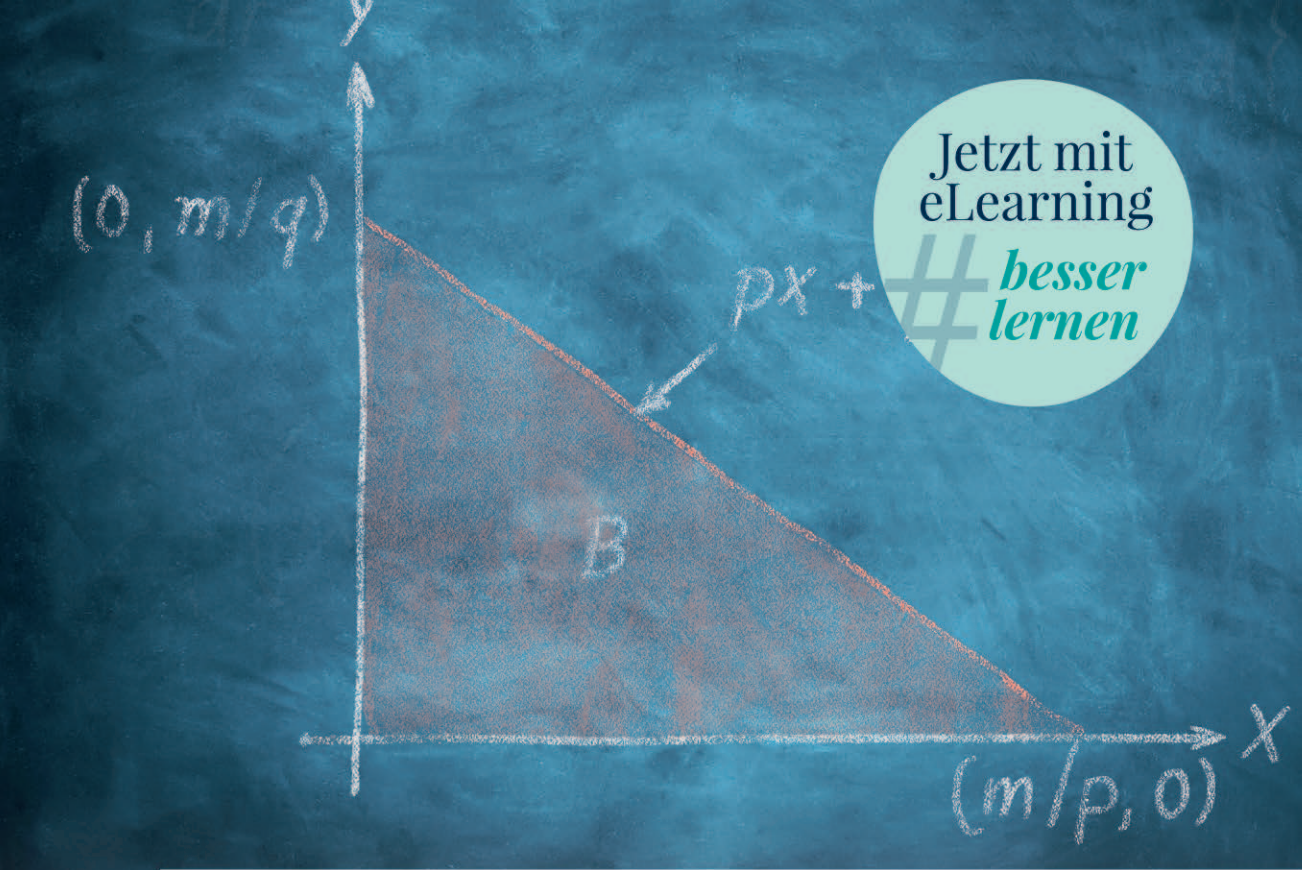

Jetzt mit eLearning
#besser lernen

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Basiswissen mit Praxisbezug

5., aktualisierte Auflage

Knut Sydsæter
Peter Hammond
Arne Strøm
Andrés Carvajal

Pearson

Zugangscode

Falls Sie beim Kauf Ihres eBooks keinen Zugangscode erhalten haben, kontaktieren Sie uns bitte über die folgende Seite und halten Sie Ihre Rechnung/Bestellbestätigung bereit:
https://www.pearson.de/ebook-zugangscode

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Basiswissen mit Praxisbezug

5., aktualisierte Auflage

Knut Sydsæter
Peter Hammond
Arne Strøm
Andrés Carvajal

Übersetzt und fachlektoriert durch
Prof. Dr. Fred Böker

Pearson

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

20 19 18

ISBN 978-3-86894-306-1 (Buch)
978-3-86326-795-7 (E-Book)

Lilienthalstraße 2, D-85399 Hallbergmoos/Germany

www.pearson.de
A part of Pearson plc worldwide
Programmleitung: Martin Milbradt, mmilbradt@pearson.de
Lektorat: Elisabeth Prümm, epruemm@pearson.de
Herstellung: Claudia Bäurle, cbaeurle@pearson.de
Projektmanager MyMathLab, Deutsche Version Geogebra: Birger Peil, bpeil@pearson.de
Übersetzung und Fachlektorat: Prof. Dr. Fred Böker, Göttingen
Satz: PTP-Berlin Protago TEX-Production GmbH, www.ptp-berlin.de
Druck und Verarbeitung: DZS-Grafik d.o.o., Ljubljana

Printed in Slovenia

Inhaltsübersicht

Vorwort 13

Kapitel 1 Algebra 23

Kapitel 2 Wesentliches aus der Logik und der Mengenlehre 75

Kapitel 3 Gleichungen lösen 95

Kapitel 4 Funktionen einer Variablen 117

Kapitel 5 Eigenschaften von Funktionen 173

Kapitel 6 Differentialrechnung 205

Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung 263

Kapitel 8 Univariate Optimierung 331

Kapitel 9 Integralrechnung 371

Kapitel 10 Themen aus der Finanzmathematik 431

Kapitel 11 Funktionen mehrerer Variablen 469

Kapitel 12 Handwerkszeug für komparativ statische Analysen 509

Kapitel 13 Multivariate Optimierung 567

Kapitel 14 Optimierung unter Nebenbedingungen 611

Kapitel 15 Matrizen und Vektoralgebra 667

Kapitel 16 Determinanten und inverse Matrizen 715

Kapitel 17 Lineare Programmierung 761

Anhang 809

Lösungen und Antworten zu den Aufgaben 813

Register 953

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 13

Vorwort zur 4. deutschen Auflage 19

Kapitel 1 Algebra 23

1.1 Die reellen Zahlen 24
1.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten 27
1.3 Regeln der Algebra 34
1.4 Brüche 39
1.5 Potenzen mit gebrochenen Exponenten 45
1.6 Ungleichungen 50
1.7 Intervalle und Absolutbeträge 56
1.8 Summen 60
1.9 Regeln für Summen 64
1.10 Newtons Binomische Formeln 67
1.11 Doppelsummen 69

Kapitel 2 Wesentliches aus der Logik und der Mengenlehre 75

2.1 Wesentliches aus der Mengenlehre 76
2.2 Einige Aspekte der Logik 83
2.3 Mathematische Beweise 88
2.4 Mathematische Induktion 91

Kapitel 3 Gleichungen lösen 95

3.1 Gleichungen lösen 96
3.2 Gleichungen und ihre Parameter 99
3.3 Quadratische Gleichungen 102
3.4 Nichtlineare Gleichungen 107
3.5 Lösung von Gleichungen mit Hilfe von Implikationspfeilen 110
3.6 Zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten 111

Kapitel 4 Funktionen einer Variablen . . . 117

4.1 Einführung . . . 118
4.2 Grundlegende Definitionen . . . 119
4.3 Graphen von Funktionen . . . 126
4.4 Lineare Funktionen . . . 129
4.5 Lineare Modelle . . . 136
4.6 Quadratische Funktionen . . . 140
4.7 Polynome . . . 147
4.8 Potenzfunktionen . . . 155
4.9 Exponentialfunktionen . . . 158
4.10 Logarithmusfunktionen . . . 164

Kapitel 5 Eigenschaften von Funktionen . . . 173

5.1 Verschiebung von Graphen . . . 174
5.2 Verknüpfungen von Funktionen . . . 180
5.3 Inverse Funktionen . . . 184
5.4 Graphen von Gleichungen . . . 191
5.5 Abstand in der Ebene . . . 195
5.6 Allgemeine Funktionen . . . 199

Kapitel 6 Differentialrechnung . . . 205

6.1 Steigungen von Kurven . . . 206
6.2 Tangenten und Ableitungen . . . 208
6.3 Monoton wachsende und fallende Funktionen . . . 214
6.4 Änderungsraten . . . 217
6.5 Exkurs über Grenzwerte . . . 221
6.6 Einfache Regeln der Differentiation . . . 227
6.7 Summen, Produkte und Quotienten . . . 231
6.8 Kettenregel . . . 238
6.9 Ableitungen höherer Ordnung . . . 243
6.10 Exponentialfunktionen . . . 249
6.11 Logarithmusfunktionen . . . 253

Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung 263

7.1 Implizites Differenzieren 264
7.2 Ökonomische Beispiele 272
7.3 Ableitung der Inversen 276
7.4 Lineare Approximationen 279
7.5 Polynomiale Approximationen 285
7.6 Taylor-Formel 288
7.7 Elastizitäten 292
7.8 Stetigkeit 296
7.9 Mehr über Grenzwerte 304
7.10 Der Zwischenwertsatz und das Newton-Verfahren 313
7.11 Unendliche Folgen 318
7.12 Regeln von L'Hôspital 321

Kapitel 8 Univariate Optimierung 331

8.1 Extremstellen 332
8.2 Einfache Tests auf Extremstellen 336
8.3 Ökonomische Beispiele 339
8.4 Der Extremwertsatz 344
8.5 Weitere ökonomische Beispiele 351
8.6 Lokale Extremstellen 356
8.7 Wendestellen, Konkavität und Konvexität 363

Kapitel 9 Integralrechnung 371

9.1 Unbestimmte Integrale 372
9.2 Flächen und bestimmte Integrale 378
9.3 Eigenschaften bestimmter Integrale 386
9.4 Ökonomische Anwendungen 390
9.5 Partielle Integration 398
9.6 Integration durch Substitution 402
9.7 Integration über unendliche Intervalle 407
9.8 Ein flüchtiger Blick auf Differentialgleichungen 415
9.9 Separierbare und lineare Differentialgleichungen 421

Kapitel 10 Themen aus der Finanzmathematik 431

10.1 Zinsperioden und effektive Raten 432
10.2 Stetige Verzinsung 436
10.3 Barwert 439
10.4 Geometrische Reihen 441
10.5 Gesamtbarwert 448
10.6 Hypothekenrückzahlungen 454
10.7 Interne Ertragsrate 459
10.8 Ein flüchtiger Blick auf Differenzengleichungen 461

Kapitel 11 Funktionen mehrerer Variablen. 469

11.1 Funktionen von zwei Variablen 470
11.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen 474
11.3 Geometrische Darstellung 481
11.4 Flächen und Abstand 489
11.5 Funktionen von mehreren Variablen 492
11.6 Partielle Ableitungen bei mehreren Variablen 497
11.7 Ökonomische Anwendungen 501
11.8 Partielle Elastizitäten 504

Kapitel 12 Handwerkszeug für komparativ statische Analysen 509

12.1 Eine einfache Kettenregel 510
12.2 Kettenregel für viele Variablen 516
12.3 Implizites Differenzieren entlang einer Höhenlinie 520
12.4 Allgemeinere Fälle 525
12.5 Substitutionselastizität 529
12.6 Homogene Funktionen von zwei Variablen 532
12.7 Homogene und homothetische Funktionen 537
12.8 Lineare Approximationen 543
12.9 Differentiale 547
12.10 Gleichungssysteme 552
12.11 Differenzieren von Gleichungssystemen 556

Kapitel 13 Multivariate Optimierung . . . 567

13.1 Zwei Variablen: Notwendige Bedingungen . . . 568
13.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen . . . 573
13.3 Lokale Extremstellen . . . 578
13.4 Lineare Modelle mit quadratischer Zielfunktion . . . 584
13.5 Der Extremwertsatz . . . 592
13.6 Der allgemeine Fall . . . 598
13.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem . . . 601

Kapitel 14 Optimierung unter Nebenbedingungen . . . 611

14.1 Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren . . . 612
14.2 Interpretation des Lagrange-Multiplikators . . . 620
14.3 Mehrere Lösungskandidaten . . . 623
14.4 Warum die Methode der Lagrange-Multiplikatoren funktioniert . . . 625
14.5 Hinreichende Bedingungen . . . 631
14.6 Zusätzliche Variablen und Nebenbedingungen . . . 634
14.7 Komparative Statik . . . 640
14.8 Nichtlineare Programmierung: Ein einfacher Fall . . . 646
14.9 Mehrere Nebenbedingungen in Ungleichheitsform . . . 653
14.10 Nichtnegativitätsbedingungen . . . 658

Kapitel 15 Matrizen und Vektoralgebra . . . 667

15.1 Systeme linearer Gleichungen . . . 668
15.2 Matrizen und Matrizenoperationen . . . 671
15.3 Matrizenmultiplikation . . . 675
15.4 Regeln für die Matrizenmultiplikation . . . 680
15.5 Die Transponierte . . . 688
15.6 Gauß'sche Elimination . . . 691
15.7 Vektoren . . . 697
15.8 Geometrische Interpretation von Vektoren . . . 701
15.9 Geraden und Ebenen . . . 707

Kapitel 16 Determinanten und inverse Matrizen 715

16.1 Determinanten der Ordnung 2 716
16.2 Determinanten der Ordnung 3 720
16.3 Determinanten im Allgemeinen 726
16.4 Grundlegende Regeln für Determinanten 729
16.5 Entwicklung nach Co-Faktoren 735
16.6 Die Inverse einer Matrix 738
16.7 Eine allgemeine Formel für die Inverse 745
16.8 Cramer'sche Regel 749
16.9 Das Leontief-Modell 753

Kapitel 17 Lineare Programmierung 761

17.1 Ein grafischer Ansatz 762
17.2 Einführung in die Dualitätstheorie 768
17.3 Das Dualitätstheorem 773
17.4 Eine allgemeine ökonomische Interpretation 776
17.5 Komplementärer Schlupf 778
17.6 Die Simplexmethode, erklärt an einem einfachen Beispiel... 785
17.7 Mehr über die Simplexmethode 788
17.8 Die Simplexmethode im allgemeinen Fall 791
17.9 Dualität mit Hilfe der Simplexmethode 799
17.10 Sensitivitätsanalyse 801

Anhang 809

A.1 Geometrie 810
A.2 Das Griechische Alphabet 812

Lösungen und Antworten zu den Aufgaben 813

Register 953

Vorwort

Es war einmal eine Gerade, die hoffnungslos in einen Punkt verliebt war. „Du bist der Anfang und das Ende, der Mittelpunkt, das Innere und die Quintessenz“, sagte er ihr zärtlich, aber der leichtfertige Punkt war kein bisschen interessiert, weil er nur Augen hatte für einen wilden und zerzausten Kringel, der niemals den Anschein machte, dass er überhaupt irgendetwas im Sinn hätte. Alle romantischen Träume der Geraden waren vergebens, bis er ... Winkel entdeckte! Nun kann er mit dieser neugefundenen Selbstdarstellung alles sein, was er möchte – ein Quadrat, ein Dreieck, ein Parallelogramm ... Und das ist nur der Anfang!

Norton Juster
(*The Dot and the Line: A Romance in Lower Mathematics* 1963)

Ich kam zu der Einstellung, dass mathematische Analysis nicht eine von vielen Möglichkeiten ist, ökonomische Theorie zu betreiben: Es ist die einzige Möglichkeit. Ökonomische Theorie ist mathematische Analysis. Alles andere ist nur Bilder und Gespräch.

R.E. Lucas, Jr. (2001)

Zielsetzung

Wesentliche Stoffgebiete, deren Beherrschung von heutigen Studierenden der Wirtschaftswissenschaften erwartet wird, verlangen bedeutende mathematische Kenntnisse. Dies gilt sogar für die weniger formale „angewandte“ Literatur, deren Studium für Kurse in Gebieten wie Finanzwirtschaft, industrielle Organisation, Arbeitsökonomie und vielen anderen verlangt wird. In der Tat setzt die meiste relevante Literatur Vertrautheit mit vielen mathematischen Handwerkszeugen wie Funktionen von einer und mehreren Variablen sowie ein grundlegendes Verständnis von multivariaten Optimierungsproblemen mit oder ohne Nebenbedingungen voraus. Lineare Algebra wird auch zum Teil in ökonomischer Theorie und in höherem Maße in Ökonometrie benötigt.

Die Zielsetzung von *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* (Essential Mathematics for Economic Analysis) ist es daher, Studierenden zu helfen, die mathematischen Handwerkszeuge zu erlangen, die sie für ihr Bachelorstudium benötigen. Dies sollte auch ausreichen für das, was einige Studierende während dieses Studiums für eine Forschungsarbeit und Abschlussarbeit benötigen.

Wie der Titel vermuten lässt, ist dies ein Mathematikbuch, in dem das Material so angeordnet ist, dass schrittweises Lernen der mathematischen Themen möglich ist. Das bedeutet, dass wir häufig wirtschaftswissenschaftliche Anwendungen hervorheben und zwar nicht nur, um ein mathematisches Thema zu motivieren. Wir möchten auch angehenden Wirtschaftswissenschaftlern helfen, sich gegenseitig verstärkende Intuition sowohl in Mathematik als auch in Wirtschaftswissenschaften zu erlangen. Durch zahlreiche Beispiele erhalten eine beträchtliche Anzahl von ökonomischen Konzepten und Ideen Aufmerksamkeit in diesem Buch.

Wir betonen jedoch, dass dies kein Buch über Wirtschaftswissenschaften oder sogar über mathematische Wirtschaftswissenschaften ist. Studierende sollten die wirtschaftswissenschaftliche Theorie systematisch in anderen Kursen lernen, die andere Bücher verwenden. Wir waren erfolgreich, wenn sie sich in diesen Kursen auf die Wirtschaftswissenschaften konzentrieren können, indem sie zuvor die relevanten mathematischen Grundlagen, die wir hier präsentieren, gemeistert haben.

Besonderheiten und Begleitmaterial

Dies ist mitnichten das erste Buch, das mit den oben beschriebenen Zielen geschrieben wurde. Aber es profitiert unserer Meinung nach von der Art und Weise, in der es zusammengefügt wurde. Einer der Autoren (Sydsæter) hat einen mathematischen Hintergrund und hat jahrelange Erfahrungen in der Unterrichtung von Materialien dieser Art, vor allem im „Department of Economics“ an der Universität Oslo. Viel von dem Material aus diesem Buch erschien urprünglich in Norwegisch und wurde aus norwegischen Textbüchern übersetzt, die in Skandinavien weitverbreitet waren. Der andere Autor (Hammond) hat auf beiden Seiten des Atlantiks in wirtschaftswissenschaftlicher Theorie gelehrt und geforscht und besitzt große Erfahrung in der Beurteilung der verschiedenen Arten, in der mathematische Handwerkszeuge in aktuellen ökonomischen Analysen angewendet werden. Er hat über mehrere Jahre auch Mathematik-Kurse für Wirtschaftswissenschaftler gegeben, insbesondere am „Department of Economics“ der Stanford University. Alle Unterkapitel in diesem Buch enden mit Aufgaben. Es gibt darüber hinaus auch viele Aufgaben zur Wiederholung am Ende eines jeden Kapitels. Antworten zu fast allen Aufgaben werden am Ende des Buches gegeben, manchmal mit zahlreichen ausführlichen Lösungsschritten. Probleme, die in den Lösungen mit gekennzeichnet sind, haben eine ausführlichere Lösung, die auf der MyMathLab | Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler verfügbar ist. Die Antworten zu einigen, eher theoretischen oder komplizierteren Aufgaben finden Sie ebenfalls ausschließlich auf MyMathLab | Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.

