

Elektrodynamik

Eine Einführung

4., aktualisierte Auflage

David J. Griffiths

 Pearson

 EXTRAS
ONLINE

Elektrodynamik

Elektrodynamik

Eine Einführung

4., aktualisierte Auflage

David J. Griffiths

Überarbeitung und Fachlektorat der vierten Auflage
Professor Dr. Ulrich Schollwöck, LMU München

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Die Informationen in diesem Buch werden ohne Rücksicht auf einen eventuellen Patentschutz veröffentlicht. Warennamen werden ohne Gewährleistung der freien Verwendbarkeit benutzt.

Bei der Zusammenstellung von Texten und Abbildungen wurde mit größter Sorgfalt vorgegangen. Trotzdem können Fehler nicht ausgeschlossen werden. Verlag, Herausgeber und Autoren können für fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen. Für Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler sind Verlag und Autoren dankbar.

This translation of INTRODUCTION TO ELECTRODYNAMICS, 4th Edition by DAVID GRIFFITHS is published by arrangement with Cambridge University Press.

GERMAN language edition published by

PEARSON DEUTSCHLAND GMBH, Copyright © 2018

Alle Rechte vorbehalten, auch die der fotomechanischen Wiedergabe und der Speicherung in elektronischen Medien. Die gewerbliche Nutzung der in diesem Produkt gezeigten Modelle und Arbeiten ist nicht zulässig.

Fast alle Produktbezeichnungen und weitere Stichworte und sonstige Angaben, die in diesem Buch verwendet werden, sind als eingetragene Marken geschützt. Da es nicht möglich ist, in allen Fällen zeitnah zu ermitteln, ob ein Markenschutz besteht, wird das ®-Symbol in diesem Buch nicht verwendet.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

21 20 19 18

ISBN 978-3-86894-348-1 (Buch)
ISBN 978-3-86326-843-5 (E-Book)

© 2018 by Pearson Deutschland GmbH
Lilienthalstraße 2, 85399 Hallbergmoos/Germany
Alle Rechte vorbehalten
www.pearson.de

Programmleitung: Birger Peil, bpeil@pearson.de
Fachlektor: Professor Dr. Ulrich Schollwöck, Universität München (LMU)
Herstellung: Philipp Burkart, pburkart@pearson.de
Übersetzer : Dr. Gunnar Radons, Mannheim
Sprachkorrektur: Katharina Pieper, Berlin
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck und Verarbeitung: Drukkerij Wilco BV, Amersfort

Printed in the Netherlands

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	15
Vorbemerkungen	17
Vorwort zur deutschen Ausgabe	23
Kapitel 1 Vektoranalysis	27
1.1 Vektoralgebra	28
1.1.1 Vektoroperationen	28
1.1.2 Vektoralgebra in der Komponentenform	31
1.1.3 Dreierprodukte	35
1.1.4 Orts-, Verschiebungs- und Verbindungsvektoren	36
1.1.5 Wie sich Vektoren transformieren	38
1.2 Differentialrechnung	41
1.2.1 „Gewöhnliche“ Ableitungen	41
1.2.2 Gradient	41
1.2.3 Der Operator ∇	45
1.2.4 Die Divergenz	46
1.2.5 Die Rotation	48
1.2.6 Produktregeln	49
1.2.7 Zweite Ableitungen	51
1.3 Integralrechnung	54
1.3.1 Linien-, Flächen- und Volumenintegrale	54
1.3.2 Der Fundamentalsatz der Differentialrechnung	60
1.3.3 Der Fundamentalsatz für den Gradienten	61
1.3.4 Der Fundamentalsatz für die Divergenz	63
1.3.5 Der Fundamentalsatz für die Rotation	66
1.3.6 Partielle Integration	69

1.4	Krummlinige Koordinaten	71
1.4.1	Sphärische Polarkoordinaten	71
1.4.2	Zylinderkoordinaten	76
1.5	Die Dirac'sche Deltafunktion	78
1.5.1	Die Divergenz von $\hat{\mathbf{r}}/r^2$	78
1.5.2	Die eindimensionale Dirac'sche Deltafunktion	79
1.5.3	Die dreidimensionale Deltafunktion	84
1.6	Die Theorie der Vektorfelder	87
1.6.1	Das Helmholtz-Theorem	87
1.6.2	Potentiale	87
Kapitel 2 Elektrostatik		95
2.1	Das elektrische Feld	96
2.1.1	Einleitung	96
2.1.2	Das Coulomb'sche Gesetz	97
2.1.3	Das elektrische Feld	98
2.1.4	Kontinuierliche Ladungsverteilungen	100
2.2	Divergenz und Rotation elektrostatischer Felder	104
2.2.1	Feldlinien, Fluss und Gauß'sches Gesetz	104
2.2.2	Die Divergenz von \mathbf{E}	109
2.2.3	Anwendungen des Gauß'schen Gesetzes	109
2.2.4	Die Rotation von \mathbf{E}	116
2.3	Das elektrische Potential	117
2.3.1	Einführung in Potentiale	117
2.3.2	Anmerkungen zu Potentialen	119
2.3.3	Poisson-Gleichung und Laplace-Gleichung	124
2.3.4	Das Potential einer örtlich begrenzten Ladungsverteilung	124
2.3.5	Randbedingungen der Elektrostatik	129
2.4	Arbeit und Energie in der Elektrostatik	132
2.4.1	Die zur Bewegung einer Ladung notwendige Arbeit	132
2.4.2	Die Energie einer Gruppe von Punktladungen	133

2.4.3	Die Energie einer kontinuierlichen Ladungsverteilung	135
2.4.4	Anmerkungen zur elektrostatischen Energie	137
2.5	Leiter	139
2.5.1	Grundlegende Eigenschaften	139
2.5.2	Induzierte Ladungen	141
2.5.3	Flächenladungen und die Kraft auf einen Leiter	145
2.5.4	Kondensatoren	147
Kapitel 3	Potentiale	157
3.1	Laplace-Gleichung	158
3.1.1	Einleitung	158
3.1.2	Die Laplace-Gleichung in einer Dimension	159
3.1.3	Die Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen	160
3.1.4	Die Laplace-Gleichung in drei Dimensionen	162
3.1.5	Randbedingungen und Eindeutigkeitssätze	164
3.1.6	Leiter und der zweite Eindeutigkeitssatz	167
3.2	Die Methode der Spiegelladungen	170
3.2.1	Das klassische Problem der Spiegelladung	170
3.2.2	Induzierte Flächenladung	171
3.2.3	Kraft und Energie	172
3.2.4	Andere Spiegelladungsprobleme	173
3.3	Separation der Variablen	176
3.3.1	Kartesische Koordinaten	177
3.3.2	Sphärische Koordinaten	188
3.4	Multipolentwicklung	199
3.4.1	Näherungsweise Potentiale in großen Entfernungen	199
3.4.2	Monopol- und Dipol-Terme	202
3.4.3	Koordinatenursprung in Multipolentwicklungen	205
3.4.4	Das elektrische Feld eines Dipols	207

Kapitel 4	Elektrische Felder in Materie	219
4.1	Polarisation	220
4.1.1	Dielektrika	220
4.1.2	Induzierte Dipole	220
4.1.3	Ausrichtung polarer Moleküle	223
4.1.4	Polarisation	226
4.2	Das Feld eines polarisierten Objekts	227
4.2.1	Gebundene Ladungen	227
4.2.2	Physikalische Interpretation der Polarisationsladungen	231
4.2.3	Das Feld im Inneren eines Dielektrikums	234
4.3	Die dielektrische Verschiebung	236
4.3.1	Das Gauß'sche Gesetz in der Anwesenheit von Dielektrika	236
4.3.2	Eine irreführende Parallele	240
4.3.3	Randbedingungen	241
4.4	Lineare Dielektrika	241
4.4.1	Suszeptibilität, Dielektrizitätskonstante, Dielektrizitätszahl	241
4.4.2	Randwertprobleme bei linearen Dielektrika	248
4.4.3	Energie in dielektrischen Systemen	254
4.4.4	Kräfte auf Dielektrika	260
Kapitel 5	Magnetostatik	269
5.1	Die Lorentz-Kraft	270
5.1.1	Magnetfelder	270
5.1.2	Magnetische Kräfte	272
5.1.3	Ströme	277
5.2	Das Biot-Savart'sche Gesetz	284
5.2.1	Stationäre Ströme	284
5.2.2	Das Magnetfeld eines stationären Stroms	285
5.3	Divergenz und Rotation von B	291
5.3.1	Geradlinige Ströme	291
5.3.2	Divergenz und Rotation von B	293

5.3.3	Das Ampère'sche Gesetz	295
5.3.4	Vergleich zwischen Magnetostatik und Elektrostatik	304
5.4	Magnetisches Vektorpotential	307
5.4.1	Das Vektorpotential	307
5.4.2	Magnetostatische Randbedingungen	315
5.4.3	Multipolentwicklung des Vektorpotentials	317
Kapitel 6	Magnetische Felder in Materie	333
6.1	Magnetisierung	334
6.1.1	Diamagnete, Paramagnete und Ferromagnete	334
6.1.2	Drehmomente und Kräfte auf magnetische Dipole	334
6.1.3	Effekt eines Magnetfelds auf die Umlaufbahnen in Atomen	339
6.1.4	Magnetisierung	341
6.2	Das Feld eines magnetisierten Objekts	342
6.2.1	Polarisationsströme	342
6.2.2	Physikalische Interpretation von Polarisationsströmen	346
6.2.3	Das magnetische Feld im Inneren von Materie	348
6.3	Das magnetische Hilfsfeld H	348
6.3.1	Das Ampère'sche Gesetz in magnetisierten Materialien	348
6.3.2	Eine irreführende Parallele	352
6.3.3	Randbedingungen	353
6.4	Lineare und nichtlineare Medien	354
6.4.1	Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität	354
6.4.2	Ferromagnetismus	358
Kapitel 7	Elektrodynamik	367
7.1	Elektromotorische Kraft	368
7.1.1	Ohm'sches Gesetz	368
7.1.2	Elektromotorische Kraft	375
7.1.3	Dynamische elektromotorische Kraft	378
7.2	Elektromagnetische Induktion	386

7.2.1	Das Faraday'sche Gesetz	386
7.2.2	Das induzierte elektrische Feld	392
7.2.3	Induktivität	398
7.2.4	Energie in Magnetfeldern	406
7.3	Die Maxwell'schen Gleichungen	411
7.3.1	Die Elektrodynamik vor Maxwell	411
7.3.2	Wie Maxwell das Ampère'sche Gesetz reparierte	413
7.3.3	Die Maxwell'schen Gleichungen	417
7.3.4	Magnetische Ladung	419
7.3.5	Maxwell'sche Gleichungen in Materie	420
7.3.6	Randbedingungen	423

Zwischenakt

Kapitel 8 Erhaltungssätze 439

8.1	Ladung und Energie	440
8.1.1	Die Kontinuitätsgleichung	440
8.1.2	Der Poynting'sche Satz	441
8.2	Impuls	445
8.2.1	Das dritte Newton'sche Gesetz in der Elektrodynamik	445
8.2.2	Der Maxwell'sche Spannungstensor	446
8.2.3	Impulserhaltung	451
8.2.4	Drehimpuls	455
8.3	Magnetische Kräfte verrichten keine Arbeit	459

Kapitel 9 Elektromagnetische Wellen 469

9.1	Wellen in einer Dimension	470
9.1.1	Die Wellengleichung	470
9.1.2	Sinusförmige Wellen	473
9.1.3	Randbedingungen: Reflexion und Transmission	476
9.1.4	Polarisation	480

9.2	Elektromagnetische Wellen im Vakuum	481
9.2.1	Die Wellengleichung für E und B	481
9.2.2	Monochromatische ebene Wellen	483
9.2.3	Energie und Impuls in elektromagnetischen Wellen	486
9.3	Elektromagnetische Wellen in Materie	490
9.3.1	Ausbreitung in linearen Medien	490
9.3.2	Reflexion und Transmission bei senkrechtem Einfall	491
9.3.3	Reflexion und Transmission bei schrägem Einfall	494
9.4	Absorption und Dispersion	500
9.4.1	Elektromagnetische Wellen in Leitern	500
9.4.2	Reflexion an einer leitenden Oberfläche	504
9.4.3	Die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante	506
9.5	Geführte Wellen	514
9.5.1	Wellenleiter	514
9.5.2	TE-Wellen in rechtwinkligen Wellenleitern	516
9.5.3	Koaxiale Übertragungsleitungen	520
Kapitel 10	Potentiale und Felder	525
10.1	Der Potentialformalismus	526
10.1.1	Skalare und Vektorpotentiale	526
10.1.2	Eichtransformationen	529
10.1.3	Coulomb-Eichung und Lorenz-Eichung	530
10.1.4	Die Lorentz-Kraft in Potentialform	532
10.2	Kontinuierliche Verteilungen	534
10.2.1	Retardierte Potentiale	534
10.2.2	Die Jefimenko-Gleichungen	539
10.3	Punktladungen	541
10.3.1	Liénard-Wiechert-Potentiale	541
10.3.2	Die Felder einer bewegten Punktladung	548

Kapitel 11	Strahlung	557
11.1	Dipolstrahlung	558
11.1.1	Was ist Strahlung?	558
11.1.2	Elektrische Dipolstrahlung	559
11.1.3	Magnetische Dipolstrahlung	565
11.1.4	Strahlung aus einer beliebigen Quelle	570
11.2	Punktladungen	575
11.2.1	Abgestrahlte Leistung einer Punktladung	575
11.2.2	Strahlungsreaktion	581
11.2.3	Die physikalische Grundlage der Strahlungsreaktion	586
Kapitel 12	Elektrodynamik und Relativität	597
12.1	Die spezielle Relativitätstheorie	598
12.1.1	Die Einstein'schen Postulate	598
12.1.2	Die Geometrie der Relativitätstheorie	605
12.1.3	Die Lorentz-Transformationen	617
12.1.4	Die Struktur der Raumzeit	624
12.2	Relativistische Mechanik	632
12.2.1	Eigenzeit und Eigengeschwindigkeit	632
12.2.2	Relativistische Energie und relativistischer Impuls	635
12.2.3	Relativistische Kinematik	638
12.2.4	Relativistische Dynamik	643
12.3	Relativistische Elektrodynamik	651
12.3.1	Magnetismus als relativistisches Phänomen	651
12.3.2	Wie sich Felder transformieren	654
12.3.3	Der Feldtensor	664
12.3.4	Elektrodynamik in Tensornotation	667
12.3.5	Relativistische Potentiale	671

Anhang A	Vektoranalysis in krummlinigen Koordinaten	679
A.1	Einführung	679
A.2	Schreibweisen	679
A.3	Gradient	680
A.4	Divergenz	681
A.5	Rotation	684
A.6	Laplace-Operator	686
Anhang B	Das Helmholtz-Theorem	687
Anhang C	Einheiten	691
Index		695

Vorwort

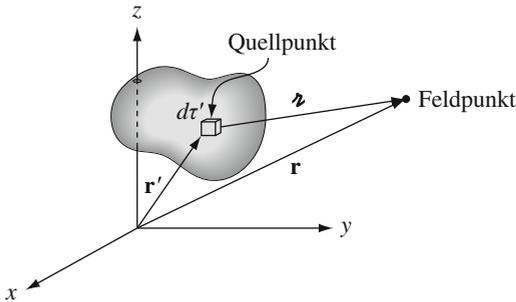
Sie halten ein Lehrbuch über Elektrizität und Magnetismus in den Händen, das für Studenten vor dem ersten bzw. zweiten Abschluss (Bachelor oder Vordiplom bzw. Master oder Diplom) konzipiert ist. Es kann problemlos im Verlauf von zwei Semestern behandelt werden, eventuell bleibt dabei sogar noch Raum für besondere Themen (z. B. Gleichstromkreis, numerische Methoden, Plasmaphysik, Übertragungsleitungen, Antennentheorie usw.) Eine einsemestrige Vorlesung kann ohne Weiteres nach Kapitel 7 aufhören. Anders als beispielsweise die Bücher zur Quantenmechanik oder Statistischen Physik (um nur zwei Gebiete zu nennen) weisen die Lehrbücher über Elektrodynamik verhältnismäßig große Ähnlichkeit auf, denn die zu behandelnden Themen und sogar ihre Reihenfolge sind kaum umstritten. Die Lehrbücher weichen daher nur im Stil und Tonfall voneinander ab. Mein Ansatz ist vermutlich weniger formal als derjenige der meisten anderen. Meiner Meinung nach werden schwierige Gedanken dadurch interessanter dargestellt und sind leichter zu begreifen.

In dieser vierten Auflage habe ich zugunsten der Klarheit und Lesbarkeit zahlreiche geringfügige Änderungen vorgenommen. An einigen Stellen habe ich gröbere Fehler korrigiert. Eine Reihe von Aufgaben und Beispielen habe ich hinzugefügt (und einige weniger wirkungsvolle entfernt). Darüber hinaus habe ich mehr Verweise auf die verfügbare Literatur eingefügt (insbesondere auf das *American Journal of Physics*). Mir ist allerdings wohl bewusst, dass viele Leser weder die Zeit noch das Interesse daran haben werden, diese Quellen zu Rate zu ziehen. Dennoch bin ich der Ansicht, dass sich das lohnt – und sei es nur, um hervorzuheben, dass die Elektrodynamik, trotz ihres hohen Alters, sehr lebendig ist und immer noch faszinierende neue Entdeckungen gemacht werden. Ich hoffe, dass die eine oder andere Aufgabe Ihre Neugier wecken wird und Sie dazu veranlasst, die Originalliteratur nachzulesen – bei einigen von ihnen handelt es sich um wahre Juwelen.

Ich habe drei ungewöhnliche Notationen beibehalten:

- Die kartesischen Einheitsvektoren werden mit \hat{x} , \hat{y} und \hat{z} bezeichnet. Generell erben alle Einheitsvektoren den Buchstaben der entsprechenden Koordinate.
- In zylindrischen Koordinaten wird der Abstand von der z -Achse mit s bezeichnet, um eine Verwechslung mit r zu vermeiden, dem Abstand vom *Ursprung* und der Radialkoordinate in Kugelkoordinaten.
- Der Schreibschriftbuchstabe \mathfrak{z} bezeichnet den Vektor von einem Quellpunkt \mathbf{r}' zu einem Feldpunkt \mathbf{r} (siehe Abbildung). Manche Autoren ziehen den expliziteren Ausdruck $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ vor. Das macht aber viele Gleichungen unhandlich und lenkt vom Wesentlichen ab, insbesondere wenn der Einheitsvektor $\hat{\mathfrak{z}}$ vorkommt. Mir ist klar, dass ahnungslose Leser geneigt sein werden, \mathfrak{z} als \mathbf{r} zu interpretieren – das vereinfacht sicherlich die Integrale. *Merken Sie sich daher: $\mathfrak{z} \equiv (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$* , was nicht dasselbe ist wie \mathbf{r} . Ich denke, dass das eine gute Notation ist, die man allerdings sorgfältig anwenden muss.¹

¹ In MS Word ist \mathfrak{z} im „Kaufmann-Font“, der allerdings sehr schwer in $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ zu installieren ist. $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Nutzer können von meiner Website ein ziemlich gutes Faksimile herunterladen.



