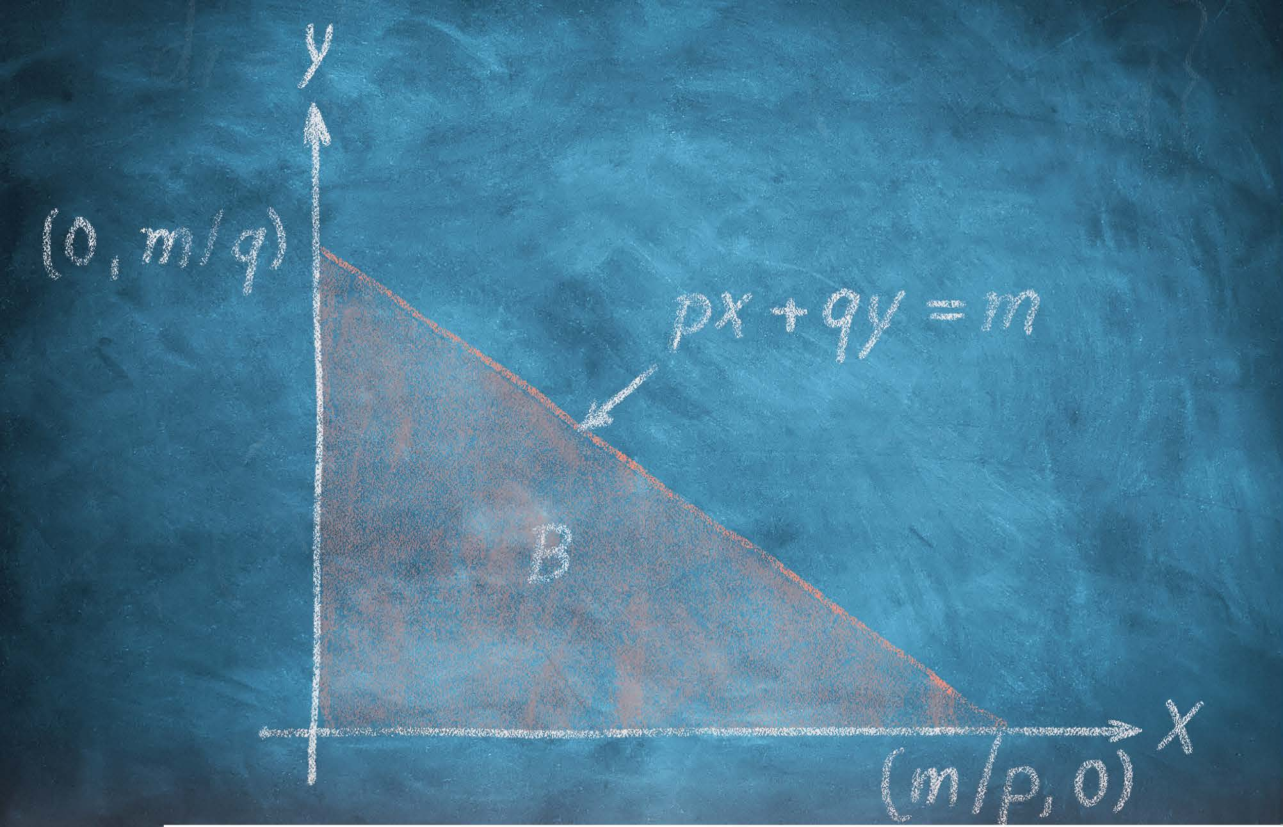


Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Das Übungsbuch

3., aktualisierte Auflage

Fred Böker

Pearson

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Das Übungsbuch

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Das Übungsbuch

3., aktualisierte Auflage

Fred Böker

Pearson

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

20 19 18

ISBN 978-3-86894-307-8 (Buch)
ISBN 978-3-86326-796-4 (E-Book)

Lilienthalstrasse 2, 85399 Hallbergmoos/Germany

www.pearson.de
A part of Pearson plc worldwide

Programmleitung: Martin Milbradt, mmilbradt@pearson.de
Herstellung: Claudia Bäurle, cbaeurle@pearson.de
Satz: PTP-Berlin, Protago-TEX-Production GmbH, Berlin (www.ptp-berlin.de)
Druck und Verarbeitung: Drukarnia Dimograf, Bielsko-Biała

Printed in Poland

Inhaltsverzeichnis
Teil I Aufgaben

Inhaltsverzeichnis Teil II Lösungen

Vorwort

Ein Übungsbuch zu Sydsæter und Hammond: *Mathematik für Wirtschaftwissenschaftler*. Braucht man das?

Wir selbst in Göttingen haben dieses Buch (damals noch die englische Originalausgabe) wegen seiner vielen Beispiele (insbesondere auch ökonomischen Beispiele) und vielen Übungsaufgaben gewählt. Und dennoch ein zusätzliches Übungsbuch?

Ja! Mathematik ist wie ein Sport, für den man trainieren muss und für dieses Training braucht man Material, d. h. Übungsaufgaben. Und nur wer andauernd und fair trainiert, wird es zum Erfolg bringen, d.h. zum erhofften Mathe-Schein. Mit *fair* ist gemeint, fair gegenüber sich selbst: Es wird nicht helfen nach dem Lesen der Aufgabe gleich in die Lösung zu schauen. Auch wenn die Lösung noch so verständlich ist, sollten Sie zunächst versuchen, die Aufgabe selbstständig zu lösen. Die Aufgaben sind nach Unterkapiteln analog zum Lehrbuch geordnet. Wenn eine Aufgabe z.B. in Kapitel 7.1 steht, dann hat diese Aufgabe etwas mit dem im Lehrbuch in Kap. 7.1 vermittelten Inhalten zu tun und in Kap. 7.1 sollte sich eine Formel oder ein Beispiel finden, die oder das bei der Lösung der Aufgabe weiterhilft. Treten Sie in einen Dialog zwischen Übungsbuch und Lehrbuch ein. Erst im letzten Schritt sollten Sie in die Lösungen schauen. Wenn es sich einmal nicht vermeiden lässt, in die Lösungen zu schielen, sollten Sie dann aber versuchen, die weiteren Teilaufgaben, wenn es welche gibt, allein zu lösen. Die Lösungen sind nicht starr immer nach demselben Schema angelegt. Auch bei ähnlichen Aufgaben, gibt es verschiedene Wege zum Ziel. Es ist Absicht, dass das Buch für denselben Aufgabentyp verschiedene Lösungswege anbietet. In den Lösungen des Übungsbuches wird häufig nur eine Formelnummer, z. B. (1.3.3), angegeben. Diese Nummer bezieht sich dann auf Formel (3) in Kap. 1.3 des Lehrbuches, hier auf die dritte binomische Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Es ist Absicht, dass wir meistens nur die Nummer und nicht die Formel angeben, weil wir Sie in Ihr Glück zwingen wollen, in den Dialog mit dem Buch einzutreten, um auf diese Weise mit dem Buch vertraut zu werden und zu verstehen, was Sie machen.

Dieses Buch ist aus alten, für dieses Übungsbuch überarbeiteten Klausuraufgaben entstanden, die hier in Göttingen unter meinem Namen gestellt wurden, an denen viele (Tutoren und Mitarbeiter) in unterschiedlicher Weise mitgewirkt haben. Stellvertretend für alle (ich würde bestimmt einige vergessen, würde ich Namen nennen) bedanke ich mich bei Nils Heidenreich, der als Tutor und seit einigen Jahren als Mitarbeiter in verantwortungsvoller und sorgfältiger Weise an den Aufgaben mitgewirkt hat. Einige Optimierungsaufgaben stammen aus den Klausuren zur Vorlesung *Fortgeschrittene Mathematik – Optimierung*. Hier bedanke ich mich bei Michael Scholz. Für die Fehler bin ich allein verantwortlich.

Herr Martin Milbradt von Pearson Studium hatte einen entscheidenden Anteil am Zustandekommen dieses Buches und an der raschen Umsetzung. Dafür herzlichen Dank.