Voraussetzungen

Erfahrung zeigt, dass es sehr schwierig ist, ein Buch wie dieses auf einem Niveau zu starten, das viel zu elementar ist.[1]

Heutzutage haben Studierende, die in eine Fachhochschule oder eine Universität eintreten und sich auf Wirtschaftswissenschaften spezialisieren, eine enorme Bandbreite an mathematischem Hintergrund und mathematischer Begabung. Diese reichen am unteren Ende von allenfalls einem unsicheren Verständnis der elementaren Algebra bis hin zu wirklichen Fähigkeiten in der Analysis von Funktionen einer Variablen. Weiterhin sind für allzu viele Studierende der Wirtschaftswissenschaften einige Jahre seit ihrem letzten Mathematikunterricht vergangen. Da wir uns in die Richtung bewegen, dass Mathematik unerlässlich ist für spezielle Studien in den Wirtschaftswissenschaften, halten wir es dementsprechend für notwendig, so viel elementares Material wie möglich anzubieten. Unser Ziel ist es hier, denjenigen mit geringeren mathematischen Kenntnissen die Chance zu geben, mit leichten Problemen zu starten und das Vertrauen zu geben, dass sie diese selbst lösen können.

Was unsere ökonomischen Erörterungen betrifft, sollten Studierende es leichter zu verstehen finden, wenn sie bereits ein gewisses rudimentäres Hintergrundwissen in Ökonomie haben. Trotzdem ist dieser Text häufig verwendet worden, um Studierende in Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler zu unterrichten, die zur gleichen Zeit elementare Wirtschaftswissenschaften studieren. Wir sehen auch keinen Grund, warum dieses Material nicht von Studierenden, die an Wirtschaftswissenschaften interessiert sind, bewältigt werden kann, bevor sie begonnen haben, das Thema in einer formalen Lehrveranstaltung zu studieren.

Behandelte Themen

Nach dem einführenden Material in den Kapiteln 1 bis 3 enthalten die Kapitel 4 bis 8 eine ziemlich gemächliche Behandlung der Differentialrechnung einer Variablen. Darauf folgt in Kapitel 9 die Integration und in Kapitel 10 die Anwendung auf Zinsraten und Barwerte. Dies entspricht etwa dem Stoff, den man in einigen elementaren Kursen behandeln wird. Für Studierende mit einer soliden Grundlage in der Analysis einer Variablen reicht es vermutlich aus, wenn sie sich auf einige spezielle Themen in diesen Kapiteln konzentrieren wie Elastizität und Bedingungen für globale Optimierung, die häufig in elementaren Standardkursen nicht gründlich genug behandelt werden.

Wir haben jedoch die Bedeutung der multivariaten Analysis (Kapitel 11 und 12), der Optimierungstheorie (Kapitel 13 und 14) und der Algebra der Matrizen und Determinanten (Kapitel 15 und 16) für angehende Wirtschaftswissenschaftler betont. Viele Dozenten, die frühere Ausgaben des Buches verwendet haben, haben uns berichtet, dass sie ihre Studierenden auch mit der elementaren Theorie der linearen Programmierung vertraut machen wollen, was deshalb durch Kapitel 17 abgedeckt wird.

[1] Kürzlich gab es in einem Test für 120 Studienanfänger in einem elementaren wirtschaftswissenschaftlichen Kurs 35 verschiedene Antworten auf das Problem $(a+2b)^2$ auszumultiplizieren.

Die Reihenfolge der Kapitel ist, wie wir glauben, ziemlich logisch, wobei jedes Kapitel auf Material aus den früheren Kapiteln aufbaut. Die große Ausnahme betrifft Kapitel 15 und 16 über lineare Algebra wie auch Kapitel 17 über lineare Programmierung, von denen das Meiste irgendwohin nach Kapitel 3 verlegt werden könnte.

Schlüsselkonzepte und -techniken

Der weniger ehrgeizige Studierende kann sich auf das Erlernen der Schlüssel-Konzepte und -Techniken jedes Kapitels beschränken. Oft erscheinen diese eingerahmt in Kästen oder in Farbe, um ihre Wichtigkeit hervorzuheben. Aufgaben sind unerlässlich für den Lernprozess und die leichteren sollten unbedingt versucht werden. Diese Grundlagen sollten den Studierenden genügend mathematischen Hintergrund geben, um die ökonomische Theorie in angewandten Arbeiten vor dem ersten akademischen Abschluss zu verstehen.

Studierende, die ehrgeiziger sind oder die durch Lehrer angeleitet werden, die mehr verlangen, sollten sich auch an den anspruchsvolleren Aufgaben versuchen. Sie können auch das Material in kleinerer Schrift studieren. Letzteres verfolgt die Absicht, Studierende anzuregen, der Frage nachzugehen, warum ein Resultat wahr ist oder warum ein Problem auf eine spezielle Weise behandelt werden sollte. Je mehr Leser wenigstens etwas mehr zusätzliche mathematische Einsichten gewinnen, indem sie sich durch diese Teile des Buches arbeiten, desto besser.

Die fähigsten Studierenden, insbesondere diejenigen, die eine Promotion in den Wirtschaftswissenschaften oder einem angrenzenden Fachgebiet beabsichtigen, werden von gründlicheren Erklärungen einiger Themen profitieren als wir in diesem Buch bieten können. An einigen Stellen nehmen wir uns daher die Freiheit, auf unseren mehr angewandten Folgeband *Further Mathematics for Economic Analysis* (gewöhnlich mit FMEA abgekürzt) hinzuweisen, der gemeinsam mit Atle Seierstad und Arne Strøm aus Oslo geschrieben wurde und in einer neuen Auflage mit Andrés Carvajal aus Warwick.

Insbesondere bietet FMEA eine geeignete Behandlung von Themen wie Bedingungen zweiter Ordnung für die Optimierung und Konkavität und Konvexität von Funktionen mit mehr als zwei Variablen – Themen von denen wir denken, dass sie weit über das hinausgehen, was wirklich „essenziell“ für alle Studierenden der Wirtschaftswissenschaften ist.

Änderungen in der vierten Auflage

Wir sind erfreut über die Vielzahl der Studierenden und Dozenten in vielen Ländern, die die drei ersten Auflagen dieses Buches offensichtlich wertvoll fanden.[2] Wir waren dadurch ermutigt, den Text noch einmal gründlich zu überarbeiten. Es gibt zahlreiche kleine Änderungen und Verbesserungen, unter anderem die folgenden:

[2] Verschiedene englische Versionen dieses Buches sind in Albanisch, Französisch, Deutsch, Ungarisch, Italienisch, Portugiesisch, Spanisch und Türkisch übersetzt worden.

1) Die wesentliche Neuigkeit ist MyMathLab Global,[3] was auf der Seite nach diesem Vorwort und auf der Rückseite des Buches erklärt wird.

2) Neue Aufgaben wurden in jedem Kapitel hinzugefügt.

3) Abbildungen wurden aktualisiert.

4) Der Abschnitt 14.9 wurde überarbeitet, um ihn noch besser zugänglich zu machen. Er gliedert sich jetzt in **14.9 Mehrere Nebenbedingungen in Ungleichheitsform** und **14.10 Nichtnegativitätsbedingungen**.

Änderungen in der fünften Auflage

Tragischweise haben wir unseren Hauptautoren und Initiator diese Projektes verloren. Unser guter Freund und Kollege Knut Sydsæter starb plötzlich am 29. September 2012, während er in Spanien mit seiner Frau Malinka Staneva in Urlaub war, wenige Tage vor seinem 75. Geburtstag.

Die Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Oslo hat Knut eine Webseite zu seiner Erinnerung gewidmet.[4] Es gibt dort einen Link zu einem Nachruf, geschrieben von Jens Stoltenberg, zu der Zeit Premierminister von Norwegen, die diese Anerkennung von Knuts Fähigkeiten als einem seiner Lehrer enthält:

> Mit einem kleinen Stück Papier als sein Manuskript führte er mich und Generationen anderer Studenten der Wirtschaftswissenschaften in Mathematik als ein Hilfsmittel in ein Fachgebiet der Wirtschaftswissenschaften ein. Mit professioneller Gewichtung, Engagement und Humor war er sowohl ein anspruchsvoller als auch ein anregender Dozent. Er öffnete die Tür in die Welt der Mathematik. Er zeigte, dass Mathematik eine Sprache ist, die es möglich macht, komplizierte Zusammenhänge in einer einfachen Weise darzustellen.

Man findet dort auch Peters eigenen Nachruf auf Knut mit einigen Erinnerungen, wie frühere Auflagen dieses Buches entstanden sind.

Abgesehen vom Verlust von Knut als Hauptautor war es klar, dass dieses Buch am Leben erhalten werden musste, den Wünschen folgend, die Knut selbst ausgedrückt hatte, während er noch bei uns war. Glücklicherweise gab es bereits Übereinstimmung, dass das Team der Mitautoren durch Andrés Carvajal erweitert werden sollte, einem früheren Kollegen von Peter in Warwick, der während der Zeit des Schreibens zur Universität von Kalifornien in Davis wechselte. Er hatte bereits eine neue spanische Version der vorausgehenden Auflage dieses Buches hergestellt; jetzt ist er Mitautor dieser neuesten englischen Auflage geworden. Es geht weitgehend auf seine Initiative zurück, dass wir den bedeutenden Schritt unternommen haben, dass Material in den

[3] Ersetzt durch MyMathLab für diese fünfte Auflage.
[4] Siehe http://www.sv.uio.no/econ/om/aktuelt/aktuelle-saker/sydsaeter.html.

ersten drei Kapiteln gründlich umzuordnen in eine logischere Reihenfolge, wobei es jetzt mit Mengenlehre beginnt.

Die andere bedeutende Änderung ist, wie wir hoffen, unsichtbar für den Leser. Frühere Auflagen wurden mit dem „Plain-TEX"-System hergestellt, dass auf die Jahre um 1980 zurückgeht, zusammen mit einigen raffinierten Makros, die Arne entwickelt hat in Zusammenarbeit mit Arve Michaelsen von der Norwegischen Schriftsetzerfirma Matematisk Sats. Aus technischen Gründen haben wir entschieden, dass die neue Auflage mit der Erweiterung von Plain TEX, genannt LATEX, hergestellt werden sollte, was mittlerweile als internationaler Standard für das Schreiben von mathematischem Material akzeptiert ist. Wir haben deshalb versucht, einige Standard LATEXPakete anzupassen und zu erweitern, um möglichst viele gute Besonderheiten aus unseren früheren Auflagen zu erhalten.

Andere Danksagungen

Über die Jahre haben wir Hilfe von so vielen Kollegen, Lehrenden an anderen Institutionen und auch Studierenden erhalten, dass es uns unmöglich ist, alle zu erwähnen.

In der Zeit, als wir mit der Überarbeitung dieses Lehrbuches begannen, war Andrés Carvajal als Gast bei Fundaçao Getulio Vargas in Brasilien. Es gelang ihm, Unterstützung von Cristina Maria Igreja zu bekommen, die sich sowohl mit TEX als auch mit LATEX auskannte von ihrer Arbeit als Schriftsetzerin für Brasiliens angesehenste akademische wirtschaftswissenschaftliche Zeitschrift, *Revista Brasileira de Economia*. Ihre Hilfe erbrachte viel, um die notwendigen Umwandlungen der Computerdateien von Plain-TEX in LATEX für dieses Buch voranzutreiben.

In der vierten Auflage dieses Buches erkannten wir mit großer Dankbarkeit, die Anregungen und Unterstützung von Kate Brewin bei Pearson an. Während wir immer noch Kates willkommene Unterstützung im Hintergrund spüren, war der unmittelbarere Kontakt für diese Auflage zu Caitlin Lisle, die Herausgeberin für Business und Economics in der Abteilung für Hochschulbildung von Pearson ist. Sie war immer sehr hilfsbereit und aufmerksam in der Beantwortung unserer zahlreichen E-mails in einer freundlichen und ermutigenden Weise, indem sie uns versicherte, dass diese neue Ausgabe innerhalb eines angemessenen Zeitraums in Druck gehen werde.

Auf der mehr akademischen Seite geht ein ganz besonderer Dank an Professor Fred Böker von der Universität Göttingen, der nicht nur für die Übersetzung ins Deutsche verantwortlich ist, sondern auch außergewöhnliche Sorgfalt bewiesen hat, indem er den von ihm übersetzten mathematischen Details große Aufmerksamkeit geschenkt hat. Wir sind dankbar für die resultierende große Anzahl von wertvollen Verbesserungs- und Korrekturvorschlägen, die er uns weiterhin zukommen lässt, manchmal auf Veranlassung von Dr. Egle Tafenau, die auch die deutsche Version unseres Lehrbuchs in ihrer Lehre verwendet.

Diesen und all den vielen ungenannten Personen und Institutionen, die uns geholfen haben, diesen Text zu ermöglichen, einschließlich denen, deren Kommentare zu unse-

rem früheren Buch vom Verlag an uns weitergeleitet wurden, würden wir gern unsere tiefe Anerkennung und Dankbarkeit aussprechen, verbunden mit der Hoffnung, dass sie das resultierende Produkt als Gewinn für ihre Studierenden betrachten. Das ist es, worin wir alle übereinstimmen, was am Ende wirklich zählt.

Davis, Coventry und Oslo, Februar 2016
Andrés Carvajal, Peter Hammond und Arne Strøm

Vorwort zur 5. deutschen Auflage

Ich möchte mit einem Gedenken in großer Dankbarkeit an Knut Sydsæter beginnen, von dem ich bei den vorausgehenden Übersetzungen so große Unterstüzung in regem E-Mail-Verkehr erhalten habe. So erhielt ich die letzten E-Mails aus seinem spanischem Urlaubsort mit dem Versprechen auf ausführlichere Informationen nach der Rückkehr nach Oslo am 29. September – der Tag, an dem er starb. Ich hatte das große Glück, dass er mich gut drei Monate vorher in Göttingen besuchte, wo ich ihm die Universität und natürlich die Stätten zeigte, an denen Gauss gewohnt, gearbeitet hat bzw. die nach ihm benannt wurden. So waren wir u. a. in der Sternwarte, am Gauss-Weber-Denkmal auf dem Wall und am Gauss-Grab, nicht ahnend, dass ..., sondern Pläne für weitere zukünftige Besuche schmiedend. An dieser Stelle noch einmal herzlichen Dank an Knut.

Die deutsche 5. Auflage folgt nicht allen Änderungen der englischen Ausgabe. Die wesentlichen Änderungen sind auch in den ersten drei Kapiteln, wobei jedoch gegenüber der englischen Ausgabe die Kapitel 1 und 2 vertauscht sind. Damit beginnt das deutsche Buch weiterhin mit den **reellen Zahlen**, wobei dieses Kapitel um die bisherigen Inhalte über **Summen** erweitert wurde. In Kapitel 2 folgt dann **Logik und Mengenlehre**, während es in Kapitel 3 um **Gleichungen lösen** geht. Des weiteren wurde die Notation in den Kapiteln über Optimierung geändert. Es wird jetzt streng zwischen Extremstellen, Extremwerten und Extrempunkten unterschieden. Hier danke ich für den entsprechenden Hinweis meiner ehemaligen Kollegin Frau Britta Schnoor. Für Hinweise auf Fehler danke ich auch Frau Egle Tafenau und vielen anderen. Ich bitte weiterhin um entsprechende Hinweise.

Danken möchte ich auch den Mitarbeitern des Pearson-Verlages, Herrn Martin Milbradt und Herrn Birger Peil für die gute Zusammenarbeit und dem Setzer, Herrn Stefan Sossna, für die gute Gestaltung des Buches. Und ein ganz besonderer Dank an das englische Autorenteam, insbesondere an Peter und Arne für ihre Hilfe.

Göttingen
Fred Böker

Onlineinhalte zur deutschen Ausgabe

Seit der 4. erweiterten Auflage wird das Buch durch MyMathLab | Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler begleitet.

Interaktives Lernen mit MyMathLab | Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Grundlage unserer lokalen Lernplattform ist ein am MIT millionenfach erfolgreich erprobtes und entwickeltes interaktives eLearning-Tool für Mathematik, das Studierende beim Aufbereiten des Stoffes und beim schrittweisen Lösen der buchbezogenen Übungsaufgaben sowie bei den Prüfungsvorbereitungen ideal unterstützt. Profitieren Sie davon, die Übungen Schritt für Schritt durchzugehen. Lernen Sie mit dem zu den meisten Aufgaben dazugehörigen Feedback und lösen Sie sie so lange, bis das rechnerische Handwerk sitzt.

Zur Lernplattform gelangen Sie über folgenden Link: www.mymathlab.com/deutsch. Auf dieser Startseite können Sie sich direkt mit dem am Anfang des Buches stehenden Zugangscode und Hinweisen anmelden.

Kurs anlegen

Über den Navigationspunkt **Kurs-Manager** unter **Kurs erstellen und kopieren** können Sie Ihren Selbstlernkurs zum Buch anlegen. Danach steht Ihnen die gesamte eLearning-Welt von MyMathLab | Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler offen.

Hinweise zur Bearbeitung

In einem ersten Schritt haben Sie die Möglichkeit, sich in einem **Orientierungstest** mit der Benutzung der Lernumgebung vertraut zu machen. Sie erfahren dabei u.a. wie Sie Werte eingegeben und wie diese dargestellt werden.

Mit diesem Wissen können Sie einen Einstufungstest (Reiter „Aufgaben“) absolvieren, der Ihren individuellen Wissenstand ermittelt. Auf Basis der dort erzielten Ergebnisse erstellt Ihnen MyMathLab | Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler adaptiv Ihren ganz persönlichen Lernplan, so dass Sie gezielt bestehende Wissenslücken schließen können. Die für Ihren persönlichen Lernplan empfohlenen Aufgaben sind mit gekennzeichnet.

Insgesamt enthält das MyLab zu fast jedem Unterkapitel des Buchs optimierte und neue Aufgaben, die Sie online bearbeiten können. Gekennzeichnet sind diese im Buch mit dem MyLab-Logo.

Verschiedene Lösungsmöglichkeiten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben haben Sie in der Regel drei Möglichkeiten, um zur Lösung zu gelangen

1) Die Aufgabe: Die Aufgabe wird gestellt. Der Nutzer gibt seine Lösung ein und bekommt sofort eine Rückmeldung. Ist die Lösung falsch oder teilweise falsch, gibt es Hinweise, oft mit gezielten Verweisen auf die entsprechenden Passagen im Buch. Nach zwei oder manchmal auch mehr Fehlversuchen wird die korrekte Antwort angezeigt. Es besteht die Option eine ähnliche Aufgabe mit leicht geänderten Werten zu bearbeiten.

2) Die geführte Lösung: Hier wird die Lösung in kleinen Schritten mit anderen Zahlenwerten erarbeitet, wobei immer wieder Hinweise mit Verweisen auf das Buch gegeben werden. Wie unter 1.) gibt der Nutzer Lösungen ein, wobei er wieder mehrere Versuche hat und Hinweise bekommt, wo der Fehler stecken könnte. Auch hier gibt es am Schluss wieder die Möglichkeit, es mit einer ähnlichen Aufgabe noch einmal zu versuchen.