Wie in den früheren Auflagen unterscheide ich zwischen zwei Arten von Aufgaben. Einige spielen eine besondere pädagogische Rolle und sollten sofort bearbeitet werden, nachdem Sie den entsprechenden Abschnitt gelesen haben. Ich habe diese Aufgaben innerhalb eines Kapitels an geeigneten Stellen untergebracht. (In einigen wenigen Fällen, die in der Randspalte durch ein fettes Punktsymbol gekennzeichnet (\bullet) sind, wird die Lösung der Aufgabe im folgenden Text benötigt.) Längere Aufgaben oder solche von allgemeiner Natur sind am Ende jedes Kapitels zu finden. In meinen Vorlesungen behandle ich einige dieser Aufgaben, andere stelle ich als Übungsaufgaben. Außergewöhnlich anspruchsvolle Aufgaben werden durch ein Ausrufezeichen (!) am Rand gekennzeichnet. Viele Leser haben darum gebeten, die Lösungen zu den Aufgaben am Ende des Buches anzugeben. Unglücklicherweise sind etwa genauso viele entschieden dagegen. Als Kompromiss habe ich bei besonders geeigneten Aufgaben auch die Antworten angegeben. Ein (englischsprachiges) Buch, das alle Lösungen enthält, ist (für Dozenten) beim Verlag erhältlich.

Es gibt so viele Kollegen, die hilfreiche Anmerkungen zu diesem Buch gemacht haben, dass ich sie nicht alle nennen kann. Ich möchte dennoch den folgenden Menschen für Vorschläge danken, die besonders diese vierte Auflage vorangebracht haben: Burton Brody (Bard), Catherine Crouch (Swarthmore), Joel Franklin (Reed), Ted Jacobson (Maryland), Don Koks (Adelaide), Charles Lane (Berry), Kirk McDonald² (Princeton), Jim McTavish (Liverpool), Rich Saenz (Cal Poly), Darrel Schroeter (Reed), Herschel Snodgrass (Lewis and Clark) und Larry Tankersley (Naval Academy). Praktisch alles, was ich über Elektrodynamik weiß – insbesondere über die Didaktik der Elektrodynamik – verdanke ich Edward Purcell.

David J. Griffiths

² Kirks Website, <http://www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/>, ist eine fantastische Quelle mit pfiffigen Erklärungen, raffinierten Aufgaben und nützlichen Literaturhinweisen.

Vorbemerkungen

Was ist Elektrodynamik, und wie passt sie in den allgemeinen Aufbau der Physik?

Die vier Bereiche der Mechanik

Im folgenden Diagramm habe ich die vier großen Bereiche der Mechanik skizziert:

Klassische Mechanik (Newton)	Quantenmechanik (Bohr, Heisenberg, Schrödinger et al.)
Spezielle Relativitätstheorie (Einstein)	Quantenfeldtheorie (Dirac, Pauli, Feynman, Schwinger et al.)

Die Newton'sche Mechanik ist zwar für den „Alltag“ ganz brauchbar, wird aber für Objekte, die sich mit hoher Geschwindigkeit (nahezu Lichtgeschwindigkeit) bewegen, fehlerhaft und muss durch die (1905 von Einstein eingeführte) Spezielle Relativitätstheorie ersetzt werden. Bei sehr kleinen Objekten (etwa von atomaren Ausdehnungen) ist die Mechanik aus verschiedenen Gründen nicht anwendbar und wird durch die Quantenmechanik ersetzt (die in den 1920er Jahren überwiegend von Bohr, Schrödinger, Heisenberg und vielen anderen entwickelt wurde). Für Objekte, die sowohl sehr schnell als auch sehr klein sind (wie in der modernen Teilchenphysik), wird eine Mechanik benötigt, welche die Relativitätstheorie mit den Prinzipien der Quantenphysik vereint. Diese relativistische Quantenmechanik wird als Quantenfeldtheorie bezeichnet und entstand in den 1930er und 1940er Jahren. Dennoch bildet sie auch heute noch kein völlig zufriedenstellendes System. Mit Ausnahme des letzten Kapitels bewegen wir uns in diesem Buch ausschließlich in dem Gebiet der klassischen Mechanik, obwohl sich die Elektrodynamik äußerst einfach auf die drei anderen Bereiche erweitern lässt. (Tatsächlich ist die Theorie in den meisten Fällen automatisch mit der Speziellen Relativitätstheorie konsistent, die sie, historisch gesehen, auch inspiriert hat.)

Vier Kräfte

Die Mechanik sagt uns, wie sich ein System verhält, wenn es einer gegebenen *Kraft* ausgesetzt ist. Die (heutige) Physik kennt lediglich vier grundlegende Kräfte der Physik, die ich hier in der Reihenfolge abfallender Stärke wiedergebe:

1. Starke Kraft
2. Elektromagnetische Kraft
3. Schwache Kraft
4. Gravitationskraft

Vielleicht überrascht Sie die Kürze dieser Liste. Wo bleibt die Reibung? Wo ist die „Normalkraft“, die Sie davon abhält, durch den Boden zu fallen? Was ist mit den chemischen Kräften, welche die Moleküle zusammenhalten? Wo wirkt die Stoßkraft zwischen zwei kollidierenden Billardbällen? Die Antwort: Alle diese Kräfte sind *elektromagnetischer* Natur. Wir übertreiben keineswegs, wenn wir behaupten, dass wir uns in einer elektromagnetischen Welt befinden, denn praktisch jede Kraft, der wir im Alltag begegnen (mit Ausnahme der Gravitation), beruht auf dem Elektromagnetismus.

Die **starke Kraft**, die Protonen und Neutronen im Innern eines Atomkerns zusammenhält, besitzt extrem kurze Reichweite, daher „spüren“ wir sie nicht, obwohl sie hundert Mal stärker ist als die elektromagnetische Kraft. Die **schwache Kraft**, die für bestimmte Formen des radioaktiven Zerfalls verantwortlich ist, besitzt nicht nur geringe Reichweite, sie ist zudem viel schwächer als die elektromagnetische Kraft. Die **Gravitation** ist schließlich so unglaublich schwach (im Vergleich zu den anderen), dass wir sie überhaupt nur durch unglaublich große Massenansammlungen (wie die Erde oder die Sonne) wahrnehmen können. Die elektrische Abstoßung zwischen zwei Atomen ist 10^{42} -mal stärker als deren gravitative Anziehung. Würden Atome durch die Gravitation (anstelle der elektrischen Kraft) zusammengehalten, wäre ein einzelnes Wasserstoffatom größer als das gesamte bekannte Universum.

Elektromagnetische Kräfte sind nicht nur die mit Abstand stärksten Kräfte im Alltag, sie sind derzeit auch die *einzig* Kräfte, die vollständig verstanden sind. Es gibt natürlich eine klassische Theorie der Gravitation (das Newton'sche Gravitationsgesetz) sowie eine relativistische Gravitationstheorie (die Einstein'sche Allgemeine Relativitätstheorie), allerdings wurde bis heute keine völlig zufriedenstellende quantenmechanische Gravitationstheorie aufgestellt (obwohl viele Menschen daran arbeiten). Derzeit gibt es eine sehr erfolgreiche (aber umständliche) Theorie der schwachen Wechselwirkungen und einen äußerst attraktiven Kandidaten für die starken Wechselwirkungen (die sogenannte **Chromodynamik**). Alle diese Theorien werden von der Elektrodynamik angeregt, dennoch wird derzeit keine von ihnen durch Experimente abschließend bestätigt. Die Elektrodynamik, eine wunderbar vollständige und erfolgreiche Theorie, bildet daher eine Art Paradigma für Physiker: ein ideales Modell, dem andere Theorien nachzueifern versuchen.

Die Gesetze der klassischen Elektrodynamik wurden stückchenweise von Franklin, Coulomb, Ampère, Faraday und anderen entwickelt. Eine Person jedoch schloss diese Arbeiten ab und goss sie in die kompakte und konsistente Form, die sie heute besitzt: James Clerk Maxwell. Seine Theorie ist mittlerweile über hundert Jahre alt.

Die Vereinheitlichung physikalischer Theorien

Zu Beginn waren Elektrizität und Magnetismus völlig unterschiedliche Dinge. Das eine befasste sich mit Glasstäben und Katzenfellen, Kugeln aus Holundermark, Batterien, Strömen, Elektrolyse und Blitzen. Das andere behandelte Stabmagnete, Eisenkerne, Kompassnadeln und den Nordpol. Doch 1820 stellte Ørsted fest, dass *elektrische* Ströme in der Lage sind, eine *magnetische* Kompassnadel abzulenken. Bald danach postulierte Ampère zu Recht, dass *alle* magnetischen Phänomene auf bewegte

elektrische Ladungen zurückgeführt werden können. 1831 schließlich entdeckte Faraday, dass durch einen bewegten *Magneten* ein *elektrischer* Strom hervorgerufen wird. Als Maxwell und Lorentz die letzten Elemente der Theorie formulierten, waren Elektrizität und Magnetismus unentwirrbar miteinander verflochten. Sie wurden nicht länger als unabhängige Gebiete gewertet, sondern als zwei *Aspekte* eines *einzig*en Themas: als **Elektromagnetismus**.

Faraday hatte vermutet, dass auch Licht elektrischer Natur ist. Die Maxwell'sche Theorie lieferte die spektakuläre Rechtfertigung für diese Hypothese, sodass bald darauf die **Optik** – die Untersuchung von Linsen, Spiegeln, Prismen, Interferenzen und Beugung – in den Elektromagnetismus eingegliedert wurde. Hertz, der 1888 die entscheidende experimentelle Bestätigung der Maxwell'schen Theorie lieferte, formulierte dies folgendermaßen: „Die Verbindung zwischen Licht und Elektrizität . . . ist hergestellt . . . In jeder Flamme, in jedem leuchtenden Atome sehen wir einen elektrischen Prozeß . . . So verbreitet sich das Gebiet der Elektrizität über die gesamte Natur. Es rückt auch uns selbst näher, wir erfahren, dass wir in Wahrheit ein elektrisches Organ haben, das Auge.“¹ Bis 1900 waren drei große Bereiche der Physik – die Elektrizität, der Magnetismus und die Optik – zu einer einzigen vereinheitlichten Theorie verschmolzen. (Bald wurde auch deutlich, dass das sichtbare Licht nur ein winziges „Fenster“ im breiten Spektrum der elektromagnetischen Strahlung darstellt, das sich vom Radiobereich über Mikrowellen, Infrarot und Ultraviolett bis zum Röntgen- und Gammabereich erstreckt.)

Einstein hatte die Vorstellung einer weiteren Vereinigung, die Gravitation und Elektrodynamik auf dieselbe Weise miteinander verschmelzen sollte, wie ein Jahrhundert zuvor Elektrizität und Magnetismus miteinander kombiniert worden waren. Seine **vereinheitlichte Feldtheorie** war allerdings nicht besonders erfolgreich. In den letzten Jahrzehnten war derselbe Anstoß aber der Keim für eine Hierarchie immer anspruchsvollerer (und spekulativerer) Vereinheitlichungsschemata. Den Anfang machte 1960 die elektroschwache Theorie von Glashow, Weinberg und Salam (welche die schwache und die elektromagnetische Kraft miteinander vereinigte) und gipfelte in den 1980er Jahren in der **Superstring-Theorie** (die nach Aussage ihrer Befürworter alle vier Kräfte zu einer einzigen „Theory of Everything“ vereinigt). Auf jeder Ebene dieser Hierarchie erhöhen sich die mathematischen Schwierigkeiten, und die Kluft zwischen inspirierter Vermutung und experimenteller Überprüfung wird immer größer. Dennoch bildet die Vereinigung von Kräften, die durch die Elektrodynamik in Gang gesetzt wurde, heute eine der bedeutendsten Quellen des physikalischen Fortschritts.

Die Feldformulierung der Elektrodynamik

Das grundlegende Problem, das eine Theorie des Elektromagnetismus zu lösen hofft, lautet: Ich halte *hier* einige elektrische Ladungen (und schüttele sie vielleicht durcheinander) – was geschieht dann *dort drüben* mit einer anderen Ladung? Die klas-

¹ Heinrich Hertz, *Über sehr schnelle elektrische Schwingungen: Vier Arbeiten (1887–1889) von Heinrich Hertz*. Hrsg. von Hans Wußling, Einl. und Anm. von Gust. Hertz. – 2. Aufl. Reprint der Ausg. Leipzig. Akad. Verl. Ges. Geest und Portig. 1971. Thun; Frankfurt am Main: Deutsch. 1996 (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 251)

sische Lösung hat die Form einer **Feldtheorie**: Wir sagen, dass der Raum um eine elektrische Ladung von elektrischen und magnetischen **Feldern** durchsetzt ist (sozusagen der elektromagnetische „Geruch“, welcher der Ladung entströmt). Eine zweite Ladung erfährt in Anwesenheit dieser Felder eine Kraft. Die Felder übertragen demnach den Einfluss einer Ladung auf die andere – sie vermitteln also die Wechselwirkung.

Wird eine Ladung beschleunigt, „löst“ sich sozusagen ein Teil des Felds davon ab und entfernt sich mit Lichtgeschwindigkeit, wobei es Energie, Impuls und Drehmoment mit sich trägt. Wir bezeichnen dies als elektromagnetische Strahlung. Ihre Existenz lädt uns dazu ein (ja sie *zwingt* uns geradezu), das Feld als unabhängige eigenständige dynamische Entität zu betrachten, die ebenso real ist wie Atome oder Tennisbälle. Unser Interesse verschiebt sich daher von der Untersuchung der zwischen Ladungen herrschenden Kräfte zur Theorie der Felder selbst. Dennoch ist eine Ladung notwendig, um ein elektromagnetisches Feld zu *erzeugen*, und eine andere Ladung wird benötigt, um ein Feld *nachzuweisen*. Daher beginnen wir am besten mit einem Überblick über die wesentlichen Eigenschaften elektrischer Ladungen.

Elektrische Ladung

1. *Ladung tritt in zwei Formen auf*, die wir als „positiv“ („Plus“) und „negativ“ („Minus“) bezeichnen, weil sich ihre Effekte gegenseitig aufheben. (Wenn am selben Punkt $+q$ und $-q$ vorliegen, ist dies elektrisch genauso, als wäre gar keine Ladung vorhanden.) Dies scheint zu offensichtlich, als dass es einen Kommentar verdient, aber Sie sollten einmal über andere Möglichkeiten nachdenken: Was, wenn es acht oder zehn verschiedene Ladungssorten gäbe? (In der Chromodynamik gibt es tatsächlich *drei* unterschiedliche Größen, die jeweils positiv oder negativ sind und der elektrischen Ladung entsprechen.) Oder was wäre, wenn sich die beiden Ladungsarten nicht gegenseitig aufheben würden? Es ist doch außergewöhnlich, dass positive und negative Ladungen in gewöhnlicher Materie mit unglaublicher Genauigkeit in *exakt* denselben Mengen vorliegen, sodass ihre Effekte sich fast vollständig aufheben. Wäre dies nicht der Fall, wären wir enormen Kräften ausgesetzt: Gäbe es beispielsweise in einer Kartoffel nur ein winziges Ungleichgewicht von einem 10^{10} -tel, würde sie eine gewaltige Explosion auslösen.
2. *Ladung bleibt erhalten*: Sie kann nicht erzeugt oder zerstört werden – die Ladung, die jetzt existiert, hat es schon immer gegeben. (Eine positive Ladung kann eine negative „auslöschen“, sie kann aber nicht von selbst verschwinden – irgendetwas muss diese elektrische Ladung ausgleichen.) Die Gesamtladung des Universums ist daher ein für alle Mal festgelegt. Dies wird als **globale** Ladungserhaltung bezeichnet. Ich kann dies sogar noch viel enger formulieren: Aufgrund der globalen Ladungserhaltung könnte eine Ladung in Hamburg verschwinden und in München sofort wieder auftauchen (was das „Gesamt“ nicht verändern würde), obwohl wir wissen, dass dies nicht vorkommt. Wenn die Ladung zuerst in Hamburg war und sich nach München *bewegt* hat, muss sie auf einem ununterbrochenen Weg von einem Ort zum anderen gelangt sein. Dies wird als **lokale** Ladungserhaltung bezeichnet. Später werden wir noch sehen, wie wir ein genaues mathematisches Gesetz formulieren können, das die lokale Ladungserhaltung beschreibt – es wird als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet.

3. *Ladung ist quantisiert.* Obwohl es in der klassischen Elektrodynamik keine Gründe dafür gibt, treten elektrische Ladungen *immer* nur in diskreten Portionen auf – ganzzahlige Vielfache der Elementarladung. Bezeichnen wir die Ladung des Protons mit $+e$, dann trägt das Elektron die Ladung $-e$, das Neutron hat die Ladung Null, die Pi-Mesonen $+e$, 0 und $-e$, der Kohlenstoffkern $+6e$ usw. Es gibt jedoch niemals Ladungen wie $7,392e$ oder $1/2e$.² Die Basiseinheit der Ladung ist extrem klein. In der Praxis kann die Quantisierung daher fast immer ignoriert werden. Auch Wasser besteht „in Wirklichkeit“ aus kleinen Teilchen (Molekülen). Wenn wir uns jedoch mit hinreichend großen Mengen davon befassen, können wir es als kontinuierliche Flüssigkeit auffassen. Dies entspricht sogar Maxwells eigener Sichtweise, der noch keine Ahnung von Elektronen und Protonen hatte. Er betrachtete Ladung vermutlich als eine Art von „Sirup“, die in beliebige Portionen aufgeteilt und nach Belieben verschmiert werden konnte.

Einheiten

Die Elektrodynamik leidet unter einer Reihe unterschiedlicher Einheitensysteme, die es Physikern bisweilen schwer machen, sich miteinander auszutauschen. Das Problem ist noch weit schlimmer als in der Mechanik, in der gewisse Neandertaler immer noch Einheiten wie Pfund und Zoll verwenden. In der Mechanik haben die Formeln wenigstens das gleiche *Aussehen*, egal welche Einheiten zur Messung der Größen verwendet werden. Das zweite Newton'sche Gesetz lautet immer $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, egal ob Zoll-Pfund-Sekunde, Kilogramm-Meter-Sekunde oder etwas anderes verwendet wird. Im Elektromagnetismus ist das nicht mehr der Fall. Hier kann das Coulomb'sche Gesetz unterschiedliche Formen annehmen, etwa

$$\frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{Gau\ss}) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{SI}) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{HL})$$

Unter den am meisten verbreiteten Systemen sind die beiden beliebtesten das **Gau\ss'sche** System (mit den Basiseinheiten Zentimeter, Gramm, Sekunde, daher auch als cgs-System bezeichnet) und das **SI**-System (mit den Basiseinheiten Meter, Kilogramm, Sekunden, mks-System). Teilchenphysiker bevorzugen ein drittes System: das **Heaviside-Lorentz**-System (wie das Gau\ss'sche System ein cgs-System, allerdings mit einigen anderen Umrechnungsfaktoren). Obwohl Gau\ss'sche Einheiten einige besondere theoretische Vorteile mit sich bringen, scheinen viele Dozenten für Anfängervorlesungen das SI-System zu bevorzugen³, meiner Vermutung nach, weil darin die aus dem Alltag gewohnten Einheiten (Volt, Ampere und Watt) enthalten sind. In diesem Buch habe ich daher SI-Einheiten verwendet. Anhang C enthält ein „Wörterbuch“, mit dessen Hilfe die wichtigsten Ergebnisse in das Gau\ss'sche System übertragen werden können.