Liebe Studierende, das Übungsbuch ist für Euch gemacht als Hilfe zur Überwindung der Hürde *Mathematik*. Damit Ihr und das Buch zu einem Erfolg kommt, bitte ich um Eure Mithilfe. Wenn Ihr Fehler findet oder etwas, was unverständlich erklärt ist, oder wenn Themen zu kurz kommen (und da wird sich bestimmt etwas finden), bitte ich darum, es mir zu sagen, per mail an *fboeker@uni-goettingen.de*. Und: Macht das bitte auch.

Änderungen in der 2. Auflage

Die wesentliche Änderung in der zweiten Auflage ist: Jetzt gibt es zu jedem Kapitel ein abschließendes Unterkapitel mit *weiteren Aufgaben*. Damit ist nicht sofort klar, mit welchen Methoden die Aufgaben zu lösen sind. Steht z.B. eine Aufgabe in Kap. 9.6, so ist sofort klar, dass *Integration durch Substitution* anzuwenden ist. Steht eine Aufgabe in *Weitere Aufgaben zu Kap. 9*, so könnte auch partielle Integration oder etwas anderes zum Ziele führen. Ansonsten sind einige Unterkapitel durch zusätzliche Aufgaben ergänzt worden. Einige Aufgaben zu gleichen Themen wurden zusammengefasst. Ich hoffe, dass dieses Buch einigen Studierenden hilft, die Hürde *Mathematik* zu bewältigen.

Änderungen in der 3. Auflage

Die wesentlichen Änderungen in der dritten Auflage resultieren aus den Änderungen im Lehrbuch, d.h. die wesentlichen Änderungen sind die Neuordnung der ersten drei Kapitel. Außerdem wurde die Notation in den Aufgaben zur Optimierung wie im Lehrbuch geändert. Wenn das nicht überall korrekt umgesetzt wurde, geben Sie mir bitte Nachricht.

Göttingen *Fred Böker*

Algebra

1

ÜBERBLICK

1.1 Die reellen Zahlen

[1] Welche der folgenden Zahlen ist eine natürliche oder ganze Zahl, rationale oder irrationale Zahl? Schreiben Sie die Brüche als endliche oder unendliche Dezimalzahlen.

a) 247 **b)** −27 **c)** 0 **d)** 1/3 **e)** 1/7 **f)** 1/4
g) 0.12112211122211112222...

1.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

[1] Vereinfachen Sie für die reellen Zahlen a, b und c die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.

a) $(a + b + c)^0 \cdot (a - b - c)^0 + 5^1 \cdot 5^1$ **b)** $(a^3 \cdot a^5)^2$
c) $(5.43)^{-7} \cdot (5.43)^3 \cdot (5.43)^4 \cdot e$ **d)** $100\,000 \cdot (1.1)^2 \cdot 10^{-3}$

[2] Bestimmen Sie die Unbekannte x in dem Ausdruck $4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5 = 4^x$.

[3] Mit welchem Exponenten x muss man 3 potenzieren, um 729 zu erhalten?

[4] **a)** Die Kosten eines Unternehmens sind in den letzten drei Jahren jeweils um 10% gestiegen. Um wieviel % sind die Kosten insgesamt in den drei Jahren gestiegen?

b) Der Gewinn eines Unternehmens ist in den letzten vier Jahren jeweils um 10% zurückgegangen. Um wieviel Prozent insgesamt ist der Gewinn in den letzten vier Jahren zurückgegangen?

[5] Die in einem landwirtschaftlichen Betrieb pro Hektar eingebrachte Menge einer Getreidesorte sei vom Jahr 2000 auf das Jahr 2001 um 25% gestiegen. Von 2001 auf 2002 sei sie um 22% gefallen.

a) War die pro Hektar eingebrachte Ernte im Jahr 2000 oder 2002 höher?

b) Bei welchem prozentualem Rückgang der Erträge von 2001 auf 2002 sind die Erträge im Jahr 2000 und 2002 gleich?

[6] Sie lesen in der Zeitung am

Dienstag: Der DAX ist gegenüber dem Vortag um 2.34% gestiegen.
Mittwoch: Der DAX ist gegenüber dem Vortag um 1.63% gefallen.
Donnerstag: Der DAX ist gegenüber dem Vortag um 2.47% gefallen.
Freitag: Der DAX ist gegenüber dem Vortag um 4.80% gestiegen.

Um wieviel Prozent ist der DAX im gesamten Zeitraum gestiegen oder gefallen?

1.3 Regeln der Algebra

[1] Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a) $(-1 + x - x^2)(1 + x)$ **b)** $\left[\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \frac{9^2}{x^{-2}}\right]^{-2}$

[2] Verwenden Sie die Formel (1.3.3) für die Differenz von Quadraten, um die folgenden Ausdrücke möglichst einfach (ohne Taschenrechner) zu berechnen.

a) $7 \cdot 13$ **b)** $27 \cdot 33$ **c)** $97 \cdot 103$

[3] Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke unter Verwendung der binomischen Formeln (1.3.1) – (1.3.3) in Faktoren.

a) $\frac{49}{16}a^4 + \frac{7}{2}a^2 + 1$ **b)** $9a^2 + 3a + \frac{1}{4}$ **c)** $16a^4 - 16a^3 + 4a^2$

d) $4a^4 - 4a + \frac{1}{a^2}$ **e)** $4a^2 - 9$ **f)** $81b^2 - 144a^2$

1.4 Brüche

[1] Vereinfachen Sie so weit wie möglich. Setzen Sie voraus, dass alle Ausdrücke definiert sind.

a) $\frac{144x^3y^9}{12x^2 \cdot 12y^7}$ **b)** $\frac{25a^2 - 49b^2}{5a + 7b}$ **c)** $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$

d) $\frac{4x^2 - 9y^2}{4x^2 - 12xy + 9y^2}$ **e)** $\frac{(r^2 - 2rst + s^2t^2)(r + st)}{r^2 - s^2t^2}$ **f)** $\frac{6xy^5}{18(xy)^3}$

g) $\frac{(2c + 4ab)(6c + 12ab)}{c^2 + 4cab + 4a^2b^2}$

[2] Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit, dass im Ergebnis nur noch **ein** Bruch auftaucht.

a) $\frac{2x + 1}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{x + 5}{x^2}$ **b)** $\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{a - 1} + \frac{1}{a^2 - 1}$

1.5 Potenzen mit gebrochenen Exponenten

[1] Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a) $2^{10}32^{-9/5}$ **b)** $\frac{a^5 \cdot a^{-2}}{a^{1/2}}$ **c)** $a^2 \cdot b^{-1/3} \cdot a^4 \cdot b^{4/3} \cdot a^{-6} + b$ **d)** $\left(a^2a^{-3}a^4\right)^{1/3} \cdot \left(\sqrt{a}\right)^4$

[2] Bestimmen Sie $\left(\frac{x}{y}\right)^3$, wenn $\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$.

[3] Vereinfachen Sie den Ausdruck $B = \frac{\sqrt{x} \cdot x^{3/2}}{x^{1/3} \cdot x^{2/3}}$ so weit wie möglich und schreiben sie B in Abhängigkeit von a, wenn $\sqrt[3]{x} = a > 0$.

[4] Ein Kapital von 20 000 Euro wachse bei konstantem Zinssatz bei jährlicher Zinsgutschrift in 10 Jahren auf 30 000 Euro an. Geben Sie den Zinssatz in Prozent mit zwei Stellen nach dem Dezimalpunkt an.

1.6 Ungleichungen

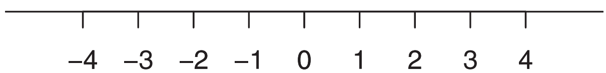
[1] Bestimmen Sie jeweils alle x, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind.

a) $x(x-1)(x-2) > 0$ **b)** $11 + 2x - 22 < 10x + 1 - 5x$

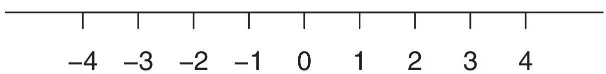
c) $x^2 + 6x - 7 < 0$ **d)** $64x^{5/2} > 8x^4$, wobei $x > 0$ vorausgesetzt sei.