3) Die Beispielaufgabe: Hier wird an einem festem Beispiel die Aufgabe vom Anfang bis zum Ende vorgerechnet, wobei jeder Schritt erklärt wird und wie in 2.) (hier jedoch meistens noch intensiver) Hinweise auf die entsprechenden Resultate im Buch gegeben werden.

Somit gibt es für den Studierenden hervorragende didaktische Möglichkeiten, sein Wissen mit sofortiger Bestätigung zu überprüfen, ob er richtig oder falsch liegt. Und nicht nur das: Er bekommt Hilfestellungen. Empfehlenswert ist es, die Aufgaben in der oben angegebenen Reihenfolge 1), 2) und 3) zu bearbeiten, ohne gleich zu verzweifeln, wenn es mit 1) nicht auf Anhieb klappt. Sollten die Schritte 2) und 3) nötig sein, empfiehlt sich am Schluss ein erneuter Versuch mit 1), um sicher zu gehen, dass Sie die das mathematische Handwerk auch wirklich selbstständig beherrschen.

Wahr/Falsch-Aufgaben

Zur weiteren Wiederholung und zum besseren Verständnis, gibt es zusätzlich zu den Abschnitten mindestens drei Aufgaben, bei denen der Lernende entscheiden muss, ob die gegebenen Aussagen wahr oder falsch sind. Er bekommt in jedem Fall eine Rückmeldung, warum die Aussage wahr oder falsch ist in den meisten Fällen auch mit einem Verweis auf das Buch.

Wichtig und unerlässlich erscheint mir die selbstständige Arbeit mit dem Buch. Nutzen Sie daher die in den Aufgaben gegebenen Verweise auf die entsprechenden Stellen im Buch. Wenn Sie all diesen Empfehlungen folgen, sollte es mit *Mathe* schon klappen.

Neu in dieser Auflage das Didaktische Konzept von Pearson

„Learn a little … do a little“

Mathematik lernen und das Erlernte behalten funktioniert nur, wenn man es auch anwendet. Daher: „Lernen … anwenden“ oder „Lernen … tun“. Was im *Brückenkurs Mathematik* von Pearson begonnen wurde, findet hier nun seine Fortführung: Mit dem Tool „**Geogebra**“ ist es möglich, die mathematischen Inhalte dieses Buches in kleinen nachvollziehbaren Einheiten zu erlernen („**Learn a little**“) und parallel dazu durch interaktive Aufgabenstellungen, die auch aus der elektronischen Buchvorlage per „Klick“ erreichbar sind, das Erlernte gleich anzuwenden. Durch mehrfache Wiederholungen können Sie es solange üben („**do a little**“) und vertiefen, bis es „sitzt“.

Konkret sind den Beispielen, Definitionen, Theoremen oder Aufgaben im Buch QR-Codes zugeordnet, die mit **Geogebra-Arbeitsblättern** verlinkt sind. Aus der elektronischen Buchvorlage sind diese direkt anklickbar, bei der Druckversion muss ein QR-Scanner eingesetzt werden. Die Arbeitsblätter enthalten passende Aufgabentypen oder auch Anschauungsmaterial in Form animierbarer Grafiken, an denen das zu Erlernende transparent gemacht werden soll. Der Lernende kann seine Ergebnisse direkt überprüfen, da Zwischenergebnisse und Lösungen der Aufgaben anklickbar sind. Die Aufgabentypen enthalten die Möglichkeit, sich weitere andere Aufgaben gleichen Typs generieren zu lassen, d.h. wenn es nicht auf Anhieb mit der Lösung geklappt hat, können weitere Versuche unternommen werden.

Für die 5. Auflage wurde MyMathLab den oben beschriebenen Änderungen im Buch zum großen Teil angepasst und überarbeitet. Zusätzlich gibt es neue Aufgaben, insbesondere in den bisher nur schwach besetzten Kapiteln.

Algebra

1

1.1 Die reellen Zahlen 24
1.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten 27
1.3 Regeln der Algebra 34
1.4 Brüche 39
1.5 Potenzen mit gebrochenen Exponenten 45
1.6 Ungleichungen 50
1.7 Intervalle und Absolutbeträge 56
1.8 Summen 60
1.9 Regeln für Summen 64
1.10 Newtons Binomische Formeln 67
1.11 Doppelsummen 69

ÜBERBLICK

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

Leopold Kronecker[1]

Dieses einführende Kapitel befasst sich im Wesentlichen mit elementarer Algebra. Wir betrachten jedoch auch ganz kurz einige andere Themen, die es wert sind, wiederholt zu werden. Untersuchungen haben gezeigt, dass auch Studierende mit einem guten mathematischen Hintergrund oft von einer kurzen Wiederholung dessen, was sie in der Vergangenheit gelernt haben, profitieren. Diese Studierenden sollten das Material überfliegen und die weniger einfachen Probleme bearbeiten. Diejenigen mit einem schwächeren Hintergrund in Mathematik oder diejenigen, die längere Zeit nichts mit Mathematik zu tun hatten, sollten den Text sorgfältig lesen und dann die meisten der Übungsaufgaben bearbeiten. Diejenigen, die beträchtliche Schwierigkeiten mit diesem Kapitel haben, sollten sich ein elementareres Buch über Algebra suchen.

1.1 Die reellen Zahlen

Wir beginnen mit der Wiederholung einiger einfacher Eigenschaften und Resultate von Zahlen. Die grundlegenden Zahlen sind die **natürlichen Zahlen**:

$$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ \ldots \tag{1.1.1}$$

auch positive ganze Zahlen genannt. Hier sind $2, 4, 6, 8, \ldots$ die **geraden Zahlen** und $1, 3, 5, 7, \ldots$ sind die **ungeraden Zahlen**. Obwohl das für uns vertraut ist, sind solche Zahlen für uns in Wirklichkeit ziemlich abstrakte und hochentwickelte Konzepte. Die Kultur überschritt eine bemerkenswerte Schwelle, als sie die Idee verstand, dass eine Herde von vier Schafen und eine Sammlung von vier Steinen etwas gemeinsam haben, nämlich die „Vierheit". Diese Idee wurde dargestellt durch solch primitive Symbole wie :: (immer noch verwendet auf Dominosteinen oder Spielkarten), die moderne 4 und die römische Ziffer IV. Diese Idee wird immer wieder aufgegriffen, wenn kleine Kinder ihre mathematischen Fähigkeiten entwickeln.

Die positiven ganzen Zahlen, zusammen mit 0 und den negativen Zahlen -1, -2, $-3, -4, \ldots$ bilden die **ganzen Zahlen**:

$$0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 4, \ \ldots \tag{1.1.2}$$

Sie können auf einer **Zahlengeraden** wie der in Abb. 1.1.1 dargestellt werden, wobei der Pfeil die Richtung angibt, in der die Zahlen ansteigen.

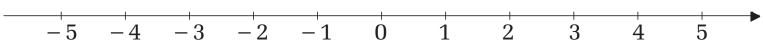

Abbildung 1.1.1: Die Zahlengerade

[1] etwa 1886.

Die **rationalen Zahlen** sind solche Zahlen wie $3/5$, die in der Form a/b geschrieben werden können, wobei a and b beides ganze Zahlen sind. Eine ganze Zahl n ist auch eine rationale Zahl, weil $n = n/1$. Andere Beispiele für rationale Zahlen sind:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{11}{70}, \quad \frac{125}{7}, \quad -\frac{10}{11}, \quad 0 = \frac{0}{1}, \quad -19, \quad -1.26 = -\frac{126}{100}.$$

Die rationalen Zahlen können auch auf der Zahlengeraden dargestellt werden. Stellen Sie sich vor, dass wir zunächst $1/2$ auf der Zahlengeraden markieren und dann alle Vielfachen von $1/2$. Dann markieren wir $1/3$ und alle Vielfachen von$1/3$ usw. Es wird Ihnen nachgesehen, wenn Sie denken, dass es „schließlich“ keinen Platz mehr geben wird, um noch weitere Zahlen auf der Geraden zu platzieren. Dies ist jedoch falsch. Die alten Griechen wussten bereits, dass noch Löcher auf der Zahlengeraden bleiben würden, selbst wenn alle rationalen Zahlen markiert wären. So gibt es z. B. keine ganzen Zahlen p und q, so dass $\sqrt{2} = p/q$. Daher ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.[2]

Die rationalen Zahlen reichen deshalb nicht aus, um alle möglichen Längen, geschweige denn Flächen und Volumen zu messen. Dieser Mangel kann behoben werden, indem man das Konzept der Zahlen um die so genannten **irrationalen Zahlen** erweitert. Diese Erweiterung kann auf ganz natürliche Weise mithilfe der Dezimaldarstellung für Zahlen durchgeführt werden, wie unten erklärt wird.

Die meisten Menschen schreiben Zahlen heute im so genannten **Dezimalsystem** oder im **System zur Basis 10**. Jede natürliche Zahl kann mit den Symbolen 0, 1, 2, …, 9 geschrieben werden, die **Ziffern** heißen.[3] Das 10er-Zahlensystem definiert jede Kombination von Ziffern als eine Linearkombination von Potenzen zur Basis 10, z. B.

$$1984 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

Jede natürliche Zahl kann eindeutig in dieser Form dargestellt werden. Mithilfe der Zeichen + und − können alle ganzen Zahlen, positive oder negative, in dieser Form geschrieben werden. Dezimalpunkte erlauben es uns auch, rationale Zahlen darzustellen, die keine natürlichen Zahlen sind, z. B.

$$3.1415 = 3 + 1/10^1 + 4/10^2 + 1/10^3 + 5/10^4$$

Rationale Zahlen, die mit einer endlichen Anzahl von Dezimalstellen dargestellt werden können, heißen **endliche Dezimalbrüche**.

Jeder endliche Dezimalbruch ist eine rationale Zahl, aber nicht jede rationale Zahl kann als endlicher Dezimalbruch geschrieben werden. Wir müssen auch **unendliche Dezimalbrüche** zulassen wie z. B.

$$100/3 = 33.333\ldots$$

Dabei deuten die drei Punkte an, dass die Ziffer 3 unendlich oft wiederkehrt.

Wenn ein Dezimalbruch eine rationale Zahl ist, so ist er immer **periodisch** – d. h. nach einer bestimmten Stelle in der Dezimaldarstellung bricht die Darstellung entwe-

[2] Euklid hat dies um 300 v. Chr. bewiesen.

[3] Das englische Wort „digit“ für Ziffer bedeutet auch „Finger“ und die meisten Menschen haben 10 Finger.

der ab oder eine endliche Folge von Ziffern wiederholt sich unendlich oft, z. B.

$$11/70 = 0.1\underbrace{571428}\underbrace{571428}5\ldots$$

Dabei wiederholt sich die Folge der sechs Ziffern unendlich oft.

Die Definition der reellen Zahlen folgt aus der vorangehenden Diskussion. Wir definieren eine **reelle Zahl** als einen beliebigen unendlichen Dezimalbruch. Eine reelle Zahl hat also die Gestalt $x = \pm m.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, wobei m eine nicht-negative ganze Zahl und α_n $(n = 1, 2\ldots)$ eine unendliche Folge von Ziffern ist, jede aus dem Bereich 0 bis 9.

Wir haben bereits die periodischen Dezimalbrüche als die rationalen Zahlen identifiziert. Darüber hinaus gibt es unendlich viele neue Zahlen in Form der nichtperiodischen Dezimalbrüche. Diese heißen **irrationale Zahlen**. Beispiele sind u. a.[4]

$$\sqrt{2}, \quad -\sqrt{5}, \quad \pi, \quad 2^{\sqrt{2}}, \quad \text{und} \quad 0.12112111211112\ldots.$$

Wir haben bereits erwähnt, dass jede rationale Zahl als Punkt auf der Zahlengeraden dargestellt werden kann. Aber nicht alle Punkte auf der Zahlengeraden repräsentieren rationale Zahlen. Es ist so, als ob die irrationalen Zahlen die verbleibenden „Lücken schließen“, nachdem alle rationalen Zahlen an ihrem Ort platziert sind. Daher ist eine ununterbrochene und endlose Gerade mit einem Ursprung und einer positiven Längeneinheit ein geeignetes Modell für die reellen Zahlen. Wir sagen oft, dass es eine *Eins-zu-Eins-Korrespondenz* zwischen den reellen Zahlen und der Zahlengeraden gibt. Man spricht auch oft von der „reellen Geraden“, anstelle der „Zahlengeraden“.

Man sagt von den rationalen und irrationalen Zahlen, dass sie „dicht“ auf der Zahlengeraden liegen. Dies bedeutet, dass man zwischen zwei reellen Zahlen, egal wie nah sie zueinander liegen, immer noch eine rationale und eine irrationale Zahl finden kann – tatsächlich kann man von beiden je unendlich viele finden.

Wendet man die vier Grundrechenarten auf die reellen Zahlen an, so ist das Ergebnis wieder eine reelle Zahl. Die einzige Ausnahme ist, dass wir nicht durch 0 teilen dürfen: mit den Worten des amerikanischen Komikers Steven Wright: „Schwarze Löcher sind dort, wo Gott durch Null teilte.“

Division durch Null

$$\frac{p}{0} \text{ ist nicht definiert für jede reelle Zahl } p. \tag{1.1.3}$$

Dies ist sehr wichtig und sollte nicht verwechselt werden mit $0/a = 0$ für alle $a \neq 0$. Beachten Sie insbesondere, dass $0/0$ nicht als irgendeine reelle Zahl definiert ist. Wenn z. B. ein Auto 60 Liter Benzin braucht, um 600 Kilometer zu fahren, dann ist der Benzinverbrauch $60/600 = 10$ Liter pro 100 Kilometer. Wenn jedoch gesagt wird, dass ein Auto 0 Liter Benzin braucht, um 0 Kilometer zu fahren, so wissen wir nichts über den Benzinverbrauch dieses Autos; $0/0$ ist undefiniert.

[4] Im Allgemeinen ist es sehr schwierig, zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl rational oder irrational ist. Es ist seit dem Jahr 1776 bekannt, dass π irrational ist und seit 1927, dass $2^{\sqrt{2}}$ irrational ist. Es gibt jedoch viele Zahlen, über die wir noch nicht wissen, ob sie irrational sind oder nicht.

Aufgaben für Kapitel 1.1

1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) 1984 ist eine natürliche Zahl.

(b) -5 liegt rechts von -3 auf der Zahlengeraden.

(c) -13 ist eine natürliche Zahl.

(d) Es gibt keine natürliche Zahl, die nicht rational ist.

(e) 3.1415 ist nicht rational.

(f) Die Summe zweier irrationaler Zahlen ist irrational.

(g) $-3/4$ ist rational.

(h) Alle rationalen Zahlen sind reell.

2. Erklären Sie, warum der unendliche Dezimalbruch 1.01001000100001000001... keine rationale Zahl ist.

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

1.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Sie sollten bereits wissen, dass wir oft 3^4 anstelle des Produkts $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ schreiben, dass $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ als $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ geschrieben werden kann und dass $(-10)^3 = (-10)(-10)(-10) = -1000$. Wenn a eine beliebige Zahl und n eine natürliche Zahl ist, dann ist a^n definiert durch

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}} \tag{1.2.1}$$

Wir nennen a^n die ***n*-te Potenz von *a***. Dabei heißt a die **Basis** (Grundzahl) und n ist der **Exponent** (Hochzahl). Wir haben z. B. $a^2 = a \cdot a$, $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ und

$$\left(\frac{p}{q}\right)^5 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$$

mit $a = p/q$ und $n = 5$. Nach Definition ist $a^1 = a$, ein „Produkt" mit nur einem Faktor.

Gewöhnlich lassen wir das Multiplikationszeichen weg, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind. Wir schreiben z. B. abc, anstelle $a \cdot b \cdot c$. Jedoch ist es sicherer, in $1.05^3 = 1.05 \cdot 1.05 \cdot 1.05$ das Produktzeichen beizubehalten.

Wir definieren ferner für jede reelle Zahl $a \neq 0$

$$a^0 = 1 \tag{1.2.2}$$

Daher ist $5^0 = 1$, $(-16.2)^0 = 1$ und $(x \cdot y)^0 = 1$ (falls $x \cdot y \neq 0$). Wenn $a = 0$, weisen wir a^0 keinen numerischen Wert zu. Der Ausdruck 0^0 ist *nicht definiert*.

Wir müssen auch Potenzen mit negativen Exponenten definieren. Was meinen wir mit 3^{-2}? Es erweist sich als vernünftig, 3^{-2} gleich $1/3^2 = 1/9$ zu setzen. Im Allgemeinen definieren wir

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{1.2.3}$$

für jede natürliche Zahl n und $a \neq 0$. Insbesondere ist $a^{-1} = 1/a$. Auf diese Weise haben wir a^x für alle ganzen Zahlen x definiert.

Taschenrechner haben gewöhnlich eine Taste zur Berechnung von Potenzen, die mit $\boxed{y^x}$ oder $\boxed{a^x}$ bezeichnet ist. Probieren Sie aus, wie mit Ihrem Taschenrechner 2^3 (das ist 8), 3^2 (das ist 9) und 25^{-3} (das ist 0.000064) berechnet wird.

Eigenschaften von Potenzen

Es gibt einige Rechenregeln für Potenzen, die Sie nicht nur auswendig können müssen, sondern Sie sollten auch verstehen, warum sie gelten. Die zwei wichtigsten sind:

Eigenschaften von Potenzen

Für jede reelle Zahl a und alle ganzen Zahlen r und s gilt:

$$\text{(i)}\quad a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \text{(ii)}\quad (a^r)^s = a^{rs} \tag{1.2.4}$$

Überlegen Sie sich gründlich, was diese Regeln aussagen. Gemäß Regel (i) werden Potenzen mit derselben Basis multipliziert, indem man die Exponenten *addiert*, z. B.

$$a^3 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ mal}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{3+5=8 \text{ mal}} = a^8 = a^{3+5}$$

Hier ist ein Beispiel für Regel (ii):

$$(a^2)^4 = \underbrace{\underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ mal}}}_{4 \text{ mal}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4 \cdot 2 = 8 \text{ mal}} = a^8 = a^{2 \cdot 4}$$

Division von zwei Potenzen mit derselben Basis funktioniert folgendermaßen:

$$a^r \div a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^r \frac{1}{a^s} = a^r \cdot a^{-s} = a^{r-s}$$

Wir dividieren also zwei Potenzen mit derselben Basis, indem wir den Exponenten des Nenners *subtrahieren* vom Exponenten des Zählers.[5] Zum Beispiel $a^3 \div a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$.