² Genau genommen werden Protonen und Neutronen aus drei **Quarks** gebildet, die gebrochene Ladungen ($\pm 2/3e$ und $\pm 1/3e$) tragen. In der Natur scheinen jedoch keine *freien* Quarks aufzutreten. Ihre Existenz beeinflusst keineswegs die Tatsache, dass Ladungen quantisiert sind. Es verkleinert nur den Wert der Basiseinheit.

³ In Deutschland sind die SI-Einheiten als gesetzliche Einheiten für den amtlichen und geschäftlichen Verkehr eingeführt.

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Von den vier fundamentalen Wechselwirkungen spielen in unserer Alltagswelt lediglich zwei eine Rolle: die Gravitation und die elektromagnetische Wechselwirkung. Beide machen sich Menschen in zahllosen Situationen zunutze; eine besondere Rolle in unserer technisierten Welt spielen die Phänomene von Elektrizität und Magnetismus, deren Verständnis daher nicht nur in der Physik, sondern auch in weiten Bereichen der anderen Naturwissenschaften und auch Ingenieurwissenschaften unerlässlich ist. Der überwältigenden Vielfalt von Phänomenen und Anwendungen des Elektromagnetismus steht ein extrem kompakter theoretischer Kern in Form der vier Maxwell'schen Gleichungen gegenüber, und ein wesentliches Ziel einer Vorlesung über Elektromagnetismus sollte es sein, den Studierenden nicht nur die Grundlagen zu vermitteln, sondern auch die ersten Schritte in der Vielfalt der Anwendungen zu ermöglichen.

Diese Aufgabe löst das Standardwerk von David Griffiths, das sich vor allem an den studentischen Hörerkreis wendet, wie er sich in einer ersten theorieorientierten Vorlesung zur Elektrodynamik findet. In diesem Zusammenhang kann dieses Buch auch als Grundlage einer einsemestrigen Vorlesung dienen; wegen der gründlichen mathematischen Grundlegung und der sehr detaillierten Erklärungen eignet sich das Werk auch zum Selbststudium und für Studenten angrenzender Fächer sehr gut. In der mittlerweile nun vierten vollständig überarbeiteten Auflage wurden viele Details noch klarer und pädagogischer gestaltet; zahlreiche neue spannende Übungsaufgaben sind hinzugekommen oder ersetzen frühere „Routineaufgaben“.

Zum Abschluss eine kleine typographische Anmerkung: Im englischsprachigen Original verwendet Griffiths zur Bezeichnung von Vektoren durchgehend Buchstaben im Fettdruck. In der deutschsprachigen Literatur werden gerne auch kursive Buchstaben im Fettdruck zur Bezeichnung von Vektoren verwendet. Es wurde jedoch die ursprüngliche Darstellung beibehalten, da sie lesbarer erschien sowie mit den Gebräuchen der meisten physikalischen Fachzeitschriften übereinstimmt.

Zum Buch

Inhalt

Im **Kapitel 1** werden die Grundlagen der Vektoranalysis vorgestellt: Gradient, Divergenz, Rotation sowie die damit verbundenen Sätze der Analysis; ferner befasst es sich mit krummlinigen Koordinatensystemen und der Dirac'schen Deltafunktion. Jeder Leser sollte mit diesen Werkzeugen sicher umgehen können, bevor er sich an den Rest des Buches macht.

In **Kapitel 2** werden mittels des Feld- und des Potentialbegriffs die von statischen Ladungen ausgeübten Kräfte untersucht sowie der Arbeitsbegriff in der Elektrostatik eingeführt. Die auftretenden mathematischen Probleme können in der Praxis sehr oft mit den in **Kapitel 3** eingeführten Methoden (Spiegel Ladungen, Separation der Variablen, Multipolentwicklung) gelöst werden.

Kapitel 4: In der Regel kennen wir die mikroskopische Ladungsverteilung in Materie nicht. Man kann jedoch phänomenologisch auch ohne Kenntnis der Details unter Verwendung des Konzepts der Polarisierung eine Theorie der elektrischen Felder in Materie entwickeln.

Der Elektrostatik entspricht eine Magnetostatik, bei der die Magnetfelder, wie in **Kapitel 5** beschrieben, in oft verblüffender Analogie zur Elektrostatik auf stationäre, d. h. zeitlich nicht veränderliche Ströme zurückgeführt werden können. Analog zur Elektrostatik wird diese mikroskopische Theorie dann in **Kapitel 6** phänomenologisch auf Magnetfelder in Materie ausgedehnt.

Bis zu diesem Punkt werden im Buch ausschließlich statische Phänomene behandelt. Elektrodynamik ist aber, wie schon der Name andeutet, nicht ohne eine Betrachtung zeitabhängiger Phänomene vollständig. Dies ist das Thema von **Kapitel 7**. Ausgehend von einer Theorie der Batterie und der Faraday'schen Induktion werden die vier Maxwell'schen Gleichungen vollständig dargelegt. Die Maxwell'schen Gleichungen werden dann in **Kapitel 8** mit den zentralen Erhaltungsgrößen Energie und Impuls durch gegenüber der Mechanik verallgemeinerten Erhaltungssätzen und der Einführung des Maxwell'schen Spannungstensors verknüpft.

Im Prinzip ist die Elektrodynamik an dieser Stelle komplett. Im weiteren Verlauf des Buchs werden verschiedenste Konsequenzen der Grundgleichungen diskutiert, mathematisch elegantere und transparentere, wenn auch abstraktere Formulierungen der Elektrodynamik präsentiert sowie zu guter Letzt der implizit relativistische Charakter der Maxwell'schen Gleichungen herausgearbeitet.

So befasst sich **Kapitel 9** mit der Theorie elektromagnetischer Wellen, wobei der Schwerpunkt auf der Theorie der ebenen Wellen (in Vakuum und Materie sowie an Grenzflächen) und dem technisch wichtigen Spezialfall von Wellenleitern liegt.

In **Kapitel 10** werden die im Buch bereits mehrfach angesprochenen, auf Potentialen beruhenden Zugänge zur Elektrodynamik systematisiert. Dabei spielt der Begriff der Eichfreiheit eine zentrale Rolle, da er es erlaubt, für viele Probleme eine möglichst einfache Formulierung zu finden. Angewandt wird der Potentialformalismus dann auf die Potentiale und daraus resultierenden Felder von kontinuierlichen Ladungsverteilungen und Punktladungen.

Kapitel 11 wendet sich dem Phänomen der Strahlung zu, also den von beschleunigten Ladungen erzeugten zeitabhängigen elektromagnetischen Feldern. Dieses weite Feld wird in zwei seiner wesentlichen Aspekte behandelt, nämlich der Strahlung eines elektromagnetischen Dipols sowie der Strahlung einer Punktladung.

Ohne darauf angelegt zu sein, war die Elektrodynamik von Anfang an in relativistisch invarianter Form formuliert worden, weist also im Gegensatz zur Mechanik keine Veränderung aufgrund der speziellen Relativitätstheorie auf. Es ist daher in manchen Curricula üblich, die Relativitätstheorie in Verbindung mit der Elektrodynamik zu lehren. In **Kapitel 12** werden die Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie und der relativistischen Mechanik wiederholt und in diesem Zusammenhang eine explizit relativistische Darstellung der Elektrodynamik gegeben, die in einer äußerst kompakten tensoriellen Formulierung der Elektrodynamik gipfelt.

Handhabung des Buches und Materialien zum Buch

Dozierende Vom Umfang her ist der Stoff des Buches im Wesentlichen in einer einsemestrigen (Theorie-)Vorlesung zur Elektrodynamik zu behandeln, wobei sich je nach Vorkenntnissen der Studenten und dem Curriculum gewisse Auslassungsmöglichkeiten ergeben (etwa bei der Behandlung der speziellen Relativitätstheorie oder der Vektoranalysis in einer anderen Vorlesung).

Studierende Jedes Kapitel besteht aus einem Wechsel von mathematisch-physikalischer Entwicklung, illustrierenden, vollständig ausgearbeiteten Beispielen sowie dazu passend ausgewählten Aufgaben. Es lohnt sich, die Detailerklärungen des Autors im Text auch dann gründlich nachzuvollziehen, wenn sie im Moment überflüssig erscheinen: in der Regel beseitigen sie ein potentiell Missverständnis einige Seiten später! Wie immer, stellt sich das eigentliche Verständnis erst in den Beispielen und bei selbständiger Behandlung der Aufgaben ein. Jedes Kapitel umfasst am Ende noch eine reiche Auswahl weiterer Aufgaben, die zum Beispiel eine sehr effiziente Klausurvorbereitung darstellen könnten. Aufgaben mit einem Punkt stellen Ergebnisse bereit, die später in der Vorlesung verwendet werden; ein Ausrufezeichen markiert besonders anspruchsvolle Aufgaben. Einige dieser Aufgaben führen direkt in die aktuelle Forschung und zeigen, dass selbst ein „altes“ Gebiet wie die klassische Elektrodynamik noch spannende neue Entwicklungen erlebt. Die Lösungen zu den Aufgaben stehen nach einer kurzen Registrierung auf der Webseite des Buches zum Herunterladen bereit.

Ulrich Schollwöck, LMU München



Lösungs-
hinweise

Vektoranalysis

1.1	Vektoralgebra	28
1.2	Differentialrechnung	41
1.3	Integralrechnung	54
1.4	Krummlinige Koordinaten	71
1.5	Die Dirac'sche Deltafunktion	78
1.6	Die Theorie der Vektorfelder	87

1

ÜBERBLICK

1.1 Vektoralgebra

1.1.1 Vektoroperationen

Wenn Sie sich vier Kilometer nach Norden und danach drei Kilometer nach Osten bewegen (Abbildung 1.1), dann haben Sie zwar sieben Kilometer zurückgelegt, aber Sie befinden sich trotzdem nicht sieben Kilometer von Ihrem Ausgangspunkt entfernt, sondern nur fünf Kilometer. Wir brauchen eine besondere Rechenweise, um Größen wie diese zu beschreiben, die ganz offensichtlich nicht auf gewöhnliche Weise addiert werden können. Der Grund liegt natürlich darin, dass **Verschiebungen** (gerade Streckenabschnitte, die von einem Punkt zu einem anderen reichen) sowohl eine *Richtung* als auch einen *Betrag* (ihre *Länge*) besitzen. Beide muss man berücksichtigen, wenn sie kombiniert werden sollen. Solche Objekte werden als **Vektoren** bezeichnet. Beispiele dafür sind Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft und Impuls. Im Gegensatz dazu heißen Größen, die nur einen Betrag aufweisen, **Skalare**. Beispiel dafür sind Masse, Ladung, Dichte und Temperatur. Vektoren werde ich **fett** darstellen (\mathbf{A} , \mathbf{B} usw.), während Skalare nur *kursiv* dargestellt werden. Der Betrag eines Vektors \mathbf{A} wird in der Form $|\mathbf{A}|$ oder einfach als A geschrieben. In Diagrammen werden Vektoren durch Pfeile wiedergegeben, wobei die Länge eines Pfeils proportional zum Wert des Vektors ist und die Pfeilspitze die Richtung angibt. *Minus \mathbf{A}* (oder $-\mathbf{A}$) ist ein Vektor mit demselben Betrag wie \mathbf{A} , der aber in die entgegengesetzte Richtung weist (Abbildung 1.2). Beachten Sie, dass Vektoren zwar Betrag und Richtung besitzen, aber keinen Ursprung. Eine Verschiebung von vier Kilometern in den Norden von München wird durch denselben Vektor beschrieben wie eine Verschiebung von vier Kilometern in den Norden von Leipzig (wobei wir natürlich die Erdkrümmung vernachlässigen). In einem Diagramm können Sie daher Vektoren nach Belieben verschieben, sofern Sie deren Länge oder Richtung nicht verändern.

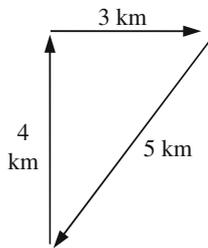


Abbildung 1.1

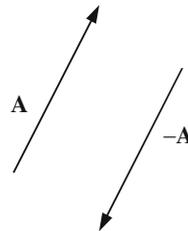


Abbildung 1.2

Wir definieren vier Vektoroperationen: die Addition und drei Arten der Multiplikation.

(i) **Addition zweier Vektoren.** Setzen Sie das Pfeilende von \mathbf{B} an die Pfeilspitze von \mathbf{A} . Die Summe $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ist der Vektor, der vom Pfeilende des Vektors \mathbf{A} bis zur Spitze von \mathbf{B} verläuft (Abbildung 1.3). (Durch diese Regel wird der offensichtliche Weg verallgemeinert, mit dem zwei Verschiebungen kombiniert werden.) Die Addition ist *kommutativ*:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} .$$

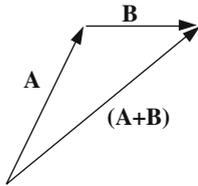


Abbildung 1.3

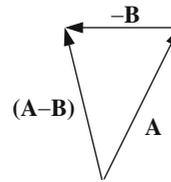
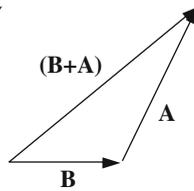


Abbildung 1.4

Wenn Sie zuerst 3 Kilometer nach Osten und dann vier Kilometer nach Norden gehen, gelangen Sie also an denselben Punkt, wie wenn Sie zuerst vier Kilometer nach Norden und dann drei Kilometer nach Osten gehen. Die Addition ist zudem *assoziativ*:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) .$$

Um einen Vektor zu subtrahieren (Abbildung 1.4), müssen Sie den umgekehrten Vektor addieren:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) .$$

(ii) Multiplikation mit einem Skalar. Die Multiplikation eines Vektors mit einem positiven Skalar a multipliziert den *Betrag*, verändert aber nicht die Richtung (Abbildung 1.5). (Ist a negativ, wird die Richtung des Vektors umgekehrt.) Die Multiplikation mit einem Skalar ist *distributiv*:

$$a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B} .$$

(iii) Punktprodukt zweier Vektoren. Das Punktprodukt zweier Vektoren wird folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB \cos \theta . \quad (1.1)$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen den beiden Vektoren, sofern sie an ihren Pfeilenden aneinandergesetzt werden (Abbildung 1.6). Beachten Sie, dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ selbst ein **Skalar** ist (daher die häufigere Bezeichnung **Skalarprodukt**). Das Skalarprodukt ist sowohl *kommutativ*,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} ,$$

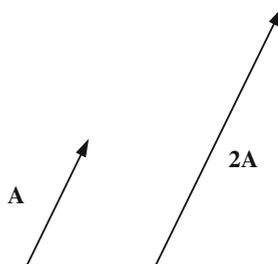


Abbildung 1.5

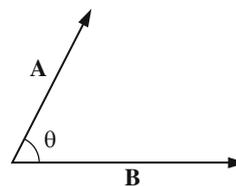


Abbildung 1.6

als auch *distributiv*:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}. \quad (1.2)$$

Geometrisch gesehen ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ das A -fache Produkt der Projektion von \mathbf{B} auf \mathbf{A} (bzw. das B -fache Produkt der Projektion von \mathbf{A} auf \mathbf{B}). Verlaufen beide Vektoren parallel, dann ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$. Insbesondere ist für jeden Vektor \mathbf{A}

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2. \quad (1.3)$$

Stehen \mathbf{A} und \mathbf{B} senkrecht aufeinander, dann ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

Beispiel 1.1: Berechnung des Skalarprodukts

Sei $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ (Abbildung 1.7). Berechnen Sie das Skalarprodukt von \mathbf{C} mit sich selbst.

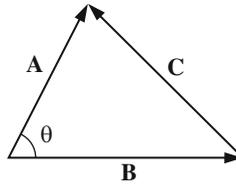


Abbildung 1.7

Lösung:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B},$$

oder

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

Dies wird als **Kosinussatz** bezeichnet.

(iv) Kreuzprodukt zweier Vektoren. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren wird durch

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv AB \sin \theta \hat{\mathbf{n}} \quad (1.4)$$

definiert, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ der **Einheitsvektor** (ein Vektor der Länge 1) ist, der senkrecht auf der von \mathbf{A} und \mathbf{B} gebildeten Ebene steht. (Ich benutze das „Dach“-Zeichen „ $\hat{}$ “ zur Kennzeichnung von Einheitsvektoren.) Selbstverständlich gibt es *zwei* Richtungen, die senkrecht auf einer beliebigen Ebene stehen: „aufwärts“ und „abwärts“. Diese Doppeldeutigkeit wird durch die sogenannte **Rechte-Hand-Regel** gelöst: Zeigen Sie mit Daumen in Richtung des ersten Vektors und mit dem Zeigefinger (in Richtung des kleineren Winkels) zum zweiten Vektor; steht Ihr Mittelfinger senkrecht auf der Handebene, dann weist er in die Richtung von $\hat{\mathbf{n}}$. (In Abbildung 1.8 zeigt $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ in die Seite *hinein*, $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ zeigt dagegen aus der Seite *heraus*.) Beachten Sie, dass $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ wieder ein **Vektor** ist (man bezeichnet das Kreuzprodukt daher alternativ als **Vektorprodukt**). Das Kreuzprodukt ist *distributiv*

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C}), \quad (1.5)$$

aber *nicht kommutativ*. Tatsächlich gilt

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) . \quad (1.6)$$

Geometrisch gesehen bildet der Betrag des Kreuzprodukts, $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$, die Fläche eines Parallelogramms, das durch \mathbf{A} und \mathbf{B} gebildet wird (Abbildung 1.8). Sind beide Vektoren parallel, dann ist ihr Kreuzprodukt null. Insbesondere gilt für jeden Vektor \mathbf{A}

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} .$$

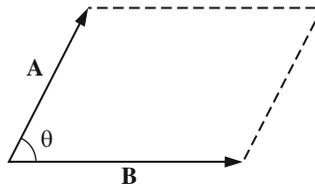


Abbildung 1.8

■ Aufgabe 1.1

Zeigen Sie anhand der Definitionen in den Gleichungen 1.1 und 1.4 sowie den zugehörigen Diagrammen, dass das Punktprodukt sowie das Kreuzprodukt distributiv sind, und zwar

- a. für drei Vektoren in einer Ebene,
- b. für den allgemeinen Fall.

■ Aufgabe 1.2

Ist das Vektorprodukt assoziativ?

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \stackrel{?}{=} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

Falls ja, führen Sie den Beweis durch. Falls nein, nennen Sie ein Gegenbeispiel.

