung für eine nicht negative reelle Zahl, d. h. ein Punkt a rechts von 0 auf der Zahlengeraden. Sie ist eine Abbildung

$$a\colon \mathbb{Z} \to \{0,1\}, \quad n \to a_n \,,$$

welche jeder Stelle ein Bit zuordnet, sodass gilt:

1 Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 = a_{n+1} = a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots$.

2 Es gibt kein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 = a_{-k} = a_{-k-1} = a_{-k-2} = \cdots$.[2]

Wir schreiben

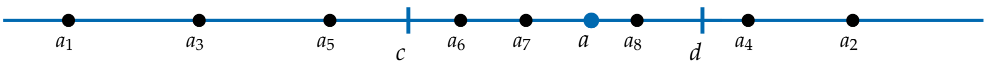
$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots$$

für eine solche Zahl und nennen Sie auch Binärentwicklung.[3] Negative reelle Zahlen definieren wir dadurch, das wir einfach ein „–“ vor eine Binärentwicklung schreiben. Diese ist links von 0 zu lokalisieren. Manchmal schreiben wir auch ein „+“ vor einer Binärentwicklung. Zu beachten ist, dass $-0 = 0 = +0$ zu definieren ist.

Die reellen Zahlen ordnen wir der Größe nach, indem man $x < y$ (x ist kleiner als y) definiert, wenn x auf der Zahlengerade links von y liegt. Zu sagen, dass x kleiner ist als y, ist das Gleiche wie zu sagen, dass y größer ist als x. Das können wir mit unseren Binärentwicklungen zum Ausdruck bringen.

Wenn wir unendlich viele reelle Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ betrachten, so reden wir von einer Folge reeller Zahlen (a_n). Die Folge (a_n) konvergiert gegen a wenn sich die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ der Zahl a beliebig gut annähern. Das „beliebig gut“ übersetzen wir in die mathematischen Sprache:

Die Folge (a_n) konvergiert gegen a, wenn für alle reellen Zahlen c, d mit $c < a < d$ folgt, dass $c < a_n < d$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.



Man benutzt die Notation $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Statt n werden manchmal auch i, j, k, ℓ oder vielleicht auch noch andere Buchstaben benutzt.

2 Man hätte alternativ die zweite Bedingung fallen lassen können und z. B.

$$0{,}100000\cdots = 0{,}011111\cdots$$

als gleich definieren können.

3 Alternativ kann man auch Dezimalentwicklungen nehmen. Zu bemerken ist, dass die Teilung durch 2 einfacher ist, als durch 10.

Ein wichtiger Satz ist folgender: Ist (a_n) eine wachsende Folge reeller Zahlen

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$$

und ist die Folge beschränkt, d. h., gibt es eine Zahl K, mit $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist diese Folge konvergent, d. h., es gibt eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Es ist Ihnen aus der Schule sicherlich bekannt, dass reelle Zahlen addiert und multipliziert werden können. Um diese zu definieren, betrachten wir zunächst endliche Binärzahlen. Sie sind von der Gestalt $\pm a$, wobei a eine Binärentwicklung ist mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass sie auch rechts auf Nullen endet, also:

Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ *mit* $a_{-k-1} = a_{-k-2} = \cdots = 0$.

Eine solche Zahl kann man auch als plus oder minus

$$a_n \cdot 2^n + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 1 + a_{-1} \cdot 2^{-1} + \ldots + a_{-k} \cdot 2^{-k}$$

schreiben. Diese Zahl ist ein Bruch mit einem Nenner, der höchstens 2^k ist und da diese spezielle Brüche sind, ist bekannt, wie man damit rechnet. Ist $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so gibt es ein größtes Element in $2^{-k}\mathbb{Z}$, welches kleiner oder gleich a ist. Wir bezeichnen es mit $\lfloor a \rfloor_k$. Für $k = 0$ erhalten wir die Gauß-Klammer. Für positive reelle Zahlen a erhält man $\lfloor a \rfloor_k$ aus a, indem man die Bits $a_{-j} \in \{0, 1\}$ für $j > k$ alle durch das Bit 0 ersetzt. Sind a, b reelle Zahlen, so können wir die Folgen

$$(\lfloor a \rfloor_k + \lfloor b \rfloor_k) \text{ und } (\lfloor a \rfloor_k \cdot \lfloor b \rfloor_k)$$

bilden. Es lässt sich zeigen, dass diese Folgen beide konvergieren und es ist naheliegend

$$a + b := \lim_{k\to\infty} (\lfloor a \rfloor_k + \lfloor b \rfloor_k) \text{ und } a \cdot b := \lim_{k\to\infty} \lfloor a \rfloor_k \cdot \lfloor b \rfloor_k$$

zu definieren.

Die Stetigkeit der Addition und Multiplikation besagt, dass für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt, dass sowohl $(a_n + b_n)$ als auch $(a_n \cdot b_n)$ konvergent sind und dass

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\,, \\ \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\,. \end{aligned}$$

Der Beweis dieser Aussage ist für Anfänger wahrscheinlich schwierig zu verstehen.
Mithilfe dieser Stetigkeit ist der Beweis der grundlegenden Eigenschaften der Addition und Multiplikation (Assoziativität und Distributivität) einfach. Man führt sie nämlich zurück auf die entsprechenden Rechenregeln für Brüche.

Das Supremum $\sup(A)$ einer von oben beschränkten Menge A ist die kleinste obere Schranke dieser Menge. Es gilt $a \leq \sup(A)$ für alle a in A und es gibt keine kleineren Zahlen $b < \sup(A)$, die diese Bedingungen erfüllen. Diesen Begriff kennen Sie nicht aus der Schule und er ist verwandt mit dem Maximum einer Menge A. Hat eine Menge M ein Maximum, so ist dieses Maximum das Supremum. Eine beschränkte Menge braucht kein Maximum zu haben, (zum Beispiel die Menge der negativen Zahlen hat kein Maximum), aber ein Supremum hat sie. Diese wichtige Aussage, dass eine beschränkte Menge von reellen Zahlen ein Supremum besitzt, nennt man die *Vollständigkeit* der reellen Zahlen.

Das Kapitel ist folgendermaßen organisiert. Zunächst üben wir Rechnen mit natürlichen Zahlen in Binärdarstellung. Die reellen Zahlen, zusammen mit ihrer Ordnung, und die Addition und Multiplikation werden behandelt. Danach wird besprochen, wie man von der Dezimaldarstellung zur Binärdarstellung kommt und umgekehrt. Die Existenz eines Kehrwerts a^{-1} für $a \neq 0$ und die Existenz einer Quadratwurzel $\sqrt{a}$ für $a \geq 0$ wird algorithmisch erklärt. Am Ende des Kapitels besprechen wir noch zwei andere Formulierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen, nämlich Häufungspunkte und Cauchyfolgen. Den Abschnitt über Cauchyfolgen können Sie beim ersten Lesen auslassen.