Beachten Sie noch, dass

$$(ab)^r = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{r \text{ mal}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{r \text{ mal}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{r \text{ mal}} = a^r b^r$$

[5] Eine wichtige Motivation für die Definitionen $a^0 = 1$ und $a^{-n} = 1/a^n$ ist, dass die Regeln für Potenzen sowohl für negative und positive Exponenten als auch für Exponenten, die gleich Null sind, gelten sollen. Betrachten Sie z. B. die Implikation der Forderung $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ für $a^5 \cdot a^0$. Wir erhalten $a^{5+0} = a^5$, so dass $a^5 \cdot a^0 = a^5$, und daher müssen wir $a^0 = 1$ setzen. Wenn $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ für $m = -n$ gelten soll, muss $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$ sein. Da $a^n \cdot (1/a^n) = 1$, *müssen* wir a^{-n} als $1/a^n$ definieren.

und

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{b}}_{r\text{ mal}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{r\text{ mal}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{r\text{ mal}}} = \frac{a^r}{b^r} = a^r b^{-r}$$

Diese Regeln können auf den Fall mehrerer Faktoren ausgedehnt werden, z. B.

$$(abcde)^r = a^r b^r c^r d^r e^r$$

Wir haben gesehen, dass $(ab)^r = a^r b^r$. Was ist mit $(a+b)^r$? Ein weit verbreiteter Fehler in der elementaren Algebra ist, dass man dies gleichsetzt mit $a^r + b^r$. Jedoch ist z. B. $(2+3)^3 = 5^3 = 125$, aber $2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$. Daher ist

$$(a+b)^r \neq a^r + b^r \qquad \text{(im Allgemeinen)} \tag{1.2.5}$$

Beispiel 1.2.1

Vereinfachen[6] Sie (a) $x^p x^{2p}$ (b) $t^s \div t^{s-1}$ (c) $a^2 b^3 a^{-1} b^5$ (d) $\dfrac{t^p t^{q-1}}{t^r t^{s-1}}$.

Lösung:

(a) $x^p x^{2p} = x^{p+2p} = x^{3p}$

(b) $t^s \div t^{s-1} = t^{s-(s-1)} = t^{s-s+1} = t^1 = t$

(c) $a^2 b^3 a^{-1} b^5 = a^2 a^{-1} b^3 b^5 = a^{2-1} b^{3+5} = a^1 b^8 = ab^8$

(d) $\dfrac{t^p \cdot t^{q-1}}{t^r \cdot t^{s-1}} = \dfrac{t^{p+q-1}}{t^{r+s-1}} = t^{p+q-1-(r+s-1)} = t^{p+q-1-r-s+1} = t^{p+q-r-s}$

Beispiel 1.2.2

Berechnen Sie $x^{-4}y^6$, x^6y^{-9} und $x^2y^{-3} + 2x^{-10}y^{15}$, wenn $x^{-2}y^3 = 5$.

Lösung: Wie können wir von der Annahme $x^{-2}y^3 = 5$ Gebrauch machen, wenn wir $x^{-4}y^6$ berechnen wollen. Vielleicht erkennen Sie, dass $(x^{-2}y^3)^2 = x^{-4}y^6$ und daher $x^{-4}y^6 = 5^2 = 25$. Ähnlich erhält man

$$x^6y^{-9} = (x^{-2}y^3)^{-3} = 5^{-3} = 1/5^3 = 1/125$$

und

$$x^2y^{-3} + 2x^{-10}y^{15} = (x^{-2}y^3)^{-1} + 2(x^{-2}y^3)^5 = 5^{-1} + 2\cdot 5^5 = 1/5 + 6250 = 6250.2$$

[6] Hier und für das ganze Buch sei nachdrücklich empfohlen, dass Sie versuchen, das Problem selbstständig zu lösen, indem Sie die hier gebotene Lösung zunächst zudecken und dann nach und nach die hier vorgeschlagene Lösung mit Ihrer eigenen vergleichen, um zu sehen, ob Sie das Problem richtig gelöst haben.

Beispiel 1.2.3

Es passiert leicht, dass beim Rechnen mit Potenzen Fehler gemacht werden. Die folgenden Beispiele sollen einige der häufigsten Fehlerquellen aufzeigen.

(a) Es ist ein großer Unterschied zwischen $(-10)^2 = (-10)(-10) = 100$ und $-10^2 = -(10 \cdot 10) = -100$. Das Quadrat von -10 ist nicht das Negative des Quadrats von 10.

(b) Beachten Sie, dass $(2x)^{-1} = 1/(2x)$. Hier wird das Produkt $2x$ mit -1 potenziert. Andererseits wird jedoch in dem Ausdruck $2x^{-1}$ nur x mit -1 potenziert, so dass $2x^{-1} = 2 \cdot (1/x) = 2/x$.

(c) Das Volumen eines Balles mit Radius r ist $\frac{4}{3}\pi r^3$. Wie groß ist das Volumen, wenn der Radius verdoppelt wird? Lösung: Das neue Volumen ist: $\frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi(2r)(2r)(2r) = \frac{4}{3}\pi 8r^3 = 8\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$, d. h. das Volumen ist 8-mal so groß wie das ursprüngliche. Wenn wir fälschlich $(2r)^3$ in $2r^3$ „vereinfachen" würden, würde das Resultat nur eine Verdopplung des Volumens ergeben, was jeglicher Alltagserfahrung widerspricht.

Zinseszins

Potenzen werden in praktisch allen Bereichen der angewandten Mathematik, einschließlich Wirtschaftswissenschaften, gebraucht. Um ihren Nutzen zu illustrieren, erinnern Sie sich, wie sie benötigt werden, um Zinseszins zu berechnen.

Nehmen Sie an, dass Sie 1000 Euro auf einem Bankkonto anlegen bei 8 % Zinsen am Ende des Jahres.[7] Nach einem Jahr erhalten Sie $1000 \cdot 0.08 = 80$ Euro an Zinsen, so dass das Guthaben auf Ihrem Bankkonto 1080 Euro beträgt. Dies kann so umgeschrieben werden:

$$1000 + \frac{1000 \cdot 8}{100} = 1000\left(1 + \frac{8}{100}\right) = 1000 \cdot 1.08$$

Nehmen Sie an, dass dieser neue Betrag von $1000 \cdot 1.08$ Euro für ein weiteres Jahr auf dem Konto stehen bleibt zu einem Zinssatz von 8 %. Nach dem zweiten Jahr ist der zusätzliche Zinsbetrag $1000 \cdot 1.08 \cdot 0.08$, so dass das Gesamtguthaben anwachsen wird auf

$$1000 \cdot 1.08 + (1000 \cdot 1.08) \cdot 0.08 = 1000 \cdot 1.08(1 + 0.08) = 1000 \cdot (1.08)^2$$

Jedes Jahr wächst das Guthaben um den Faktor 1.08, und wir sehen, dass es nach t Jahren auf $1000 \cdot (1.08)^t$ Euro anwachsen wird.

Wenn der ursprünglich angelegte Betrag K Euro und der Zinssatz p % pro Jahr ist, wird das Guthaben am Ende des ersten Jahres $K + K \cdot p/100 = K(1 + p/100)$ Euro betragen. Der Wachstumsfaktor pro Jahr ist daher $1 + p/100$. Nach t (ganzen) Jahren wird das Anfangskapital von K Euro anwachsen auf den Betrag von

$$K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t ,$$

wenn der Zinssatz p % pro Jahr ist und die Zinsen jedes Jahr dem Konto gutgeschrieben werden – d. h. es gibt Zinseszinsen.

[7] Zur Erinnerung sei gesagt, dass 1 % bedeutet eins von Hundert oder 0.01. So ist z. B. 23 % gleich $23 \cdot 0.01 = 0.23$. Um 23 % von 4000 Euro zu berechnen, schreiben wir $4000 \cdot \frac{23}{100} = 920$ oder $4000 \cdot 0.23 = 920$.

Dieses Beispiel verdeutlicht ein allgemeines Prinzip:

Exponentielles Wachstum

Eine Größe K, die jedes Jahr um $p\,\%$ anwächst, wird nach t Jahren auf

$$K\left(1+\frac{p}{100}\right)^t \tag{1.2.6}$$

anwachsen. Dabei wird $1+\dfrac{p}{100}$ der **Wachstumsfaktor** für ein Wachstum von $p\,\%$ genannt.

Wenn Sie einen Ausdruck wie $(1.08)^t$ sehen, sollten Sie sofort erkennen können, dass dies der Betrag ist, auf den 1 Euro nach t Jahren angewachsen ist, wenn der Zinssatz 8 % pro Jahr ist. Wie ist $(1.08)^0$ zu interpretieren? Sie legen 1 Euro zu 8 % pro Jahr an und lassen diesen Betrag für 0 Jahre auf Ihrem Konto. Dann werden Sie immer noch nur 1 Euro haben, weil keine Zeit vergangen ist, um irgendwelche Zinsen anzusammeln, so dass $(1.08)^0$ gleich 1 sein *muss*.[8]

Beispiel 1.2.4

Ein neues Auto wurde für 15 000 Euro gekauft und es wird angenommen, dass es jedes Jahr 15 % an Wert verliert über einen Zeitraum von 6 Jahren. Wie groß ist der Wert nach 6 Jahren?

Lösung: Nach einem Jahr ist der Wert gefallen auf

$$15\,000-\frac{15\,000\cdot 15}{100}=15\,000\left(1-\frac{15}{100}\right)=15\,000\cdot 0.85=12\,750$$

Nach zwei Jahren ist der Wert $15\,000\cdot(0.85)^2 = 10\,837.50$, usw. und wir erkennen, dass der Wert nach sechs Jahren $15\,000\cdot(0.85)^6\approx 5\,657$ sein wird.

Dieses Beispiel verdeutlicht ein allgemeines Prinzip:

Exponentielle Abnahme

Eine Größe K, die jedes Jahr um $p\,\%$ abnimmt, wird nach t Jahren auf

$$K\left(1-\frac{p}{100}\right)^t \tag{1.2.7}$$

fallen. Dabei wird $1-\dfrac{p}{100}$ der **Wachstumsfaktor** bei einer Abnahme um $p\,\%$ genannt.

---

[8] $1000\cdot(1.08)^5$ ist der Betrag, den Sie nach 5 Jahren auf Ihrem Konto haben werden, wenn Sie 1000 Euro zu 8 % Zinsen pro Jahr anlegen. Mit einem Rechner werden Sie schnell herausfinden, dass Sie ungefähr 1469.33 Euro besitzen werden. Ein ziemlich verbreiteter Fehler ist $1000\cdot(1.08)^5 = (1000\cdot 1.08)^5 = (1080)^5$ zu setzen. Dies ist 10^{12} (oder eine Billion) mal die richtige Antwort.

Brauchen wir wirklich negative Exponenten?

Wie viel Geld hätten Sie vor 5 Jahren bei einer Bank anlegen müssen, um heute 1000 Euro zu haben, vorausgesetzt, dass der Zinssatz 8 % pro Jahr über den ganzen Zeitraum war? Wenn wir diesen Betrag x nennen, so muss $x \cdot (1.08)^5$ gleich 1000 Euro sein, d. h. $x \cdot (1.08)^5 = 1000$. Indem wir auf beiden Seiten durch 1.08^5 dividieren, erhalten wir

$$x = \frac{1000}{(1.08)^5} = 1000 \cdot (1.08)^{-5}$$

(was ungefähr 681 Euro ist). Daher hätten Sie $(1.08)^{-5}$ Euro vor 5 Jahren anlegen müssen, um heute 1 Euro zu haben, gegeben, dass der Zinssatz konstant gleich 8 % war.

Im Allgemeinen gilt: $P\left(1 + p/100\right)^{-t}$ *ist der Betrag, den Sie vor t Jahren hätten anlegen müssen, um heute P* Euro *zu haben, falls der Zinssatz p % pro Jahr gewesen wäre.*

Aufgaben für Kapitel 1.2

1. Berechnen Sie die folgenden Zahlen:

(a) 10^3 (b) $(-0.3)^2$ (c) 4^{-2} (d) $(0.1)^{-1}$

2. Schreiben Sie die folgenden Zahlen als Potenzen von 2:

(a) 4 (b) 1 (c) 64 (d) 1/16

3. Schreiben Sie die folgenden Zahlen als Potenzen:

(a) $15 \cdot 15 \cdot 15$ (b) $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$ (c) $\frac{1}{10}$ (d) 0.0000001

(e) $t\,t\,t\,t\,t\,t$ (f) $(a-b)(a-b)(a-b)$ (g) $a\,a\,b\,b\,b\,b$ (h) $(-a)(-a)(-a)$

4. Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $2^5 \cdot 2^5$ (b) $3^8 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-3}$ (c) $(2x)^3$ (d) $(-3xy^2)^3$

(e) $\dfrac{p^{24}p^3}{p^4 p}$ (f) $\dfrac{a^4 b^{-3}}{(a^2 b^{-3})^2}$ (g) $\dfrac{3^4(3^2)^6}{(-3)^{15}3^7}$ (h) $\dfrac{p^{\gamma}(pq)^{\sigma}}{p^{2\gamma+\sigma}q^{\sigma-2}}$

5. Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3$ (b) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$ (c) $\dfrac{4^2 \cdot 6^2}{3^3 \cdot 2^3}$

(d) $x^5 x^4$ (e) $y^5 y^4 y^3$ (f) $(2xy)^3$

(g) $\dfrac{10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{10^0 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5}$ (h) $\dfrac{(k^2)^3 k^4}{(k^3)^2}$ (i) $\dfrac{(x+1)^3(x+1)^{-2}}{(x+1)^2(x+1)^{-3}}$

6. Die Oberfläche einer Kugel mit Radius r ist $4\pi r^2$.

(a) Mit welchem Faktor wächst die Oberfläche, wenn der Radius verdreifacht wird?

(b) Um wieviel % nimmt die Oberfläche zu, wenn der Radius um 16% zunimmt?

➡ Fortsetzung

7. Nehmen Sie an, dass a und b positiv sind, während m und n ganze Zahlen sind. Welche der folgenden Gleichungen sind wahr und welche sind falsch?

(a) $a^0 = 0$ (b) $(a+b)^{-n} = 1/(a+b)^n$ (c) $a^m \cdot a^m = a^{2m}$

(d) $a^m \cdot b^m = (ab)^{2m}$ (e) $(a+b)^m = a^m + b^m$ (f) $a^n \cdot b^m = (ab)^{n+m}$

8. Ersetzen Sie im Folgenden die Pünktchen durch Ihre Antworten:

(a) $xy = 3$ impliziert $x^3y^3 = \ldots$ (b) $ab = -2$ impliziert $(ab)^4 = \ldots$

(c) $a^2 = 4$ impliziert $(a^8)^0 = \ldots$ (d) n ganze Zahl impliziert $(-1)^{2n} = \ldots$

9. Berechnen Sie: (a) 13 % von 150 (b) 6 % von 2400 (c) 5.5 % von 200

10. Geben Sie für jeden der folgenden Ausdrücke ökonomische Interpretationen an und benutzen Sie dann einen Taschenrechner, um approximative Werte zu finden:

(a) $50 \cdot (1.11)^8$ € (b) $10\,000 \cdot (1.12)^{20}$ € (c) $5000 \cdot (1.07)^{-10}$ €

11. Eine Packung mit 5 Bällen kostet 8.50 Euro. Wenn die Bälle einzeln gekauft werden, kosten Sie 2.00 Euro pro Stück. Wie viel billiger ist es, in Prozent ausgedrückt, die Packung zu erwerben als die Bälle einzeln zu kaufen?

12. (a) 12 000 Euro werden bei 4 % Zinsen pro Jahr auf einem Konto angelegt. Wie hoch ist das Guthaben nach 15 Jahren?

(b) Wie viel Geld (in Euro) hätten Sie vor 5 Jahren bei einer Bank anlegen müssen, um heute 50 000 Euro zu haben, wenn der Zinssatz 6 % gewesen wäre?

13. Eine Größe wächst jedes Jahr um 25 % in einem Zeitraum von 3 Jahren. Wie groß ist das gesamte prozentuale Wachstum p über die Dreijahresperiode?

14. Der Gewinn eines Unternehmens stieg von 2010 auf 2011 um 20 %, nahm dann aber um 17 % ab von 2011 auf 2012.

(a) Welches von den Jahren 2010 und 2012 hatte den höheren Gewinn?

(b) Bei welcher prozentualen Abnahme von 2011 auf 2012 wären die Gewinne in 2010 und 2012 gleich gewesen?

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

1.3 Regeln der Algebra

Sie sind sicherlich schon mit den meisten der wichtigen Regeln der Algebra vertraut. Wir haben bereits einige in diesem Kapitel benutzt. Trotzdem erscheint es nützlich, die wichtigsten Regeln zu wiederholen.

Regeln der Algebra

Wenn a, b und c beliebige Zahlen sind, dann gilt:

(i)	$a + b = b + a$	(vii)	$1 \cdot a = a$
(ii)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	(viii)	$a a^{-1} = 1$ für $a \neq 0$
(iii)	$a + 0 = a$	(ix)	$(-a)b = a(-b) = -ab$
(iv)	$a + (-a) = 0$	(x)	$(-a)(-b) = ab$
(v)	$ab = ba$	(xi)	$a(b + c) = ab + ac$
(vi)	$(ab)c = a(bc)$	(xii)	$(a + b)c = ac + bc$

Beispiel 1.3.1

Diese Regeln werden in den folgenden Gleichheiten benutzt. Geben Sie bitte genau an, welche Regeln benutzt werden.

(a) $5 + x^2 = x^2 + 5$

(b) $(a + 2b) + 3b = a + (2b + 3b) = a + 5b$

(c) $x \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot x = \frac{1}{3}x$

(d) $(xy)y^{-1} = x(yy^{-1}) = x$

(e) $(-3)5 = 3(-5) = -(3 \cdot 5) = -15$

(f) $(-6)(-20) = 120$

(g) $3x(y + 2z) = 3xy + 6xz$

(h) $(t^2 + 2t)4t^3 = t^2 4t^3 + 2t4t^3 = 4t^5 + 8t^4$

Lösung: (a) (i); (b) (ii); (c) (v); (d) (vi) und (viii);
(e) (ix); (f) (x); (g) (xi); (h) (xii)

Die algebraischen Regeln können auf verschiedene Weisen kombiniert werden und man erhält so:

$$a(b - c) = a[b + (-c)] = ab + a(-c) = ab - ac$$

$$x(a + b - c + d) = xa + xb - xc + xd$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Abb. 1.3.1 liefert ein geometrisches Argument für die letzte dieser Regeln für den Fall, in dem die Zahlen a, b, c und d alle positiv sind. Die Fläche $(a + b)(c + d)$ des großen Rechtecks ist die Summe der Flächen der vier kleinen Rechtecke.

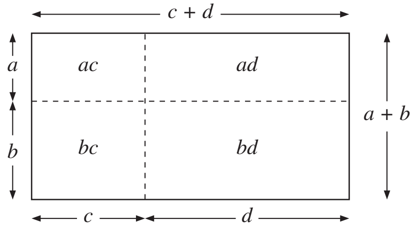

Abbildung 1.3.1: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Beachten Sie die folgenden drei „quadratischen Identitäten“ (Binomische[9] Formeln), die so wichtig sind, dass Sie sie auswendig lernen sollten.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.3.1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.3.2}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{1.3.3}$$

Die letzte dieser drei Gleichungen heißt die *Formel für die Differenz von Quadraten*. Die Beweise sind sehr einfach, z. B. $(a+b)^2$ bedeutet $(a+b)(a+b)$, welches gleich $aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$ ist.

Beispiel 1.3.2

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $(3x+2y)^2$ (b) $(1-2z)^2$ (c) $(4p+5q)(4p-5q)$

Lösung:

(a) $(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

(b) $(1-2z)^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2z + (2z)^2 = 1 - 4z + 4z^2$

(c) $(4p+5q)(4p-5q) = (4p)^2 - (5q)^2 = 16p^2 - 25q^2$

Wir verwenden oft Klammern mit einem voranstehenden Minuszeichen. Da $(-1)x = -x$, folgt:

$$-(a+b-c+d) = -a-b+c-d$$

In Worten: *Wenn Sie ein Klammernpaar mit voranstehendem Minuszeichen entfernen wollen, müssen Sie die Vorzeichen* ***aller*** *Terme in der Klammer ändern. Dabei dürfen Sie keines vergessen.*

Wir haben gesehen, wie man zwei Faktoren $(a+b)$ und $(c+d)$ miteinander multipliziert. Wie berechnet man solche Produkte, wenn es mehrere Faktoren gibt? Hier ist ein Beispiel:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)(e+f) &= \big[(a+b)(c+d)\big](e+f) = \big(ac+ad+bc+bd\big)(e+f) \\ &= (ac+ad+bc+bd)e + (ac+ad+bc+bd)f \\ &= ace + ade + bce + bde + acf + adf + bcf + bdf\end{aligned}$$

[9] Ein Binom ist eine Summe oder eine Differenz von zwei Termen

Schreiben Sie alternativ $(a+b)(c+d)(e+f) = (a+b)\left[(c+d)(e+f)\right]$, multiplizieren Sie dann aus und zeigen Sie, dass Sie dieselbe Antwort erhalten.