1.1.2 Vektoralgebra in der Komponentenform

Im vorangegangenen Abschnitt habe ich die vier Vektoroperationen (Addition, skalare Multiplikation, Punktprodukt und Kreuzprodukt) in „abstrakter“ Form definiert, d. h. ohne Bezug auf irgendein besonderes Koordinatensystem. In der Praxis ist es oft einfacher, die kartesischen Koordinaten x , y , z zu benutzen und mit „Vektorkomponenten“ zu arbeiten. Wir bezeichnen mit \hat{x} , \hat{y} und \hat{z} die Einheitsvektoren parallel zur x -, y - bzw. z -Achse (Abbildung 1.9a). Ein beliebiger Vektor kann anhand dieser **Basisvektoren** dargestellt werden (Abbildung 1.9b):

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} .$$

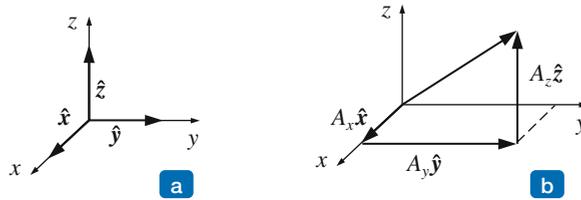


Abbildung 1.9

Die Zahlen A_x , A_y und A_z werden als **Komponenten** von \mathbf{A} bezeichnet. Geometrisch gesehen sind sie die Projektionen von \mathbf{A} auf die drei Koordinatenachsen. Wir können nun jede der vier Vektoroperationen umformulieren und erhalten so die Regeln für das Rechnen mit den Komponenten:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}) + (B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= (A_x + B_x) \hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y) \hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z) \hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Regel 1: Vektoren werden addiert, indem die zusammengehörigen Komponenten addiert werden.

$$a\mathbf{A} = (aA_x) \hat{\mathbf{x}} + (aA_y) \hat{\mathbf{y}} + (aA_z) \hat{\mathbf{z}}.\quad (1.8)$$

Regel 2: Zur Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar wird jede Komponente mit dem Skalar multipliziert.

Weil $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$ aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren sind, gilt

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1, \quad \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0.\quad (1.9)$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}) \cdot (B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Regel 3: Zur Berechnung des Skalarprodukts werden die zusammengehörigen Komponenten multipliziert und die Produkte addiert.

Insbesondere ist

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

und daher

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.\quad (1.11)$$

(Wenn Sie so wollen, ist das die dreidimensionale Erweiterung des Lehrsatzes des Pythagoras.) Beachten Sie, dass das Skalarprodukt von \mathbf{A} mit irgendeinem Einheitsvektor die Komponente von \mathbf{A} in die Richtung des Einheitsvektors bedeutet (also ist $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = A_x$, $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} = A_y$ und $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} = A_z$).

Auf ähnliche Weise erhalten wir¹

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = 0, \\ \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} &= -\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} &= -\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}, \\ \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} &= -\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Daher gilt weiterhin

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}) \times (B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{\mathbf{x}} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{\mathbf{y}} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Dieser komplizierte Ausdruck kann viel einfacher durch eine Determinante ausgedrückt werden:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.\tag{1.14}$$

Regel 4: Zur Berechnung des Vektorprodukts bilden wir die Determinante einer Matrix, deren erste Zeile durch $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$, deren zweite Zeile durch \mathbf{A} (in Komponentenform) und deren dritte Zeile durch \mathbf{B} gegeben ist.

Beispiel 1.2: Winkelbestimmung mit dem Skalarprodukt

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Flächendiagonalen eines Würfels.

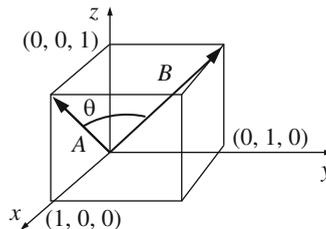


Abbildung 1.10

¹ Die Vorzeichen gelten hier für ein *rechtshändiges* Koordinatensystem (dessen x -Achse aus der Seitenebene heraus reicht, die y -Achse zeigt nach rechts und die z -Achse zeigt zur oberen Seitenecke). In einem *linkshändigen* Koordinatensystem (dessen z -Achse nach unten zeigt), sind die Vorzeichen umgekehrt: $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{z}}$ usw. Wir werden ausschließlich rechtshändige Koordinatensysteme verwenden.

Beispiel 1.2 (Fortsetzung)

Lösung:

Wir können ohne Weiteres einen Würfel der Kantenlänge 1 benutzen, den wir, wie in Abbildung 1.10 gezeigt, so ausrichten, dass sich eine seiner Ecken im Ursprung befindet. Die Flächendiagonalen \mathbf{A} und \mathbf{B} sind dann

$$\mathbf{A} = 1\hat{x} + 0\hat{y} + 1\hat{z}; \quad \mathbf{B} = 0\hat{x} + 1\hat{y} + 1\hat{z}$$

In Komponentenform lautet das Skalarprodukt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1.$$

Die „abstraktere“ (also koordinatenfreie) Darstellung lautet dagegen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta = \sqrt{2}\sqrt{2} \cos \theta = 2 \cos \theta.$$

Daraus folgt

$$\cos \theta = 1/2 \quad \text{oder} \quad \theta = 60^\circ.$$

Natürlich können Sie die Antwort auch leichter erhalten, indem Sie auf der Oberseite des Würfels eine Diagonale einzeichnen, welche das gleichseitige Dreieck vervollständigt. In Fällen, in denen die Geometrie nicht so einfach ist, haben Sie mit dieser Methode des Vergleichs von „abstrakter“ und Komponentenform des Skalarprodukts jedoch eine äußerst effektive Methode zur Bestimmung der Winkel.

■ Aufgabe 1.3

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Raumdiagonalen eines Würfels.

■ Aufgabe 1.4

Benutzen Sie das Vektorprodukt zur Bestimmung der Komponenten des Einheitsvektors $\hat{\mathbf{n}}$, der senkrecht auf der in Abbildung 1.11 gezeigten Ebene steht.

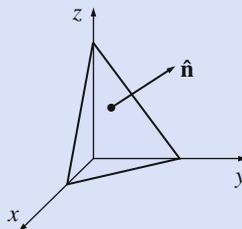


Abbildung 1.11

1.1.3 Dreierprodukte

Da das Kreuzprodukt zweier Vektoren selbst wieder ein Vektor ist, kann dieser mit einem dritten Vektor sowohl durch Skalar- als auch Vektorprodukt ein sogenanntes *Dreierprodukt* bilden.

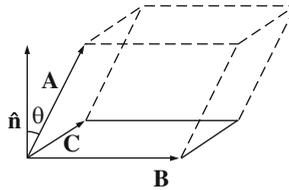


Abbildung 1.12

(i) **Skalares Dreierprodukt:** $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Geometrisch gesehen ist $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$ das Volumen eines Parallelepipeds, das durch \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} aufgespannt wird (ein Parallelepiped ist ein Körper mit sechs Begrenzungsflächen, bei dem gegenüberliegende Flächen jeweils parallel sind). Darin ist $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$ die Fläche der Basis und $|\mathbf{A} \cos \theta|$ ist dessen Höhe (Abbildung 1.12). Offenbar gilt

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (1.15)$$

denn sie entsprechen alle dem gleichen geometrischen Körper. Beachten Sie, dass die „alphabetische“ Reihenfolge erhalten bleibt, wenn man sich das „Alphabet“ zyklisch fortgesetzt denkt: $\mathbf{ABCABC} \dots$ – in der Schreibweise von Gleichung 1.6 haben die „nichtalphabetischen“ Dreierprodukte

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A})$$

jeweils das umgekehrte Vorzeichen. In Komponentenform lautet das Dreierprodukt

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

Beachten Sie, dass Punkt und Kreuz miteinander vertauscht werden können (dies folgt unmittelbar aus Gleichung 1.15):

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

Allerdings ist die Anordnung der Klammern von Bedeutung, denn ein Ausdruck wie $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ hat keinen Sinn: Sie können aus einem *Skalar* und einem Vektor kein Vektorprodukt bilden.

(ii) **Vektorielltes Dreierprodukt:** $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Das vektorielle Dreierprodukt wird durch die sogenannte **BAC-CAB**-Regel vereinfacht:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (1.17)$$

Beachten Sie, dass

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$$

ein völlig anderer Vektor ist. Übrigens lassen sich alle *höheren* Vektorprodukte auf ähnliche Weise vereinfachen, meist, indem Gleichung 1.17 mehrfach wiederholt wird. Daher braucht in einem beliebigen Ausdruck in jedem beliebigen Term nicht mehr als ein Vektorprodukt vorzukommen. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) ; \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})) &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) . \end{aligned} \quad (1.18)$$

■ Aufgabe 1.5

Beweisen Sie die **BAC-CAB**-Regel, indem Sie beide Seiten in Komponentenform ausschreiben.

■ Aufgabe 1.6

Beweisen Sie die Gleichung

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] + [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] + [\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = \mathbf{0} .$$

Unter welchen Bedingungen ist

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} ?$$

1.1.4 Orts-, Verschiebungs- und Verbindungsvektoren

Der Ort eines Punkts in drei Dimensionen kann mithilfe seiner kartesischen Koordinaten (x, y, z) beschrieben werden. Der Vektor vom Koordinatenursprung zu diesem Punkt (Abbildung 1.13) ist der sogenannte **Ortsvektor**:

$$\mathbf{r} \equiv x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} . \quad (1.19)$$

Für einen Ortsvektor benutze ich im gesamten Buch den Buchstaben \mathbf{r} . Sein Betrag

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.20)$$

ist der Abstand vom Koordinatenursprung, und

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.21)$$

ist der Einheitsvektor, der radial nach außen weist. Der infinitesimale **Verschiebungsvektor** von (x, y, z) nach $(x + dx, y + dy, z + dz)$ lautet

$$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}} . \quad (1.22)$$

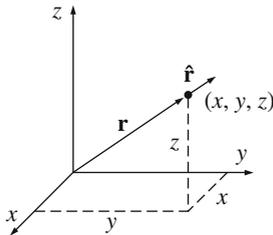


Abbildung 1.13

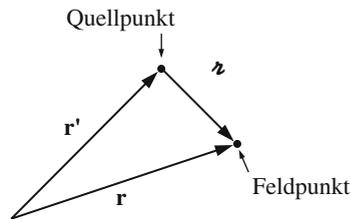


Abbildung 1.14

(Wir könnten ihn auch mit $d\mathbf{r}$ bezeichnen, denn darum handelt es sich eigentlich, allerdings ist es sinnvoll, für infinitesimale Verschiebungen einen besonderen Buchstaben vorzusehen.)

In der Elektrodynamik begegnen wir häufig Aufgabenstellungen, in denen zwei Positionen auftreten – üblicherweise ein Quellpunkt \mathbf{r}' , in dem sich eine elektrische Ladung befindet, und ein Feldpunkt \mathbf{r} , in dem Sie das elektrische oder magnetische Feld bestimmen müssen (Abbildung 1.14). Es ist sinnvoll, von Anfang an eine Kurzschreibweise für den **Verbindungsvektor** zwischen Quellpunkt und Feldpunkt festzulegen. Ich verwende dafür den Schreibschrift-Buchstaben \boldsymbol{z} :

$$\boldsymbol{z} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}' . \quad (1.23)$$

Sein Betrag ist

$$z = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| . \quad (1.24)$$

Der Einheitsvektor in der Richtung von \mathbf{r}' nach \mathbf{r} ist

$$\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\boldsymbol{z}}{z} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (1.25)$$

In kartesischen Koordinaten sehen diese drei Größen folgendermaßen aus:

$$\boldsymbol{z} = (x - x') \hat{\mathbf{x}} + (y - y') \hat{\mathbf{y}} + (z - z') \hat{\mathbf{z}} , \quad (1.26)$$

$$z = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} , \quad (1.27)$$

$$\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{(x - x') \hat{\mathbf{x}} + (y - y') \hat{\mathbf{y}} + (z - z') \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} . \quad (1.28)$$

(Gerade anhand dieser Darstellungen erkennen Sie sicher die Vorteile der z -Schreibweise.)

■ Aufgabe 1.7

Suchen Sie den Verbindungsvektor \boldsymbol{z} zwischen dem Quellpunkt $(2, 8, 7)$ und dem Feldpunkt $(4, 6, 8)$. Bestimmen Sie seinen Betrag (z) und konstruieren Sie den Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{z}}$.

1.1.5 Wie sich Vektoren transformieren²

Die Definition eines Vektors als einer „Größe mit Betrag und Richtung“ ist nicht völlig befriedigend. Was genau *bedeutet* „Richtung“? Vielleicht erscheint diese Frage pedantisch, aber wir werden in Kürze einer Reihe von Ableitungen begegnen, die große *Ähnlichkeit* mit einem Vektor haben, und bei denen wir sicher gehen wollen, dass sie auch Vektoren *sind*. Vielleicht neigen Sie zu der Ansicht, dass ein Vektor etwas ist, das drei Komponenten besitzt, die sich bei der Addition richtig verhalten. Betrachten wir Folgendes: Wir haben eine Kiste mit Früchten, in der sich N_x Birnen, N_y Äpfel und N_z Bananen befinden. Ist $\mathbf{N} = N_x \hat{\mathbf{x}} + N_y \hat{\mathbf{y}} + N_z \hat{\mathbf{z}}$ ein Vektor? Die Größe besitzt drei Komponenten, und wenn Sie eine weitere Kiste mit M_x Birnen, M_y Äpfeln und M_z Bananen hinzufügen, erhalten Sie $(N_x + M_x)$ Birnen, $(N_y + M_y)$ Äpfel und $(N_z + M_z)$ Bananen. Also *addiert* sich die Größe auch wie ein Vektor. Allerdings ist sie offensichtlich im physikalischen Sinn *kein* Vektor, denn sie besitzt keine Richtung. Was also ist an ihr falsch?

Die Antwort besteht darin, dass sich \mathbf{N} nicht korrekt transformiert, wenn Sie das Koordinatensystem ändern. Das Koordinatensystem, mit dem wir Positionen im Raum beschreiben, ist natürlich völlig willkürlich. Es gibt allerdings eine bestimmte geometrische Transformationsregel, mit dem Vektorkomponenten von einem Koordinatensystem in ein anderes übertragen werden. Nehmen Sie beispielsweise an, das System $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sei um den Winkel φ um die gemeinsame Achse $x = \bar{x}$ gegenüber dem x, y, z -System gedreht. Der Abbildung 1.15 entnehmen wir

$$A_y = A \cos \theta, \quad A_z = A \sin \theta$$

und außerdem

$$\begin{aligned} \bar{A}_y &= A \cos \bar{\theta} = A \cos(\theta - \varphi) = A(\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) \\ &= \cos \varphi A_y + \sin \varphi A_z, \\ \bar{A}_z &= A \sin \bar{\theta} = A \sin(\theta - \varphi) = A(\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi) \\ &= \sin \varphi A_y - \cos \varphi A_z. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise lautet dieser Ausdruck:

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ A_z \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

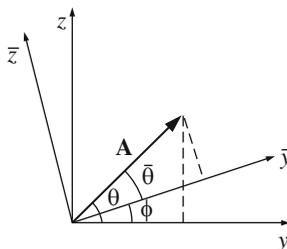


Abbildung 1.15

² Dieser Abschnitt kann ohne Weiteres übersprungen werden.

Das Transformationsgesetz für eine Rotation um eine *beliebige* Achse in drei Dimensionen lautet ganz allgemein

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_x \\ \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Dies können wir folgendermaßen noch kompakter formulieren:

$$\bar{A}_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} A_j. \quad (1.31)$$

Der Index 1 steht darin für x , die 2 steht für y und die 3 für z . Die Elemente der Matrix \mathbf{R} können für eine gegebene Rotation durch dieselben geometrischen Argumente bestimmt werden, die wir für die Rotation um die x -Achse eingesetzt haben.

Kehren wir zu unserer ursprünglichen Frage zurück: Transformieren sich die Komponenten von \mathbf{N} *tatsächlich* auf diese Weise? Natürlich nicht – welche Koordinaten Sie auch immer zur Darstellung von Positionen im Raum verwenden, die Zahl der Äpfel in der Kiste ändert sich nicht. Sie können durch eine andere Wahl der Achsen keine Birne in eine Banane umwandeln, allerdings *können* Sie bei einem Vektor A_x in \bar{A}_y umwandeln. Formal ist daher ein Vektor *jedes Gebilde aus drei Komponenten, das sich bei Koordinatenänderung auf dieselbe Weise transformiert wie eine Verschiebung*.³ Wie immer, bildet auch hier die *Verschiebung* das Modell für das Verhalten aller Vektoren.⁴

Übrigens: Ein Tensor (zweiter Stufe) ist eine Größe mit *neun* Komponenten $T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yx}, \dots, T_{zz}$, die anhand *zweier* Faktoren R transformiert wird:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{xx} = & R_{xx} (R_{xx} T_{xx} + R_{xy} T_{xy} + R_{xz} T_{xz}) \\ & + R_{xy} (R_{xx} T_{yx} + R_{xy} T_{yy} + R_{xz} T_{yz}) \\ & + R_{xz} (R_{xx} T_{zx} + R_{xy} T_{zy} + R_{xz} T_{zz}) \dots \end{aligned}$$

oder in der kompakten Schreibweise:

$$\bar{T}_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 R_{ik} R_{jl} T_{kl}. \quad (1.32)$$

3 Ein Skalar ändert sich nicht, wenn Sie die Koordinaten verändern. Insbesondere sind die Komponenten eines Vektors keine Skalare; seine Länge dagegen schon. Die Aussage gilt natürlich auch für höherdimensionale Koordinatensysteme, die mehr als drei Basisvektoren besitzen.

4 Falls Sie Mathematiker sind, möchten Sie sich vielleicht auch verallgemeinerte Vektorräume anschauen. Dort haben die „Achsen“ nichts mit Richtungen zu tun und die Basisvektoren lauten nicht mehr \hat{x} , \hat{y} und \hat{z} (es kann auch mehr als drei Dimensionen geben). Das ist das Thema der **linearen Algebra**. Für unsere Zwecke leben alle Vektoren im üblichen dreidimensionalen Raum (bzw. in Kapitel 12 in der vierdimensionalen Raumzeit).

Im Allgemeinen hat ein Tensor n -ter Stufe n Indizes und 3^n Komponenten und transformiert sich mit n Faktoren von R . In dieser Ordnung ist ein Vektor ein Tensor erster Stufe, und ein Skalar ist ein Tensor nullter Stufe.⁵

■ Aufgabe 1.8

- a. Beweisen Sie, dass die zweidimensionale Rotationsmatrix (1.29) Skalarprodukte erhält. (Mit anderen Worten, zeigen Sie, dass $\bar{A}_y\bar{B}_y + \bar{A}_z\bar{B}_z = A_yB_y + A_zB_z$.)
- b. Welche Bedingungen müssen die Komponenten (R_{ij}) der dreidimensionalen Rotationsmatrix (1.30) erfüllen, damit sich die Länge von \mathbf{A} (für alle beliebigen Vektoren \mathbf{A}) nicht ändert?

■ Aufgabe 1.9

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix R , welche eine Rotation um 120° um eine Achse vom Ursprung durch den Punkt $(1, 1, 1)$ beschreibt. Wenn Sie entlang der Achse zum Ursprung blicken, verläuft die Rotation im Uhrzeigersinn.

■ Aufgabe 1.10

- a. Wie transformieren sich die Komponenten eines Vektors⁶ bei **Verschiebung** der Koordinaten ($\bar{x} = x$, $\bar{y} = y - a$, $\bar{z} = z$, Abbildung 1.16a)?
- b. Wie transformieren sich die Komponenten eines Vektors bei **Inversion** der Koordinaten ($\bar{x} = -x$, $\bar{y} = -y$, $\bar{z} = -z$, Abbildung 1.16b)?