[2] Ermitteln Sie jeweils diejenigen x, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind und stellen Sie das Ergebnis auf der Zahlengeraden grafisch dar.

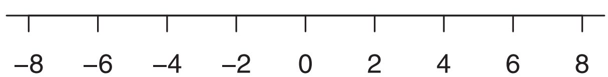
a) $-4x + 4 \geq x - 6$



b) $\dfrac{2x-1}{x+1} > 1$



[3] Lösen Sie die Ungleichung $\dfrac{x(x+3)}{x+5} > 0$ mit Hilfe eines Vorzeichendiagramms. Zeichnen Sie die entsprechenden Bereiche in die untenstehende Grafik ein. Schreiben Sie jeweils vorne links, welchen Ausdruck Sie untersuchen. Verwenden Sie eine durchgezogene Linie für positive Werte und eine gestrichelte Linie für negative Werte. Setzen Sie in die Zeile hinter **„Vorzeichen:"** für die einzelnen Bereiche das korrekte Vorzeichen des Gesamtausdrucks.



Vorzeichen:

[4] Ein mobiles Telefon kostet 10 Euro Grundgebühr im Monat und zusätzlich 0.15 Euro pro Minute. Wie viele Minuten kann mindestens bzw. darf höchstens telefoniert werden, wenn die monatliche Telefonrechnung zwischen 28 Euro und 37 Euro liegen soll?

1.7 Intervalle und Absolutbeträge

[1] Bestimmen Sie jeweils diejenigen x, die die folgenden Ungleichungen erfüllen.
a) $|3x+5| \leq 7$ **b)** $|2-7x| < 16$ **c)** $|3-6x| \leq 9$ **d)** $|4x^2 - 0.58| \leq 0.42$

[2] Bestimmen Sie alle x, die die folgenden Ungleichungen erfüllen.
a) $|x^2-4| > 2$ **b)** $|4x^2 - 0.58| \geq 0.42$

[3] Bestimmen Sie für die folgenden Ungleichungen jeweils eine äquivalente Ungleichung für $|x|$.
a) $|x^2-9| \leq 16$ **b)** $\left|\dfrac{x^2-5}{2}\right| < 2$

[4] Auf dem Beipackzettel eines Arzneimittels steht: „Dieses Medikament entfaltet nur dann seine volle Wirksamkeit, wenn es bei einer Temperatur zwischen 41° und 50° Fahrenheit aufbewahrt wird.“ Sie haben jedoch nur ein in Grad Celsius geeichtes Thermometer zur Verfügung. Der Zusammenhang zwischen Grad Fahrenheit F und Grad Celsius C ist $F = \frac{9}{5}C + 32$. Geben Sie das entsprechende offene Intervall in Grad Celsius an!

1.8 Summen

[1] Berechnen Sie die folgenden Summen:
a) $\sum_{j=3}^{6}(2j-5)^2$ **b)** $\sum_{i=0}^{3}\dfrac{i}{(i+1)(i+2)}$ **c)** $\sum_{k=-2}^{3}(k+3)^k$ **d)** $\sum_{k=0}^{3}(k+1)^{k-1}$
e) $\sum_{j=0}^{4} j \cdot 2^{j+1}$ **f)** $\sum_{i=2}^{4}(2i^2 - i + 1)$ **g)** $\sum_{k=1}^{3}(-1)^k k^k$

[2] Schreiben Sie die folgenden Summen in Summennotation:
a) $1+3+5+\ldots+199$ **b)** $1+\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^6}{7}+\dfrac{x^9}{10}+\ldots+\dfrac{x^{30}}{31}$
c) $1+\dfrac{t}{3}+\dfrac{t^2}{5}+\dfrac{t^3}{7}+\ldots+\dfrac{t^{12}}{25}$ **d)** $\dfrac{a^3}{10b^2}+\dfrac{a^4}{13b^3}+\dfrac{a^5}{16b^4}+\ldots+\dfrac{a^{10}}{31b^9}$

[3] Berechnen Sie die Summe $\sum_{i=1}^{3}\left(a^{i+1}\right)^i$ für $a = 2$.

Hinweis: Schreiben Sie zunächst die einzelnen Summanden auf und überlegen Sie, welche Potenzen von $a = 2$ Sie benötigen. Zur Hilfe seien Ihnen die folgenden Zahlen gegeben: 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1 024 2 048 4 096

[4] Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{4}(p_i q_i)$, wenn p_i und q_i durch die folgende Tabelle gegeben sind:

i	1	2	3	4
p_i	2	1	3	6
q_i	5	10	4	3

1.9 Regeln für Summen

[1] Berechnen Sie:

a) $\sum_{i=1}^{100} 6$ **b)** $\sum_{i=1}^{5} i^2$ **c)** $\sum_{i=1}^{5} 7 \cdot i^2$ **d)** $\sum_{i=0}^{3} \frac{5 \cdot 2^i}{i+1}$ **e)** $\sum_{k=10}^{20} (2k+3)$

[2] Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{3} \cdot \frac{y_i}{4}\right)$, wenn bekannt ist, dass $\sum_{i=1}^{n} x_i = 54$; $\sum_{i=1}^{n} y_i = 144$ und $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 924$.

1.10 Newtons Binomische Formeln

[1] Berechnen Sie:

a) $\binom{17}{3}$ **b)** $\binom{9}{3}$ **c)** $\binom{16}{14}$ **d)** $\frac{3(n-3)!}{n!}\binom{n}{3}$ (Beachten Sie (1.10.5).)

e) $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}$

1.11 Doppelsummen

[1] Berechnen Sie:

a) $\sum_{i=3}^{4} \sum_{j=5}^{6} (i-j)$ **b)** $\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{5} i^2 \cdot j$ **c)** $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} \frac{2j}{i+2}$ **d)** $\sum_{j=0}^{1} \sum_{i=10}^{13} \frac{i}{j+1}$

Weitere Aufgaben zu Kapitel 1

[1] Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich und bestimmen Sie, ob das Ergebnis eine rationale, irrationale, ganze oder natürliche Zahl ist.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6}$ **b)** $2\sqrt{2} - \sqrt{8}$ **c)** $2 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}$

[2] Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich. Setzen Sie voraus, dass alle vorkommenden Ausdrücke definiert sind.

a) $\frac{8 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3}{a^{-4}}$ **b)** $\frac{\left(a^{3c}\right)^{-1} a^{3c}}{a^{-5c}\left(a^{2c}\right)^2}$ **c)** $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-x}$

d) $\frac{3.1 \cdot 6.2^4 \cdot a^{-1}}{3.1^2 \cdot 6.2^3} \cdot a^2$ **e)** $\frac{(a^2+4a+4)(a-2)}{a^2-4}$

[3] In der Physik gilt das folgende Weg-Zeit-Gesetz: Bei einer Bewegung mit konstanter Beschleunigung b ist der in der Zeit t zurückgelegte Weg s gleich $s = \frac{1}{2}bt^2$.

a) Um welchen Faktor steigt der zurückgelegte Weg, wenn die Zeit vervierfacht wird?

b) Für einen bestimmten Weg werde bei konstanter Beschleunigung die Zeit $t = 40$ Sekunden benötigt. Nach welcher Zeit $t_{1/4}$ ist das erste Viertel des Weges zurückgelegt?

[4] Bestimmen Sie alle x, für die die Ungleichung $|x^2 - 7| < 29$ erfüllt ist.

[5] Vereinfachen Sie den Ausdruck $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ so, dass Sie im Nenner keine Wurzelzeichen mehr haben.

[6] Schreiben Sie $2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \ldots + 2x_{20}y_{20}$ mit Hilfe des Summenzeichens.