Bemerkung. Die Aussage $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist äquivalent zur folgenden Aussage:

$$\text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N}, \text{ sodass für alle } n \geq N \text{ gilt: } |a_n - a| < \varepsilon.$$

(Siehe Satz 1.5.) Der Ausdruck: „es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$“, ist natürlich äquivalent zu unserem Ausdruck „für fast alle n“. Die obige Beschreibung für den Grenzwert ist Standard. Wir bemerken aber, dass für die Definition des Grenzwertes einer Folge die Addition von reellen Zahlen *gar nicht gebraucht* wird. Der Beweis für die Stetigkeit der Addition und Multiplikation, die in den meisten Büchern gegeben werden, ist kürzer als unsere. Allerdings wird in diesem Beweis,

die Existenz der reellen Zahlen und von Rechenregeln wie Assoziativität und Distributivität, vorausgesetzt.

Bemerkung. Es gibt verschiedene andere Möglichkeiten, reelle Zahlen einzuführen, z. B. dedekindsche Schnitte, Intervallschachtelungen oder Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen. Ich halte diese Methoden alle, zumindest für Studienanfänger, für schwieriger als die Methode mit Binärentwicklungen. Im heutigen Computerzeitalter muss man Binärentwicklungen ohnehin verstehen. Wie vorher schon bemerkt, ist es für den Studienanfänger ratsam, den Beweis des Satzes 1.4 erst einmal zu überfliegen.

1.1 Binäre Entwicklung

Im täglichen Leben schreiben wir natürliche (und ganze) Zahlen in Dezimalschreibweise. Ihre Bedeutung sieht man am Beispiel $n = 123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. Im heutigen Computerzeitalter ist die binäre Schreibweise von großer Bedeutung. Hier benutzen wir nicht die Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, sondern die Bits $0, 1$, und nicht die Basis 10, sondern die Basis 2. So ist in Binärschreibweise 1 111 011 gleich

$$1\,111\,011 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 123.$$

Satz 1.1 Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $k \geq 0$ und eindeutig bestimmte Bits $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \{0, 1\}$, sodass

$$n = 2^k + a_{k-1}2^{k-1} + \ldots + a_1 2^1 + a_0 \cdot 2^0 .$$

Mit Induktion. Ist $n = 1$, so ist $a_0 = 1$. Angenommen, die Aussage ist wahr für alle $k < n$. Gegeben n, so ist die einzige mögliche Wahl $a_0 = 0$, wenn n gerade, und $a_0 = 1$, wenn n ungerade ist. Dann ist $(n - a_0)/2$ eine natürliche Zahl, nach Induktion gibt es ein eindeutig bestimmtes k und eindeutig bestimmte $a_1, \ldots, a_{k-1} \in \{0, 1\}$, sodass $(n - a_0)/2 = 2^{k-1} + a_{k-1}2^{k-2} + \ldots + a_1 2^0$. Dann hat n die gesuchte Darstellung. ■

Wir schreiben $(1a_{k-1} \cdots a_0)_2$ für die Binärschreibweise oder auch einfach $1a_{k-1} \cdots a_0$, wenn aus dem Kontext klar ist, dass die Binärschreibweise gemeint ist.

Beispiel: Wir schreiben $n = 729$ in Binärdarstellung. Der Beweis gibt uns $a_0 = 1$, weil 729 ungerade ist. Jetzt nehmen wir $(n - 1)/2 = 364$. Diese Zahl ist gerade, also $a_1 = 0$ usw.
Wir schreiben umgekehrt 1011 0110 01 in Dezimaldarstellung um. Jetzt fangen wir links mit 1 an, multiplizieren mit 2 und addieren 0, das zweite Bit von links. Wir erhalten 2. Wir multiplizieren mit 2 und addieren 1, das dritte Bit von links. Wir erhalten 5 usw.

1	2	5	11	22	45	91	182	364	729
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1

Für negative ganze Zahlen haben wir zusätzlich ein Vorzeichen $-$. Wenn wir auch negative Exponenten zulassen, erhalten wir statt $\mathbb{Z}$ den sogenannten „Ring" $\mathbb{Z}[1/2]$.

1. Die Elemente in $2^{-k}\mathbb{Z}$ sind $\pm\, a_\ell 2^\ell + a_{\ell-1}2^{\ell-1} + \cdots + a_{-k}2^{-k}$ mit $a_i \in \{0, 1\}$.
2. Die Menge der endlichen Binärzahlen ist gleich $\mathbb{Z}[1/2] := \cup_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\mathbb{Z}$.

Die endlichen Binärzahlen sind spezielle rationale Zahlen: $\mathbb{Z}[1/2] \subset \mathbb{Q}$. Sind x, y endliche Binärzahlen, so auch $x + y$ und $x \cdot y$. Diese Operationen erfüllen die Kommutativgesetze $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$, die Assoziativgesetze $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ und das Distributivgesetz $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. Weiterhin gilt $0 \cdot x = 0$, $1 \cdot x = x$, $(-1) \cdot x = -x$ und $x + 0 = x$ für alle endlichen Binärzahlen.

Aufgaben

EXTRAS ONLINE
Lösungen

Aufgabe 1.1 Schreiben Sie die nachfolgenden Zahlen in binärer Schreibweise: 16, 21, 32, 35, 41, 201.

Aufgabe 1.2 Schreiben Sie die nachfolgenden, in binärer Schreibweise gegebenen Zahlen in Dezimalschreibweise: 1011, 100101, 10101010101, 11, 100, 111, 10000, 1111111, 10000000.

Aufgabe 1.3
Berechnen Sie die Summe $a + b$ und das Produkt ab der nachfolgenden, in binärer Schreibweise gegebenen Zahlen. Schreiben Sie diese dann in der Dezimalschreibweise und kontrollieren Sie das Ergebnis. Rechts steht das Beispiel $a = 1011$ und $b = 1101$, also $a = 11$ und $b = 13$.

1. $a = 1011,\ b = 10$ 2. $a = 10101,\ b = 11$
3. $a = 10101,\ b = 101$ 4. $a = 111011,\ b = 10111$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ 1101 \\ \hline 11000 \end{array}+ \qquad \begin{array}{r} 1011 \\ 1101 \\ \hline 1011 \\ 101100 \\ 1011000 \\ \hline 10001111 \end{array}$$

Aufgabe 1.4

1. Nebenstehendes Programm `binary(a)` berechnet für eine natürliche Zahl a die Binärentwicklung als String, in diesem Fall eine Zeichenkette aus Nullen und Einsen. Probieren Sie es aus. Hier bedeutet `a%2` der Rest bei Teilung mit Rest durch 2, und `a//2` bezeichnet den Quotienten.

```
def binary(a):
    if a == 0: stri = '0'
    else: stri=''
    while a!=0:
        stri = str(a%2)+stri
        a = a//2
    return(stri)
```

   Schreiben Sie selbst ein Programm `dec(a)`, welches aus einem String `a` von Einsen und Nullen die natürliche Zahl in Dezimaldarstellung ausgibt.