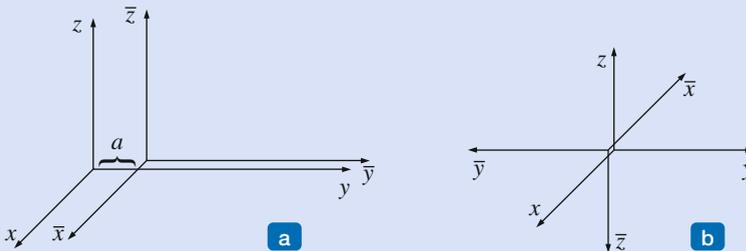


Abbildung 1.16

- 5 Anschaulich betrachtet ist ein Tensor eine mehrdimensionale Matrix, was zur genannten Hierarchie führt. Physikalisch betrachtet ist ein Tensor eine lineare Abbildung, die unter Transformationen ein spezielles Verhalten zeigt: Sie verändert sich nicht bei Verschiebungen des Koordinatensystems und transformiert sich bei Koordinatendrehungen wie ein Vektor. A. d. Ü.
- 6 *Vorsicht:* Der Vektor \mathbf{r} (Gleichung 1.19) weist von einem bestimmten Punkt im Raum (dem Ursprung \mathcal{O}) zum Punkt $P = (x, y, z)$. Bei einer Transformation befindet sich der neue Ursprung ($\tilde{\mathcal{O}}$) an einer anderen Stelle, und der Pfeil von $\tilde{\mathcal{O}}$ zu P ist ein ganz anderer Vektor. Der ursprüngliche Vektor \mathbf{r} weist immer noch von $\tilde{\mathcal{O}}$ nach P , egal mit welchen Koordinaten Sie diese Punkte bezeichnen.

- c.** Wie transformiert sich das Kreuzprodukt (1.13) zweier Vektoren bei Inversion? (Wegen dieses „anormalen“ Verhaltens wird das Kreuzprodukt zweier Vektoren korrekterweise auch als **Pseudovektor** bezeichnet.) Ist das Kreuzprodukt zweier Pseudovektoren ein Vektor oder ein Pseudovektor? Nennen Sie zwei Größen der klassischen Mechanik, die Pseudovektoren sind.
- d.** Wie transformiert sich das skalare Dreierprodukt dreier Vektoren bei Inversion? (Ein solches Objekt wird als **Pseudoskalar** bezeichnet.)

1.2 Differentialrechnung

1.2.1 „Gewöhnliche“ Ableitungen

Frage: Angenommen, wir haben eine Funktion einer Variablen: $f(x)$. Was kann uns die Ableitung df/dx sagen?

Antwort: Wir können daraus entnehmen, wie schnell sich die Funktion $f(x)$ verändert, wenn wir das Argument x um einen winzigen Betrag dx verändern:

$$df = \left(\frac{df}{dx} \right) dx. \quad (1.33)$$

Mit anderen Worten: Wenn wir x um den Betrag dx verändern, dann ändert sich f entsprechend um den Betrag df . Die Ableitung stellt dabei den Proportionalitätsfaktor dar. In Abbildung 1.17a verändert sich z. B. die Funktion bei kleinen Änderungen von x ebenfalls nur wenig, die Ableitung ist daher nur klein. In Abbildung 1.17b ändert sich f schnell mit x , und die Ableitung wird, sobald Sie sich von $x = 0$ entfernen, immer größer.

Geometrische Interpretation: Die Ableitung df/dx ist die *Steigung* des Graphen von $f(x)$.

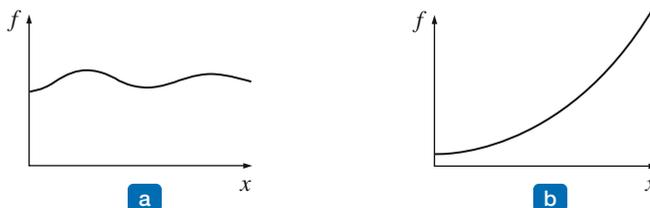


Abbildung 1.17

1.2.2 Gradient

Nehmen wir nun an, wir hätten eine Funktion von *drei* Variablen, beispielsweise die Temperatur $T(x, y, z)$ in einem Zimmer. (Wir beginnen dazu in einer Ecke und erstellen ein Achsenkreuz. Dann ist für jeden Punkt (x, y, z) des Raums die Temperatur

an diesem Punkt durch T gegeben.) Wir wollen nun die Schreibweise der „Ableitungen“ auf Funktionen wie T verallgemeinern, die nicht von *einer*, sondern von *drei* Koordinaten abhängen.

Durch die Ableitung erfahren wir, wie schnell sich die Funktion verändert, wenn wir den Ort geringfügig verändern. Bei dreidimensionalen Funktionen ist die Situation komplizierter, denn das Resultat hängt davon ab, in welche Richtung wir uns bewegen: Wenn wir uns direkt nach oben bewegen, steigt die Temperatur vermutlich recht schnell an, wenn wir uns aber horizontal bewegen, verändert sie sich kaum. Tatsächlich hat die Frage „Wie schnell ändert sich T ?“ unendliche viele Antworten, eine für jede Richtung, die wir untersuchen.

Glücklicherweise ist das Problem nicht so schlimm, wie es scheinen mag. Nach dem Satz über **partielle Ableitungen** gilt

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz. \quad (1.34)$$

Wir erfahren damit, wie sich T verändert, wenn wir alle drei Variablen um einen infinitesimal geringen Betrag dx , dy , dz verschieben. Beachten Sie, dass wir keine unendlich große Zahl von Ableitungen benötigen – *drei* Stück genügen: die *partiellen* Ableitungen entlang jeder der drei Richtungen der Koordinaten.

Gleichung 1.34 erinnert an ein Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} dT &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot (dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}) \\ &= (\nabla T) \cdot (d\mathbf{l}), \end{aligned} \quad (1.35)$$

wobei

$$\nabla T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \quad (1.36)$$

der **Gradient** von T ist. ∇T ist eine Vektorgröße mit drei Komponenten. Sie ist die verallgemeinerte Ableitung, nach der wir gesucht haben. Gleichung 1.35 ist daher die dreidimensionale Version von Gleichung 1.33.

Geometrische Interpretation des Gradienten: Wie jeder Vektor hat der Gradient einen Betrag und eine Richtung. Um seine geometrische Bedeutung zu erkennen, schreiben wir das Skalarprodukt 1.35 in abstrakter Form mittels Gleichung 1.1:

$$dT = \nabla T \cdot d\mathbf{l} = |\nabla T| |d\mathbf{l}| \cos \theta. \quad (1.37)$$

Darin ist θ der Winkel zwischen ∇T und $d\mathbf{l}$. Wenn wir nun den Betrag $|d\mathbf{l}|$ festhalten und in verschiedenen Richtungen suchen (also θ verändern), dann tritt die größte Änderung von T offensichtlich bei $\theta = 0$ auf (dort gilt $\cos \theta = 1$). Bei festgehaltener Strecke $|d\mathbf{l}|$ ist dT also am größten, wenn man sich in *derselben* Richtung bewegt wie ∇T . Daher gilt:

Der Gradient ∇T zeigt in die Richtung des größten Anstiegs der Funktion T .

Darüber hinaus gilt:

Der Betrag $|\nabla T|$ gibt die Steigung entlang dieser Richtung größten Anstiegs an.

Stellen Sie sich vor, Sie stehen auf der Kuppe eines Hügels. Sehen Sie sich um und suchen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs. Dies ist die *Richtung* des Gradienten. Messen Sie nun die Steigung in dieser Richtung (also die Höhendifferenz pro (in die x - y -Ebene projizierte) Längeneinheit). Dies ist der *Betrag* des Gradienten. (In unserem Beispiel ist die Funktion, von der wir reden, die Höhe des Hügels, und die Koordinaten sind Orte, z. B. Länge und Breite. Diese Funktion hängt zwar nur von *zwei* Variablen ab, nicht von *drei*, allerdings ist die geometrische Bedeutung des Gradienten in zwei Dimensionen leichter zu erfassen.) Wie Gleichung 1.37 zeigt, verläuft die Richtung des größten *Absinkens* entgegengesetzt zur Richtung des größten *Anstiegs*, während rechtwinklig davon ($\theta = 90^\circ$) die Steigung null ist (denn der Gradient verläuft rechtwinklig zu den Höhenlinien). Sie können sich Flächen ausdenken, die nicht diese Eigenschaften aufweisen, allerdings enthalten sie immer „Sprünge“ und werden von nicht differenzierbaren Funktionen beschrieben.

Was bedeutet es, wenn der Gradient verschwindet? Wenn $\nabla T = 0$ am Ort (x, y, z) gilt, dann ist für kleine Auslenkungen um den Punkt (x, y, z) auch $dT = 0$. Es handelt sich daher um einen **stationären Punkt** der Funktion $T(x, y, z)$. Dabei könnte es sich sowohl um ein Maximum (einen Gipfel), ein Minimum (ein Tal), einen Sattelpunkt (Pass) oder eine Schulter handeln. Dies entspricht der Situation bei Funktionen einer Variablen, bei der eine verschwindende Ableitung ein Maximum, ein Minimum oder einen Wendepunkt anzeigt. Wenn Sie also die Extremwerte einer Funktion von drei Variablen bestimmen wollen, müssen Sie deren Gradienten gleich null setzen.

Beispiel 1.3: Gradientenbestimmung

Bestimmen Sie den Gradienten von $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ (der Betrag des Ortsvektors).

Lösung:

$$\begin{aligned} \nabla r &= \frac{\partial r}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial r}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Ist das sinnvoll? Offenbar ja, denn die Gleichung besagt, dass die Entfernung vom Ursprung in radialer Richtung am schnellsten ansteigt, und dass die Rate des Anstiegs in dieser Richtung 1 beträgt – also genau das, was wir erwartet haben.

■ Aufgabe 1.11

Bestimmen Sie die Gradienten der folgenden Funktionen:

a. $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$.

b. $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$.

c. $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$.

■ Aufgabe 1.12

Die Höhe eines bestimmten Hügels (in Metern) wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12),$$

wobei y die Entfernung (in Kilometern) nördlich von Rosenheim und x die Entfernung östlich von Rosenheim ist.

a. Wo befindet sich der Gipfel des Hügels?

b. Wie hoch ist der Hügel?

c. Wie steil ist der Anstieg (in Metern pro Kilometer) an einem Punkt, der sich einen Kilometer nördlich und einen Kilometer östlich von Rosenheim befindet? In welcher Richtung ist an diesem Punkt die Steigung am größten?

■ Aufgabe 1.13

Sei \mathbf{r} der Verbindungsvektor zwischen einem festen Punkt (x', y', z') und dem Punkt (x, y, z) , und r dessen Länge. Zeigen Sie, dass

a. $\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}$.

b. $\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$.

c. Wie lautet die *allgemeine* Formel für $\nabla(r^n)$?

! ■ Aufgabe 1.14

Nehmen Sie an, f sei eine Funktion von nur zwei Variablen (y und z). Zeigen Sie, dass der Gradient $\nabla f = (\partial f/\partial y)\hat{\mathbf{y}} + (\partial f/\partial z)\hat{\mathbf{z}}$ sich entsprechend Gleichung 1.29 bei Rotation wie ein Vektor transformiert. (*Hinweis:* $(\partial f/\partial \bar{y}) = (\partial f/\partial y)(\partial y/\partial \bar{y}) + (\partial f/\partial z)(\partial z/\partial \bar{y})$, und ein entsprechender Ausdruck gilt für $(\partial f/\partial \bar{z})$). Wir wissen, dass $\bar{y} = y \cos \varphi + z \sin \varphi$ und $\bar{z} = -y \sin \varphi + z \cos \varphi$ sind. „Lösen“ Sie diese Gleichungen nach y und z (als Funktionen von \bar{y} und \bar{z}) auf und berechnen Sie danach die notwendigen Ableitungen $\partial y/\partial \bar{y}$, $\partial z/\partial \bar{y}$ usw.)

1.2.3 Der Operator ∇

Der Gradient hat das formale Erscheinungsbild eines Vektors (nämlich ∇), der mit einem Skalar T „multipliziert“ wird:

$$\nabla T = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) T \quad (1.38)$$

(dieses eine Mal schreibe ich die Einheitsvektoren auf die linke Seite, damit niemand auf den Gedanken kommt, ich wollte $\partial \hat{x} / \partial x$ usw. berechnen – das wäre nämlich null, da \hat{x} konstant ist.) Der Term in Klammern wird als „**Nabla**“ bezeichnet⁷:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} . \quad (1.39)$$

Natürlich ist Nabla *kein* Vektor im üblichen Sinn. Tatsächlich ist die Größe ohne besondere Bedeutung, solange wir zu ihr keine Funktion hinzufügen, auf die sie angewendet werden kann. Darüber hinaus „multipliziert“ sie T nicht, sie ist vielmehr eine Anweisung, dass der folgende Ausdruck zu *differenzieren* ist. Um genau zu sein, müssten wir also sagen, dass ∇ ein **Vektoroperator** ist, der *auf T wirkt*, keineswegs aber ein Vektor, der mit T multipliziert wird.

Trotz dieser Klarstellung ahmt ∇ in fast jeder Hinsicht das Verhalten eines normalen Vektors nach. Fast alles, was mit anderen Vektoren durchgeführt werden kann, lässt sich auch mit ∇ durchführen, sofern wir nur „multiplizieren“ durch die Formulierung „darauf wirken“ ersetzen. Nehmen Sie also das Erscheinungsbild von ∇ als Vektor durchaus ernst. Es ist ein herausragendes Beispiel einer vereinfachten Schreibweise. Sie werden das unter anderem dann zu schätzen lernen, wenn Sie jemals Maxwells Originalarbeiten über Elektromagnetismus lesen sollten, die völlig ohne den Vorteil von ∇ verfasst wurden.

Ein gewöhnlicher Vektor \mathbf{A} kann auf dreierlei Weise multipliziert werden:

1. **Multiplikation mit einem Skalar a : Aa ,**
2. **Skalarmultiplikation mit einem anderen Vektor \mathbf{B} : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$,**
3. **Vektormultiplikation mit einem anderen Vektor: $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.**

Entsprechend gibt es drei Möglichkeiten, wie der Nabla-Operator angewendet werden kann:

1. **auf eine Skalarfunktion T : ∇T (der Gradient),**
2. **mittels Skalarprodukt auf eine Vektorfunktion \mathbf{v} : $\nabla \cdot \mathbf{v}$ (die Divergenz),**
3. **mittels Vektorprodukt auf eine Vektorfunktion \mathbf{v} : $\nabla \times \mathbf{v}$ (die Rotation).**

⁷ Die Bezeichnung „Nabla“ stammt von dem Physiker und Theologen William Robertson Smith (1846–1894), den die Form des Zeichens an eine antike Harfe (griechisch $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ nábla) erinnerte. In der englischsprachigen Literatur heißt diese Funktion „**del**“ (hergeleitet von dem (auf dem Kopf stehenden) griechischen Buchstaben Delta). A. d. Ü.

Den Gradienten haben wir bereits diskutiert. In den folgenden Abschnitten befassen wir uns näher mit den beiden anderen vektoriellen Ableitungen, der Divergenz und der Rotation.

1.2.4 Die Divergenz

Aus der Definition von ∇ bilden wir die Divergenz durch

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (1.40)$$

Wie Sie sehen können, ist die Divergenz einer Vektorfunktion⁸ \mathbf{v} selbst ein Skalar $\nabla \cdot \mathbf{v}$.

Geometrische Deutung: Der Name *Divergenz* (von lateinisch *divergere*, auseinanderstreben) ist gut gewählt, denn $\nabla \cdot \mathbf{v}$ ist ein Maß für die „Spreizung“ des Vektors \mathbf{v} am gewählten Punkt. Die Vektorfunktion in Abbildung 1.18a hat beispielsweise eine große (positive) Divergenz. (Würden die Pfeile nach innen deuten, hätte sie eine große *negative* Divergenz.) Die Divergenz der Funktion aus Abbildung 1.18b ist null, und die Funktion aus Abbildung 1.18c weist wieder eine positive Divergenz auf. (Beachten Sie bitte, dass \mathbf{v} hier eine Funktion darstellt – jeder Punkt des Raums ist mit einem anderen Vektor verknüpft. In den Diagrammen kann ich natürlich nur an einigen wenigen ausgewählten Punkten Pfeile einzeichnen.) Stellen Sie sich vor, Sie ständen am Rand eines Teichs. Werfen Sie etwas Sägemehl oder eine Handvoll Tannennadeln auf die Wasseroberfläche. Wenn sich das Material ausbreitet, haben Sie es an einem Punkt mit positiver Divergenz ausgestreut. Sammelt es sich jedoch an, haben Sie es jedoch an einem Punkt mit negativer Divergenz verteilt. (Die Vektorfunktion \mathbf{v} entspricht in diesem Modell der Geschwindigkeit des Wassers – es handelt sich um ein *zweidimensionales* Beispiel, das aber dazu beiträgt, ein Gefühl für

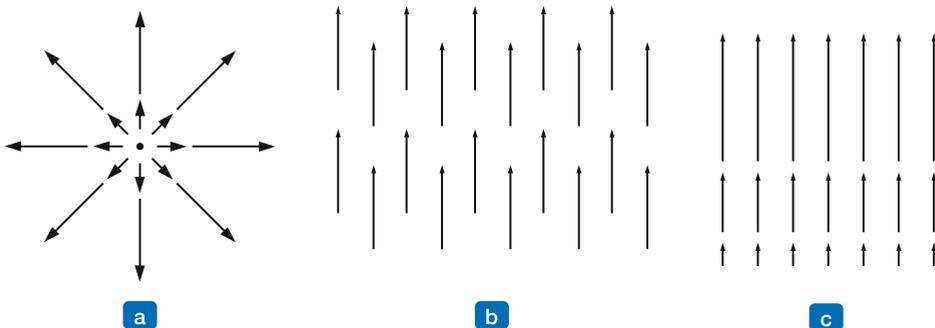


Abbildung 1.18

⁸ Eine Vektorfunktion $\mathbf{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + v_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + v_z(x, y, z)\hat{\mathbf{z}}$ setzt sich in Wirklichkeit aus *drei* Funktionen zusammen – eine für jede Komponente. So etwas wie die Divergenz eines Skalars gibt es nicht.

die Bedeutung der Divergenz zu entwickeln. Ein Punkt mit positiver Divergenz ist eine *Quelle*, ein Punkt mit negativer Divergenz ist eine *Senke*.)

Beispiel 1.4: Berechnung der Divergenz

Nehmen Sie an, die in Abbildung 1.18 dargestellten Funktionen wären $\mathbf{v}_a = \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{v}_b = \hat{\mathbf{z}}$ und $\mathbf{v}_c = z\hat{\mathbf{z}}$. Berechnen Sie deren Divergenzen.

Lösung:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_a = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Wie angedeutet, hat diese Funktion die erwartete positive Divergenz.

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_b = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0 + 0 + 0 = 0,$$

wie erwartet. Für die Divergenz von \mathbf{v}_c finden wir:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_c = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 0 + 0 + 1 = 1.$$

■ Aufgabe 1.15

Berechnen Sie die Divergenz der folgenden Vektorfunktionen:

a. $\mathbf{v}_a = x^2\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\hat{\mathbf{y}} - 2xz\hat{\mathbf{z}}$,

b. $\mathbf{v}_b = xy\hat{\mathbf{x}} + 2yz\hat{\mathbf{y}} + 3zx\hat{\mathbf{z}}$,

c. $\mathbf{v}_c = y^2\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + 2yz\hat{\mathbf{z}}$.

■ Aufgabe 1.16

Skizzieren Sie die Vektorfunktion

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

und berechnen Sie ihre Divergenz. Die Antwort wird Sie überraschen – können Sie sie erläutern?