[7] Bestimmen Sie $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2$, wenn $\sum_{i=1}^{n} x_i = 54$; $\sum_{i=1}^{n} y_i = 144$; $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 384$; $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 2\,364$; $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 924$.

[8] Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}(i \cdot j + 1)$.

Wesentliches aus der Logik und der Mengenlehre

2

ÜBERBLICK

2.1 Wesentliches aus der Mengenlehre

[1] Es sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $C = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
Bestimmen Sie:
a) $A \cup B$; $A \cup C$; $A \cup B \cup C$; $B \cup C$ **b)** $A \cap B$; $A \cap C$; $A \cap B \cap C$; $B \cap C$
c) $A \setminus B$; $B \setminus A$; $C \setminus B$ **d)** $A \setminus (B \cup C)$; $A \setminus (B \cap C)$; $(A \cap B) \setminus (B \cap C)$; $(A \cap B) \setminus (A \cup B)$

[2] Die Häuptlinge Anton und Bruno konkurrieren um die Gunst ihrer 450 Krieger. Die Menge aller Krieger sei Ω. Es sei A die Menge der Krieger, die Anton mögen und B die Menge der Krieger, die Bruno mögen. Es gibt 20 Krieger, die weder zu A noch zu B gehören. Die Anzahl der Elemente in einer Teilmenge C von Ω sei mit $n(C)$ bezeichnet. Es sei bekannt, dass $n(B \setminus A) = \frac{n(A \setminus B)}{2}$ und $n(A \cap B) = 20 \cdot n(A \setminus B)$.
Berechnen Sie $n(A \setminus B)$, $n(B \setminus A)$ und $n(A \cap B)$ und veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis durch ein mit Namen und Zahlen beschriftetes Venn-Diagramm.

[3] Eine Befragung von 200 Studierenden der Betriebswirtschaftslehre ergab, dass 100 von ihnen gerne die Mathematik-Vorlesung besuchen. 80 Studierende gaben an, gerne an der Statistik-Vorlesung teilzunehmen. 70 Studierende sagten aus, dass sie weder die Mathematik-Vorlesung noch die Statistik-Vorlesung gerne besuchen. Wie groß ist die Anzahl N der befragten Studierenden, die beide Vorlesungen gerne besuchen?

[4] Unter 90 Personen waren 60 Personen, die gern Kaffee trinken, 50 Personen, die gern Tee trinken und 40 Personen, die gern Milch trinken. Diese Zahlen schließen 35 Personen ein, die gern Kaffee und Tee trinken, 25 Personen, die gern Kaffee und Milch trinken, und 20 Personen, die gern Tee und Milch trinken. Diese Zahlen wiederum schließen 15 Personen ein, die gern Kaffee, Tee und Milch trinken. Wie viele Personen trinken keins der drei Getränke gern?

2.2 Einige Aspekte der Logik

[1] Vervollständigen Sie die folgenden Implikationen:
a) $x^{-1}y^{-1} = 4 \Longrightarrow x^2y^2 =$ **b)** $x^{16} = 4 \Longrightarrow \left(x^{-2}\right)^7 \left(x^3\right)^2 =$

[2] Setzen Sie in die Kästchen die Zeichen $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$ oder $\Longleftrightarrow$ je nachdem, ob es sich um eine Implikation (in die entsprechende Richtung) oder eine Äquivalenzrelation handelt.

a) $x = 2$ und $y = -2$ $\boxed{\quad}$ $x + y = 0$

b) $(x-3)(x^2+2) = 0$ $\boxed{\quad}$ $x = 3$

c) $x^2 = 9$ $\boxed{\quad}$ $x = 3$

d) $x = \sqrt{9}$ $\boxed{\quad}$ $x = 3$

e) $x^4 > 0$ $\boxed{\quad}$ $x > 0$

f) $2x(x-5) = 0$ $\boxed{\quad}$ $x = 0$ ODER $x = 5$

g) $x^2 + y^2 = 0$ $\boxed{}$ $x = 0$ ODER $y = 0$

h) $x = 0$ und $y = 0$ $\boxed{}$ $x^2 + y^2 = 0$

i) $(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$ $\boxed{}$ $x = 3$

j) $x > z^2$ $\boxed{}$ $x > 0$

k) $x \neq 2$ und $\dfrac{x-1}{x-2} = 0$ $\boxed{}$ $x = 1$

l) $0 \leq x < 6$ $\boxed{}$ $x^2 < 36$

m) $x^3 > 0$ $\boxed{}$ $x > 0$

n) $x = 0$ und $y > 0$ $\boxed{}$ $x^2 + y^2 > 0$

o) $x > 1$ $\boxed{}$ $x > z \geq 1$

p) $x = 1$ und $y = 1$ $\boxed{}$ $x^2 + y^2 = 2$

q) $(x - 3)^2 = 0$ $\boxed{}$ $x = 3$

2.3 Mathematische Beweise

[1] Zeigen Sie mit einem direkten und einem indirekten Beweis: Unter der Voraussetzung $x^2 + y^2 = 9$ gilt: Aus $x^2 \geq 8$ folgt $|y| \leq 1$.

[2] Für die Variable x gelte $0 \leq x \leq 3$ und für die Konstante λ gelte $\lambda \geq 0$ und $\lambda = 0$, falls $x < 3$. Zeigen Sie mit einem indirekten Beweis: Wenn $\lambda > 0$, gilt $x = 3$.

2.4 Mathematische Induktion

[1] Durch vollständige Induktion soll gezeigt werden, dass $2n + 1 < n^2 < 2^n$ für alle natürlichen Zahlen $\boldsymbol{n \geq n_0 = 5}$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass die Ungleichung für das erste Element $n_0 = 5$ gilt. (Induktionsanfang)

b) Schreiben Sie für diese konkrete Ungleichung die Induktionsvoraussetzung (Induktionshypothese) auf und führen Sie den Induktionsschritt durch.

[2] Die Aussage $A(n)\colon 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ soll mit mathematischer Induktion für alle natürlichen Zahlen n bewiesen werden.

a) Geben Sie die Gleichung für den Induktionsanfang an und zeigen Sie, dass beide Seiten der Gleichung dasselbe Ergebnis liefern.

b) Schreiben Sie die Induktionshypothese auf und führen Sie den Induktionsschritt durch.

Weitere Aufgaben zu Kapitel 2

[1] Setzen Sie in die Kästchen die Zeichen $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$ oder $\Longleftrightarrow$ je nachdem, ob es sich um eine Implikation (in die entsprechende Richtung) oder eine Äquivalenzrelation handelt. Dabei seien A, B, C Teilmengen einer Grundmenge Ω.

a) $x \in \{1;\ 2;\ 3\}$ $\boxed{}$ $x \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

b) $A \cup B = \Omega$ $\boxed{}$ $B = A^c$

c) $A \cap B = \emptyset$ $\boxed{}$ $B \subset A^c$

d) $A \setminus B = A$ $\boxed{}$ $B = \emptyset$

[2] Die Mengen A und B seien Teilmengen der Grundmenge Ω. Mit $n(A), n(B), \ldots$ sei die Anzahl der Elemente in A, in $B, \ldots$ bezeichnet. Es gelte $n(\Omega) = 200$; $n(A) = 50$; $n(B) = 70$; $n(A \cap B) = 30$. Bestimmen Sie $n(\Omega \setminus (A \cup B))$.

Gleichungen lösen

3

ÜBERBLICK

3.1 Gleichungen lösen

[1] Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der angegebenen Variablen auf.
a) $5^{2p-1} = 125^{-p}$ nach p **b)** $Y = (500 + 0.8Y) + 100$ nach Y

[2] Herr K. hat 10 000 Euro zu einem jährlichen Zinssatz von 6% angelegt. Wieviel Geld muss er zusätzlich bei einem Zinssatz von 5% anlegen, um insgesamt 1 000 Euro als jährliche Zinszahlungen zu erhalten.