2. Das nachfolgende, nicht besonders effiziente Programm `add(a,b)` berechnet die Summe von a und b in binärer Entwicklung. Als Eingabe ist ein String von Nullen und Einsen gegeben. Schreiben Sie selbst ein Programm, welches das Produkt von a und b ausrechnet.

```
def add(a,b):
    if len(a)<len(b): a,b = b,a
    if b=='': return a
    aa = a[-1]; bb = b[-1]; a= a[:-1]; b=b[:-1]
    c = add(a,b)
    if (aa=='1')&(bb=='1'): return add(c,'1') + '0'
    elif (aa=='0')&(bb=='0'): return c + '0'
    else: return c + '1'
```

1.2 Reelle Zahlen

1 Eine **reelle Zahl** ist eine Ausdruck $+a$ oder $-a$, wobei a eine Abbildung $a\colon \mathbb{Z} \to \{0,1\}$, $n \mapsto a_n$ ist mit den Eigenschaften:

(a) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \cdots$.

(b) Es gibt kein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 = a_{-k} = a_{-k-1} = a_{-k-2} = \cdots$.

Ist $a_k = 0$ für jedes k, so schreiben wir $+a = -a = 0$. Außerdem definieren wir $-(+a) := -a$ und $-(-a) = +a$. Wir schreiben kurz a für $+a$.

Zahlen der Form $+a$ mit $a \neq 0$ nennen wir positiv, Zahlen der Form $-a$ mit $a \neq 0$ negativ. Die Mengen der reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$.

2 Es sei $a, b \in \mathbb{R}$. Wir definieren $a < b$, äquivalent $b > a$, wenn:

- a negativ und b positiv oder null ist.
- a und b beide nicht negativ sind, $a_k = 0$ und $b_k = 1$ für das größte k mit $a_k \neq b_k$.
- $-b < -a$, wenn a und b beide negativ sind.

Ist $a < b$, so sagen wir, dass a kleiner ist als b oder b größer als a. Wir schreiben $a \leq b$ oder $b \geq a$, wenn $a < b$ oder $a = b$.

3 Wir fassen $2^{-k} \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ als die Zahlen $\pm a$ mit $a_{-k-1} = a_{-k-2} = \cdots = 0$ auf.

4 Den Betrag $|a|$ von $a \in \mathbb{R}$ definieren wir durch $|a| = a$, wenn a nicht negativ ist, und $|a| = -a$, wenn a negativ ist.

Satz 1.2

1 Die reellen Zahlen sind total geordnet, d. h.:

(a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt entweder $a = b, a > b$ oder $a < b$.

(b) Ist $a \leq b$ und $b \leq a$, so ist $a = b$.

(c) Ist $a < b$ und $b < c$, so ist $a < c$.

2 Für jedes $a \in \mathbb{R}$ und jedes $k \in \mathbb{Z}$ gibt es eine eindeutig bestimmte größte Zahl $\lfloor a \rfloor_k \in 2^{-k}\mathbb{Z}$ mit $\lfloor a \rfloor_k \leq a$. Wir schreiben $\lfloor a \rfloor$ für $\lfloor a \rfloor_0$ (Gauß-Klammer).

Ebenso gibt es eine eindeutig bestimmte kleinste Zahl $\lceil a \rceil_k \in 2^{-k}\mathbb{Z}$ mit $a \leq \lceil a \rceil_k$.

3 Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und $c \in 2^{-k-1} \cdot \mathbb{Z}$ mit $a \leq \lceil a \rceil_k < c < \lfloor b \rfloor_k \leq b$.

1 Diese Aussage ist eine einfache Aufgabe.

2 Ist $a \in 2^{-k}\mathbb{Z}$, so nehme $\lfloor a \rfloor_k = \lceil a \rceil_k = a$. Sei also $a \notin 2^{-k}\mathbb{Z}$ und $a > 0$. Setze $b_i = a_i$, wenn $i \geq -k$, und $b_i = 0$, wenn $i < -k$. Dann ist b das gesuchte $\lfloor a \rfloor_k$ und $b + 2^{-k}$ das gesuchte $\lceil a \rceil_k$. Ist $a < 0$, so $\lfloor a \rfloor_k = -\lceil -a \rceil_k$ und $\lceil a \rceil_k = -\lfloor -a \rfloor_k$.

3 Die Aussage ist klar, wenn $a < 0 < b$. Sei $0 \leq a < b$ und ℓ minimal mit $\lfloor a \rfloor_\ell < \lfloor b \rfloor_\ell$. Wähle ein $k \geq \ell + 1$ mit $a_{-k} = 0$. (Das ist möglich, weil eine Binärentwicklung nicht auf Einsen endet.) Definiere $c := \lfloor a \rfloor_k + 2^{-k} + 2^{-k-1}$. Dann folgt $a \leq \lceil a \rceil_k < c < \lfloor b \rfloor_\ell \leq \lfloor b \rfloor_k \leq b$. Den Fall $a < b \leq 0$ zeigt man analog. ∎

Aufgaben

EXTRAS ONLINE

Lösungen

Aufgabe 1.5 In dieser Aufgabe werden wir jeder (positiven) rationalen Zahl eine reelle Zahl zuordnen. Es sei $a, b \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie mit Induktion, dass es Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $a = q \cdot b + r$, $r \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$.
2. Zeigen Sie, dass diese q und r eindeutig durch a und b bestimmt sind. Die binäre Entwicklung von q ergibt die Vorkommastellen von a/b.
3. Es sei nun $a < b$. Setze $x_k = 0$ für $k \geq 0$. Setze $y_0 = a$ und

$$\begin{aligned} 2y_0 &= x_{-1}b + y_{-1} \\ 2y_{-1} &= x_{-2}b + y_{-2} \\ &\vdots \\ 2y_{-k+1} &= x_{-k}b + y_{-k} \\ &\vdots \end{aligned}$$

   mit $x_{-k} \in \{0, 1\}$ und $0 \leq y_{-k} < b$.

   Berechnen Sie die binäre Entwicklung von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{7}$.
4. Warum ist die Entwicklung periodisch?
5. Bestimmen Sie die binäre Entwicklung von $1/(2^k - 1)$.
6. Schreiben Sie in SAGE ein Programm, dass die binäre Entwicklung einer positiven rationalen Zahl berechnet. Geben Sie die Periode und den periodischen Anteil an.
7. Welchen Algorithmus braucht man für die Dezimalentwicklung?

Aufgabe 1.6 Es sei $a \in 2^{-k}\mathbb{Z}$ mit $a \geq 0$. Definiere $a_1, a_2, \ldots$ durch:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + 2^{-k-1} \\ a_2 &= a_1 + 2^{-k-2} \\ a_3 &= a_2 + 2^{-k-3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq a_n$ für jedes n. Zeigen Sie, dass $x \geq a + 2^{-k}$.

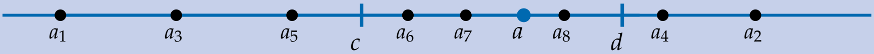
Aufgabe 1.7 Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar ist, siehe Kapitel 0.

1.3 Grenzwerte und Vollständigkeit

1 Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ reeller Zahlen bezeichnen wir mit (a_n) oder (a_k) usw.

2 (a_n) heißt konvergent mit Grenzwert a, Notation $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$, wenn gilt:

Für alle c, d mit $c < a < d$ gilt: $c < a_n < d$ für fast alle n, d. h. für alle bis auf endlich viele n.