! ■ Aufgabe 1.17

Zeigen Sie im Zweidimensionalen, dass sich die Divergenz unter Rotation wie ein Skalar transformiert. (*Hinweis:* Bestimmen Sie anhand von Gleichung 1.29 \bar{v}_y und \bar{v}_z und wenden Sie die Methode aus Aufgabe 1.14 an, um die Ableitungen zu berechnen. Sie müssen zeigen, dass $\partial\bar{v}_y/\partial\bar{y} + \partial\bar{v}_z/\partial\bar{z} = \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z$.)

1.2.5 Die Rotation

Gemäß der Definition von ∇ bilden wir die Rotation durch

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Beachten Sie, dass die Rotation einer Vektorfunktion \mathbf{v} , wie jedes Kreuzprodukt, einen *Vektor* darstellt.⁹

Geometrische Interpretation: Auch die Bezeichnung *Rotation* ist eine gute Wahl, denn $\nabla \times \mathbf{v}$ ist ein Maß dafür, wie sehr sich der Vektor \mathbf{v} um einen bestimmten Punkt herum windet oder „rotiert“. Daher weisen alle drei Funktionen aus Abbildung 1.18 die Rotation null auf (wie Sie selbst leicht nachprüfen können). Die Funktionen aus Abbildung 1.19 haben hingegen eine erkennbare Rotation, die – entsprechend der Rechte-Hand-Regel – in z-Richtung weist. Stellen Sie sich wieder vor, am Rand eines Teichs zu stehen. Lassen Sie ein kleines Turbinenrad treiben (es genügt bereits ein Korken mit Zahnstochern, die radial nach außen weisen). Wenn es zu rotieren beginnt, haben Sie es an einem Punkt ausgesetzt, an dem die *Rotation* nicht null ist. Ein Wirbel wäre ein Gebiet hoher Rotation.

Beispiel 1.5: Berechnung der Rotation

Nehmen Sie an, die in Abbildung 1.19a skizzierte Funktion wäre $\mathbf{v}_a = -y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}$, und die in Abbildung 1.19b dargestellte Funktion wäre $\mathbf{v}_b = x\hat{\mathbf{y}}$. Berechnen Sie die Rotationen.

Lösung:

$$\nabla \times \mathbf{v}_a = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{\mathbf{z}}$$

und

$$\nabla \times \mathbf{v}_b = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{z}}.$$

Wie erwartet, weisen diese Rotationen in die positive z-Richtung. (Übrigens ist ihre Divergenz null, was Sie anhand der Abbildung vermuten konnten, denn dort „breitet sich nichts aus“, sondern „dreht sich nur im Kreis“.)

⁹ Es ist hingegen sinnlos, die Rotation eines Skalars zu berechnen.

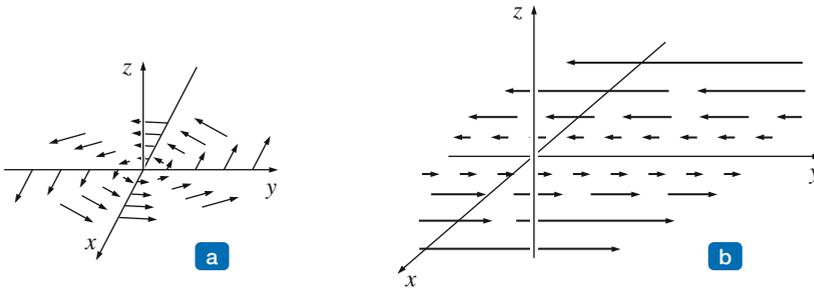


Abbildung 1.19

■ Aufgabe 1.18

Berechnen Sie die Rotation der Vektorfunktionen aus Aufgabe 1.15.

■ Aufgabe 1.19

Zeichnen Sie einen Kreis in der x - y -Ebene. Tragen Sie ferner an ein paar repräsentativen Punkten den zum Kreis tangentialen Vektor \mathbf{v} ein, und zwar so, dass er im Uhrzeigersinn weist. Bestimmen Sie das Vorzeichen von $\partial v_x / \partial y$ und $\partial v_y / \partial x$, indem Sie benachbarte Vektoren vergleichen. In welche Richtung zeigt dann nach Gleichung 1.41 der Vektor $\nabla \times \mathbf{v}$? Erklären Sie, wie dieses Beispiel die geometrische Deutung der Rotation illustriert.

■ Aufgabe 1.20

Konstruieren Sie eine Vektorfunktion, deren Divergenz und deren Rotation überall null sind. (Natürlich würde eine Konstante ausreichen. Finden Sie bitte eine etwas interessantere Lösung!)

1.2.6 Produktregeln

Die Berechnung gewöhnlicher Ableitungen wird durch eine Reihe allgemeiner Rechenregeln erleichtert, beispielsweise durch die **Summenregel**

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx},$$

die **Faktorregel** für die Multiplikation mit einer Konstanten

$$\frac{d}{dx}(kf) = k \frac{df}{dx},$$

die **Produktregel**

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx},$$

und die **Quotientenregel**

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

Für die Ableitungen von Vektoren gelten ähnliche Beziehungen. Daher ist, wie Sie leicht nachprüfen können:

$$\begin{aligned}\nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g, \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{B}), \\ \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

und

$$\nabla(kf) = k\nabla f, \quad \nabla \cdot (k\mathbf{A}) = k(\nabla \cdot \mathbf{A}), \quad \nabla \times (k\mathbf{A}) = k(\nabla \times \mathbf{A}).$$

Die Produktregeln sind nicht ganz so einfach. Es gibt zwei Möglichkeiten, einen Skalar als Produkt zweier Funktionen darzustellen:

$$\begin{aligned}fg &\text{ (das Produkt zweier Skalarfunktionen)} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &\text{ (das Skalarprodukt zweier Vektorfunktionen).}\end{aligned}$$

Außerdem gibt es zwei Möglichkeiten, einen Vektor zu erzeugen:

$$\begin{aligned}f\mathbf{A} &\text{ (das Produkt eines Skalars mit einem Vektor)} \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &\text{ (das Kreuzprodukt zweier Vektoren).}\end{aligned}$$

Dementsprechend gibt es **sechs** Produktregeln, jeweils zwei für den Gradienten, für die Divergenz und für die Rotation.

Produktregeln für den Gradienten:

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad \nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f; \\ \text{(ii)} \quad \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}.\end{aligned}$$

Produktregeln für die Divergenz:

$$\begin{aligned}\text{(iii)} \quad \nabla(f\mathbf{A}) &= f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f); \\ \text{(iv)} \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}).\end{aligned}$$

Produktregeln für die Rotation:

$$\begin{aligned}\text{(v)} \quad \nabla \times (f\mathbf{A}) &= f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f); \\ \text{(vi)} \quad \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}).\end{aligned}$$

Sie werden diese Produktregeln noch so häufig einsetzen müssen, dass ich sie auf der inneren Umschlagseite wiederhole, auf der sie schnell gefunden werden können. Die Beweise beruhen direkt auf der Produktregel für gewöhnliche Ableitungen. Beispielsweise ist:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (f\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}A_x + f \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}A_y + f \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}A_z + f \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &= (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A}).\end{aligned}$$

Darüber hinaus können drei Quotientenregeln formuliert werden:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\frac{f}{g} \right) &= \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}, \\ \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{A}}{g} \right) &= \frac{g (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla g)}{g^2}, \\ \nabla \times \left(\frac{\mathbf{A}}{g} \right) &= \frac{g (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla g)}{g^2}.\end{aligned}$$

Da diese allerdings schnell aus den entsprechenden Produktregeln abgeleitet werden können, habe ich darauf verzichtet, sie ebenfalls auf der Umschlaginnenseite zu wiederholen.

■ Aufgabe 1.21

Beweisen Sie die Produktregeln (i), (iv) und (v).

■ Aufgabe 1.22

- a.** Wenn \mathbf{A} und \mathbf{B} zwei Vektorfunktionen sind, was bedeutet dann der Ausdruck $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$? (Was sind also die x -, y - und z -Komponenten der kartesischen Komponenten von \mathbf{A} , \mathbf{B} und ∇ ?)
- b.** Berechnen Sie $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}}$, wobei $\hat{\mathbf{r}}$ der in Gleichung 1.21 definierte Einheitsvektor ist.
- c.** Berechnen Sie $(\mathbf{v}_a \cdot \nabla)\mathbf{v}_b$ für die Funktionen aus Aufgabe 1.15.

■ Aufgabe 1.23

(Nur für Masochisten!) Beweisen Sie die Produktregeln (ii) und (vi). Verwenden Sie die Definition von $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ aus Aufgabe 1.22.

■ Aufgabe 1.24

Leiten Sie die drei Quotientenregeln her.

■ Aufgabe 1.25

- a.** Überprüfen Sie die Produktregel (iv) (indem Sie jeden Term einzeln berechnen) für die Funktionen $\mathbf{A} = x\hat{\mathbf{x}} + 2y\hat{\mathbf{y}} + 3z\hat{\mathbf{z}}$; $\mathbf{B} = 3y\hat{\mathbf{x}} - 2x\hat{\mathbf{y}}$.
- b.** Wiederholen Sie das für die Produktregel (ii).
- c.** Wiederholen Sie das für die Produktregel (vi).

1.2.7 Zweite Ableitungen

Gradient, Divergenz und Rotation sind die einzigen ersten Ableitungen, die wir mit ∇ berechnen können. Wenden wir ∇ aber *zwei Mal* an, können wir fünf verschiedene

zweite Ableitungen bestimmen. Der Gradient ∇T ist ein Vektor, weshalb wir von ihm die *Divergenz* und *Rotation* bestimmen können.

- (1) Divergenz des Gradienten: $\nabla \cdot (\nabla T)$.
- (2) Rotation des Gradienten: $\nabla \times (\nabla T)$.

Die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{v}$ ist ein *Skalar*, daher können wir lediglich seinen *Gradienten* bestimmen:

- (3) Gradient der Divergenz: $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$.

Da die Rotation $\nabla \times \mathbf{v}$ ein *Vektor* ist, können wir dessen *Divergenz* und *Rotation* bestimmen:

- (4) Divergenz der Rotation: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$.
- (5) Rotation der Rotation: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$.

Damit sind unsere Möglichkeiten ausgeschöpft, und genau betrachtet liefern nicht alle dieser Operationen etwas Neues. Betrachten wir eine nach der anderen:

$$\begin{aligned} (1) \quad \nabla \cdot (\nabla T) &= \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Diese Größe, die wir kurz als $\nabla^2 T$ schreiben, wird als **Laplace-Operator** von T bezeichnet¹⁰. Wir werden ihn später noch ausführlich behandeln. Beachten Sie, dass der Laplace-Operator eines *Skalars* T wieder ein *Skalar* ist. Bisweilen werden wir auch den Laplace-Operator eines *Vektors* $\nabla^2 \mathbf{v}$ bestimmen. Darunter verstehen wir eine *Vektorgröße*, deren x -Komponente der Laplace-Operator von v_x ist, usw.¹¹:

$$\nabla^2 \mathbf{v} \equiv \left(\nabla^2 v_x \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\nabla^2 v_y \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\nabla^2 v_z \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.43)$$

Dies ist nichts anderes als eine bequeme Erweiterung der Bedeutung von ∇^2 .

- (2) Die **Rotation eines Gradienten** ist immer *null*:

$$\nabla \times (\nabla T) = 0. \quad (1.44)$$

Diese wichtige Aussage werden wir noch oft verwenden. Sie können sie anhand der Definition von ∇ in Gleichung 1.39 einfach beweisen. Aber *Vorsicht*: Sie sind vielleicht der Ansicht, dass Gleichung 1.44 „offensichtlich“ richtig ist – schließlich scheint es sich einfach um $(\nabla \times \nabla)T$ zu handeln, und das Kreuzprodukt *jedes* Vektors (in diesem Fall ∇) mit sich selbst ist ja immer null.

¹⁰ Oft bezeichnet man ihn auch kurz als „der Laplace von ...“. A. d. Ü.

¹¹ In krummlinigen Koordinaten, in denen die Basisvektoren selbst von der Position abhängen, müssen diese ebenfalls differenziert werden (siehe Abschnitt 1.4.1).

Diese Deutung drängt sich zwar auf, ist aber keineswegs *schlüssig*, denn ∇ ist ein *Operator* und kann nicht auf „normale“ Weise multipliziert werden. Der Beweis von Gleichung 1.44 hängt tatsächlich von der Gleichheit der gemischt-partiellen Ableitungen ab:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (1.45)$$

Wenn Sie jetzt glauben, ich wäre ein Umstandskrämer, gehen sie zunächst intuitiv an folgenden Ausdruck heran:

$$(\nabla \mathbf{T}) \times (\nabla \mathbf{S}).$$

Ist *dieser Ausdruck* immer null? (Das wäre natürlich der Fall, sobald Sie die Nablas durch einen gewöhnlichen Vektor ersetzen.)

- (3) Der Ausdruck $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ taucht in physikalischen Anwendungen aus irgendwelchen Gründen nur selten auf und besitzt daher keinen besonderen Namen. Es handelt sich schlicht um den **Gradienten der Divergenz**. Beachten Sie, dass $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ nicht dasselbe ist wie der Laplace-Operator, angewendet auf einen Vektor: $\nabla^2 \mathbf{v} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{v} \neq \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$.
- (4) Die **Divergenz einer Rotation** ist, ebenso wie die Rotation eines Gradienten, immer *null*:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0. \quad (1.46)$$

Sie können dies selbst nachprüfen. (Ähnlich wie weiter oben wäre aber die Abkürzung des Beweises, welche die Vektoridentität $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ ausnutzt, fehlerhaft.)

- (5) Wie Sie anhand der Definition von ∇ überprüfen können, ist

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (1.47)$$

Die Rotation der Rotation bietet daher nichts wirklich Neues. Den ersten Term hatten wir schon in Nummer (3) behandelt, und der zweite Term ist der Laplace (eines Vektors). (Tatsächlich wird Gleichung 1.47 oft zur Definition des Laplace-Operators eines Vektors verwendet und Gleichung 1.43 vorgezogen, die sich besonders auf kartesische Koordinaten bezieht.)

Genau genommen gibt es also nur zwei unterschiedliche zweite Ableitungen: den Laplace-Operator (der von grundlegender Bedeutung ist) und den Gradienten der Divergenz (der uns selten begegnet). Wir könnten auf ähnliche Weise die dritten Ableitungen konstruieren, doch glücklicherweise reichen für fast alle physikalische Anwendungen die zweiten Ableitungen aus.

Erlauben Sie mir zum Schluss ein letztes Wort über die vektorielle Differentialrechnung: Sie beruht vollständig auf dem Operator ∇ und auf der Berücksichtigung von dessen Vektorcharakter. Selbst wenn Sie sich *ausschließlich* an die Definition von ∇ erinnern können, sollten Sie – zumindest im Prinzip – in der Lage sein, den Rest selbst herzuleiten.

■ Aufgabe 1.26

Berechnen Sie den Laplace-Operator der folgenden Funktionen:

a. $T_a = x^2 + 2xy + 3z + 4$;

c. $T_c = e^{-5x} \sin 4y \cos 3z$;

b. $T_b = \sin x \sin y \sin z$;

d. $\mathbf{v} = x^2\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\hat{\mathbf{y}} - 2xz\hat{\mathbf{z}}$.

■ Aufgabe 1.27

Beweisen Sie, dass die Divergenz der Rotation immer null ist. Überprüfen Sie dies für die Funktion \mathbf{v}_a aus Aufgabe 1.15.

■ Aufgabe 1.28

Beweisen Sie, dass die Rotation eines Gradienten immer null ist. Überprüfen Sie dies für die Funktion (b) aus Aufgabe 1.11.

1.3 Integralrechnung

1.3.1 Linien-, Flächen- und Volumenintegrale

In der Elektrodynamik haben wir mit unterschiedlichen Arten der Integration zu tun. Die bedeutendsten sind die **Wegintegrale** (oder besser **Linienintegrale**), die **Flächenintegrale** (auch als **Flussintegrale** bezeichnet) und die **Volumenintegrale**.

(a) Linienintegrale. Ein Linienintegral ist ein Ausdruck der Form

$$\int_a^b \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.48)$$

Hierin ist \mathbf{v} eine Vektorfunktion, $d\mathbf{l}$ ist ein infinitesimal kleiner Verschiebungsvektor (siehe Gleichung 1.22), und das Integral muss entlang eines vorgegebenen Pfads \mathcal{P} von einem Anfangspunkt \mathbf{a} zu einem Endpunkt \mathbf{b} durchgeführt werden (Abbildung 1.20). Bildet dieser Pfad eine geschlossene Schleife (ist also $\mathbf{b} = \mathbf{a}$), schreibe

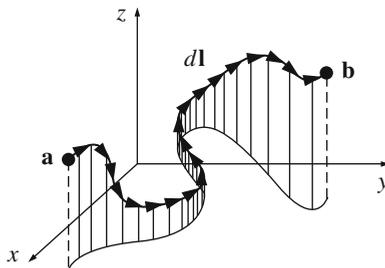


Abbildung 1.20

ich das Integralzeichen mit einem Kreis:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.49)$$

Auf jedem Punkt des Pfads berechnen wir das Skalarprodukt von \mathbf{v} (das am entsprechenden Punkt genommen wird) und der Verschiebung $d\mathbf{l}$ zum nächsten Punkt auf dem Pfad. Das bekannteste physikalische Beispiel für ein Linienintegral ist die Arbeit, die entlang eines Weges durch eine Kraft \mathbf{F} verrichtet wird: $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$.

Normalerweise hängt der Wert eines Linienintegrals entscheidend von dem jeweiligen Pfad ab, der zwischen \mathbf{a} und \mathbf{b} verwendet wird. Allerdings gibt es eine wichtige spezielle Gruppe von Vektorfunktionen, für die das Linienintegral vom verwendeten Pfad *unabhängig* ist und alleine durch die Endpunkte bestimmt wird. Wir werden diese spezielle Klasse von Vektoren in diesem Buch noch genauer festlegen. (Eine Kraft mit dieser Eigenschaft wird als **konservativ** bezeichnet.)

Beispiel 1.6: Linienintegral

Berechnen Sie das Linienintegral der Funktion $\mathbf{v} = y^2\hat{x} + 2x(y+1)\hat{y}$ zwischen dem Punkt $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ und dem Punkt $\mathbf{b} = (2, 2, 0)$ entlang der Pfade (1) und (2) aus Abbildung 1.21. Welches Ergebnis erhalten Sie für $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$, wenn der Integrationsweg entlang Weg (1) von \mathbf{a} nach \mathbf{b} verläuft und entlang Weg (2) wieder zu \mathbf{a} zurückkehrt?

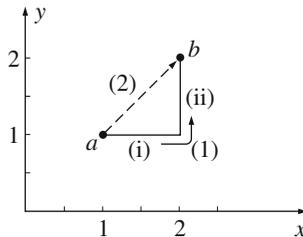


Abbildung 1.21

Lösung:

Wie immer lautet die Verschiebung $d\mathbf{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$. Weg (1) besteht aus zwei Teilen: Entlang des „horizontalen“ Wegstücks ist $dy = dz = 0$. Somit ist

(i) $d\mathbf{l} = dx\hat{x}$, $y = 1$, $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = y^2 dx = dx$ und daher

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 dx = 1.$$

Für das „vertikale“ Wegstück gilt $dx = dz = 0$. Es ist

(ii) $d\mathbf{l} = dy\hat{y}$, $x = 2$, $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2x(y+1)dy = 4(y+1)dy$ und daher

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 4 \int_1^2 (y+1)dy = 10.$$

Beispiel 1.6 (Fortsetzung)

Für Weg (1) erhalten wir also

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 1 + 10 = 11.$$

Für Weg (2) gilt $x = y$, $dx = dy$ und $dz = 0$; daher ist

$$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = x^2 dx + 2x(x+1) dx = (3x^2 + 2x) dx.$$

Damit wird unser Integral zu

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (3x^2 + 2x) dx = (x^3 + x^2) \Big|_1^2 = 10.$$

(Unser Ziel war hier, alle Größen in Abhängigkeit von derselben Variablen auszudrücken. Ich hätte ohne Weiteres x zugunsten von y eliminieren können.)