[3] Frau K. arbeitet 36 Stunden pro Woche. Für Überstunden erhält sie den doppelten Lohn. In der letzten Woche hat sie 47 Stunden gearbeitet und 812 Euro erhalten. Geben Sie den regulären Stundenlohn von Frau K. an.

[4] Ein Unternehmen benötigt eine bestimmte Menge eines Rohstoffs für die Herstellung eines bestimmten Produkts in der kürzest möglichen Zeit. Der Rohstoff fließe kontinuierlich in einer Art Pipeline. Drei Lieferanten bieten diesen Rohstoff zu gleichen Preisen, jedoch unterschiedlichen Geschwindigkeiten an. Lieferant A allein braucht 10 Stunden, Lieferant B 20 Stunden und Lieferant C 25 Stunden Lieferzeit, um den Gesamtbedarf zu decken. Welche Zeit wird benötigt, wenn alle drei Firmen gleichzeitig jeweils in ihrer Geschwindigeit liefern. Geben Sie das Ergebnis als gerundete Dezimalzahl mit zwei Stellen nach dem Dezimalpunkt an.

3.2 Gleichungen und ihre Parameter

[1] Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der angegebenen Variablen auf:
a) $\sqrt{KLM} - \alpha L = B$ nach K, wenn $K \geq 0$ und $LM > 0$

b) $AK^{1/5}L^{3/5} = Y_0$ nach L, wenn $A > 0$ und $K > 0$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y}$ nach x **d)** $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = xa + xb$ nach x für $a \neq b$

[2] Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der jeweils angegebenen Variablen auf. Falls Ihre Lösung nicht uneingeschränkt gilt, da Sie eventuell durch **NULL** dividieren würden, so geben Sie dies bitte an.

a) $\frac{a + b}{2} \cdot y = F$ nach b **b)** $ky - y = by + a$ nach y

c) $x \cdot c = \frac{\sqrt{x^{1/3} b^{1/3}}}{(xb)^{1/6}}$ nach x, wobei $x > 0$ und $b > 0$

d) $Y = I + a(Y - (c + bY))$ nach Y

[3] Um das Volumen eines Kegels zu berechnen, verwendet man die Formel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Lösen Sie diese Gleichung nach r auf.

3.3 Quadratische Gleichungen

[1] Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen nach der p, q-Formel (3.3.3):
a) $y = x^2 + x - 6$ **b)** $60 - 4x^2 - 8x = 0$ **c)** $-1.5x^2 - 7.5x - 9 = 0$

[2] Die quadratische Gleichung $10x^2 - 15x = -5$ soll gelöst werden, indem Sie diese Gleichung zunächst durch 10 dividieren und dann auf der linken Seite die geeignete quadratische Ergänzung suchen.

[3] Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen nach der a, b-Formel (3.3.4) und geben Sie anschließend die Faktorenzerlegung nach (3.3.5) an.
a) $3x^2 + 12x - 63 = 0$ **b)** $2x^2 - 2x - 12$ **c)** $x^2 + 6x + 5$

[4] Für welche Werte von c hat die quadratische Gleichung $x^2 - c^2 - 2x - 6c + 8 = 0$ genau eine Lösung?

[5] Verwenden Sie die Methode der quadratischen Ergänzung um die folgenden quadratischen Ausdrücke in der Gestalt: $(x - x_1)(x - x_2)$ zu schreiben.
a) $x^2 + 2x - 15$ **b)** $x^2 - 2x - 8$

[6] Schreiben Sie die folgenden quadratischen Gleichungen in der Gestalt $(y+r)^2 = s$, wobei r und s Konstanten sind.
a) $y^2 - 4y - 5 = 0$ **b)** $y^2 + 8y - 9 = 0$

[7] Bestimmen Sie a, b und c, so dass die folgende Gleichung für alle x erfüllt ist:
$5x^2 - 10x + c = a(x + b)^2 - 7$

[8] Schreiben Sie $3x^2 - 30x + 32$ in der Form $a(x + b)^2 + c$. Bestimmen Sie a, b und c.

[9] Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $\left(\sqrt{2x}\right)^4 - \left(\sqrt{32x}\right)^2 + 28 = 0$

[10] Für die Lösungen $x_{1,2}$ der quadratischen Gleichung $x^2+px+q = 0$ gelte $x_1+x_2 = 5$ und $x_1 \cdot x_2 = 6$. Bestimmen Sie p und q.

3.4 Nichtlineare Gleichungen

[1] Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen an:
a) $(x^3 - 64)\sqrt{x^2 - 9} = 0$ **b)** $(1 - z^2)x = (1 - z^2)(1 - y)$ **c)** $x^3 - 4x^2 + 10x = 0$

[2] Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen an.
a) $\dfrac{4 - x^2}{\sqrt{4 + x^2}} = 0$ **b)** $\dfrac{y(2y^2 - 8y + 6)}{(y^4 + 3)^{5/2}} = 0$ **c)** $\dfrac{z^2 - z}{\sqrt{z^2 - 1}} = 0$

d) $\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} \cdot x^{7/5}}{x - 1} = 0$ **e)** $\dfrac{x(4x^2 - 8x - 12)}{(x^4 - 81)^2} = 0$

[3] Lösen Sie die Gleichung $6x - \dfrac{8x}{3} = \dfrac{25}{x} + \dfrac{10x}{3} - 5$ nach x auf.

[4] Lösen Sie die Gleichung $y = \sqrt{2y + 8}$. Bei dieser Aufgabe ist eine Probe erforderlich!

3.5 Lösung von Gleichungen mit Hilfe von Implikationspfeilen

[5] Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit Hilfe von Implikationspfeilen.
a) $\sqrt{2x} = x$ **b)** $\sqrt{2x} = x - 1$ **c)** $\sqrt{2x} = x + 1$

3.6 Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

[1] Lösen Sie folgendes Gleichungssystem:

$$15x + 10y = 16 \quad \text{und} \quad \frac{9}{5}x - y = 5$$

[2] Frau L. hat insgesamt 10 000 Euro angelegt, einen Betrag A zu einem jährlichen Zinssatz von 4% und einen Betrag B zu einem jährlichen Zinssatz von 6%. Während des ganzen Jahres finden keine Um- oder Abbuchungen statt. Bestimmen Sie A und B, wenn die Zinseinnahmen am Ende des Jahres 520 Euro betragen.
Anmerkung: Weitere Aufgaben zu diesem Thema finden Sie in Kapitel 15.1.

Weitere Aufgaben zu Kapitel 3

[1] Lösen Sie jeweils nach x auf.
a) $\frac{x+4}{x+3} - \frac{4-x}{3-x} = 0$ **b)** $x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$

[2] Schreiben Sie $2x^2 + 6x - 8$ als Produkt von zwei linearen Faktoren und gegebenenfalls einer Konstanten.

[3] Bestimmen Sie die quadratische Ergänzung zu $x^2 - 6x$, d.h. bestimmen Sie b^2, so dass $x^2 - 6x + b^2 = (x - b)^2$.

[4] Bestimmen Sie Y und C in dem makroökonomischen Modell $Y = C + \bar{I}$ und $C = a + bY$ mit $a = 300$, $b = 0.7$ und $\bar{I} = 600$.

Funktionen einer Variablen

4

ÜBERBLICK

4.1 Einführung

[1] Entscheiden Sie, welche der folgenden Regeln eine Funktion definiert. Wenn es sich nicht um eine Funktion handelt, so ändern Sie bitte die Regel so ab, dass eine Funktion entsteht.

a) Die Regel, die jeder natürlichen Zahl n ihr Quadrat n^2 zuordnet.
b) Die Regel, die jeder Quadratzahl $q \in \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ eine Zahl zuordnet, deren Quadrat gleich q ist.
c) Die Regel, die jeder reellen Zahl x, die Zahl zuordnet, deren Quadrat gleich x ist.
d) Die Regel, die jeder reellen Zahl $x \neq 0$ die Zahl $1/x$ zuordnet.