3 Eine **Nullfolge** ist eine konvergente Folge mit Grenzwert 0.

4 Eine divergente Folge ist eine Folge, die nicht konvergent ist.

Beispiel: Ist $a \in \mathbb{R}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \lfloor a \rfloor_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} \lceil a \rceil_n$. Wir betrachten dazu den Fall $a > 0$. Ist $c < a < d$, so gibt es ein N mit $c < \lfloor a \rfloor_N \le a \le \lceil a \rceil_N < d$, die zweite Ungleichung nach Satz 1.2 Teil 3. Es folgt $c < \lfloor a \rfloor_n \le a \le \lceil a \rceil_n < d$ für alle $n \ge N$.

Satz 1.3 (Siehe Aufgabe 1.8)

1 Eine konvergente Folge hat nur einen Grenzwert.

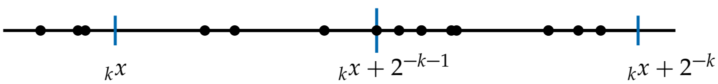
2 Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ mit $a_n \le b_n$ für fast alle n, so ist $a \le b$.

3 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = -a$.

4 (**Einschließungssatz**) Ist $a_n \le b_n \le c_n$ für fast alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, so ist auch (b_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

5 (**Vollständigkeit der reellen Zahlen**) Ist a_n eine wachsende beschränkte Folge, d. h. $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$ und $a_n \le K$ für ein $K \in \mathbb{R}$, so ist (a_n) konvergent.

Für den Nachweis der Vollständigkeit der reellen Zahlen betrachten wir lediglich den Fall, dass $a_n > 0$ für fast alle n. Für $k \in \mathbb{N}$, sei ${}_kx$ die größte Zahl in $2^{-k}\mathbb{N}_0$, so dass ${}_kx \le a_n$ für mindestens ein n. Dann ist ${}_kx = {}_{k-1}x + x_{-k} \cdot 2^{-k}$ für ein $x_{-k} \in \{0, 1\}$.



- Ist $1 = x_{-\ell} = x_{-\ell-1} = \cdots$ für ein ℓ, so ist $a_n \le {}_\ell x + 2^{-\ell} =: x \in 2^{-\ell}\mathbb{Z}$. Ist $c < x < d$, so gibt es ein $k \ge \ell$ mit $c < x - 2^{-k} = {}_kx < x$ und $c < a_n < d$ für fast alle n folgt.

$$\begin{array}{rcl} x & = & \star \cdots \star\, 1000 \cdots 0000 \cdots \\ c & \le & \star \cdots \star\, 0111 \cdots 1011 \cdots \\ & < & \star \cdots \star\, 0111 \cdots 1100 \cdots \\ & = & x - 2^{-k} = {}_kx \end{array}$$

- Sonst definieren die Bits x_i eine positive reelle Zahl x mit ${}_kx = \lfloor x \rfloor_k$ und für fast alle n gilt: $\lfloor x \rfloor_k \le a_n < \lceil x \rceil_k = \lfloor x \rfloor_k + 2^{-k}$. Ist $c < x < d$, so gibt es ein k mit $c < \lfloor x \rfloor_k < x < \lceil x \rceil_k < d$, also gilt $c < a_n < d$ für fast alle n. ■

Aufgaben

Lösungen

Aufgabe 1.8 Beweisen Sie die ersten vier Aussagen von Satz 1.3.

Aufgabe 1.9 Zeigen Sie die fünfte Aussage des Satzes 1.3 für den Fall, dass $a_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 1.10 Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Aufgabe 1.11 Es sei (a_n) eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass sie beschränkt ist, d. h. es gibt ein $K \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq K$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 1.12

1. Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a und

   $$k(1) < k(2) < k(2) < \cdots$$

   eine Folge natürlicher Zahlen. Zeigen Sie, dass $(a_{k(j)})$ ebenfalls gegen a konvergiert.
2. Es sei (a_n) eine wachsende Folge reeller Zahlen. Sei

   $$k(1) < k(2) < k(3) < \cdots$$

   eine Folge natürlicher Zahlen. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) genau dann konvergiert, wenn $(a_{k(j)})$ konvergiert für $j \to \infty$.

   Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Grenzwerte gleich sind.

Aufgabe 1.13 Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Man sagt, dass die Folge (a_n) gegen unendlich divergiert, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

1. Geben Sie eine genaue Definition dieses Begriffes.
2. Geben Sie ebenfalls eine Definition des Begriffes: „Divergenz gegen minus unendlich“.

Aufgabe 1.14 Betrachten Sie die nebenstehende SAGEMATH-Funktion: Zeigen Sie, dass die Ausgabe $b = b(n)$ eine konvergente Folge ist. Gegen welche Zahl konvergiert diese Folge, wenn $0 < a < 1$. Was passiert in den anderen Fällen?

```
def squareroot(a,n):
    b = str(0)+'.'; bb = 0
    for i in range(1,n):
    c = bb + 2^(-i)
    if c^2 <= a:  bb = c;  b += str(1)
    else:   b+=str(0)
    return(b)
```

1.4 Addition und Multiplikation

Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so sind $\lfloor a \rfloor_n$ und $\lfloor b \rfloor_n$ in $\mathbb{Z}[1/2]$. Aus den bekannten Rechenregeln für solche Zahlen folgt, dass $\big(\lfloor a \rfloor_n + \lfloor b \rfloor_n\big)$ eine wachsende Folge, von oben beschränkt durch $\lceil a \rceil_0 + \lceil b \rceil_0$, ist. Sind $a, b \geq 0$, so ist auch $\big(\lfloor a \rfloor_n \cdot \lfloor b \rfloor_n\big)$ wachsend und beschränkt. Folgende Definition macht deshalb nach dem 5. Teil von Satz 1.3 Sinn.

1 Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir $a + b := \lim\limits_{n\to\infty} (\lfloor a \rfloor_n + \lfloor b \rfloor_n)$.

2 Für $a, b \geq 0$: $a \cdot b := \lim\limits_{n\to\infty} \lfloor a \rfloor_n \cdot \lfloor b \rfloor_n$.

Weiterhin definieren wir $(-a) \cdot b := -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$ usw.

Satz 1.4

1 Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, so gilt

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ (Stetigkeit der Addition)

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$. (Stetigkeit der Multiplikation)

2 Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz)

(b) $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz)

(c) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativgesetz)

(d) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativgesetz)

(e) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; (Distributivgesetz)

(f) $a + 0 = a$, $1 \cdot a = a$, $0 \cdot a = 0$, $(-1) \cdot a = -a$

(g) $a + (-a) = 0$

(h) Aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq a + c$.

(i) Aus $a, b, c \geq 0$ und $a \leq b$ folgt $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Sind $a, b \in \mathbb{Z}[1/2]$, so gilt $a = \lfloor a \rfloor_n$ und $b = \lfloor b \rfloor_n$ für fast alle n. Unsere Definition von $a + b$ und $a \cdot b$ stimmen deshalb mit der schon bekannten Definition aus $\mathbb{Z}[1/2]$ überein. Auch die Rechenregeln des Satzes sind für Zahlen aus $\mathbb{Z}[1/2]$ gültig. Der Beweis des Satzes wird auf den Seiten 30 und 31 durchgeführt.