Für die Schleife, die zuerst entlang von Weg (1) und danach entlang von Weg (2) verläuft, erhalten wir somit

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 11 - 10 = 1.$$

(b) Flächenintegrale. Ein Flächenintegral ist ein Ausdruck der Form

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}. \quad (1.50)$$

Hierin ist \mathbf{v} wieder eine beliebige Vektorfunktion und $d\mathbf{a}$ eine infinitesimal kleine Fläche, deren Richtungsvektor senkrecht auf der Fläche steht (die sogenannte *Flächennormale*, Abbildung 1.22). Es gibt für eine beliebige Fläche natürlich immer zwei dazu senkrechte Richtungsvektoren, daher ist das Vorzeichen eines Flächenin-

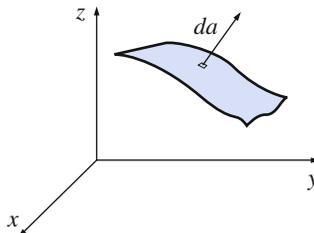


Abbildung 1.22

tegrals zunächst unbestimmt. Ist die Fläche *geschlossen* (bildet sie also einen „Ballon“), verwende ich ebenfalls einen kleinen Kreis auf dem Integralzeichen

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}.$$

Traditionellerweise wird für geschlossene Flächen die „nach außen“ führende Richtung positiv genommen. Bei offenen Flächen ist diese Richtung aber zunächst noch unbestimmt. Beschreibt \mathbf{v} eine strömende Flüssigkeit (und damit eine Masse, die pro Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche strömt), dann entspricht $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$ der Gesamtmasse, die pro Zeiteinheit durch die Fläche strömt – darauf beruht ja der alternative Name des Integrals, das *Flussintegral*.

Üblicherweise hängt der Wert eines Flächenintegrals nur von der gewählten besonderen Fläche ab. Es existiert aber eine spezielle Klasse von Vektorfunktionen, für die das Flächenintegral von der Art der Fläche *unabhängig* ist und nur von der Art der Randlinie abhängt. Wir werden bald in der Lage sein, diese besondere Klasse von Funktion genauer festzulegen.

Beispiel 1.7: Flächenintegral

Berechnen Sie das Flächenintegral von $\mathbf{v} = 2xz\hat{\mathbf{x}} + (x+2)\hat{\mathbf{y}} + y(z^2-3)\hat{\mathbf{z}}$ über fünf Seiten des kubischen Kastens aus Abbildung 1.23 (ignorieren Sie nur die Bodenfläche). Verwenden Sie, entsprechend der eingezeichneten Pfeile, „nach oben“ und „nach außen“ als positive Richtung.

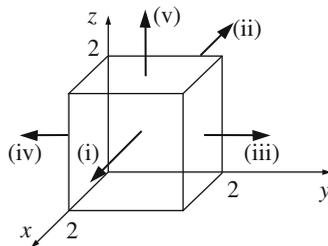


Abbildung 1.23

Lösung:

Betrachten Sie die Seiten nacheinander:

(i) $x = 2$, $d\mathbf{a} = dydz\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = 2xzdydz = 4zdydz$, daher ist

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = 4 \int_0^2 dy \int_0^2 z dz = 16.$$

(ii) $x = 0$, $d\mathbf{a} = -dydz\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = -2xz dy dz = 0$, daher ist

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = 0.$$

Beispiel 1.7 (Fortsetzung)

(iii) $x = 2$, $\mathbf{da} = dx dz \hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{da} = (x + 2) dx dz$, daher ist

$$\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{da} = \int_0^2 (x + 2) dx \int_0^2 dz = 12.$$

(iv) $y = 0$, $\mathbf{da} = -dx dz \hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{da} = -(x + 2) dx dz$, daher ist

$$\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{da} = - \int_0^2 (x + 2) dx \int_0^2 dz = -12.$$

(v) $z = 2$, $\mathbf{da} = dx dy \hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{da} = y(z^2 - 3) dx dy = y dx dy$, daher ist

$$\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{da} = \int_0^2 dx \int_0^2 y dy = 4.$$

Der Gesamtfluss ist daher

$$\int_{\text{Fläche}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{da} = 16 + 0 + 12 - 12 + 4 = 20.$$

(c) **Volumenintegrale.** Ein Volumenintegral ist ein Ausdruck der Form

$$\int_{\mathcal{V}} T d\tau. \quad (1.51)$$

Hierin ist T eine Skalarfunktion und $d\tau$ ein infinitesimal kleines Volumenelement. In kartesischen Koordinaten lautet es

$$d\tau = dx dy dz. \quad (1.52)$$

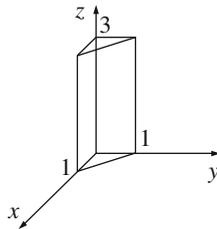
Ist beispielsweise T die Dichte einer Substanz (die von Ort zu Ort verschieden sein kann), dann würde das Volumenintegral auf die Gesamtmasse führen. Gelegentlich begegnen uns auch Volumenintegrale von *Vektorfunktionen*:

$$\int \mathbf{v} d\tau = \int (v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}) d\tau = \hat{\mathbf{x}} \int v_x d\tau + \hat{\mathbf{y}} \int v_y d\tau + \hat{\mathbf{z}} \int v_z d\tau. \quad (1.53)$$

Weil hierin die Einheitsvektoren Konstanten sind, dürfen sie vor das Integral gezogen werden.

Beispiel 1.8: Volumenintegral

Berechnen Sie das Volumenintegral von $T = xyz^2$ über das in Abbildung 1.24 dargestellte Prisma.



Beispiel 1.8 (Fortsetzung)

Abbildung 1.24

Lösung:

Sie können die drei Integrale in beliebiger Reihenfolge lösen. Wir beginnen mit der x -Richtung: das Prisma verläuft hier von 0 bis $(1 - y)$, berechnen danach die y -Richtung (in der es von 0 bis 1 reicht) und anschließend die z -Richtung (0 bis 3):

$$\begin{aligned} \int T \, d\tau &= \int_0^3 z^2 \left\{ \int_0^1 y \left[\int_0^{1-y} x \, dx \right] dy \right\} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 z^2 \, dz \int_0^1 (1-y)^2 y \, dy = \frac{1}{2} (9) \left(\frac{1}{12} \right) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

■ Aufgabe 1.29

Berechnen Sie das Linienintegral der Funktion $\mathbf{v} = x^2\hat{\mathbf{x}} + 2yz\hat{\mathbf{y}} + y^2\hat{\mathbf{z}}$ zwischen dem Ursprung und dem Punkt $(1, 1, 1)$ auf drei unterschiedlichen Pfaden:

- $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$;
- $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1)$;
- Entlang der direkten Verbindungslinie.
- Wie lautet das Linienintegral der geschlossenen Schleife, die entlang von Weg (a) wegführt und entlang (b) zurückkommt?

■ Aufgabe 1.30

Berechnen Sie das Flächenintegral der Funktion aus Beispiel 1.7 über der Bodenfläche des Würfels. Setzen Sie aus Konsistenzgründen „aufwärts“ als positive Richtung. Hängt das Flächenintegral nur von der Randlinie dieser Funktion ab? Wie lautet der gesamte Fluss durch die *geschlossene* Oberfläche des Würfels (einschließlich der Bodenfläche)?

[*Hinweis:* Bei der geschlossenen Oberfläche weist die positive Richtung nach außen und daher für die Bodenfläche nach „unten“.]

■ Aufgabe 1.31

Berechnen Sie das Volumenintegral der Funktion $T = z^2$ über dem Tetraeder, dessen Ecken bei $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ liegen.

1.3.2 Der Fundamentalsatz der Differentialrechnung

Sei $f(x)$ eine Funktion, die allein von einer Variablen abhängt. Der **Fundamentalsatz der Differentialrechnung** besagt:

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a). \quad (1.54)$$

Falls Ihnen das jetzt unvertraut erscheint, betrachten Sie die folgende Darstellung:

$$\int_a^b F(x) dx = f(b) - f(a).$$

Dabei haben wir $df/dx = F(x)$ verwendet. Der Fundamentalsatz besagt, wie $F(x)$ integriert werden muss: Sie suchen nach einer Funktion $f(x)$, deren *Ableitung* gleich F ist.

Geometrische Interpretation: Gemäß Gleichung 1.33 ist $df = (df/dx)dx$ die infinitesimal kleine Änderung von f , wenn Sie sich von (x) nach $(x + dx)$ bewegen. Nach dem Fundamentalsatz (1.54) erhalten Sie, wenn Sie das Intervall von a nach b in Abbildung 1.25 in viele kleine Teile dx zerlegen und die Unterschiede jedes der kleinen Intervalle df aufaddieren, als Resultat (kaum überraschend) den Gesamtunterschied von f , nämlich $f(b) - f(a)$. Es gibt mit anderen Worten zwei Methoden, um die Gesamtänderung der Funktion zu berechnen: Sie subtrahieren *entweder* die Werte an den Integralgrenzen *oder* Sie addieren Schritt für Schritt jeden der kleinen Funktionsunterschiede auf. Mit beiden Methoden erhalten Sie dasselbe Ergebnis.

Beachten Sie die grundlegende Form des Fundamentalsatzes: *Das Integral einer Ableitung in einem Intervall wird von den Werten der Funktion an den Endpunkten (den Integrationsgrenzen) gegeben.* In der Vektorrechnung kennen wir drei unterschiedliche Arten von Ableitungen (Gradient, Divergenz und Rotation). Jede hat ihren eigenen „Fundamentalsatz“, der im Wesentlichen dieselbe Form aufweist. Ich werde diese Sätze hier nicht beweisen. Vielmehr werde ich erläutern, was sie *bedeuten*, und werde versuchen, sie verständlich darzustellen. Die Beweise finden Sie im Anhang A.

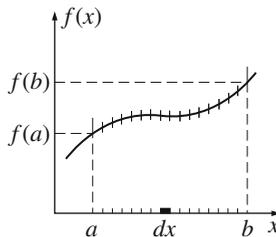


Abbildung 1.25

1.3.3 Der Fundamentalsatz für den Gradienten

Wir betrachten eine Skalarfunktion $T(x, y, z)$, die von drei Variablen abhängt. Beginnend an einem Punkt \mathbf{a} bewegen wir uns um eine geringe Strecke $d\mathbf{l}_1$ (Abbildung 1.26). Gemäß Gleichung 1.37 verändert sich die Funktion dadurch um den Betrag

$$dT = (\nabla T) \cdot d\mathbf{l}_1 .$$

Wir bewegen uns nun um einen weiteren kleinen Betrag $d\mathbf{l}_2$ voran. Die entsprechende Veränderung in T ist dann $(\nabla T) \cdot d\mathbf{l}_2$. Auf diese Weise legen wir in immer weiteren kleinen Schritten den Weg bis zum Punkt \mathbf{b} zurück. Für jeden Punkt berechnen wir den Gradienten von T (in dem jeweiligen Punkt) und multiplizieren ihn skalar mit der Verschiebung $d\mathbf{l}$, wodurch wir die Veränderung in T erhalten. Die Gesamtänderung von T auf dem Weg von \mathbf{a} entlang des gewählten Pfades nach \mathbf{b} ist offenbar

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} = T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a}) . \quad (1.55)$$

Dies wird als **Fundamentalsatz für Gradienten** bezeichnet. Wie der „normale“ Fundamentalsatz besagt er, dass das Integral (hier das *Linienintegral*) einer Ableitung (hier der *Gradient*) durch den Wert der Funktion an den Integrationsgrenzen (\mathbf{a} und \mathbf{b}) gegeben wird.

Geometrische Interpretation: Nehmen Sie an, Sie wollten die Höhe des Eiffelturms bestimmen. Dazu könnten Sie die Stufen hinaufsteigen, mit einem Lineal jede Stufe nachmessen und alle Ergebnisse aufaddieren (was der linken Seite von Gleichung 1.55 entspricht). Sie könnten aber auch Höhenmesser am Boden und an der Spitze ablesen und die Werte voneinander subtrahieren (das entspricht der rechten Seite). In beiden Fällen sollten Sie dasselbe Ergebnis erhalten (dies ist die Aussage des Fundamentalsatzes).

Wie wir in Beispiel 1.6 festgestellt hatten, hängen Linienintegrale üblicherweise von dem Weg ab, der von \mathbf{a} nach \mathbf{b} zurückgelegt wird. Auf der rechten Seite von Gleichung 1.55 taucht der Pfad jedoch nicht auf – lediglich die Endpunkte. Offensichtlich haben Gradienten die spezielle Eigenschaft, dass ihre Linienintegrale vom benutzten Pfad unabhängig sind.

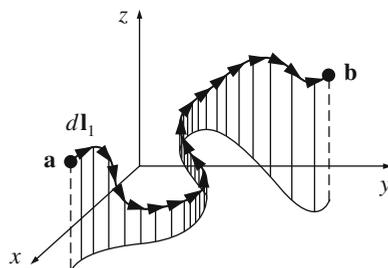


Abbildung 1.26

Korollar 1

Das Linienintegral

$$\int_a^b (\nabla T) \cdot d\mathbf{l}$$

ist vom Pfad zwischen \mathbf{a} und \mathbf{b} unabhängig.

Korollar 2

Für das Linienintegral über einen geschlossenen Weg gilt

$$\oint (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

da Anfangs- und Endpunkt identisch sind und folglich $T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a}) = 0$.

Beispiel 1.9: Fundamentalsatz für den Gradienten

Sei $T = xy^2$ und Punkt \mathbf{a} der Ursprung $(0, 0, 0)$ und \mathbf{b} der Punkt $(2, 1, 0)$. Überprüfen Sie den Fundamentalsatz für den Gradienten.

Lösung:

Obwohl das Integral wegunabhängig ist, müssen wir einen bestimmten Weg *auswählen*, um es zu berechnen. Bewegen wir uns in Abbildung 1.27 zunächst entlang der x -Achse (Schritt (i)) und dann nach oben (Schritt (ii)). Wie immer ist $d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$ und $\nabla T = y^2\hat{\mathbf{x}} + 2xy\hat{\mathbf{y}}$.

(i) $y = 0$; $d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}}$; $\nabla T \cdot d\mathbf{l} = y^2 dx = 0$, daher

$$\int_i \nabla T \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

(ii) $x = 2$; $d\mathbf{l} = dy\hat{\mathbf{y}}$; $\nabla T \cdot d\mathbf{l} = 2xy dy = 4y dy$, daher

$$\int_{ii} \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 4y dy = 2y^2 \Big|_0^1 = 2.$$

Wie eben gezeigt, beträgt das Gesamtergebnis des Linienintegrals 2. Ist dieses Ergebnis mit dem Fundamentalsatz vereinbar? Ja, denn: $T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a}) = 2 - 0 = 2$.

Beispiel 1.9 (Fortsetzung)

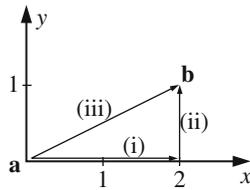


Abbildung 1.27

Um Sie nun davon zu überzeugen, dass das Ergebnis tatsächlich wegunabhängig ist, berechnen wir dasselbe Integral entlang Weg (iii) (d. h., der direkten Verbindung zwischen **a** und **b**):

$$\text{(iii)} \quad y = \frac{1}{2}x, \quad dy = \frac{1}{2} dx, \quad \nabla T \cdot d\mathbf{l} = y^2 dx + 2xy dy = \frac{3}{4}x^2 dx, \quad \text{daher}$$

$$\int_{\text{iii}} \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_0^2 \frac{3}{4}x^2 dx = \frac{1}{4}x^3 \Big|_0^2 = 2$$

■ Aufgabe 1.32

Überprüfen Sie den Fundamentalsatz für den Gradienten anhand der Funktion $T = x^2 + 4xy + 2yz^3$ für die Punkte $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$ und $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ sowie die drei in Abbildung 1.28 skizzierten Wege:

- a.** $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$,
- b.** $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1)$,
- c.** entlang der Parabel $z = x^2, y = x$.

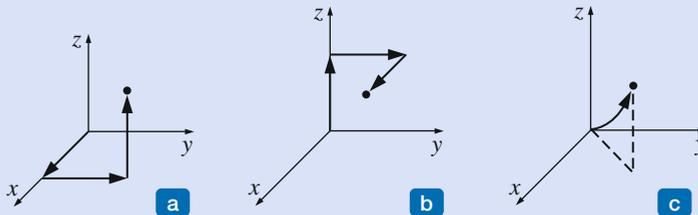


Abbildung 1.28

1.3.4 Der Fundamentalsatz für die Divergenz

Der Fundamentalsatz für die Divergenz besagt:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}. \quad (1.56)$$

Ich nehme an, es liegt an seiner Bedeutung, dass dieser Satz gleich drei verschiedene Namen trägt: **Gauß'scher Satz**, **Green'scher Satz** oder einfach **Divergenzsatz**.¹² Wie die anderen „Fundamentalsätze“ besagt er, dass das *Integral* einer *Ableitung* (in diesem Fall der *Divergenz*) über ein *Gebiet* (in diesem Fall ein *Volumen*) gleich dem Wert der Funktion an den *Grenzen* ist (in diesem Fall die *Fläche*, welche das Volumen umschließt). Beachten Sie, dass der Ausdruck für die Grenzen selbst wieder ein Integral ist (genau genommen ein Flächenintegral). Dies können Sie folgendermaßen nachvollziehen: So wie die Endpunkte die „Begrenzung“ eines *Pfads* sind, stellt eine (geschlossene) Fläche die Begrenzung eines *Volumens* dar.

Geometrische Interpretation: Wenn \mathbf{v} den Strom einer inkompressiblen Flüssigkeit darstellt, dann ist der *Fluss* von \mathbf{v} (die rechte Seite der Gleichung 1.56) die Gesamtmenge der Flüssigkeit, die pro Zeiteinheit durch die Fläche strömt. Da die Divergenz die „Ausbreitung“ eines Vektors von einem Punkt aus beschreibt, entspricht ein Ort hoher Divergenz einer „Quelle“, aus der Flüssigkeit herausströmt. Wenn wir in einem Gebiet mit einer inkompressiblen Flüssigkeit viele Quellen haben, muss eine entsprechende Flüssigkeitsmenge durch die Grenzen der Region hindurchgepresst werden. Wir können sogar auf zwei verschiedene Arten nachprüfen, wie viel Flüssigkeit freigesetzt wird: Wir könnten (a) alle Quellen aufaddieren und aufzeichnen, wie viel jede freisetzt, oder (b) um die Grenze herumgehen, den Fluss in jedem Punkt bestimmen und alles aufaddieren. In beiden Fällen erhalten Sie dasselbe Ergebnis:

$$\int (\text{Quellen innerhalb des Volumens}) = \oint (\text{Fluss durch die Fläche})$$

Dies ist die wesentliche Aussage des Gauß'schen Satzes.