4.2 Grundlegende Definitionen

[1] Bestimmen Sie den Definitionsbereich D der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(5+x)(3-x)}}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3\sqrt{4-x^2}$ **c)** $f(x) = 3x^2 + \sqrt{|-2+x^2|}$

d) $f(x) = \dfrac{6x^2}{\sqrt{5-|3-8x|}}$ **e)** $f(x) = \left[(-x)^3\right]^{1/2} + 3x^{-2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{1}{36x^2-9}$

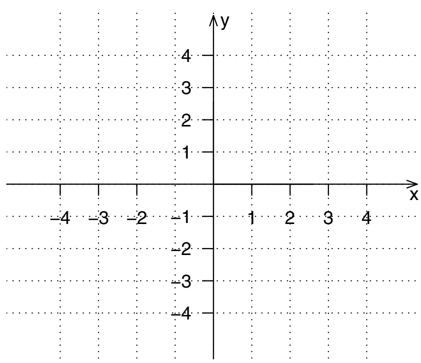
g) $f(x) = 1 + x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ **h)** $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{2}{x^2-49}$ **i)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{-2x-4}}{(x^2+1)(x^2-4)}$

[2] Die Herstellungskosten für x Einheiten eines Gutes seien $C(x) = 25+10x+x^2$. Um wieviel steigen die Kosten, wenn statt x Einheiten $x+1$ Einheiten hergestellt werden?

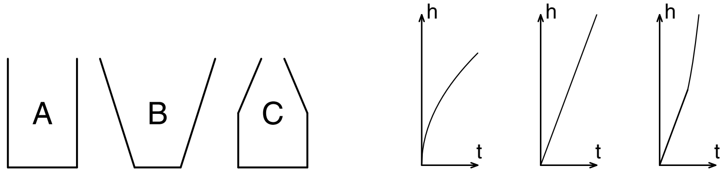
4.3 Graphen von Funktionen

[1] Sei $y = f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 1$. Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

x	-1	0	1	
$y = f(x)$				1



[2] Gegeben seien drei leere Gefäße A, B und C, die links in der Abbildung zu sehen sind.



Jedes Gefäß werde nun kontinuierlich mit Wasser gefüllt. Die Zuströmgeschwindigkeit des Wassers sei stets konstant. Der Füllvorgang beginne stets bei einer Füllhöhe $h = 0$ zur Zeit $t = 0$. Zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ ergibt sich somit genau eine Füllhöhe h, d.h. die Füllhöhe h ist eine Funktion $h(t)$ der Zeit t. Bestimmen Sie welche Graphen der Füllhöhen, die rechts in der Abbildung zu sehen sind, zu welchem Gefäß gehören.

4.4 Lineare Funktionen

[1] Bestimmen Sie die Gleichung $y = ax + b$ der Geraden durch

a) die Punkte (2, 3) und (4, 0)

b) den Punkt (1, 1) mit der Steigung 2

c) die Punkte (3, 10) und (5, 14)

d) die Punkte (3, 8) und (3, −33)

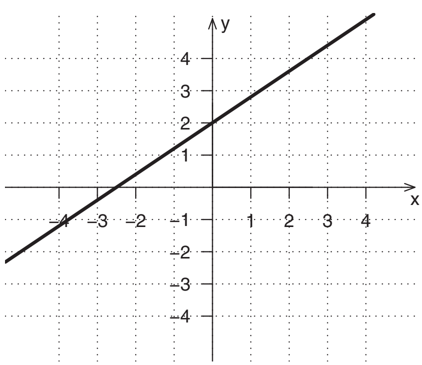
e) den Punkt (4, 9) mit der Steigung 0.1.

[2] Bestimmen Sie jeweils die Steigung a der Geraden, wenn Ihnen folgende Informationen gegeben sind:

a) $5 = 3x + 7y - 6$

b) Die Punkte $(3c, 2c)$ und $(c, -c)$ liegen auf der Geraden, wobei $c \neq 0$ konstant ist.

c) Der Graph der Geraden ist in folgender Abbildung gegeben.



d) Die Punkte (−4, −1) und (−6, 9) liegen auf der Geraden.

[3] Bestimmen Sie jeweils den y-Achsenabschnitt b, wenn Ihnen folgende Informationen über die Gerade gegeben sind.

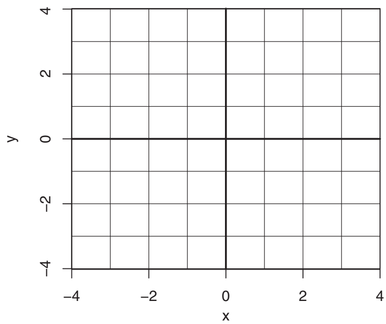
a) Die Steigung ist 3 und der Punkt (2, 2) liegt auf der Geraden.

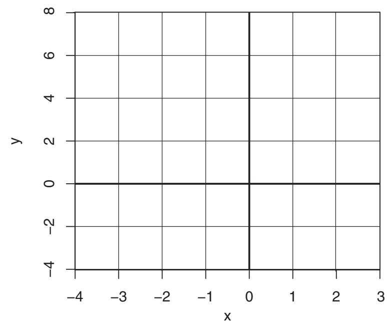
b) Die Steigung ist 3 und die Gerade geht durch den Punkt (13, 5).

c) Die Punkte (3, 10) und (5, 14) liegen auf der Geraden.

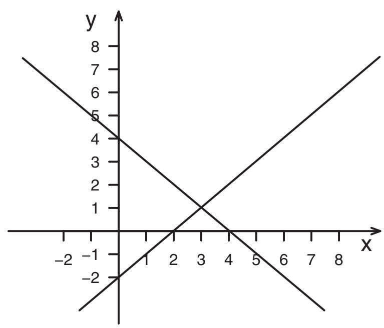
[4] Skizzieren Sie in der xy-Ebene die Menge aller Zahlenpaare (x, y), die die folgenden Ungleichungen erfüllen.

a) $120x - 60y - 120 \geq 0$ (linke Grafik) **b)** $17y - 34x \geq 68$ (rechte Grafik)





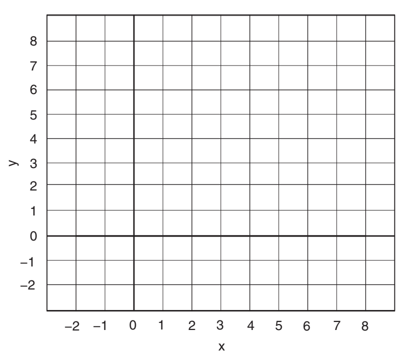
[5] Die folgende Grafik zeigt die beiden Geraden $y = x - 2$ und $y = -x + 4$. Skizzieren Sie den Bereich, in dem $y + x \geq 4$ und $y - x \leq -2$ gilt.