Beispiel 1.3.3

Berechnen Sie den Ausdruck $(r+1)^3$. Verwenden Sie die Lösung, um zu berechnen, um wieviel sich das Volumen eines Balles mit einem Radius von r Metern vergrößert, wenn der Radius um 1 Meter zunimmt.

Lösung:

$$(r+1)^3 = \left[(r+1)(r+1)\right](r+1) = (r^2+2r+1)(r+1) = r^3+3r^2+3r+1$$

Ein Ball mit einem Radius von r Metern hat ein Volumen von $\frac{4}{3}\pi r^3$ Kubikmetern. Wenn der Radius um 1 Meter zunimmt, vergrößert sich das Volumen um

$$\frac{4}{3}\pi(r+1)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3+3r^2+3r+1) - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3r^2+3r+1)$$

Algebraische Ausdrücke

Ausdrücke, die Buchstaben wie $3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx + 8$ enthalten, werden *algebraische Ausdrücke* genannt. Wir nennen $3xy$, $-5x^2y^3$, $2xy$, $6y^3x^2$, $-3x$, $5yx$ und 8 die *Terme* in dem Ausdruck, der entsteht, wenn wir alle Terme zusammenfügen. Die Zahlen 3, −5, 2, 6, −3 und 5 sind die *numerischen Koeffizienten* der ersten sechs Terme. Zwei Terme, in denen nur die numerischen Koeffizienten verschieden sind, wie z. B. $-5x^2y^3$ und $6y^3x^2$, heißen *Terme vom selben Typ*. Um Ausdrücke zu vereinfachen, sammeln wir Terme vom selben Typ. Dann stellen wir innerhalb jedes Terms die numerischen Koeffizienten an die Spitze und bringen dann die Buchstaben in alphabetische Reihenfolge. Somit ist:

$$3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx + 8 = x^2y^3 + 10xy - 3x + 8$$

Beispiel 1.3.4

Multiplizieren Sie den folgenden Ausdruck aus und vereinfachen Sie dann:
$(2pq - 3p^2)(p+2q) - (q^2 - 2pq)(2p - q)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
&(2pq - 3p^2)(p+2q) - (q^2-2pq)(2p-q) \\
&\quad = 2pqp + 2pq2q - 3p^3 - 6p^2q - (q^22p - q^3 - 4pqp + 2pq^2) \\
&\quad = 2p^2q + 4pq^2 - 3p^3 - 6p^2q - 2pq^2 + q^3 + 4p^2q - 2pq^2 \\
&\quad = -3p^3 + q^3
\end{aligned}$$

Faktorenzerlegung

Wenn wir $49 = 7 \cdot 7$ und $672 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ schreiben, so haben wir diese Zahlen in *Faktoren zerlegt*[10]. Algebraische Ausdrücke können oft auf ähnliche Weise in Faktoren zerlegt werden: Einen *Ausdruck in Faktoren zerlegen*, heißt, ihn als ein Produkt von einfacheren Faktoren zu schreiben. Zum Beispiel sind $6x^2y = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y$ und $5x^2y^3 - 15xy^2 = 5 \cdot x \cdot y \cdot y(xy - 3)$ korrekte Faktorenzerlegungen.[11]

Beispiel 1.3.5

Zerlegen Sie jeden der folgenden Ausdrücke in Faktoren:

(a) $5x^2 + 15x$ (b) $-18b^2 + 9ab$ (c) $K(1+r) + K(1+r)r$ (d) $\delta L^{-3} + (1-\delta)L^{-2}$

Lösung:

(a) $5x^2 + 15x = 5x(x+3)$

(b) $-18b^2 + 9ab = 9ab - 18b^2 = 3 \cdot 3b(a - 2b)$

(c) $K(1+r) + K(1+r)r = K(1+r)(1+r) = K(1+r)^2$

(d) $\delta L^{-3} + (1-\delta)L^{-2} = L^{-3}\left[\delta + (1-\delta)L\right]$

Die „quadratischen Identitäten“ (Binomische Formeln (1.3.1)–(1.3.3)) können oft (in umgekehrter Richtung) zur Bildung der Faktoren benutzt werden. Sie machen es manchmal möglich, Ausdrücke zu zerlegen, bei denen man auf den ersten Blick keine Faktoren erkennt.

Beispiel 1.3.6

Zerlegen Sie jeden der folgenden Ausdrücke in Faktoren:

(a) $16a^2 - 1$ (b) $x^2y^2 - 25z^2$ (c) $4u^2 + 8u + 4$ (d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

Lösung:

(a) $16a^2 - 1 = (4a+1)(4a-1)$

(b) $x^2y^2 - 25z^2 = (xy + 5z)(xy - 5z)$

(c) $4u^2 + 8u + 4 = 4(u^2 + 2u + 1) = 4(u+1)^2$

(d) $x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2$

Manchmal braucht man ein gewisses Maß an Kreativität, um eine Faktorenzerlegung zu finden:

$$\begin{aligned} 4x^2 - y^2 + 6x^2 + 3xy &= (4x^2 - y^2) + 3x(2x+y) \\ &= (2x+y)(2x-y) + 3x(2x+y) \\ &= (2x+y)(2x-y+3x) \\ &= (2x+y)(5x-y) \end{aligned}$$

[10] Man spricht auch von der Faktorisierung eines Ausdrucks.
[11] Beachten Sie, dass $9x^2 - 25y^2 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x - 5 \cdot 5 \cdot y \cdot y$ *keine* Faktorenzerlegung von $9x^2 - 25y^2$ ist. Eine korrekte Faktorenzerlegung ist $9x^2 - 25y^2 = (3x - 5y)(3x + 5y)$.

Obwohl es schwierig oder unmöglich sein kann, eine Faktorenzerlegung zu finden, ist es sehr leicht zu zeigen, dass ein algebraischer Ausdruck korrekt zerlegt wurde, indem man einfach die Faktoren multipliziert. Zum Beispiel überprüfen wir, dass

$$x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$$

gilt, indem wir $(x-a)(x-b)$ ausmultiplizieren.

Die meisten algebraischen Ausdrücke können nicht in Faktoren zerlegt werden. Zum Beispiel gibt es keine Möglichkeit $x^2 + 10x + 50$ als ein Produkt einfacherer Faktoren zu schreiben.[12]

Aufgaben für Kapitel 1.3

1. Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) $-3 + (-4) - (-8)$ (b) $(-3)(2-4)$ (c) $(-3)(-12)(-\frac{1}{2})$

(d) $-3[4 - (-2)]$ (e) $-3(-x-4)$ (f) $(5x - 3y)9$

(g) $2x\left(\frac{3}{2x}\right)$ (h) $0 \cdot (1-x)$ (i) $-7x\frac{2}{14x}$

2. Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) $5a^2 - 3b - (-a^2 - b) - 3(a^2 + b)$ (b) $-x(2x - y) + y(1-x) + 3(x+y)$

(c) $12t^2 - 3t + 16 - 2(6t^2 - 2t + 8)$ (d) $r^3 - 3r^2s + s^3 - (-s^3 - r^3 + 3r^2s)$

3. Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) $-3(n^2 - 2n + 3)$ (b) $x^2(1 + x^3)$ (c) $(4n-3)(n-2)$

(d) $6a^2b(5ab - 3ab^2)$ (e) $(a^2b - ab^2)(a+b)$ (f) $(x-y)(x-2y)(x-3y)$

(g) $(ax+b)(cx+d)$ (h) $(2-t^2)(2+t^2)$ (i) $(u-v)^2(u+v)^2$

4. Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) $(2t-1)(t^2 - 2t + 1)$ (b) $(a+1)^2 + (a-1)^2 - 2(a+1)(a-1)$

(c) $(x+y+z)^2$ (d) $(x+y+z)^2 - (x-y-z)^2$

5. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $(x+2y)^2$ (b) $\left(\frac{1}{x} - x\right)^2$ (c) $(3u - 5v)^2$ (d) $(2z - 5w)(2z + 5w)$

6. Vervollständigen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $201^2 - 199^2 =$ (b) Wenn $u^2 - 4u + 4 = 1$, dann ist $u =$ (c) $\frac{(a+1)^2 - (a-1)^2}{(b+1)^2 - (b-1)^2} =$

[12] Wenn wir jedoch komplexe Zahlen einführen, dann *kann* $x^2 + 10x + 50$ in Faktoren zerlegt werden.

➡ Fortsetzung

7. Berechnen Sie $1000^2/(252^2 - 248^2)$ ohne Taschenrechner.

8. Verifizieren Sie die folgenden kubischen Identitäten, die gelegentlich nützlich sind:

(a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (b) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(c) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (d) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

9. Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke

(a) $21x^2y^3$ (b) $3x - 9y + 27z$ (c) $a^3 - a^2b$ (d) $8x^2y^2 - 16xy$

(e) $28a^2b^3$ (f) $4x + 8y - 24z$ (g) $2x^2 - 6xy$ (h) $4a^2b^3 + 6a^3b^2$

(i) $7x^2 - 49xy$ (j) $5xy^2 - 45x^3y^2$ (l) $16 - b^2$ (l) $3x^2 - 12$

10. Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke

(a) $a^2 + 4ab + 4b^2$ (b) $K^2L - L^2K$ (c) $K^{-4} - LK^{-5}$

(d) $9z^2 - 16w^2$ (e) $-\frac{1}{5}x^2 + 2xy - 5y^2$ (f) $a^4 - b^4$

11. Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke

(a) $x^2 - 4x + 4$ (b) $4t^2s - 8ts^2$ (c) $16a^2 + 16ab + 4b^2$

(d) $5x^3 - 10xy^2$ (e) $5x + 5y + ax + ay$ (f) $u^2 - v^2 + 3v + 3u$

(g) $P^3 + Q^3 + Q^2P + P^2Q$ (h) $K^3 - K^2L$ (i) $KL^3 + KL$

(j) $L^2 - K^2$ (k) $K^2 - 2KL + L^2$ (l) $K^3L - 4K^2L^2 + 4KL^3$

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

1.4 Brüche

Es sei daran erinnert, dass

$$a \div b = \frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Zähler} \\ \leftarrow \text{Nenner} \end{array}$$

Zum Beispiel $5 \div 8 = \frac{5}{8}$. Aus typografischen Gründen schreiben wir oft $5/8$ anstelle $\frac{5}{8}$. Natürlich ist $5 \div 8 = 0.625$. Wir haben hier den Bruch als Dezimalzahl geschrieben. Der Bruch $5/8$ heißt ein *echter Bruch,* da 5 kleiner ist als 8. Der Bruch $19/8$ ist ein *unechter Bruch,* weil der Zähler größer als der Nenner (oder gleich dem Nenner) ist. Ein unechter Bruch kann als *gemischte Zahl*[13] geschrieben werden:

$$\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8} = 2\frac{3}{8}$$

Die wichtigsten Eigenschaften von Brüchen sind im Folgenden aufgelistet, jeweils mit einfachen numerischen Beispielen. Es ist unbedingt erforderlich, dass Sie diese

[13] Beachten Sie: $2\frac{3}{8}$ bedeutet hier 2 *plus* $3/8$. Andererseits $2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 3}{8} = \frac{3}{4}$ (nach den weiter unten folgenden Regeln). Beachten Sie aber, dass $2\frac{x}{8}$ auch bedeutet $2 \cdot \frac{x}{8}$. Die Notation $\frac{2x}{8}$ oder $2x/8$ ist in diesem Fall offensichtlich vorzuziehen. In der Tat ist $\frac{19}{8}$ oder $19/8$ offensichtlich besser als $2\frac{3}{8}$, da es auch hilft, Missverständnisse zu vermeiden.

Regeln beherrschen. Sie sollten daher gründlich prüfen, ob Sie jede dieser Regeln kennen.

Eigenschaften von Brüchen

Seien a, b und c beliebige Zahlen mit dem Vorbehalt, dass $b \neq 0$ und $c \neq 0$, wenn sie im Nenner auftreten. Dann gilt:

(i) $\dfrac{a \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c}} = \dfrac{a}{b}$;

(ii) $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{(-a)\cdot(-1)}{(-b)\cdot(-1)} = \dfrac{a}{b}$;

(iii) $-\dfrac{a}{b} = (-1)\dfrac{a}{b} = \dfrac{(-1)a}{b} = \dfrac{-a}{b}$;

(iv) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$;

(v) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$;

(vi) $a + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \cdot c + b}{c}$;

(vii) $a \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \cdot b}{c}$;

(viii) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

(ix) $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Beispiel 1.4.1

Die folgenden Ausdrücke illustrieren die Eigenschaften von Brüchen, in derselben Reihenfolge wie oben:

(i) $\dfrac{21}{15} = \dfrac{7 \cdot \cancel{3}}{5 \cdot \cancel{3}} = \dfrac{7}{5}$

(ii) $\dfrac{-5}{-6} = \dfrac{5}{6}$

(iii) $-\dfrac{13}{15} = (-1)\dfrac{13}{15} = \dfrac{(-1)13}{15} = \dfrac{-13}{15}$

(iv) $\dfrac{5}{3} + \dfrac{13}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$

(v) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3 \cdot 6 + 5 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \dfrac{23}{30}$

(vi) $5 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{5 \cdot 5 + 3}{5} = \dfrac{28}{5}$

(vii) $7 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{21}{5}$

(viii) $\dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{5}{8} = \dfrac{4 \cdot 5}{7 \cdot 8} = \dfrac{\cancel{4} \cdot 5}{7 \cdot 2 \cdot \cancel{4}} = \dfrac{5}{14}$

(ix) $\dfrac{3}{8} \div \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{14}{6} = \dfrac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}} = \dfrac{7}{8}$

Regel (i) ist sehr wichtig. Es ist die Regel des Kürzens (Vereinfachens) von Brüchen, indem man Zähler und Nenner in Faktoren zerlegt und dann die *gemeinsamen Faktoren* herausstreicht, d. h. Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl (ungleich Null) dividiert.[14]

Beispiel 1.4.2

Vereinfachen Sie: (a) $\dfrac{5x^2yz^3}{25xy^2z}$ (b) $\dfrac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}$ (c) $\dfrac{4 - 4a + a^2}{a^2 - 4}$

[14] Wenn wir Regel (i) in umgekehrter Richtung benutzen, *erweitern* wir den Bruch, z. B. $5/8 = 5 \cdot 125/8 \cdot 125 = 625/1000 = 0.625$.

Lösung:

(a) $$\frac{5x^2yz^3}{25xy^2z} = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{z}\cdot z\cdot z}{\cancel{5}\cdot 5\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot\cancel{z}} = \frac{xz^2}{5y}$$

(b) $$\frac{x^2+xy}{x^2-y^2} = \frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x}{x-y}$$

(c) $$\frac{4-4a+a^2}{a^2-4} = \frac{(a-2)(a-2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a-2}{a+2}$$

Beispiel 1.4.3

Wenn wir Brüche vereinfachen (kürzen) wollen, dürfen wir nur *gemeinsame* Faktoren entfernen. Ein häufig auftretender Fehler soll durch das folgende Beispiel illustriert werden.

$$\textbf{Falsch!} \quad \rightarrow \quad \frac{2\cancel{x}+3y}{\cancel{x}y} = \frac{2+3\cancel{y}}{\cancel{y}} = \frac{2+3}{1} = 5$$

In der Tat haben der Zähler und der Nenner in dem Bruch $(2x+3y)/xy$ keinen gemeinsamen Faktor. Eine korrekte Vereinfachung ist wie folgt: $(2x+3y)/xy = 2/y + 3/x$.

Ein anderer häufiger Fehler ist:

$$\textbf{Falsch!} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{x^2+2x} = \frac{x}{x^2} + \frac{x}{2x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$$

Eine richtige Vereinfachung wäre, den gemeinsamen Faktor x zu streichen, so dass das Ergebnis $1/(x+2)$ ist.

Die Regeln (iv)–(vi) werden für die Addition von Brüchen benötigt. Beachten Sie, dass (v) aus (i) und (iv) folgt:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot d} + \frac{c\cdot b}{d\cdot b} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d}$$

Es ist einfach zu sehen, dass z. B.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf}{bdf} - \frac{cbf}{bdf} + \frac{ebd}{bdf} = \frac{adf - cbf + ebd}{bdf} \qquad (*)$$

Wenn die Zahlen b, d und f gemeinsame Faktoren haben, treten bei der in $(*)$ auszuführenden Berechnung unnötig große Zahlen auf. Wir können die Berechnung vereinfachen, indem wir zuerst den kleinsten gemeinsamen Nenner (kgN) der Brüche bestimmen. Dazu zerlegen wir jeden Nenner vollständig in Faktoren. Der kgN ist das Produkt aller verschiedenen Faktoren, die in den Nennern erscheinen, jeder Faktor erscheint in seiner höchsten Potenz, in der er in einem der Nenner auftritt. Die Verwendung des kgN wird in dem folgenden Beispiel demonstriert:

Beispiel 1.4.4

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ (b) $\frac{2+a}{a^2b} + \frac{1-b}{ab^2} - \frac{2b}{a^2b^2}$ (c) $\frac{x-y}{x+y} - \frac{x}{x-y} + \frac{3xy}{x^2-y^2}$

Lösung:

(a) Der kgN ist 6 und daher ist

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{3-2+1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(b) Der kgN ist a^2b^2 und daher ist

$$\frac{2+a}{a^2b} + \frac{1-b}{ab^2} - \frac{2b}{a^2b^2} = \frac{(2+a)b}{a^2b^2} + \frac{(1-b)a}{a^2b^2} - \frac{2b}{a^2b^2}$$
$$= \frac{2b+ab+a-ba-2b}{a^2b^2} = \frac{a}{a^2b^2} = \frac{1}{ab^2}$$

(c) Der kgN ist $(x+y)(x-y)$ und daher ist

$$\frac{x-y}{x+y} - \frac{x}{x-y} + \frac{3xy}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)(x-y)}{(x-y)(x+y)} - \frac{(x+y)x}{(x+y)(x-y)} + \frac{3xy}{(x-y)(x+y)}$$
$$= \frac{x^2-2xy+y^2-x^2-xy+3xy}{(x-y)(x+y)} = \frac{y^2}{x^2-y^2}$$

Der Ausdruck $1 - \frac{5-3}{2}$ bedeutet, dass wir von der Zahl 1 die Zahl $\frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ subtrahieren. Deshalb ist $1 - \frac{5-3}{2} = 0$. Alternativ könnte man so rechnen:

$$1 - \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} - \frac{(5-3)}{2} = \frac{2-(5-3)}{2} = \frac{2-5+3}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Genauso bedeutet

$$\frac{2+b}{ab^2} - \frac{a-2}{a^2b}$$

dass wir $(a-2)/a^2b$ von $(2+b)/ab^2$ subtrahieren:

$$\frac{2+b}{ab^2} - \frac{a-2}{a^2b} = \frac{(2+b)a}{a^2b^2} - \frac{(a-2)b}{a^2b^2} = \frac{(2+b)a-(a-2)b}{a^2b^2} = \frac{2(a+b)}{a^2b^2}$$

Es ist oft hilfreich, zunächst die Zähler der Brüche in Klammern zu setzen, so wie es im nächsten Beispiel gezeigt wird.