Beispiel 1.10: Gauß'scher Satz

Überprüfen Sie den Gauß'schen Satz für die Funktion

$$\mathbf{v} = y^2 \hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2) \hat{\mathbf{y}} + (2yz) \hat{\mathbf{z}}$$

und den in Abbildung 1.29 skizzierten Einheitswürfel, dessen Eckpunkt im Ursprung liegt.

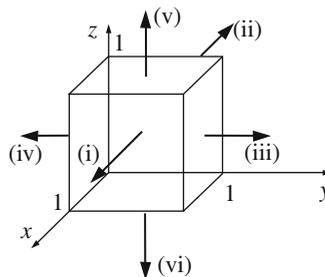


Abbildung 1.29

¹² Im Deutschen ist die Bezeichnung Gauß'scher Satz gebräuchlich, die wir hier verwenden. A. d. Ü.

Beispiel 1.10 (Fortsetzung)

Lösung:

In diesem Fall ist

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 2(x + y)$$

und

$$\int_{\mathcal{V}} 2(x + y) \, d\tau = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y) \, dx \, dy \, dz,$$

$$\int_0^1 (x + y) \, dx = \frac{1}{2} + y, \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right) \, dy = 1, \quad \int_0^1 1 \, dz = 1.$$

Das Endergebnis ist damit offenbar

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\tau = 2.$$

Soweit zur linken Seite des Gauß'schen Satzes. Zur Berechnung des Flächenintegrals müssen wir die sechs Seiten des Würfels einzeln berechnen:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} &= \int_0^1 \int_0^1 y^2 \, dy \, dz = \frac{1}{3}, \\ \text{(ii)} \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} &= - \int_0^1 \int_0^1 y^2 \, dy \, dz = -\frac{1}{3}, \\ \text{(iii)} \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} &= \int_0^1 \int_0^1 (2x + z^2) \, dx \, dz = \frac{4}{3}, \\ \text{(iv)} \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} &= - \int_0^1 \int_0^1 z^2 \, dx \, dz = -\frac{1}{3}, \\ \text{(v)} \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} &= \int_0^1 \int_0^1 2y \, dx \, dy = 1, \\ \text{(vi)} \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} &= - \int_0^1 \int_0^1 0 \, dx \, dy = 0. \end{aligned}$$

Der Gesamtfluss ist damit wie erwartet:

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 0 = 2.$$

■ Aufgabe 1.33

Überprüfen Sie den Gauß'schen Satz für die Funktion $\mathbf{v} = (xy)\hat{\mathbf{x}} + (2yz)\hat{\mathbf{y}} + (3zx)\hat{\mathbf{z}}$. Benutzen Sie den in Abbildung 1.30 dargestellten Würfel mit der Seitenlänge 2 als Integrationsvolumen.

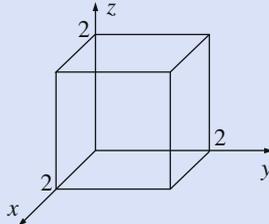


Abbildung 1.30

1.3.5 Der Fundamentalsatz für die Rotation

Der Fundamentalsatz für die Rotation wird auch als **Stokes'scher Satz** bezeichnet. Er besagt, dass

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\rho} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.57)$$

Wie in den früheren Sätzen ist das *Integral* einer *Ableitung* (hier der *Rotation*) über ein *Gebiet* (hier einen Teil einer *Fläche*) gleich dem Funktionswert an den *Grenzen* (hier die *Randlinie* der Fläche). Wie im Fall des Gauß'schen Satzes ist der Term für die Integrationsgrenzen ebenfalls ein Integral – genau genommen ein geschlossenes Linienintegral.

Geometrische Interpretation: Wie bereits erwähnt, misst die Rotation die „Verdrillung“ eines Vektors \mathbf{v} . Ein Gebiet mit hoher Rotation ist ein Wirbel – wenn Sie dort eine kleine Turbine hineinwerfen, beginnt sie sich zu drehen. Das Integral der Rotation über irgendeine Fläche (genauer gesagt der *Fluss* der Rotation durch die Oberfläche) entspricht dem „Gesamtbetrag des Wirbels“. Wir können diesen Wirbel genauso gut bestimmen, wenn wir uns um seine *Kante* herum begeben und feststellen, wie weit der Fluss der *Randlinie* folgt (Abbildung 1.31).

Vielleicht ist Ihnen eine scheinbare Doppeldeutigkeit des Stokes'schen Satzes aufgefallen: In welcher Richtung sollen wir die Berechnung des Linienintegrals um die *Randlinie* durchführen – im Uhrzeigersinn oder im Gegenuhrzeigersinn? Wenn wir die falsche Richtung wählen, produzieren wir einen Vorzeichenfehler für die gesamte Formel. Die Antwort darauf lautet: Ihre Bewegungsrichtung ist ganz *egal*, solange Sie sich nur *einheitlich* bewegen. Das Oberflächenintegral enthält nämlich eine grundlegende Doppeldeutigkeit hinsichtlich des Vorzeichens, die sich aber von selbst aufhebt. Sie beruht auf der Richtung, in die $d\mathbf{a}$ weist. Bei einer geschlossenen Oberfläche (wie im Gauß'schen Satz) zeigt $d\mathbf{a}$ in Richtung der *nach außen* gerichteten Flächennormale. Welche Richtung ist aber in einer offenen Fläche „außen“? Die Konsistenz im Stokes'schen Satz (wie in allen anderen Fällen) wird durch die

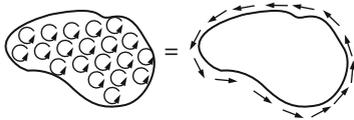


Abbildung 1.31

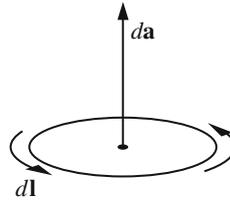


Abbildung 1.32

Rechte-Hand-Regel sichergestellt: Wenn Ihre Finger in Richtung des Linienintegrals deuten, dann ist die Richtung von $d\mathbf{a}$ durch Ihren (rechtwinklig dazu abstehenden) Daumen festgelegt (Abbildung 1.32).

Allerdings gibt es viele Oberflächen (sogar unendlich viele), die zu einer gegebenen Randlinie gehören. Biegen Sie eine Büroklammer zu einer Schleife und tauchen Sie diese in Seifenwasser. Der Seifenfilm erzeugt eine Fläche, deren Randlinie die Drahtschleife ist. Wenn Sie diese anblasen, dehnt sich der Seifenfilm aus, wodurch eine neue Oberfläche mit derselben Randlinie entsteht. Üblicherweise hängt zwar ein Flächenintegral entscheidend von der Fläche ab, über die Sie integrieren, bei der Rotation ist das aber offensichtlich *nicht* der Fall. Nach dem Stokes'schen Satz ist $\int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a}$ gleich dem Linienintegral von \mathbf{v} um die Randlinie. Diese aber hängt in keiner Weise von der von Ihnen gewählten Fläche ab.

Korollar 1

$\int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a}$ hängt nur von der Randlinie, aber nicht von der verwendeten Fläche ab.

Korollar 2

Für jede geschlossene Oberfläche gilt $\oint (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = 0$, denn die Begrenzungsline schrumpft, wie das Mundstück eines Luftballons, zu einem Punkt zusammen, wodurch die rechte Seite von Gleichung 1.57 verschwindet.

Diese Korollare entsprechen den entsprechenden Aussagen für den Fundamentalsatz des Gradienten. Wir werden die Parallelen im Weiteren noch vertiefen.

Beispiel 1.11: Stokes'scher Satz

Betrachten Sie die Funktion $\mathbf{v} = (2xz + 3y^2)\hat{\mathbf{y}} + (4yz^2)\hat{\mathbf{z}}$. Überprüfen Sie den Stokes'schen Satz für die in Abbildung 1.33 gezeigte quadratische Fläche.

Beispiel 1.11 (Fortsetzung)

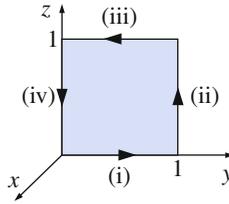


Abbildung 1.33

Lösung:

In diesem Fall ist $\nabla \times \mathbf{v} = (4z^2 - 2x)\hat{\mathbf{x}} + 2z\hat{\mathbf{z}}$ und $d\mathbf{a} = dydz\hat{\mathbf{x}}$. (Mit der Aussage, dass $d\mathbf{a}$ in x -Richtung deutet, legen wir uns auf ein Linienintegral im Gegenuhrzeigersinn fest. Wir könnten genauso gut $d\mathbf{a} = -dydz\hat{\mathbf{x}}$ wählen, müssten dann aber das Linienintegral im Uhrzeigersinn bestimmen.) Da für diese Oberfläche $x = 0$ gilt, ist

$$\int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \int_0^1 \int_0^1 4z^2 dy dz = \frac{4}{3}.$$

Was ist nun mit dem Linienintegral? Wir müssen es in vier Teile zerlegen.

$$(i) \quad x = 0, \quad z = 0, \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 3y^2 dy, \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 3y^2 dy = 1;$$

$$(ii) \quad x = 0, \quad y = 1, \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 4z^2 dz, \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 4z^2 dz = \frac{4}{3};$$

$$(iii) \quad x = 0, \quad z = 1, \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 3y^2 dy, \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^0 3y^2 dy = -1;$$

$$(iv) \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^0 0 dz = 0.$$

Daher ist

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 1 + \frac{4}{3} - 1 + 0 = \frac{4}{3},$$

was zu zeigen war.

Ein Wort noch zum Vorgehen: Beachten Sie, wie ich Schritt (iii) durchgeführt habe. Natürlich ist es verlockend, hier $d\mathbf{l} = -dy\hat{\mathbf{y}}$ zu verwenden, da der Pfad nach links verläuft. Wenn Sie darauf bestehen, ist das solange in Ordnung, solange Sie das Integral von $0 \rightarrow 1$ nehmen. Ich persönlich bevorzuge *immer* die Schreibweise $d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$ (die nirgendwo Minuszeichen enthält) und lasse die Integrationsgrenzen die Richtung bestimmen.

■ Aufgabe 1.34

Überprüfen Sie den Stokes'schen Satz für die Funktion $\mathbf{v} = (xy)\hat{\mathbf{x}} + (2yz)\hat{\mathbf{y}} + (3zx)\hat{\mathbf{z}}$ für das dreieckige schattierte Gebiet aus Abbildung 1.34.

■ Aufgabe 1.35

Überprüfen Sie Korollar 1 für dieselbe Funktion und Begrenzungslinie wie in Beispiel 1.11. Integrieren Sie nun aber über die fünf Seiten des in Abbildung 1.35 dargestellten Kubus. Die Rückseite des Kubus ist offen.

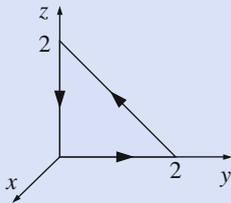


Abbildung 1.34

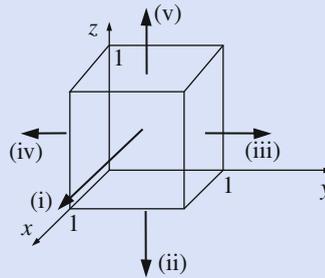


Abbildung 1.35

1.3.6 Partielle Integration

Eine Technik, die (ungeschickterweise) als **partielle Integration** bezeichnet wird, beruht auf der Produktregel für Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \left(\frac{dg}{dx} \right) + g \left(\frac{df}{dx} \right).$$

Integrieren wir beide Seiten und wenden den Fundamentalsatz an, dann erhalten wir

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(fg) dx = fg \Big|_a^b = \int_a^b f \left(\frac{dg}{dx} \right) dx + \int_a^b g \left(\frac{df}{dx} \right) dx$$

bzw.

$$\int_a^b f \left(\frac{dg}{dx} \right) dx = - \int_a^b g \left(\frac{df}{dx} \right) dx + fg \Big|_a^b. \quad (1.58)$$

Dies ist die partielle Integration. Sie gilt für die Fälle, in denen Sie die Aufgabe haben, das Produkt einer Funktion (f) und der *Ableitung* einer anderen Funktion (g) zu integrieren. Mithilfe der partiellen Integration können Sie für den Preis eines Minuszeichens und eines Zusatzterms die *Ableitung von g auf f übertragen*.

Beispiel 1.12: Partielle Integration

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

Lösung:

Der Exponentialterm kann als Ableitung ausgedrückt werden:

$$e^{-x} = \frac{d}{dx} (-e^{-x}).$$

In diesem Fall ist $f(x) = x$, $g(x) = -e^{-x}$ und $df/dx = 1$ und daher

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx - x e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Auf genau die gleiche Art und Weise können wir auch die Produktregeln der Vektorrechnung zusammen mit den entsprechenden Fundamentalsätzen anwenden. Integrieren wir beispielsweise

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

über ein Volumen und wenden den Gauß'schen Satz darauf an, erhalten wir

$$\int \nabla \cdot (f\mathbf{A}) d\tau = \int f(\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau + \int \mathbf{A} \cdot (\nabla f) d\tau = \oint f\mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

bzw.

$$\int_{\mathcal{V}} f(\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot (\nabla f) d\tau + \oint_{\mathcal{S}} f\mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}. \quad (1.59)$$

Hierbei ist wieder der Integrand das Produkt einer Funktion (f) mit der Ableitung (in diesem Fall der *Divergenz*) einer anderen Funktion (\mathbf{A}). Aufgrund der partiellen Integration dürfen wir die Ableitung von \mathbf{A} auf f übertragen (sie wird dadurch zu einem *Gradienten*), wobei wir nur ein Minuszeichen und einen Zusatzterm (in diesem Fall ein Flächenintegral) aufwenden müssen.

Vielleicht fragen Sie sich gerade, wie oft Ihnen wohl ein Integral begegnet, in dem eine Funktion mit der Ableitung einer anderen multipliziert wird. Dies ist *erstaunlich* oft der Fall, und daher ist die partielle Integration eines der leistungsfähigsten Hilfsmittel der Vektorrechnung.

■ Aufgabe 1.36

a. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathcal{S}} f(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{S}} [\mathbf{A} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{a} + \oint_{\rho} f \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.60)$$

b. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau + \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (1.61)$$

1.4 Krummlinige Koordinaten

1.4.1 Sphärische Polarkoordinaten

Die sphärischen Polarkoordinaten (r, θ, φ) (auch als Kugelkoordinaten bezeichnet) eines Punktes P sind entsprechend Abbildung 1.36 definiert. Dabei ist r die Entfernung vom Ursprung (also der Betrag des Ortsvektors), θ (der Winkel zwischen Ortsvektor und z -Achse) ist der **Polwinkel**, und φ (der Winkel zwischen dem in die x - y -Ebene projizierten Ortsvektor und der x -Achse in der x - y -Ebene) ist der **Azimutwinkel**. Ihr Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) lässt sich aus der Abbildung ablesen:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (1.62)$$

In Abbildung 1.36 sind auch drei Basisvektoren zu erkennen, $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$, die in Richtung ansteigender Werte der zugehörigen Koordinaten deuten. Sie bilden eine orthogonale (aufeinander senkrecht stehende) Gruppe von Basisvektoren (genau wie $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$), und jeder Vektor \mathbf{A} kann auf übliche Weise in Form dieser Vektoren ausgedrückt werden:

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_{\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (1.63)$$

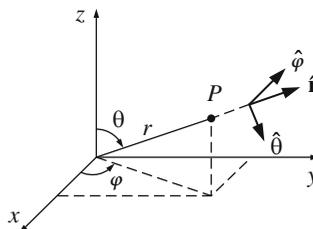


Abbildung 1.36

Dabei sind A_r , A_θ und A_φ die radialen, polaren und azimutalen Komponenten von \mathbf{A} . In Einheiten der kartesischen Basisvektoren lautet dies

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \right\}, \quad (1.64)$$

wie Sie leicht selbst überprüfen können (und in Aufgabe 1.38 auch sollen). Damit sie schneller zu finden sind, habe ich auch diese Formeln auf die Innenseite des Umschlags gestellt.

Es gibt hier aber eine Fußangel, vor der ich Sie warnen muss: $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ und $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ gehören zu einem *bestimmten Punkt* P und *verändern ihre Richtung*, sobald sich P bewegt. So deutet beispielsweise $\hat{\mathbf{r}}$ immer radial nach außen, allerdings kann es sich bei „radial nach außen“ auch um die x -Achse, die y -Achse oder, je nachdem, wo Sie sich befinden, um irgendeine andere Richtung handeln. In Abbildung 1.37 ist $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{y}}$ und $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{y}}$, dennoch werden *beide* in sphärischen Koordinaten als $\hat{\mathbf{r}}$ geschrieben. Wir könnten das berücksichtigen, indem wir uns explizit auf den Ausgangspunkt beziehen: $\hat{\mathbf{r}}(\theta, \varphi)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta, \varphi)$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\theta, \varphi)$, was allerdings ziemlich mühsam wäre. Solange Sie sich des Problems bewusst sind, gehe ich davon aus, dass es keine Schwierigkeiten bereiten wird.¹³ Insbesondere dürfen Sie keineswegs die sphärischen Komponenten von Vektoren, die sich auf unterschiedliche Punkte beziehen, einfach miteinander verbinden. (In Abbildung 1.37 ist beispielsweise $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$ und keineswegs $2\hat{\mathbf{r}}$, außerdem ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -1$ und nicht $+1$.) Passen Sie auf, wenn Sie einen Vektor differenzieren, der in sphärischen Koordinaten ausgedrückt ist, denn dessen Einheitsvektoren sind selbst wieder Funktionen des Orts (z. B. $\partial \hat{\mathbf{r}} / \partial \theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}$). Weiterhin dürfen Sie $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ und $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ nicht aus einem Integral herausziehen, wie wir das in Gleichung 1.53 anhand von $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$ gezeigt haben. Wenn Ihnen nicht klar ist, ob eine Operation erlaubt ist, drücken Sie die Aufgabe am besten in kartesischen Koordinaten aus; dort treten diese Probleme nicht auf.

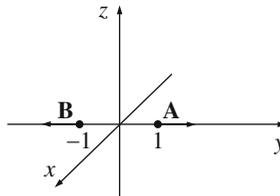


Abbildung 1.37

Eine unendlich kleine Verschiebung in $\hat{\mathbf{r}}$ -Richtung wird einfach durch $d\mathbf{r}$ beschrieben (Abbildung 1.38a), ähnlich wie ein infinitesimales Längenelement in x -Richtung durch dx wiedergegeben wird:

$$d\mathbf{l}_r = d\mathbf{r}. \quad (1.65)$$

Andererseits ist ein infinitesimales Längenelement in $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ -Richtung (Abbildung 1.38b) nicht einfach $d\theta$ dabei handelt es sich ja um einen *Winkel*, der nicht einmal die

¹³ Ich bleibe bei dem, was ich in Abschnitt 1.1.2 erwähnt habe: Vektoren besitzen keinen Ursprung. Vektoren existieren „dort draußen“ völlig unabhängig von unserer Wahl des Koordinatensystems. Allerdings hängt die *Schreibweise*, mit denen wir sie beschreiben, in gekrümmten Koordinaten sehr wohl vom gewählten Ursprung ab.