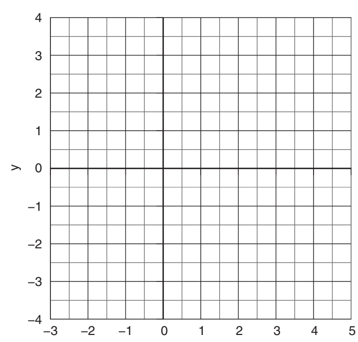
[6] Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme auf grafische Weise, indem Sie das unten gegebene Koordinatensystem verwenden.

a)
$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

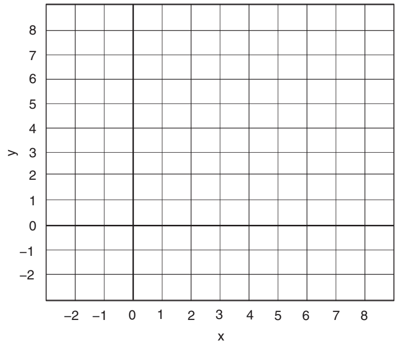


Für **a)**



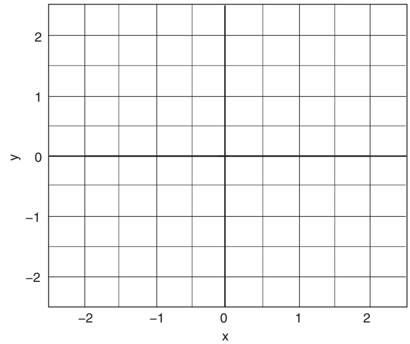
Für **b)**

c) $\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x + y &= -3 \end{aligned}$



Für **c)**

d) $\begin{aligned} 3x + 18y &= -9 \\ x + 6y &= -3 \end{aligned}$



Für **d)**

4.5 Lineare Modelle

[1] Auf der bevorstehenden Messe sollen Kugelschreiber mit Aufdruck (Firmenemblem) ausgegeben werden. Ein Lieferant bietet 500 Stück zum Gesamtpreis von 450 Euro und 2 000 Stück zum Gesamtpreis von 900 Euro an.

a) Berechnen Sie für eine Abnahmemenge von 500 Stück und von 2000 Stück jeweils den durchschnittlichen Preis p_d pro Kugelschreiber.

b) Unterstellen Sie eine lineare Angebotsfunktion $P(x)$, die den Gesamtpreis in Abhängigkeit von der Stückzahl x beschreibt. Geben Sie die Gleichung für $P(x)$ an.

c) Berechnen Sie den Gesamtpreis für eine Abnahmemenge von 2 500 Stück.

[2] Bestimmen Sie für die folgenden linearen Nachfrage- und Angebotsfunktionen jeweils den Gleichgewichtspreis P^* und die Gleichgewichtsmenge Q^*.

a) $Q_N = 45 - 3P$ $\quad Q_A = 10 + 2P$ $\quad$ **b)** $D = 117 - 4.5P$ $\quad S = 19 + 2.5P$

c) $D = 200 - 3P$ $\quad S = 25 + 5P$

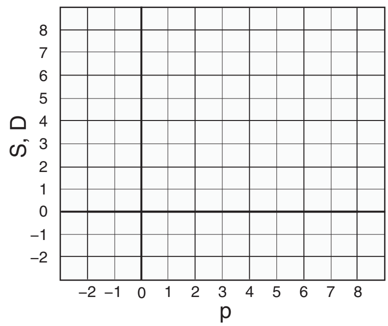
[3] Betrachten Sie die lineare Nachfrage- und Angebotsfunktion $D = a - 4.5P$ und $S = 19 + 2.5P$. Welchen Wert muss a annehmen, damit die Gleichgewichtsmenge $Q^* = 50$ ist?

[4] Gegeben sei die Konsumfunktion $C(Y) = 120 + 0.6Y$ eines Haushalts in Abhängigkeit des zur Verfügung stehenden Einkommens Y. Wie hoch ist das Existenzminimum (= Mindestkonsum) des Haushalts, wie hoch die Grenzneigung zum Konsum?

[5] Für die Produktion eines Gutes stehen 150 Geldeinheiten und zwei alternative Maschinen zur Verfügung. Bei der ersten Maschine M_1 entstehen fixe Kosten von 60 Geldeinheiten und variable Stückkosten von 0.25 Geldeinheiten. Bei der zweiten Maschine M_2 entstehen fixe Kosten von 30 Geldeinheiten und variable Stückkosten von 0.4 Geldeinheiten. Welche der beiden Maschinen ermöglicht eine höhere Produktion des Gutes? Geben Sie die von dieser Maschine produzierte Anzahl Q_{max} an.

[6] Die Produktion einer Firma weist eine lineare Kostenfunktion $C(x)$ auf. Dabei verursachen 5 Einheiten des produzierten Gutes 6 Euro Kosten, während 25 Einheiten in der Produktion 25 Euro kosten. Geben Sie die Kostenfunktion $C(x)$ an.

[7] Gegeben sei ein Markt mit der Angebotsfunktion $S = p - 2$ und der Nachfragefunktion $D = -\frac{4}{3}p + 12$ Lösen Sie das Gleichgewichtsproblem grafisch und geben Sie die Koordinaten des Gleichgewichtspunktes in dem Koordinatensystem an.



4.6 Quadratische Funktionen

[1] Formen Sie die Gleichung $f(x) = -7x^2 + 42x - 50$ so um, dass der Scheitelpunkt (x_s, y_s) ablesbar ist, d.h. bringen Sie die Gleichung in die Form $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ (siehe (4.6.2)). Geben Sie den Scheitelpunkt (x_s, y_s) an.

[2] Ein Unternehmen erzielt durch die Produktion und den Verkauf von x Einheiten eines Gutes den Gewinn $G(x) = -\frac{1}{100} \cdot (x - 1\,000)^2 + 500$.

a) Bestimmen Sie die Produktionsmenge x^*, die den Gewinn maximiert. Geben Sie auch den maximalen Gewinn an.

b) Geben Sie unter Annahme der obigen Gewinnfunktion die Kostenfunktion $K(x)$ an, wenn der Preis für eine verkaufte Einheit 25 Euro beträgt.

[3] Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel $y = ax^2 + bx + c$, die durch die drei Punkte $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ verläuft.

[4] Ein Unternehmen verkaufe Q Einheiten eines Gutes zu einem Preis von $P = 860 - 20Q$ pro Einheit. Die Kosten für die Herstellung und den Verkauf von Q Einheiten dieses Gutes betragen $C = 20Q + Q^2$. Bestimmen Sie die Menge Q^*, die den Gewinn maximiert und geben Sie den maximalen Gewinn an.

[5] Für welche Werte von a hat die quadratische Funktion $f(x) = 4x^2 + 8x + a$ genau eine Nullstelle, zwei Nullstellen bzw. keine Nullstelle?

[6] Ein Unternehmen besitzt eine quadratische Gewinnfunktion $\pi(x) = ax^2 + bx + c$, wobei x die Menge der produzierten Gütereinheiten angibt. Der maximale Gewinn wird bei 8 produzierten Gütereinheiten erzielt. Wird nur eine Einheit produziert, wird ein Gewinn von 0 Euro erzielt. Wird gar nichts produziert, entstehen dem Unternehmen dennoch Kosten von 15 Euro. Geben Sie die Gewinnfunktion $\pi(x)$ an.

[7] Schreiben Sie die quadratische Funktion $y = 3x^2 - 15x + 18$ in der Form $a(x - x_1)(x - x_2)$.

[8] Der Graph einer quadratischen Funktion $y = x^2 + bx + c$ schneidet die y-Achse an der Stelle $y = 4$ und hat eine Nullstelle an der Stelle $x = -2$. Bestimmen Sie die Konstanten b und c.

4.7 Polynome

[1] Schreiben Sie $q(x) = 3(x - 3)(x + 5)(x - 1)$ in der allgemeinen Form (4.7.1) einer kubischen Funktion und geben Sie alle Nullstellen an.

[2] Für welches k ist das Polynom $x^3 - 7x^2 + 2x + k$ ohne Rest durch das Polynom $x + 1$ teilbar?

[3] Bestimmen Sie alle ganzzahligen Nullstellen der folgenden Polynome $q(x)$ und schreiben Sie dann $q(x)$ als Produkt von linearen Faktoren und evtl. einer Konstanten.
a) $3x^3 - 6x^2 - 3x + 6$ **b)** $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ **c)** $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$

[4] Führen Sie jeweils die angegebenen Polynomdivisionen durch und bestimmen Sie dann alle Nullstellen des Polynoms.
a) $(x^3 - 7x^2 + 15x - 9) \div (x - 1)$ **b)** $(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x) \div (x^2 + x - 2)$
c) $(x^3 + 2x^2 + 10x - 36) \div (x - 2)$

[5] Die Funktion $f(x) = \dfrac{-34x^3 + 136x}{x + 2}$ stimmt für $x \neq -2$ mit einer quadratischen Funktion $g(x) = ax^2 + bx$ überein. Bestimmen Sie $g(x)$.