Satz 1.5 Eine Folge (a_n) konvergiert gegen a genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für fast alle n: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dann gilt $-\varepsilon < a_n - a < a + \varepsilon$ und $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für die Umkehrung sei $c < a < d$ und $\varepsilon = \min\{a - c, d - a\}$. Dann ist $c \leq a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \leq d$ für fast alle n. ∎

Aufgaben

EXTRAS ONLINE
Lösungen

Aufgabe 1.15

1. Sei $k \geq 0$. Beschreiben Sie $2^k \cdot a$ und $2^{-k} \cdot a$.
2. Zeigen Sie die Aussage 2a und 2b vom Satz 1.4.
3. Zeigen Sie die Aussage 2f und 2g vom Satz 1.4.

Aufgabe 1.16 Zeigen Sie die Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Aufgabe 1.17

1. Zeigen Sie: Ist $a + b = a + c$, dann ist $b = c$. Benutzen Sie dazu die Assoziativität.
2. Zeigen Sie: Aus $b < c$ folgt $a + b < a + c$.
3. Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Warum konvergiert $(2^{-n} \cdot a_n)$ gegen 0?
4. In Aufgabe 1.5 haben wir für natürliche Zahlen a, b die Zahl $a/b \in \mathbb{R}$ definiert. Zeigen Sie, dass $b \cdot (a/b) = a$.

Aufgabe 1.18 Sei $x = 0{,}10101\ldots$ und $y = 0{,}11101\ldots$ Wie viele Bits nach dem Komma von $x + y$ und $x \cdot y$ können Sie mit Sicherheit bestimmen?

Aufgabe 1.19 Sei $0 \leq q < 1$ eine reelle Zahl.

1. Zeigen Sie, dass (q^n) eine konvergente Folge ist.
2. Warum konvergiert (q^n) gegen 0? Tipp: Benutzen Sie die Stetigkeit der Multiplikation.
3. Sei $q \in (-1, 1)$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Aufgabe 1.20

1. Zeigen Sie die Ungleichung von Bernoulli: $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n \cdot \alpha$ für alle $\alpha > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Betrachte die Folge (x_n) mit $x_n = (1 + 1/n)^n$. Zeigen Sie, dass

   $$x_1 \leq x_2 \leq \cdots$$

   Hinweis: Betrachten Sie $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$.
3. Betrachte die Folge (y_n) mit $y_n = (1 + 1/n)^{n+1}$. Zeigen Sie, dass

   $$y_1 \geq y_2 \geq \cdots$$

4. Zeigen Sie, dass (x_n) und (y_n) konvergieren und den gleichen Grenzwert haben.

   (Diese Zahl ist die eulersche Zahl e, siehe Abschnitt 4.5).

Beweis des Satzes 1.4

2a, 2b, 2f und **2g** sind trivial oder einfach zu zeigen.

2h und 2i. Sei $a \leq b$. Dann ist $\lfloor a \rfloor_n \leq \lfloor b \rfloor_n$ und $\lfloor a \rfloor_n + \lfloor c \rfloor_n \leq \lfloor b \rfloor_n + \lfloor c \rfloor_n$, da die Rechenregeln in $\mathbb{Z}[1/2] \subset \mathbb{Q}$ gelten. Nehmen wir $n \to \infty$, so folgt aus Satz 1.3 Teil 1:

$$a + c = \lim_{n\to\infty} (\lfloor a \rfloor_n + \lfloor c \rfloor_n) \leq \lim_{n\to\infty} (\lfloor b \rfloor_n + \lfloor c \rfloor_n) = b + c\,.$$

Ist überdies $0 \leq a, c$, so ist $0 \leq \lfloor a \rfloor_n,\ \lfloor c \rfloor_n$ für jedes n und $\lfloor a \rfloor_n \cdot \lfloor c \rfloor_n \leq \lfloor b \rfloor_n \cdot \lfloor c \rfloor_n$ (wiederum eine Aussage in $\mathbb{Z}[1/2] \subset \mathbb{Q}$.) Nehme jetzt $\lim\limits_{n\to\infty}$. Es folgt $a \cdot c \leq b \cdot c$. ∎

1a. Die Stetigkeit der Addition.

Spezialfall. Wir betrachten zunächst $a_n \in 2^{-n}\mathbb{Z}$ und $b_n = 2^{-n}$. In diesem Fall ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Wir müssen also zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 2^{-n}) = a$. Es war eine Aufgabe (Aufgabe 1.17)) zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$.

Sei $c < a < d$. Dann gilt offenbar $c < a_n$ und somit $c < a_n + 2^{-n}$ für fast alle n. Zu zeigen ist deshalb noch $a_n + 2^{-n} < d$ für fast alle n. Wähle dazu ein k mit $\lceil a \rceil_k < \lfloor d \rfloor_k$ (Satz 1.2 Teil 3). Dann gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 2^{-n} &< (\lfloor d \rfloor_k - \lceil a \rceil_k)/4 \\ a_n &< (\lfloor d \rfloor_k + \lceil a \rceil_k)/2 \end{aligned}$$

Es folgt

$$a_n + 2^{-n} \leq \frac{3}{4}\lfloor d \rfloor_k + \frac{1}{4}\lceil a \rceil_k < \lfloor d \rfloor_k \leq d$$

für fast alle n. Analog zeigt man, dass $c < a_n + b_n$ für fast alle n.

Allgemeinfall. Wir wenden den Spezialfall zweimal an und benutzen die Assoziativität und Kommutativität in $\mathbb{Z}[1/2] \subset \mathbb{Q}$. Es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \left(\lfloor a \rfloor_k + 2^{-k} + \lfloor b \rfloor_k + 2^{-k} \right) = \lim_{k\to\infty} \left((\lfloor a \rfloor_k + \lfloor b \rfloor_k) + 2^{-k} + 2^{-k} \right) = a + b\,.$$

Sei $c < a + b < d$. Wähle ein k mit

$$\lfloor a \rfloor_k + 2^{-k} + \lfloor b \rfloor_k + 2^{-k} < d\,.$$

Weil $a < \lfloor a \rfloor_k + 2^{-k}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, gilt $a_n < \lfloor a \rfloor_k + 2^{-k}$ für fast alle n. Analog $b_n < \lfloor b \rfloor_k + 2^{-k}$ für fast alle n. Also

$$a_n + b_n \leq \lfloor a \rfloor_k + 2^{-k} + \lfloor b \rfloor_k + 2^{-k} < d$$

für fast alle n. Analog zeigt man, dass $c < a_n + b_n$ für fast alle n. ∎

1b. Die Stetigkeit der Multiplikation.