Beispiel 1.4.5

Vereinfachen Sie den Ausdruck $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{1-x}{x-1} - \dfrac{-1+4x}{2(x+1)}$.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+1} - \frac{1-x}{x-1} - \frac{-1+4x}{2(x+1)} &= \frac{(x-1)}{x+1} - \frac{(1-x)}{x-1} - \frac{(-1+4x)}{2(x+1)} \\
&= \frac{2(x-1)^2 - 2(1-x)(x+1) - (-1+4x)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{2(x^2-2x+1) - 2(1-x^2) - (4x^2-5x+1)}{2(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{x-1}{2(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2(x+1)}
\end{aligned}
$$

Wir beweisen Eigenschaft (ix), indem wir $(a/b) \div (c/d)$ als Quotienten von Brüchen schreiben:[15]

$$
\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{b \cdot d \cdot \frac{a}{b}}{b \cdot d \cdot \frac{c}{d}} = \frac{\frac{\cancel{b} \cdot d \cdot a}{\cancel{b}}}{\frac{b \cdot \cancel{d} \cdot c}{\cancel{d}}} = \frac{d \cdot a}{b \cdot c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}
$$

Wenn wir mit Brüchen von Brüchen (d. h. mit Brüchen im Zähler und Nenner eines Bruches) arbeiten, so sollten wir hervorheben, welches der Bruchstrich des Haupt-Bruches ist, z. B.

$$
\frac{a}{\frac{b}{c}} \quad \text{bedeutet} \quad a \div \frac{b}{c} = \frac{ac}{b} \qquad (*)
$$

während

$$
\frac{\frac{a}{b}}{c} \quad \text{bedeutet} \quad \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{bc} \qquad (**)
$$

Natürlich ist es sicherer, im ersten Fall $\dfrac{a}{b/c}$ oder $a/(b/c)$ zu schreiben und $\dfrac{a/b}{c}$ oder $(a/b)/c$ im zweiten Fall.[16]

[15] Illustration (man wird sehr leicht durstig, wenn man diesen Stoff liest): Sie kaufen einen halben Liter eines Erfrischungsgetränks. Jeder Schluck ist ein Fünfzigstel eines Liters. Wieviele Schlucke können Sie nehmen? Antwort: $(1/2) \div (1/50) = 25$.

[16] Als numerisches Beispiel von $(*)$ und $(**)$ betrachten wir

$$
\frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}, \quad \text{während} \quad \frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{15}
$$

Aufgaben für Kapitel 1.4

1. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}-\frac{5}{7}$ (b) $\frac{3}{4}+\frac{4}{3}-1$ (c) $\frac{3}{12}-\frac{1}{24}$ (d) $\frac{1}{5}-\frac{2}{25}-\frac{3}{75}$

(e) $3\frac{3}{5}-1\frac{4}{5}$ (f) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}$ (g) $\left(\frac{3}{5}\div\frac{2}{15}\right)\cdot\frac{1}{9}$ (h) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)\Big/\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)$

2. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{x}{10}-\frac{3x}{10}+\frac{17x}{10}$ (b) $\frac{9a}{10}-\frac{a}{2}+\frac{a}{5}$ (c) $\frac{b+2}{10}-\frac{3b}{15}+\frac{b}{10}$

(d) $\frac{x+2}{3}+\frac{1-3x}{4}$ (e) $\frac{3}{2b}-\frac{5}{3b}$ (f) $\frac{3a-2}{3a}-\frac{2b-1}{2b}+\frac{4b+3a}{6ab}$

3. Kürzen Sie gemeinsame Faktoren in den folgenden Ausdrücken:

(a) $\frac{325}{625}$ (b) $\frac{8a^2b^3c}{64abc^3}$ (c) $\frac{2a^2-2b^2}{3a+3b}$ (d) $\frac{P^3-PQ^2}{(P+Q)^2}$

4. Finden Sie die einfachste Form der folgenden Brüche, wenn $x = 3/7$ und $y = 1/14$:

(a) $x+y$ (b) x/y (c) $(x-y)/(x+y)$ (d) $13(2x-3y)/(2x+1)$

5. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ (b) $\frac{6x+25}{4x+2}-\frac{6x^2+x-2}{4x^2-1}$

(c) $\frac{18b^2}{a^2-9b^2}-\frac{a}{a+3b}+2$ (d) $\frac{1}{8ab}-\frac{1}{8b(a+2)}$

(e) $\frac{2t-t^2}{t+2}\cdot\left(\frac{5t}{t-2}-\frac{2t}{t-2}\right)$ (f) $2-\frac{a\left(1-\frac{1}{2a}\right)}{0.25}$

6. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}-3$ (b) $\frac{t}{2t+1}-\frac{t}{2t-1}$ (c) $\frac{3x}{x+2}-\frac{4x}{2-x}-\frac{2x-1}{x^2-4}$

(d) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}$ (e) $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}$ (f) $\dfrac{\frac{a}{x}-\frac{a}{y}}{\frac{a}{x}+\frac{a}{y}}$

7. Verifizieren Sie, dass $x^2+2xy-3y^2=(x+3y)(x-y)$ und vereinfachen Sie dann den Ausdruck

$$\frac{x-y}{x^2+2xy-3y^2}-\frac{2}{x-y}-\frac{7}{x+3y}$$

8. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^{-2}$ (b) $n-\dfrac{n}{1-\frac{1}{n}}$ (c) $\frac{1}{1+x^{p-q}}+\frac{1}{1+x^{q-p}}$

(d) $\dfrac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}}{x-\frac{2}{x+1}}$ (e) $\dfrac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$ (f) $\dfrac{\frac{10x^2}{x^2-1}}{\frac{5x}{x+1}}$

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

1.5 Potenzen mit gebrochenen Exponenten

In ökonomischen Lehrbüchern und Forschungsartikeln werden wir immer wieder auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten wie z. B. $K^{1/4}L^{3/4}$ und $Ar^{2.08}p^{-1.5}$ stoßen. Wie definieren wir a^x, wenn x eine rationale Zahl ist? Natürlich wäre es wünschenswert, wenn die gewohnten Regeln für die Potenzrechnung weiterhin gültig blieben.

Sie kennen vermutlich bereits von der Schule die Bedeutung von a^x, wenn $x = 1/2$. Nämlich, wenn $a \geq 0$ und $x = 1/2$, definieren wir $a^x = a^{1/2}$ als $\sqrt{a}$, die **Quadratwurzel** von a, d. h. $a^{1/2} = \sqrt{a}$ ist definiert als diejenige nichtnegative Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt. Diese Definition ist sinnvoll, da $a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a^1 = a$. Beachten Sie, dass das Ergebnis immer ≥ 0 sein muss, wenn man eine reelle Zahl mit sich selbst multipliziert, egal ob diese Zahl positiv, negativ oder Null ist. Daher ist für $a \geq 0$

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \tag{1.5.1}$$

Zum Beispiel ist $\sqrt{16} = 16^{1/2} = 4$, da $4^2 = 16$ und $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$, da $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$.

Eigenschaften von Quadratwurzeln

(i) Wenn a und b nichtnegative Zahlen sind, dann gilt

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \tag{1.5.2a}$$

(ii) Wenn $a \geq 0$ und $b > 0$, dann gilt

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \tag{1.5.2b}$$

Dies kann natürlich auch in der Form $(ab)^{1/2} = a^{1/2}b^{1/2}$ und $(a/b)^{1/2} = a^{1/2}/b^{1/2}$ geschrieben werden. Zum Beispiel $\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$ und $\sqrt{9/4} = \sqrt{9}/\sqrt{4} = 3/2$.

Beachten Sie, dass die Formeln (1.5.2a) und (1.5.2b) nicht gelten, wenn a oder b oder beide negativ sind. Zum Beispiel $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$, während $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ nicht definiert ist (es sei denn man benutzt komplexe Zahlen).

Es ist wichtig zu wiederholen, dass im Allgemeinen $(a + b)^r \neq a^r + b^r$. Für $r = 1/2$ impliziert dies, dass[17]

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \tag{1.5.3}$$

[17] Das Folgende soll illustrieren, wie häufig dies nicht beachtet wird. Während einer Examensprüfung in einem Grundlagenkurs in Mathematik für Ökonomen vereinfachten 22 % von 190 Studierenden den Ausdruck $\sqrt{1/16 + 1/25}$ fälschlicherweise zu $1/4 + 1/5 = 9/20$. (Die richtige Antwort ist $\sqrt{41/400} = \sqrt{41}/20$.)

Beachten Sie auch, dass $(-2)^2 = 4$ und $2^2 = 4$. Daher sind $x = -2$ und $x = 2$ beides Lösungen der Gleichung $x^2 = 4$. Deshalb gilt: $x^2 = 4$ dann und nur dann, wenn $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Beachten Sie jedoch, dass das Symbol $\sqrt{4}$ *nur* 2 und nicht -2 bedeutet.

Mit einem Taschenrechner finden wir heraus, dass $\sqrt{2} \div \sqrt{3} \approx 0.816$. Ohne Taschenrechner allerdings ist die Division $\sqrt{2} \div \sqrt{3} \approx 1.414 \div 1.732$ mühsam. Wenn wir den Bruch jedoch so erweitern (d. h. Zähler und Nenner mit demselben Term multiplizieren), dass Wurzelausdrücke im Nenner verschwinden, wird die Rechnung einfacher:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx \frac{2.448}{3} = 0.816$$

Manchmal kann die Formel (1.3.3) für die Differenz von Quadraten benutzt werden, um Quadratwurzeln aus dem Nenner zu eliminieren:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

Die *n*-te Wurzel

Was verstehen wir unter $a^{1/n}$, wenn n eine natürliche und a eine positive Zahl ist? Was bedeutet z. B. $5^{1/3}$? Wenn die Regel $(a^r)^s = a^{rs}$ in diesem Fall auch noch gelten soll, müsste $(5^{1/3})^3 = 5^1 = 5$ sein. Dies impliziert, dass $5^{1/3}$ eine Lösung der Gleichung $x^3 = 5$ sein muss. Man kann zeigen, dass diese Gleichung eine eindeutige positive Lösung hat, die mit $\sqrt[3]{5}$ bezeichnet wird, die *kubische Wurzel* von 5. Deshalb müssen wir $5^{1/3}$ als $\sqrt[3]{5}$ definieren.

Im Allgemeinen ist $(a^{1/n})^n = a^1 = a$. Daher ist $a^{1/n}$ eine Lösung der Gleichung $x^n = a$. Man kann zeigen, dass diese Gleichung eine eindeutige positive Lösung hat, die mit $\sqrt[n]{a}$, ***n*-te Wurzel**[18] von a bezeichnet wird:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \tag{1.5.4}$$

Die *n*-te Wurzel

Wenn a eine positive und n eine natürliche Zahl ist, dann ist $\sqrt[n]{a}$ die eindeutig bestimmte positive Zahl, deren n-te Potenz a ergibt, d.h.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \tag{1.5.5}$$

Beispiel 1.5.1

Berechnen Sie die folgenden Zahlen:

(a) $\sqrt[3]{27}$ (b) $\left(\frac{1}{32}\right)^{1/5}$ (c) $(0.0001)^{0.25} = (0.0001)^{1/4}$

[18] Die Zahl n wird auch Wurzelexponent genannt, während a Radikand genannt wird.

Lösung:

(a) $\sqrt[3]{27} = 3$, da $3^3 = 27$.

(b) $\left(\frac{1}{32}\right)^{1/5} = \frac{1}{2}$, da $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

(c) $(0.0001)^{1/4} = 0.1$, da $(0.1)^4 = 0.0001$.

Beispiel 1.5.2

Ein Betrag von 5000 Euro ist auf einem Bankkonto in 15 Jahren angewachsen auf 10 000 Euro. Welcher (konstante) jährliche Zinssatz p liegt hier vor?

Lösung: Nach 15 Jahren ist der Betrag von 5000 Euro angewachsen auf $5000(1 + p/100)^{15}$. Daher haben wir die Gleichung:

$$5000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} = 10\,000 \qquad \text{oder} \qquad \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} = 2$$

Allgemein gilt $(a^t)^{1/t} = a^1 = a$ für $t \neq 0$. Indem wir jede Seite mit 1/15 potenzieren, erhalten wir

$$1 + \frac{p}{100} = 2^{1/15} \quad \text{oder} \quad p = 100(2^{1/15} - 1)$$

Mit einem Taschenrechner erhalten wir $p \approx 4.73$.

Wir definieren jetzt $a^{p/q}$, wenn p eine ganze Zahl, q eine natürliche Zahl und $a > 0$ ist. Betrachten Sie zunächst $5^{2/3}$. Wir haben bereits $5^{1/3}$ definiert. Damit wir die zweite Eigenschaft von Potenzen, Formel (1.2.4(ii)), d. h. $(a^r)^s = a^{rs}$ anwenden können, muss $5^{2/3} = (5^{1/3})^2$ sein. Deshalb müssen wir $5^{2/3}$ als $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2$ definieren. Im Allgemeinen definieren wir für $a > 0$

$$a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \tag{1.5.6}$$

wobei p eine ganze Zahl und q eine natürliche Zahl ist. Mit den Eigenschaften von Exponenten folgt:

$$a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p = (a^p)^{1/q} = \sqrt[q]{a^p} \tag{1.5.7}$$

Daher können wir, um $a^{p/q}$ zu berechnen, entweder zuerst die q-te Wurzel von a berechnen und das Resultat mit p potenzieren oder zuerst a in die p-te Potenz erheben und daraus die q-te Wurzel ziehen. Wir erhalten in jedem Fall dasselbe Ergebnis[19], z. B.

$$4^{7/2} = (4^7)^{1/2} = 16384^{1/2} = 128 = 2^7 = (4^{1/2})^7$$

[19] Tests haben gezeigt, dass viele Studierende zwar in der Lage sind, mit quadratischen Identitäten umzugehen, aber dennoch Fehler machen im Umgang mit komplizierteren Potenzen. Hier sind einige Beispiele solcher Fehler:

(a) $(1 + r)^{20}$ ist *nicht* gleich $1^{20} + r^{20}$.

(b) Wenn $u = 9 + x^{1/2}$, so folgt *nicht* $u^2 = 81 + x$; stattdessen gilt $u^2 = 81 + 18\sqrt{x} + x$.

(c) $(e^x - e^{-x})^p$ ist *nicht* gleich $e^{xp} - e^{-xp}$ (es sei denn $p = 1$).

Beispiel 1.5.3

Berechnen Sie die Zahlen:

(a) $16^{3/2}$ (b) $16^{-1.25}$ (c) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-2/3}$

Lösung:

(a) $16^{3/2} = (16^{1/2})^3 = 4^3 = 64$

(b) $16^{-1.25} = 16^{-5/4} = \frac{1}{16^{5/4}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

(c) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-2/3} = 27^{2/3} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

Beispiel 1.5.4

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, so dass die Ergebnisse nur positive Exponenten enthalten:

(a) $\frac{a^{3/8}}{a^{1/8}}$ (b) $(x^{1/2}x^{3/2}x^{-2/3})^{3/4}$ (c) $\left(\frac{10p^{-1}q^{2/3}}{80p^2q^{-7/3}}\right)^{-2/3}$

Lösung:

(a) $\frac{a^{3/8}}{a^{1/8}} = a^{3/8-1/8} = a^{2/8} = a^{1/4} = \sqrt[4]{a}$

(b) $(x^{1/2}x^{3/2}x^{-2/3})^{3/4} = (x^{1/2+3/2-2/3})^{3/4} = (x^{4/3})^{3/4} = x$

(c) $\left(\frac{10p^{-1}q^{2/3}}{80p^2q^{-7/3}}\right)^{-2/3} = (8^{-1}p^{-1-2}q^{2/3-(-7/3)})^{-2/3} = 8^{2/3}p^2q^{-2} = 4\frac{p^2}{q^2}$

Wenn q eine ungerade Zahl und p eine ganze Zahl ist, so kann $a^{p/q}$ sogar definiert werden, wenn $a < 0$. Zum Beispiel $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$, da $(-2)^3 = -8$. Jedoch muss man, wenn man $a^{p/q}$ für $a < 0$ definiert, den Bruch p/q so weit wie möglich kürzen. Wenn nicht, kann es Widersprüche geben wie „$-2 = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$."

Wenn man $a^{p/q}$ berechnen will, ist es oft einfacher zuerst $\sqrt[q]{a}$ zu berechnen und dann das Ergebnis in die p-te Potenz zu erheben. Zum Beispiel: $(-64)^{5/3} = (\sqrt[3]{-64})^5 = (-4)^5 = -1024$.

Aufgaben für Kapitel 1.5

1. Berechnen Sie die folgenden Zahlen:

(a) $\sqrt{9}$ (b) $\sqrt{1600}$ (c) $(100)^{1/2}$ (d) $\sqrt{9+16}$

(e) $(36)^{-1/2}$ (f) $(0.49)^{1/2}$ (g) $\sqrt{0.01}$ (h) $\sqrt{\dfrac{1}{25}}$

2. Seien a und b positive Zahlen. Entscheiden Sie, ob das „?" durch = oder ≠ ersetzt werden sollte. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\sqrt{25 \cdot 16} \;\;?\;\; \sqrt{25} \cdot \sqrt{16}$ (b) $\sqrt{25+16} \;\;?\;\; \sqrt{25} + \sqrt{16}$

(c) $(a+b)^{1/2} \;\;?\;\; a^{1/2} + b^{1/2}$ (d) $(a+b)^{-1/2} \;\;?\;\; (\sqrt{a+b}\,)^{-1}$

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

(a) $\sqrt{x} = 9$ (b) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{4} = 4$ (c) $\sqrt{x+2} = 25$

(d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{x}$ (e) $2^{2-x} = 8$ (f) $2^x - 2^{x-1} = 4$

4. Eliminieren Sie die Quadratwurzeln aus dem Nenner und vereinfachen Sie dann:

(a) $\dfrac{6}{\sqrt{7}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ (d) $\dfrac{\sqrt{54}-\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$

(e) $\dfrac{2}{\sqrt{3}\sqrt{8}}$ (f) $\dfrac{4}{\sqrt{2y}}$ (g) $\dfrac{x}{\sqrt{2x}}$ (h) $\dfrac{x(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$

5. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie die Quadratwurzeln aus dem Nenner eliminieren:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (c) $\dfrac{x}{\sqrt{3}-2}$

(d) $\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}$ (e) $\dfrac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$ (f) $\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$

6. Berechnen Sie die folgenden Zahlen ohne Taschenrechner:

(a) $\sqrt[3]{125}$ (b) $(243)^{1/5}$ (c) $(-8)^{1/3}$ (d) $\sqrt[3]{0.008}$

(e) $81^{1/2}$ (f) $64^{-1/3}$ (g) $16^{-2.25}$ (h) $\left(\dfrac{1}{3^{-2}}\right)^{-2}$

7. Bestimmen Sie approximativ mit einem Taschenrechner:

(a) $\sqrt[3]{55}$ (b) $(160)^{1/4}$ (c) $(2.71828)^{1/5}$ (d) $(1+0.0001)^{10000}$

8. Die Zahl der Bewohner eines Staates wuchs in 12 Jahren von 40 auf 60 Millionen an. Wie groß ist die jährliche prozentuale Wachstumsrate p?

9. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\left(27x^{3p}y^{6q}z^{12r}\right)^{1/3}$ (b) $\dfrac{(x+15)^{4/3}}{(x+15)^{5/6}}$ (c) $\dfrac{8\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[4]{y}\,\sqrt{1/z}}{-2\sqrt[3]{x}\,\sqrt{y^5}\,\sqrt{z}}$

➡

➡ Fortsetzung

10. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so, dass jeder nur einen einzigen Exponenten enthält.

(a) $(((a^{1/2})^{2/3})^{3/4})^{4/5}$ (b) $a^{1/2} \cdot a^{2/3} \cdot a^{3/4} \cdot a^{4/5}$

(c) $\left(((3a)^{-1})^{-2}(2a^{-2})^{-1}\right)/a^{-3}$ (d) $\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot a^{1/12} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{a^{5/12} \cdot \sqrt{a}}$

11. Welche der folgenden Gleichungen gelten für alle x und y?

(a) $(2^x)^2 = 2^{x^2}$ (b) $3^{x-3y} = \dfrac{3^x}{3^{3y}}$

(c) $3^{-1/x} = \dfrac{1}{3^{1/x}} \quad (x \neq 0)$ (d) $5^{1/x} = \dfrac{1}{5^x} \quad (x \neq 0)$

(e) $a^{x+y} = a^x + a^y$ (f) $2^{\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 2^{\sqrt{xy}} \quad$ (x und y positiv)

12. Wenn ein Unternehmen x Einheiten eines Inputs in einem Herstellungsprozess A verwendet, werden $32x^{3/2}$ Einheiten Output produziert. In einem alternativen Herstellungsprozess B werden $4x^3$ Einheiten Output produziert. Für welche Niveaus des Inputs produziert Prozess A mehr als Prozess B?

▶ Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

1.6 Ungleichungen

Die reellen Zahlen bestehen aus den positiven Zahlen, der Null und den negativen Zahlen. Wenn a eine positive Zahl ist, schreiben wir $a > 0$ (oder $0 < a$) und sagen, dass a größer ist als Null. Wenn die Zahl c negativ ist, schreiben wir $c < 0$ (oder $0 > c$).

Eine grundlegende Eigenschaft der positiven Zahlen ist:

$$a > 0 \text{ und } b > 0 \quad \text{impliziert} \quad a + b > 0 \text{ und } a \cdot b > 0 \tag{1.6.1}$$

Allgemein sagen wir, dass *die Zahl a größer ist als die Zahl b* und schreiben $a > b$ (oder $b < a$), wenn $a - b$ positiv ist. Also ist $4.11 > 3.12$, weil $4.11 - 3.12 = 0.99 > 0$, und $-3 > -5$, weil $-3 - (-5) = 2 > 0$. Auf der Zahlengeraden (siehe Abb. 1.1.1) bedeutet $a > b$, dass a rechts von b liegt.

Wenn $a > b$, sagen wir oft, dass *a strikt größer ist als b*, um zu betonen, dass $a = b$ ausgeschlossen ist. Wenn $a > b$ oder $a = b$, so schreiben wir $a \geq b$ (oder $b \leq a$) und sagen, dass *a größer oder gleich b ist*. Also bedeutet $a \geq b$, dass $a - b \geq 0$ ist. Zum Beispiel $4 \geq 4$ und[20] auch $4 \geq 2$. Wir nennen $>$ und $<$ *strikte* Ungleichungen, während $\geq$ und $\leq$ *schwache* Ungleichungen sind. Der Unterschied ist oft sehr wichtig in ökonomischen Analysen.

Man kann eine Reihe wichtiger Identitäten der Ungleichheitszeichen $>$ und $\geq$ beweisen. Zum Beispiel gilt für jede Zahl c:

$$\text{Wenn } a > b, \quad \text{dann ist} \quad a + c > b + c \tag{1.6.2}$$

[20] Beachten Sie insbesondere, dass es korrekt *ist* zu schreiben $4 \geq 2$, weil $4 - 2$ positiv oder 0 *ist*.

Der Beweis ist einfach: Für alle Zahlen a, b und c gilt $(a+c)-(b+c) = a+c-b-c = a-b$. Daher ist für $a-b > 0$ auch $a+c-(b+c) > 0$ und daraus folgt die Behauptung. Auf der in Abb. 1.6.1 gezeigten Zahlengeraden ist diese Implikation selbstverständlich (hier wurde c negativ gewählt):

Abbildung 1.6.1: Wenn a > b, dann auch a + c > b + c

Um kompliziertere Ungleichungen handhaben zu können, braucht man die folgenden Eigenschaften:

Eigenschaften von Ungleichungen

Seien a, b, c und d Zahlen.

$$\text{Wenn}\quad a > b \text{ und } b > c, \quad \text{dann ist}\quad a > c \tag{1.6.3}$$

$$\text{Wenn}\quad a > b \text{ und } c > 0, \quad \text{dann ist}\quad ac > bc \tag{1.6.4}$$

$$\text{Wenn}\quad a > b \text{ und } c < 0, \quad \text{dann ist}\quad ac < bc \tag{1.6.5}$$

$$\text{Wenn}\quad a > b \text{ und } c > d, \quad \text{dann ist}\quad a+c > b+d \tag{1.6.6}$$

Alle vier Eigenschaften bleiben gültig, wenn man jedes $>$ durch $\geq$ und jedes $<$ durch $\leq$ ersetzt. Die Eigenschaften folgen alle sehr einfach aus (1.6.1). Zum Beispiel wird (1.6.5) wie folgt bewiesen: Sei $a > b$ und $c < 0$. Dann ist $a - b > 0$ und $-c > 0$ und nach (1.6.1) folgt $(a - b)(-c) > 0$. Damit ist $-ac + bc > 0$ und folglich $ac < bc$.

Nach (1.6.4) und (1.6.5) gilt:

(a) Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer positiven Zahl multipliziert werden, bleibt die Richtung der Ungleichung erhalten.

(b) Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert werden, kehrt sich die Richtung der Ungleichung um.

Es ist sehr wichtig, dass Sie diese Regeln verstehen und wahrnehmen, dass Sie mit der Alltagserfahrung übereinstimmen. Zum Beispiel kann (1.6.4) so interpretiert werden: Gegeben seien zwei Rechtecke mit derselben Grundlinie. Dasjenige mit der größeren Höhe hat die größere Fläche.

Beispiel 1.6.1

Bestimmen Sie die Werte von x, die die Ungleichung $3x - 5 > x - 3$ erfüllen.

Lösung: Wenn man 5 zu beiden Seiten addiert, erhält man $3x - 5 + 5 > x - 3 + 5$ oder $3x > x + 2$ Indem man $(-x)$ zu beiden Seiten addiert, folgt $3x - x > x - x + 2$, und somit $2x > 2$. Nach Division durch die positive Zahl 2 folgt: $x > 1$. Die Argumentation kann offensichtlich umgekehrt werden, so dass die Lösung $x > 1$ ist.

Vorzeichen-Diagramme

Beispiel 1.6.2

Überprüfen Sie, ob die Ungleichung $(x-1)(3-x) > 0$ für $x = -3$, $x = 2$ und $x = 5$ erfüllt ist. Bestimmen Sie dann alle Werte von x, die die Ungleichung erfüllen.

Lösung: Für $x = -3$ haben wir $(x-1)(3-x) = (-4)\cdot 6 = -24 < 0$; für $x = 2$ haben wir $(x-1)(3-x) = 1\cdot 1 = 1 > 0$ und für $x = 5$ haben wir $(x-1)(3-x) = 4\cdot(-2) = -8 < 0$. Daher ist die Ungleichung für $x = 2$ erfüllt, aber nicht für $x = -3$ oder $x = 5$.

Um die komplette Lösungsmenge zu bestimmen, benutzen wir ein *Vorzeichen-Diagramm*. Dabei wird die Variation des Vorzeichens für jeden Faktor des Produkts bestimmt. Zum Beispiel ist der Faktor $x-1$ negativ, wenn $x < 1$, er ist 0, wenn $x = 1$ und positiv, wenn $x > 1$. Diese Variation des Vorzeichens wird in Abb. 1.6.2 dargestellt. Die obere gestrichelte Linie links der senkrechten Geraden $x = 1$ deutet an, dass $x-1 < 0$, wenn $x < 1$; der kleine Kreis deutet an, dass $x-1 = 0$, wenn $x = 1$ und die durchgezogene Linie rechts von $x = 1$ symbolisiert, dass $x-1 > 0$, wenn $x > 1$. In ähnlicher Weise stellen wir die Vorzeichenvariation für $3-x$ dar. Das Vorzeichen für das Produkt erhält man wie folgt: Wenn $x < 1$, dann ist $x-1$ negativ und $3-x$ ist positiv und damit das Produkt negativ. Wenn $1 < x < 3$, sind beide Faktoren positiv und damit ist auch das Produkt positiv. Wenn $x > 3$, ist $x-1$ positiv und $3-x$ ist negativ und damit ist das Produkt negativ. Schlussfolgerung: Die Lösungsmenge besteht aus allen x, die größer als 1 und kleiner als 3 sind. Somit gilt $(x-1)(3-x) > 0$ dann und nur dann, wenn $1 < x < 3$.

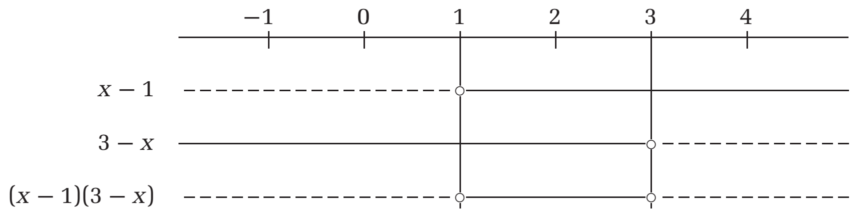

Abbildung 1.6.2: Vorzeichen-Diagramm für $(x-1)(3-x)$

Beispiel 1.6.3

Finden Sie alle Werte von p, die die Ungleichung

$$\frac{2p-3}{p-1} > 3-p$$

erfüllen.

Lösung: Es ist verlockend, beide Seiten der Ungleichung mit $p-1$ zu multiplizieren. Dann müsssen wir jedoch zwischen den beiden Fällen $p-1 > 0$ und $p-1 < 0$ unterscheiden. Denn, wenn wir mit $p-1$ durchmultiplizieren, wenn $p-1 < 0$ ist, müssen wir das Ungleichheitszeichen umkehren. Es gibt eine alternative Methode, die es unnötig macht, zwischen den beiden Fällen zu unterscheiden. Wir beginnen damit, $p - 3$ auf beiden Seiten zu addieren. Dies ergibt

$$\frac{2p-3}{p-1} + p - 3 > 0$$

Indem wir $p - 1$ zum gemeinsamen Nenner machen, erhalten wir

$$\frac{2p-3+(p-3)(p-1)}{p-1} > 0$$

Weil $2p - 3 + (p-3)(p-1) = 2p - 3 + p^2 - 4p + 3 = p^2 - 2p = p(p-2)$, erhalten wir durch Einsetzen dieses Ausdrucks in den Zähler

$$\frac{p(p-2)}{p-1} > 0$$

Um die Lösungsmenge dieser Ungleichung zu finden, benutzen wir wieder ein Vorzeichen-Diagramm[21] in Abb. 1.6.3. Ausgehend von der Vorzeichenvariation für p, $p - 2$ und $p - 1$ bestimmen wir die Vorzeichenvariation für $p(p-2)/(p-1)$. Wenn z. B. $0 < p < 1$, dann ist p positiv und $(p-2)$ ist negativ und somit ist $p(p-2)$ negativ. Aber $p - 1$ ist auch negativ in diesem Intervall, so dass $p(p-2)/(p-1)$ positiv ist. Indem wir in gleicher Weise für alle relevanten Intervalle argumentieren, kommen wir zu folgendem Vorzeichen-Diagramm.

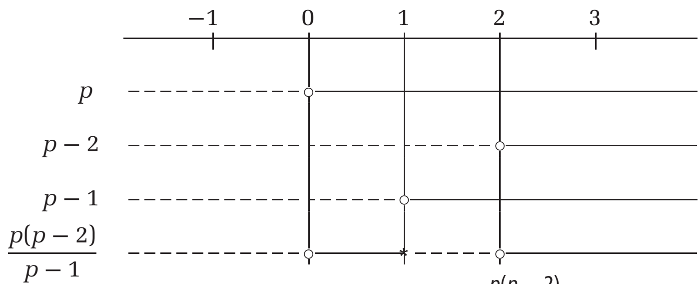

Abbildung 1.6.3 Vorzeichen-Diagramm für $\frac{p(p-2)}{p-1}$

Somit ist die ursprüngliche Ungleichung genau dann erfüllt, wenn $0 < p < 1$ oder $p > 2$.

Zwei Bemerkungen zur Warnung sind hier angebracht: Erstens: Der häufigste Fehler beim Lösen von Ungleichungen ist in Beispiel 3 angedeutet. Wenn wir mit $p - 1$ multiplizieren, bleibt die Ungleichung *nur* dann erhalten, wenn $p-1$ positiv ist – d. h. wenn $p > 1$. Zweitens: Es ist von entscheidender Bedeutung, dass Sie die Methode der Vorzeichen-Diagramme verstehen. Ein häufiger Fehler wird durch das folgende Beispiel illustriert.

[21] Die ursprüngliche Ungleichung ergibt keinen Sinn, wenn $p = 1$.

Beispiel 1.6.4

Bestimmen Sie alle Werte von x, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{(x-2)+3(x+1)}{x+3} \leq 0$$

„Lösung“: Nehmen Sie an, dass wir das ungeeignete Vorzeichen-Diagramm in Abb. 1.6.4 verwenden.

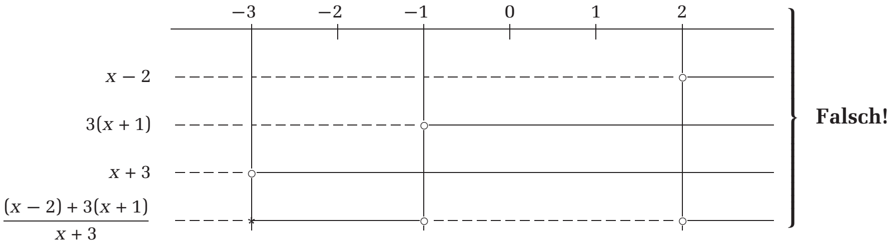

Abbildung 1.6.4: Falsches Vorzeichen-Diagramm für $\frac{(x-2)+3(x+1)}{x+3}$

Nach diesem Diagramm sollte die Ungleichung erfüllt sein für $x < -3$ und für $-1 \leq x \leq 2$. Jedoch ergibt sich für $x = -4$ (< -3) der Wert des Bruches zu 15, und das ist positiv. Was ist hier schief gegangen? Nehmen Sie an, dass $x < -3$. Dann ist $x-2 < 0$ und $3(x+1) < 0$ und damit ist der Zähler $(x-2)+3(x+1)$ negativ. Da der Nenner $x+3$ auch negativ ist für $x < -3$, ist der Bruch positiv. Die Vorzeichenvariation im Diagramm ist daher völlig falsch. Das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv, die Summe jedoch ist negativ und nicht positiv, wie das Vorzeichen-Diagramm vermuten lässt.

Wir erhalten eine korrekte Lösung zu dem gegebenen Problem, indem wir im Zähler zunächst Terme desselben Typs sammeln, so dass sich die folgende äquivalente Ungleichung ergibt: $(4x+1)/(x+3) \leq 0$. Ein Vorzeichen-Diagramm für diese Ungleichung ergibt die richtige Antwort: $-3 < x \leq -1/4$.

Doppel-Ungleichungen

Zwei Ungleichungen, die gleichzeitig gelten, werden oft als *Doppel-Ungleichung* geschrieben. Wenn z. B. $a \leq z$ und gleichzeitig $z < b$, ist es üblich $a \leq z < b$ zu schreiben. (Andererseits ist zu beachten: Wenn $a \leq z$ und $z > b$ und wenn wir nicht wissen, welche der Zahlen a und b die größere ist, so können wir nicht $a \leq b < z$ oder $b \leq a \leq z$ schreiben, und wir schreiben auch *nicht* $a \leq z > b$.)

Beispiel 1.6.5

Eines Tages war die niedrigste Temperatur in Buenos Aires 50 °F und die höchste war 77 °F. Welches ist die entsprechende Variation der Temperatur in Grad Celsius? (Erinnern Sie: Wenn F Grad Fahrenheit bezeichnet und C Grad Celsius, so gilt $F = \frac{9}{5}C + 32$.)

Lösung: Wir haben

$$50 \leq \frac{9}{5}C + 32 \leq 77.$$

Indem wir 32 von jedem Term abziehen, erhalten wir

$$50 - 32 \leq \frac{9}{5}C \leq 77 - 32$$

oder

$$18 \leq \frac{9}{5}C \leq 45.$$

Indem wir diese Ungleichungen durch 9/5 dividieren (oder mit 5/9 multiplizieren), erhalten wir $10 \leq C \leq 25$. Die Temperatur variierte also zwischen 10 °C und 25 °C.

Aufgaben für Kapitel 1.6

1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Ungleichungen gültig sind:

(a) $-6.15 > -7.16$ (b) $6 \geq 6$ (c) $(-5)^2 \leq 0$ (d) $-\frac{1}{2}\pi < -\frac{1}{3}\pi$

(e) $\frac{4}{5} > \frac{6}{7}$ (f) $2^3 < 3^2$ (g) $2^{-3} < 3^{-2}$ (h) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} < \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$

2. Bestimmen Sie die Werte von x, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

(a) $-x - 3 \leq 5$ (b) $3x + 5 < x - 13$ (c) $3x - (x-1) \geq x - (1-x)$

(d) $\frac{2x-4}{3} \leq 7$ (e) $\frac{1}{3}(1-x) \geq 2(x-3)$ (f) $\frac{x}{24} - (x+1) + \frac{3x}{8} < \frac{5}{12}(x+1)$

3. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $2 < \frac{3x+1}{2x+4}$ (b) $\frac{120}{n} + 1.1 \leq 1.85$ (c) $g^2 - 2g \leq 0$

(d) $\frac{1}{p-2} + \frac{3}{p^2-4p+4} \geq 0$ (e) $\frac{-n-2}{n+4} > 2$ (f) $x^4 < x^2$

4. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $\frac{x+2}{x-1} < 0$ (b) $\frac{2x+1}{x-3} > 1$ (c) $5a^2 \leq 125$

(d) $(x-1)(x+4) > 0$ (e) $(x-1)^2(x+4) > 0$ (f) $(x-1)^3(x-2) \leq 0$

(g) $(5x-1)^{10}(x-1) < 0$ (h) $(5x-1)^{11}(x-1) < 0$ (i) $\frac{3x-1}{x} > x + 3$

(j) $\frac{x-3}{x+3} < 2x - 1$ (k) $x^2 - 4x + 4 > 0$ (l) $x^3 + 2x^2 + x \leq 0$

5. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $1 \leq \frac{1}{3}(2x-1) + \frac{8}{3}(1-x) < 16$ (b) $-5 < \frac{1}{x} < 0$ (c) $\frac{1/x - 1}{1/x + 1} \geq 1$

6. Entscheiden Sie, ob die folgenden Ungleichungen für alle x und y gültig sind:

(a) $x + 1 > x$ (b) $x^2 > x$ (c) $x + x > x$ (d) $x^2 + y^2 \geq 2xy$

➡ Fortsetzung

7. Erinnern Sie die Formel für die Umrechnung von Grad Celsius in Grad Fahrenheit aus Beispiel 1.6.5.

(a) Die Temperatur für die Lagerung von Kartoffeln sollte zwischen 4 °C und 6 °C liegen. Welches sind die entsprechenden Temperaturen in Grad Fahrenheit?