4.8 Potenzfunktionen

[1] Die Kosten für die Herstellung von x Einheiten eines bestimmten Gutes seien $C(x) = 5x^3$. Um welchen Faktor k verändern sich die Kosten, wenn die doppelte Menge hergestellt wird?

4.9 Exponentialfunktionen

[1] Bestimmen Sie jeweils alle x-Werte, die die gegebene Gleichung erfüllen.
a) $3^{2x} = 81$ **b)** $4^{x^2-2x+2} = 16$ **c)** $2^{3x}4^x = 32$
d) $2^{3x} = 64$ **e)** $e^{4x-8} = 1$ **f)** $e^{3x-9} = 1$

[2] Für eine allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = Aa^x$ gelte $f(0) = 10$ und $f(1) = 30$. Berechnen Sie $f(4)$.

[3] Bestimmen Sie den Wertebereich R_f der durch $f(x) = 3 \cdot e^{x^2} - 1$ definierten Funktion f.

[4] Im Jahre 2003 betrug die Einwohnerzahl eines Staates 2.4 Millionen Menschen bei einer Fläche von 24 000 km^2. Es wird eine konstante Wachstumsrate von 5% pro Jahr vorausgesagt. Wie viele m^2 Fläche stehen einem Einwohner im Durchschnitt – unveränderte Wachstumsrate vorausgesetzt – in 100 Jahren zur Verfügung?

4.10 Logarithmusfunktionen

[1] Bestimmen Sie jeweils den Wert von t, für den die folgende Gleichung gilt. Rechnen Sie dabei keine Werte der ln- oder e-Funktion aus.
a) $e^{-2t} = 1/2$ **b)** $\ln(4t) = 3$ **c)** $\ln(4t - 13) = 1$ **d)** $2e^t - e^{-2t} = 0$

[2] Ermitteln Sie die Zahlenwerte folgender Logarithmen:
a) $\ln e^2$ **b)** $\ln 1 + \log_{10} 1$ **c)** $\log_9 27$ **d)** $\log_2 70 + \log_3 18$
e) $\log_2 32 + \log_3 3 + \log_4 1$ **f)** $5^{3\log_5(2)}$ **g)** $\log_3(81)$ **h)** $\log_2\left(2^3 \cdot 2^4\right)$

[3] Bestimmen Sie den Definitionsbereich D der folgenden Funktionen:
a) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x-5)}$ **b)** $g(x) = 5x - \ln\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$ **c)** $y = f(x) = \sqrt{\ln(x) - 1}$

[4] Bestimmen Sie den Wertebereich R_f der Funktion f, die für alle $x \geq 0$ definiert ist durch $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.

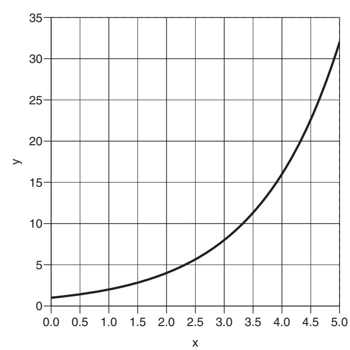
[5] Eine Bevölkerung wachse mit einer konstanten Wachstumsrate von 2% pro Jahr. Nach wie vielen Jahren hat sich die Bevölkerung verdoppelt? Geben Sie das Ergebnis in Jahren an, gerundet auf die nächstliegende ganze Zahl.

[6] Lösen Sie die Formel $C_n = (1+i)^n$ nach n auf.

[7] Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.
a) $e^{2\ln x} + \ln x - \ln x^3$ **b)** $\exp\left[4\ln x + \ln y - 2\ln(xy)\right]$
c) $\left[\ln(e^{2x})^2\right]^2$ **d)** $\ln\left(e^{\ln(2x+1)} - 2x\right)$

[8] Lösen Sie die folgende Gleichungen nach x auf.
a) $\ln(x^2 - 4x + 5) = 0$ **b)** $4^x - 4^{x-1} = 2^{x+1} - 2^x$ **c)** $\ln x + \ln x^2 = 5$

[9] Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $y = 2^x$. Bestimmen Sie auf grafische Weise den Logarithmus von 10 zur Basis 2, d.h. $\log_2(10)$.



[10] Im Göttinger Tageblatt war am 22.04.2008 zu lesen, dass der Umsatz eines Unternehmens sich in den letzten 10 Jahren verdoppelt habe. Berechnen Sie das durchschnittliche Wachstum des Unternehmens in den letzten 10 Jahren in Prozent, d. h. nehmen Sie an, dass der Umsatz in den letzten 10 Jahren jährlich jeweils um p% gewachsen ist.

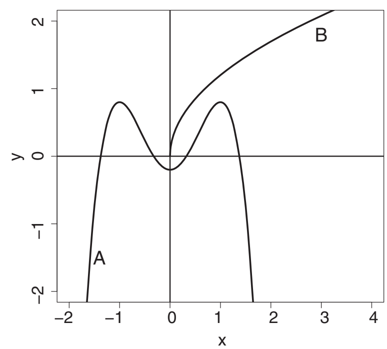
Weitere Aufgaben zu Kapitel 4

[1] Die Kosten für die Herstellung von x Einheiten eines Gutes seien $C(x) = 50+20x+x^2$. Um wieviel steigen die Kosten, wenn statt x Einheiten $x+1$ Einheiten hergestellt werden sollen?

[2] Bestimmen Sie den Definitionsbereich D der Funktion $g(x) = \ln(e^x - 1)$.

[3] Ordnen Sie die beiden dargestellten Graphen jeweils einer der vier folgenden allgemeinen Funktionsgleichungen zu, wobei alle Parameter größer als Null sind.

$y = -ax^4 + bx^2 - c$; $\quad y = -ax^5 + bx^3 + cx^2 + d$; $\quad y = Ax^r$ mit $0 < r < 1$; $\quad y = (\ln(x))^2$



[4] Im Jahre 2003 betrug die Einwohnerzahl eines Staates 1.8 Millionen Menschen bei einer Fläche von 18 000km^2. Es wird eine konstante Wachstumsrate von 5% pro Jahr vorausgesagt. Nach wie vielen Jahren hat die Bevölkerungsdichte, d.h. die Anzahl der Einwohner pro km^2, den Wert 500 erreicht? Geben Sie das Ergebnis mit zwei Stellen nach dem Dezimalpunkt an.

[5] Die Anzahl der Haustiere in einem Staat geht jährlich um 7% zurück. Heute gibt es 7 000 000 Haustiere. Wie lange dauert es in Jahren bis die Anzahl der Haustiere auf die Hälfte geschrumpft ist?

[6] Nehmen Sie an, dass Sie am Anfang eines Jahres ein Sparkonto mit 1 000 Euro eröffnet haben. Der Zinssatz beträgt 3%, wobei die Zinsen am Ende des Jahres gutgeschrieben werden. Sie schauen nur am Ende des Jahres auf dieses Sparkonto. Nach wie vielen **ganzen Jahren** sind erstmals mehr als 2 000 Euro auf dem Konto?

[7] a) An welchen Stellen x_1 und x_2 schneidet die Gerade $y = -2x + 3$ die Normalparabel $y = x^2$?
b) Beschreiben Sie, wie man die Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ grafisch lösen kann, wenn Ihnen ein Bild mit dem Graphen der Normalparabel $y = x^2$ gegeben ist.

[8] Gegeben sei eine Gerade durch die Punkte $(0, 4)$ und $(1, 2)$. Bestimmen Sie den x-Achsenabschnitt dieser Geraden, d.h. bestimmen Sie die Koordinate x_0, an der die Gerade die x-Achse schneidet.

[9] Für welche x gilt die folgende Gleichung?

a) $\dfrac{e^{x+1}\ln(x+2)}{x^2+4} = 0$ **b)** $e^{x^2-6x+9} = 1$ **c)** $\ln(x^3 - 7) = 0$ **d)** $x^3 = 64$