Spezialfall. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Weil (b_n) konvergiert, ist (b_n) sicherlich beschränkt, deshalb gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| < 2^N$ für alle n. Sei $d > 0$ und wähle ein k mit $2^{-k} < d$. Weil $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt $|a_n| < 2^{-k-N}$ für fast alle n. Es folgt $|a_n \cdot b_n| \leq 2^{-k-N} \cdot 2^N = 2^k < d$ für fast alle n, deshalb $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Allgemeinfall. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Wegen Kommutativität und dem Spezialfall dürfen wir annehmen, dass $a > 0$ und $b > 0$. Sei $c < a \cdot b < d$. Wir benutzen nun die Rechenregeln in $\mathbb{Z}[1/2] \subset \mathbb{Q}$:

$$\left(\lfloor a \rfloor_k + 2^{-k}\right) \cdot \left(\lfloor b \rfloor_k + 2^{-k}\right) = \lfloor a \rfloor_k \cdot \lfloor b \rfloor_k + 2^{-k} \cdot \left(\lfloor a \rfloor_k + \lfloor b \rfloor_k + 2^{-k}\right) .$$

Die Stetigkeit der Addition ergibt $\lim_{k\to\infty} \left(\lfloor a \rfloor_k + \lfloor b \rfloor_k + 2^{-k}\right) = a + b$ und aus dem Spezialfall folgern wir, dass

$$\lim_{k\to\infty} 2^{-k} \cdot (\lfloor a \rfloor_k + \lfloor b \rfloor_k + 2^{-k}) = 0 .$$

Mit der Stetigkeit der Addition folgt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \left(\lfloor a \rfloor_k + 2^{-k}\right) \cdot \left(\lfloor b \rfloor_k + 2^{-k}\right) = a \cdot b .$$

Deshalb gibt es unendlich viele k mit

$$\left(\lfloor a \rfloor_k + 2^{-k}\right) \cdot \left(\lfloor b \rfloor_k + 2^{-k}\right) < d .$$

Wir wählen ein solches k. Weil $a < \lfloor a \rfloor_k + 2^{-k}$ ist $a_n < \lfloor a \rfloor_k + 2^{-k}$ für fast alle n. Ebenso $b_n < \lfloor b \rfloor_k + 2^{-k}$ für fast alle n. Deshalb ist

$$a_n \cdot b_n \leq \left(\lfloor a \rfloor_k + 2^{-k}\right) \cdot \left(\lfloor b \rfloor_k + 2^{-k}\right) < d$$

für fast alle n. Analog zeigt man die Ungleichung $c < a_n \cdot b_n$ für fast alle n. ■

2b. Die Assoziativität gilt in $\mathbb{Z}[1/2] \subset \mathbb{Q}$. Also

$$\begin{aligned}(a+b)+c &= \lim_{n\to\infty} (\lfloor a \rfloor_n + \lfloor b \rfloor_n) + \lim_{n\to\infty} \lfloor c \rfloor_n = \lim_{n\to\infty} [(\lfloor a \rfloor_n + \lfloor b \rfloor_n) + \lfloor c \rfloor_n] \\ &= \lim_{n\to\infty} [\lfloor a \rfloor_n + (\lfloor b \rfloor_n + \lfloor c \rfloor_n)] = a + (b + c)\end{aligned}$$

Die assoziative Eigenschaft der Multiplikation (**2d.**), sowie die Distributivität (**2e.**) zeigt man analog, wobei man ebenfalls die Stetigkeit der Multiplikation benutzt. ■

1.5 Kehrwert und Quadratwurzel

Satz 1.6

1 Ist $a \neq 0$, so gibt es eine eindeutige Zahl b, den Kehrwert von a, mit $a \cdot b = 1$, Notation $b = 1/a$ oder $b = a^{-1}$. Ist $0 < a < b$, so ist $0 < 1/b < 1/a$.

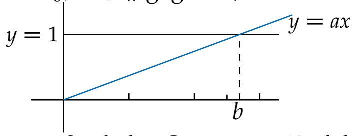
2 Ist $a_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = 1/a$. (Stetigkeit des Kehrwerts)

3 Ist $a \geq 0$, so gibt es eine eindeutige Zahl $0 \leq b = \sqrt{a}$, die Quadratwurzel von a, mit $b^2 = a$. Ist $0 \leq a < c$, so ist $\sqrt{a} < \sqrt{c}$.

4 Ist $a_n \geq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. (Stetigkeit der Quadratwurzel)

Weil $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, dürfen wir $a > 0$ annehmen. Ist $a > 2^{-k}$, so ist $2^k \cdot a > 1$. Es gibt deshalb eine größte Zahl $b_0 \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot b_0 \leq 1$. Sind $b_0, \ldots, b_n$ gegeben, so definiere

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{falls } a \cdot (b_n + 2^{-n-1}) > 1 \\ b_n + 2^{-n-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$



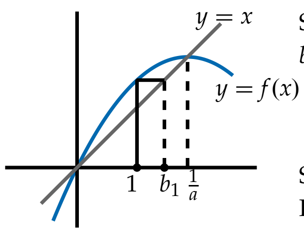
Dann ist $b_n < b_0 + 1$, (b_n) wachsend und (b_n) konvergiert. Sei b der Grenzwert. Es folgt $a \cdot b = 1$, denn $1 \leq \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot (b_n + 2^{-n}) = a \cdot b = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot b_n \leq 1$.

Ist $a \cdot b = a \cdot c = 1$, so folgt $b = b \cdot (a \cdot c) = (b \cdot a) \cdot c = 1 \cdot c = c$. Also ist der Kehrwert eindeutig. Insbesondere folgt für $a < b$, dass $1/a > 1/b$. Für die Stetigkeit des Kehrwerts sei $c < 1/a < d$. Dann ist $1/d < a < 1/c$ und somit $1/d < a_n < 1/c$ für fast alle n. Es folgt $c < 1/a_n < d$ für fast alle n, und die Stetigkeit ist gezeigt.

Die Aussage für die Quadratwurzel zeigt man analog (Aufgabe 1.21). ∎

Man kann den Kehrwert also Bit für Bit berechnen. Folgendes Vorgehen ist allerdings viel besser. Bemerke, dass es reicht, Kehrwerte für $a \in (0, 1)$ zu berechnen.

Satz 1.7 Sei $a \in (0, 1)$. Die Folge (b_n), gegeben durch $b_0 = 1$ und $b_{n+1} = 2b_n - ab_n^2$, konvergiert gegen $1/a$.



Sei $f(x) = 2x - ax^2 = 1/a - a \cdot (x - 1/a)^2 < 1/a$. Also ist $b_{n+1} < 1/a$. Weiter ist mit Induktion $b_n > 0$ und

$$b_{n+1} - b_n = b_n - b_n^2 a = b_n(1 - b_n a) > 0\,, \text{ weil } b_n < 1/a\,.$$

Somit ist b_n wachsend und $b_n < 1/a$. Also konvergiert (b_n). Ist b der Grenzwert, so folgt

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} b_n - a \cdot \lim b_n^2 = 2b - ab^2\,.$$

Daher ist $b = 0$ oder $b = 1/a$, aber $b = 0$ ist nicht möglich, weil $b > b_0 = 1$. ∎

Aufgaben

EXTRAS ONLINE

Lösungen

Aufgabe 1.21

1. Zeigen Sie: Ist $a \cdot b = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$.
2. Zeigen Sie: Ist $a \cdot b = a \cdot c$ mit $a \neq 0$, so ist $b = c$.
3. Führen Sie den Beweis von Satz 1.6 für die Quadratwurzel durch.

Aufgabe 1.22 **(Geometrische Reihe)** Das Ergebnis dieser Aufgabe ist wichtig. Sei $x \in (-1, 1)$. Betrachte die Folge (a_n) mit a_n gegeben durch $a_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Zeigen Sie, dass (a_n) konvergent ist mit Grenzwert $\frac{1}{1-x}$.

Aufgabe 1.23 Zeigen Sie, dass die nachfolgenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

1. $\left(\frac{1}{n}\right)$ 2. $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 3. $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ 4. $\left(\frac{1}{n^3-1}\right)$

5. $\left(\frac{3n+8}{5n-2}\right)$ 6. $\left(\frac{2n^2+2n+5}{6n^2+7n-1}\right)$ 7. $\left(\frac{n^2+7}{n^3}\right)$

Aufgabe 1.24 Berechnen Sie, wenn möglich, nachfolgende Grenzwerte.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n^4+7}}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}\right) \cdot \sqrt{n}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2-1} - 2n\right)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{4n^2-1} - 3n\right)$

Aufgabe 1.25

1. Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \neq 0$ und $a_n \neq 0$ für alle n. Warum gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?
2. Finden Sie eine Nullfolge (a_n), sodass (a_n/a_{n+1}) nicht konvergent ist.
3. Sei $q \in (-1, 1)$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$.
4. Sei $q > 0$ eine feste reelle Zahl. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} q^n/n! = 0$.
   $(n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1)$

Aufgabe 1.26 In dieser Aufgabe geben wir das **Heron**-Verfahren an, womit Sie sehr schnell gute Annäherungen von $\sqrt{a}$ finden können. Wir nehmen hier $a > 1$ und definieren eine Folge (x_n): Sei $x_1 = a$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + a/x_n)$.

1. Fertigen Sie, in einem Bild, die Graphen der beiden Funktionen $y = x$ und $y = \frac{1}{2}(x + a/x)$ für $a = 2$ an.
2. Rechnen Sie nach: $(x_n - x_{n-1})^2 = x_n^2 - a$. Folgern Sie, dass $x_n^2 > a$.
3. Prüfen Sie, dass $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > 1$. Folgern Sie, dass (x_n) konvergiert, und zeigen Sie, dass der Grenzwert gleich $\sqrt{a}$ ist.
4. Zeigen Sie: $x_n - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)^2$. Welche Konsequenz hat diese Aussage für die Schnelligkeit der Berechnung von $\sqrt{a}$?

1.6 Dezimal- und Binärschreibweise

Sind h_i für $i \leq d$ gegeben mit $h_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so betrachten wir (d_n) mit

$$d_n = h_d 10^d + h_{d-1} 10^{d-1} + \ldots + h_{-n} 10^{-n} .$$

Diese Folge ist wachsend und beschränkt, denn (siehe Aufgabe 1.27)

$$h_{-1} 10^{-1} + \ldots + h_{-n} 10^{-n} \leq 9 \cdot 10^{-1} + \ldots + 9 \cdot 10^{-n} = 1 - 10^{-n-1} .$$

Die Zahl $1 - 10^{-n-1}$ konvergiert gegen 1, also gilt $d_n < \lfloor d_0 \rfloor + 1$. Wir sehen wiederum, dass wir Dezimalentwicklungen, welche nur auf 9-en enden, nicht brauchen.

Eine **Dezimalentwicklung** d ist eine Abbildung $d \colon \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $n \mapsto d_n$, mit den Eigenschaften:

1. Es gibt ein n mit $0 = d_{n+1} = d_{n+2} = d_{n+3} = \cdots$.
2. Es gibt kein k mit $9 = d_{-k} = d_{-k-1} = d_{-k-2} = \cdots$.

Satz 1.8 Jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ hat eine eindeutige Dezimalentwicklung.

Ist $x \in \mathbb{N}_0$, so wissen wir das schon. Wir betrachten deshalb x mit $0 < x < 1$. Es gilt $0 \leq 10^n x - \lfloor 10^n x \rfloor < 1$, also $0 \leq 10^{n+1} x - 10 \cdot \lfloor 10^n x \rfloor < 10$. Wir setzen deshalb für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$h_{-n-1} := \lfloor 10^{n+1} x \rfloor - 10 \cdot \lfloor 10^n x \rfloor .$$

Weil $x - (h_{-1} 10^{-1} + \cdots + h_{-n} 10^{-n}) < 10^{-n}$, konvergiert die Dezimalentwicklung gegen x. Die Dezimalentwicklung kann nicht auf 9-en enden, da es sonst ein n gibt mit $x = h_{-1} 10^{-1} + \cdots + h_{-n} 10^{-n} + 10^{-n}$, im Widerspruch zur Wahl von h_{-n}. Die Dezimalentwicklung ist eindeutig, denn ist $h_{-1} 10^{-1} + \cdots$ eine Dezimalentwicklung von x, so ist $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor - 10 \cdot \lfloor 10^n x \rfloor = h_{-n-1}$ die einzige mögliche Wahl. ■

Umgekehrt kann man Dezimalentwicklungen in Binärentwicklungen umschreiben. Das Prozedere ist sehr ähnlich: es gilt $x_{-n-1} = \lfloor 2^{n+1} x \rfloor - 2 \cdot \lfloor 2^n x \rfloor \in \{0, 1\}$.
Nehmen wir an, $0 < x < 1$. Wir setzen $y_0 = x$ und induktiv x_{-n} und y_n durch

$$x_{-n} = \lfloor 2 y_{n-1} \rfloor, \quad y_n = 2 y_{n-1} - x_{-n} .$$

Man beweist mit Induktion, dass $2^n x = x_{-1} 2^{n-1} + \ldots + x_{-n} 2^0 + y_n$ mit $0 \leq y_n < 1$, also $\lfloor x \rfloor_n = x_{-1} 2^{-1} + \cdots + x_{-n} 2^{-n}$.

Beispiel: Wir nehmen $x = 0{,}79$ und berechnen $x = 0{,}110\,010\,1 \cdots$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$2y_{n-1}$		1,58	1,16	0,32	0,64	1,28	0,56	1,12
x_{-n}	0	1	1	0	0	1	0	1
y_n	0,79	0,58	0,16	0,32	0,64	0,28	0,56	0,12

Aufgaben

EXTRAS ONLINE
Lösungen

Aufgabe 1.27 Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a-1}{a} + \frac{a-1}{a^2} + \ldots + \frac{a-1}{a^n} = 1 - \frac{1}{a^n} .$$

Aufgabe 1.28 Schreiben Sie die folgenden Dezimalentwicklungen in Binärentwicklungen mit der Methode der letzten Seite (10 Nachkommastellen).

1. 0,743
2. 2,718
3. 3,142

Aufgabe 1.29 Bestimmen Sie die ersten zwei Nachkommastellen der Dezimalentwicklung der nachfolgenden Zahlen.
1. 0,100 100 110
2. 11,011011

Aufgabe 1.30 Da $1024 = 2^{10} \approx 10^3$, kann man relativ schnell mit der Hand etwa drei Dezimalstellen in ca. 10 Bits und umgekehrt umschreiben.

1. a. Sei $a = 0{,}324$. Berechnen Sie mit der Hand $1024 \cdot a = 1000 \cdot a + 20 \cdot a + 4 \cdot a$.
   b. Berechnen Sie jetzt 10 Nachkommabits von a.
2. a. Sei $a = 0{,}110\,011\,010\,1$. Berechnen Sie $1000 \cdot a = 2^{10} \cdot a - 2^4 \cdot a - 2^3 \cdot a$.
   b. Berechnen Sie drei Nachkommadezimalstellen von a.

Aufgabe 1.31 Es sei $b \geq 2$ eine natürliche Zahl und $x \in \mathbb{R}$.

1. Betrachte die Folge

$$a_n := b^{-n} \lfloor b^n x \rfloor .$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{n \to \infty} a_n = x$.

2. Sei $x \in (0, 1)$. Definiere $h_n = 0$, für $n \geq 0$, $y_0 = x$ und induktiv

$$h_{-n} := \lfloor b \cdot y_{n-1} \rfloor, \quad y_n := b \cdot y_{n-1} - h_{-n} .$$

Zeigen Sie, dass $a_n = h_{-1} b^{-1} + \cdots + h_{-n} b^{-n}$.

Aufgabe 1.32 Es sei $x \geq 0$ in Dezimalschreibweise gegeben. Schreiben Sie ein SAGEMATH-Programm, welches $\lfloor x \rfloor_n$ in Binärschreibweise berechnet.

Bemerkung: Akzeptieren Sie Abrundungsfehler.

1.7 Supremum und Infimum

Sei A eine Menge von reellen Zahlen und a eine reelle Zahl.

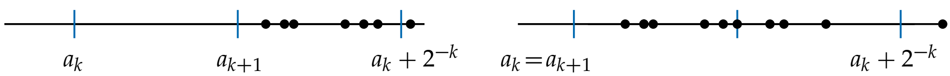
1. a nennt man **obere Schranke** von A, wenn $x \leq a$ für jedes $x \in A$.
2. A nennt man von **oben beschränkt**, wenn eine obere Schranke von A existiert.
3. $\sup(A)$ nennt man **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von A, wenn $\sup(A)$ eine obere Schranke von A ist und aus $x \leq y$ für jedes $x \in A$ folgt, dass $\sup(A) \leq y$.
4. $\max(A) \in A$ nennt man **Maximum** von A, wenn $x \leq \max(A)$ für jedes $x \in A$.
5. Analog definieren wir **untere Schranke**, von **unten beschränkt**, **Minimum** (min) und **Infimum** (inf), auch **größte untere Schranke** genannt.

Satz 1.9 Eine von oben beschränkte nichtleere Menge reeller Zahlen A hat ein eindeutig bestimmtes Supremum $\sup(A)$. Eine von unten beschränkte nichtleere Menge von reellen Zahlen A hat ein eindeutig bestimmtes Infimum $\inf(A)$.

Eindeutigkeit. Sind a und b beides Suprema von A, so folgt $a \leq b$ und $b \leq a$ nach Definition. Also ist $a = b$. Analog für das Infimum.

Existenz. Wir zeigen die Existenz des Infimums. Es sei $n = a_0 \in \mathbb{Z}$ die größte ganze Zahl mit $n \leq x$ für alle $x \in A$. Sind $a_0, \ldots, a_k$ schon bekannt, so definieren wir:

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k + 2^{-k-1} & \text{falls diese Zahl eine untere Schranke von } A \text{ ist} \\ a_k & \text{sonst} \end{cases}$$



Dann ist $a_k < a_0 + 1$ für jedes k und (a_k) eine wachsende Folge. Sie konvergiert deshalb gegen eine reelle Zahl a. Diese Zahl a ist eine untere Schranke von A: Ist $x \in A$, so ist konstruktionsgemäß $a_k \leq x$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und deshalb $a \leq x$. Dies gilt für alle $x \in A$.

Die Zahl a ist auch die größte untere Schranke: Konstruktionsgemäß ist $a_k = \lfloor a \rfloor_k$ die größte Zahl in $2^{-k}\mathbb{Z}$ mit $\lfloor a \rfloor_k \leq x$ für alle $x \in A$. Wäre $a < b \leq x$ für alle $x \in A$, so gäbe es ein k mit $\lfloor a \rfloor_k < \lfloor b \rfloor_k \leq x$ für alle $x \in A$, Widerspruch!

Ist A eine nach oben beschränkte Menge, so ist

$$-A = \{-a : a \in A\}$$

von unten beschränkt und $\sup(A) = -\inf(-A)$. ∎

Aufgaben

EXTRAS ONLINE
Lösungen

Aufgabe 1.33

1. Zeigen Sie: Das Supremum von A braucht nicht in A zu liegen.
2. Zeigen Sie: Für eine beschränkte Menge A reeller Zahlen existiert das Maximum $\max(A)$ genau dann, wenn $\sup(A)$ ein Element von A ist. Analog gilt dies für das Minimum.

Aufgabe 1.34 Welche der folgenden Mengen sind beschränkt? Geben Sie jeweils Supremum und Infimum dieser Mengen an. In welchen Fällen existiert das Maximum bzw. das Minimum?

1. $[0, 1]$
2. $\{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$
3. $\{a - b : a, b \in \mathbb{Q} \cap (1, 2)\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} : -2 \le x < 1\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$
6. $\{1 + 1/n : n \in \mathbb{N}\}$
7. $\{(-1)^n 1/n : n \in \mathbb{N}\}$
8. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$
9. $\{1/m + 1/n : m, n \in \mathbb{N}\}$
10. $\{1/(2n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$
11. $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
12. $\left\{x \in \mathbb{Q} : \frac{2x - 1}{x - 5} \ge 5\right\}$

Aufgabe 1.35 Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen beschränkt sind.

1. $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 2 \text{ und } x^2 < 2\}$
2. $\{a_k/k^2 : k \in \mathbb{N}\}$, wobei $a_k = \#\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \text{ und } x^2 + y^2 < k^2\}$.

Kennen Sie das jeweilige Infimum und Supremum der Menge?

Aufgabe 1.36 Seien A und B nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie die nachfolgenden Aussagen.

1. $A \cup B$ ist beschränkt und falls $A \cap B \neq \emptyset$ ist, ist auch $A \cap B$ beschränkt.
2. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$
3. $\sup A \le \sup B$, falls $A \subset B$.
4. $\sup(A \cap B) \le \min\{\sup(A), \sup(B)\}$, falls $A \cap B \neq \emptyset$. Geben Sie ein Beispiel an, für das $\sup(A \cap B) < \min\{\sup(A), \sup(B)\}$ gilt.
5. Ist $x \le y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$, so ist $\sup(A) \le \inf(B)$. Gilt auch $\inf(A) \le \sup(B)$ und/oder $\inf(A) \le \inf(B)$?