(b) Die Frischhaltegarantie für Milchflaschen ist für 7 Tage gegeben, wenn die Milch bei einer Temperatur von 36 °F bis 40 °F aufbewahrt wird. Finden Sie das entsprechende Temperaturintervall in Grad Celsius.

Anspruchsvollere Aufgabe

8. Wenn a und b zwei positive Zahlen sind, werden die Zahlen m_A, m_G und m_H, die durch

$$m_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}(a+b), \qquad m_{\mathrm{G}} = \sqrt{ab} \qquad \text{und} \qquad m_H = 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}$$

definiert sind, das **arithmetische, geometrische** und **harmonische Mittel** von a und b genannt. Zeigen Sie, dass

$$m_{\mathrm{A}} \geq m_{\mathrm{G}} \geq m_{\mathrm{H}}$$

mit strikten Ungleichheitszeichen, es sei denn $a = b$. Siehe[22]

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

1.7 Intervalle und Absolutbeträge

Es seien a und b zwei beliebige Zahlen auf der Zahlengeraden. Dann nennen wir die Menge aller Zahlen, die zwischen a und b liegen ein **Intervall**. In vielen Situationen ist es wichtig, zwischen Intervallen zu unterscheiden, bei denen die Endpunkte zum Intervall dazugehören, und solchen Intervallen, bei denen die Endpunkte nicht dazu gehören. Wenn $a < b$, dann gibt es vier verschiedene Intervalle, die alle a und b als Endpunkte haben, wie in Tabelle 1.7.1 gezeigt wird.

Notation	Name	Das Intervall besteht aus allen x mit
(a, b)	Das *offene* Intervall von a bis b.	$a < x < b$
$[a, b]$	Das *abgeschlossene* Intervall von a bis b.	$a \leq x \leq b$
$(a, b]$	Das *halboffene* Intervall von a bis b.	$a < x \leq b$
$[a, b)$	Das *halboffene* Interval von a bis b.	$a \leq x < b$

Tabelle 1.7.1: Intervalle auf der reellen Zahlengeraden

[22] Sie sollten zunächst diese Ungleichungen überprüfen, indem Sie einige spezifische Zahlen wählen (evtl. unter Benutzung eines Taschenrechners). Um zu zeigen, dass $m_{\mathrm{A}} \geq m_{\mathrm{G}}$, beginnen Sie mit der offensichtlich gültigen Ungleichung $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$. Multiplizieren Sie dies dann aus. Um zu zeigen, dass $m_{\mathrm{G}} \geq m_{\mathrm{H}}$, zeigen Sie zunächst, dass $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$. Setzen Sie dann $x = 1/a$, $y = 1/b$.

Beachten Sie, dass ein offenes Intervall keinen seiner Endpunkte enthält, ein abgeschlossenes Intervall jedoch beide Endpunkte enthält. Ein halboffenes Intervall enthält einen seiner Endpunkt, jedoch nicht beide. Alle vier Intervalle haben jedoch dieselbe Länge $b - a$. Wir stellen Intervalle auf der Zahlengeraden gewöhnlich wie in Abb. 1.7.1 dar, indem wir dazugehörige Endpunkte durch Punkte und nicht dazugehörige Endpunkte an den Spitzen von Pfeilen kennzeichnen.

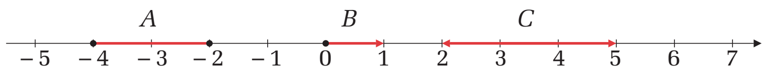

Abbildung 1.7.1: $A = [-4, -2]$, $B = [0, 1)$ und $C = (2, 5)$

Die bisher betrachteten Intervalle waren alle *beschränkte Intervalle*. Wir benutzen das Wort „Intervall" auch für gewisse unbeschränkte Mengen von Zahlen. Zum Beispiel haben wir:

$$\begin{aligned} [a, \infty) &= \text{alle Zahlen } x \text{ mit } x \geq a \\ (-\infty, b) &= \text{alle Zahlen } x \text{ mit } x < b \end{aligned} \tag{$*$}$$

Dabei ist „∞" das übliche Symbol für Unendlich. Das Symbol ∞ ist keine Zahl und daher gelten die üblichen Rechenregeln nicht für ∞. Wenn wir die Notation $[a, \infty)$ verwenden, so wollen wir damit aussagen, dass wir *alle* Zahlen betrachten, die größer oder gleich a sind ohne irgendeine obere Schranke für die Größe der Zahlen. Genauso hat das Intervall $(-\infty, b)$ keine untere Schranke. Es sollte nach den vorangehenden Ausführungen offensichtlich sein, was wir mit (a, ∞) und $(-\infty, b\,]$ meinen. Die Menge aller reellen Zahlen wird auch mit dem Symbol $(-\infty, \infty)$ bezeichnet.

Absolutbetrag

Es sei a eine reelle Zahl. Stellen Sie sich die Lage dieser Zahl auf der reellen Zahlengeraden vor. Der Abstand zwischen a und 0 heißt der *Absolutbetrag* von a. Wenn a positiv oder 0 ist, so ist der Absolutbetrag die Zahl a selbst. Wenn a negativ ist, dann ist der Absolutbetrag gleich der positiven Zahl $-a$, da Abstände nicht negativ sein dürfen. Das heißt:

Absolutbetrag

Der *Absolutbetrag* der Zahl a ist die Zahl $|a|$, die definiert ist durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases} \tag{1.7.1}$$

Zum Beispiel $|13| = 13$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|-1/2| = 1/2$ und $|0| = 0$. Beachten Sie insbesondere, dass $|-a| = |a|$ gilt[23].

[23] Es ist ein verbreiteter Trugschluss, anzunehmen, dass a stets eine positive Zahl bezeichnet, selbst dann, wenn es nicht explizit angegeben wird. Ebenso nehmen die meisten Studierenden

Beispiel 1.7.1

Berechnen Sie $|x-2|$ für $x=-3$, $x=0$ und $x=4$. Formen Sie dann $|x-2|$ um, indem Sie die Definition des Absolutbetrages nutzen.

Lösung: Unter Benutzung der Definition (1.7.1) erhalten wir $|x-2| = |-3-2| = |-5| = 5$ für $x=-3$. Für $x=0$ ist $|x-2| = |0-2| = |-2| = 2$ und für $x=4$ ergibt sich $|x-2| = |4-2| = |2| = 2$.

Wiederum ergibt sich nach (1.7.1), $|x-2| = x-2$, falls $x-2 \geq 0$, d.h. falls $x \geq 2$. Jedoch ist $|x-2| = -(x-2) = 2-x$, falls $x-2 < 0$, d.h. falls $x < 2$. Daher gilt:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{falls } x \geq 2 \\ 2-x, & \text{falls } x < 2 \end{cases}$$

Seien x_1 und x_2 zwei beliebige Zahlen. Der *Abstand* zwischen x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden ist gleich $x_1 - x_2$, wenn $x_1 \geq x_2$ und gleich $-(x_1 - x_2)$, wenn $x_1 < x_2$. Deshalb haben wir:

Abstand zwischen Zahlen

Der *Abstand* zwischen x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden ist

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1| \tag{1.7.2}$$

In Abb. 1.7.2 haben wir geometrisch angedeutet, dass der Abstand zwischen 7 und 2 gleich 5 ist, während der Abstand zwischen -3 und -5 gleich 2 ist, da $|-3-(-5)| = |-3+5| = |2| = 2$.

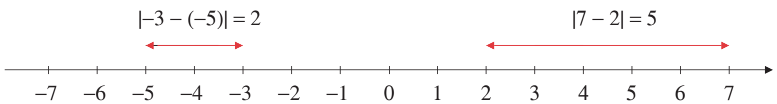

Abbildung 1.7.2: Der Abstand zwischen 7 und 2 und zwischen -3 und -5.

Nehmen Sie an, dass $|x| = 5$. Welche Werte kann x haben? Es gibt nur zwei Möglichkeiten: entweder $x = 5$ oder $x = -5$, da keine anderen Zahlen den Absolutbetrag 5 haben. Allgemein gilt: Wenn a größer oder gleich 0 ist, bedeutet $|x| = a$, dass $x = a$ oder $x = -a$. Da $|x| \geq 0$ für alle x, hat die Gleichung $|x| = a$ keine Lösung, wenn $a < 0$.

Wenn a eine positive Zahl und $|x| < a$, dann ist der Abstand zwischen x und 0 kleiner als a. Weiterhin ist, wenn a nichtnegativ ist und $|x| \leq a$, der Abstand zwischen

an, wenn Sie $-a$ sehen, dass dieser Ausdruck stets negativ ist. Beachten Sie jedoch, dass die Zahl $-a$ positiv ist, wenn a selbst negativ ist. Wenn z. B. $a = -5$, dann ist $-a = -(-5) = 5$. Trotzdem ist es eine übliche Konvention in den Wirtschaftswissenschaften, Variablen so zu definieren, dass ihre Werte, so weit es möglich ist, eher positiv als negativ sind.

x und 0 kleiner oder gleich a. In Symbolen:

$$|x| < a \text{ bedeutet } -a < x < a \tag{1.7.3}$$

$$|x| \leq a \text{ bedeutet } -a \leq x \leq a \tag{1.7.4}$$

Beispiel 1.7.2

Überprüfen Sie zuerst, ob die Ungleichung $|3x - 2| \leq 5$ gültig ist für $x = -3$, $x = 0$, $x = 7/3$ und $x = 10$. Bestimmen Sie dann alle x, für die Ungleichung gilt.

Lösung: Für $x = -3$ ist $|3x - 2| = |-9 - 2| = 11$; für $x = 0$ ist $|3x - 2| = |-2| = 2$; für $x = 7/3$ ist $|3x - 2| = |7 - 2| = 5$ und für $x = 10$ ist $|3x - 2| = |30 - 2| = 28$. Daher ist die gegebene Ungleichung gültig für $x = 0$ und $x = 7/3$, jedoch nicht für $x = -3$ und $x = 10$.

Nach (1.7.4) bedeutet die Ungleichung $|3x - 2| \leq 5$, dass $-5 \leq 3x - 2 \leq 5$. Indem wir 2 zu allen drei Ausdrücken addieren, erhalten wir

$$-5 + 2 \leq 3x - 2 + 2 \leq 5 + 2$$

oder $-3 \leq 3x \leq 7$. Division durch 3 ergibt $-1 \leq x \leq 7/3$.

Aufgaben für Kapitel 1.7

1. (a) Berechnen Sie $|2x - 3|$ für $x = 0$, $x = 1/2$ und $x = 7/2$.

(b) Lösen Sie die Gleichung $|2x - 3| = 0$.

(c) Formen Sie $|2x - 3|$ um, indem Sie die Definition des Absolutbetrages benutzen.

2. (a) Berechnen Sie $|5 - 3x|$ für $x = -1$, $x = 2$ und $x = 4$.

(b) Lösen Sie die Gleichung $|5 - 3x| = 0$.

(c) Formen Sie $|5 - 3x|$ um, indem Sie die Definition des Absolutbetrages benutzen.

3. Bestimmen Sie x so dass

(a) $|3 - 2x| = 5$ (b) $|x| \leq 2$ (c) $|x - 2| \leq 1$

(d) $|3 - 8x| \leq 5$ (e) $|x| > \sqrt{2}$ (f) $|x^2 - 2| \leq 1$

4. Es soll eine 5-Meter-Eisenstange hergestellt werden. Die Stange darf nicht mehr als 1 mm von der vorgegebenen Länge abweichen. Schreiben Sie die Längenangabe x für die Stange in Metern (a) mit Hilfe einer Doppelungleichung und (b) mit Hilfe des Absolutbetrages.

▶ Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

1.8 Summen

Ökonomen machen häufig Gebrauch von Volkszählungs-Daten. Nehmen Sie an, dass ein Land in sechs Regionen aufgeteilt ist. Sei N_i die Anzahl der Bewohner in Region i. Dann ist die Gesamtanzahl der Bewohner gegeben durch

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$$

Es ist üblich, eine abkürzende Notation für solche langen Ausdrücke zu verwenden. Der große griechische Buchstabe Sigma Σ wird gewöhnlich als **Summationssymbol** verwendet, und die Summe wird geschrieben als

$$\sum_{i=1}^{6} N_i$$

Dies wird gelesen „Summe von $i = 1$ bis $i = 6$ über N_i." Wenn es n Regionen gibt, dann ist

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n \tag{$*$}$$

eine mögliche Notation für die Gesamtanzahl der Bevölkerung. Hier deutet $\cdots$ an, dass das offensichtliche Muster sich fortsetzt und mit dem letzten Term N_n endet. In Summennotation schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{n} N_i$$

Diese Notation sagt uns, dass wir die Summe von allen Termen bilden sollen, die entstehen, wenn wir für i nacheinander alle ganzen Zahlen einsetzen, beginnend mit $i = 1$ und endend mit $i = n$. Das Symbol i heißt der **Summationsindex**. Es ist eine „Hilfsvariable", die durch jeden anderen Buchstaben (der noch nicht für irgendetwas anderes gebraucht wurde) ersetzt werden kann. Daher stellen sowohl $\sum_{j=1}^{n} N_j$ als auch $\sum_{k=1}^{n} N_k$ dieselbe Summe wie in ($*$) dar.

Die obere und untere Grenze können jeweils variiert werden. Zum Beispiel ist

$$\sum_{i=30}^{35} N_i = N_{30} + N_{31} + N_{32} + N_{33} + N_{34} + N_{35}$$

die Gesamtanzahl der Bevölkerung in den sechs Regionen, die mit 30 bis 35 beziffert sind. Nehmen Sie allgemein an, dass p und q ganze Zahlen sind mit $q \geq p$. Dann bedeutet

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$$

die Summe, die sich ergibt, wenn man für i alle aufeinander folgenden ganzen Zahlen einsetzt, beginnend mit $i = p$ und endend mit $i = q$. Wenn die obere mit der unteren Summationsgrenze übereinstimmt, reduziert sich die „Summe" auf einen Term. Und wenn die obere Grenze kleiner als die untere Grenze ist, gibt es überhaupt keine Terme. Deshalb ist es Konvention, diese „Summe" als Null zu betrachten.

Beispiel 1.8.1

Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $\sum_{i=1}^{5} i^2$ (b) $\sum_{k=3}^{6}(5k-3)$ (c) $\sum_{j=0}^{2}\frac{(-1)^j}{(j+1)(j+3)}$.

Lösung:

(a) $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

(b) $\sum_{k=3}^{6}(5k-3) = (5\cdot 3-3) + (5\cdot 4-3) + (5\cdot 5-3) + (5\cdot 6-3) = 78$

(c) $\sum_{j=0}^{2}\frac{(-1)^j}{(j+1)(j+3)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{-1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{40-15+8}{120} = \frac{33}{120} = \frac{11}{40}$

Summen und die Summennotation erscheinen häufig in den Wirtschaftswissenschaften, so dass es wichtig ist, dass man solche Summen interpretieren kann. Oft gibt es neben dem Summationsindex mehrere Variablen oder Parameter.

Beispiel 1.8.2

Schreiben Sie als ausführliche Summen:

(a) $\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)}q^{(i)}$ (b) $\sum_{j=-3}^{1} x^{5-j}y^j$ (c) $\sum_{i=1}^{N}(x_{ij}-\overline{x}_j)^2$

Lösung:

(a) $\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)}q^{(i)} = p_t^{(1)}q^{(1)} + p_t^{(2)}q^{(2)} + \cdots + p_t^{(n)}q^{(n)}$

(b) $$\begin{aligned}\sum_{j=-3}^{1} x^{5-j}y^j &= x^{5-(-3)}y^{-3} + x^{5-(-2)}y^{-2} + x^{5-(-1)}y^{-1} + x^{5-0}y^0 + x^{5-1}y^1\\ &= x^8y^{-3} + x^7y^{-2} + x^6y^{-1} + x^5 + x^4y\end{aligned}$$

(c) $\sum_{i=1}^{N}(x_{ij}-\overline{x}_j)^2 = (x_{1j}-\overline{x}_j)^2 + (x_{2j}-\overline{x}_j)^2 + \cdots + (x_{Nj}-\overline{x}_j)^2$

Beachten Sie, dass t *kein* Summationsindex in (a) und j *kein* Summationsindex in (c) ist.

Beispiel 1.8.3

Schreiben Sie die folgenden Summen mit Hilfe der Summennotation:

(a) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{81}$ (b) $a_i^6 + a_i^5b_j + a_i^4b_j^2 + a_i^3b_j^3 + a_i^2b_j^4 + a_ib_j^5 + b_j^6$

Lösung:

(a) Dies ist einfach, wenn wir beachten, dass $1 = 3^0$ und $3 = 3^1$, so dass die Summe geschrieben werden kann als $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{81}$. Der allgemeine Term ist

3^i, und wir erhalten

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{81} = \sum_{i=0}^{81} 3^i$$

(b) Dies ist schwieriger. Beachten Sie jedoch, dass sich die Indizes i und j nicht verändern. Der Exponent von a_i nimmt in jedem Schritt um 1 ab, von 6 beginnend auf 0, während der Exponent von b_j Schritt für Schritt wächst von 0 beginnend auf 6. Der allgemeine Term hat die Gestalt $a_i^{6-k} b_j^k$, wobei k von 0 bis 6 variiert. Deshalb ist

$$a_i^6 + a_i^5 b_j + a_i^4 b_j^2 + a_i^3 b_j^3 + a_i^2 b_j^4 + a_i b_j^5 + b_j^6 = \sum_{k=0}^{6} a_i^{6-k} b_j^k$$

Beispiel 1.8.4

(**Preisindizes**) Um den Gesamteffekt der Preisänderungen für mehrere verschiedene Güter innerhalb eines Landes zusammenzufassen, sind eine Reihe von verschiedenen *Preisindizes* vorgeschlagen worden.

Betrachten Sie einen „Warenkorb“ mit n Gütern. Für $i = 1, \ldots, n$ sei $q^{(i)}$ die Anzahl der Einheiten des Gutes i in dem Warenkorb, $p_0^{(i)}$ der Preis pro Einheit des Gutes i im Jahr 0 und $p_t^{(i)}$ der Preis pro Einheit des Gutes i im Jahr t. Dann gibt

$$\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} q^{(i)} = p_0^{(1)} q^{(1)} + p_0^{(2)} q^{(2)} + \cdots + p_0^{(n)} q^{(n)}$$

die Kosten des Warenkorbs im Jahr 0 an, während

$$\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q^{(i)} = p_t^{(1)} q^{(1)} + p_t^{(2)} q^{(2)} + \cdots + p_t^{(n)} q^{(n)}$$

die Kosten des Warenkorbs im Jahr t angibt. Ein Preisindex für das Jahr t mit Jahr 0 als Basisjahr ist dann definiert durch

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} q^{(i)}} \cdot 100 \qquad \textbf{(Preisindex)} \tag{1.8.1}$$

Wenn die Kosten des Warenkorbs 1032 im Jahr 0 und die Kosten desselben Warenkorbs im Jahr t sich auf 1548 belaufen, dann ist der Preisindex $(1548/1032) \cdot 100 = 150$.

Für den Fall, dass die Mengen $q^{(i)}$ die Verbrauchszahlen aus dem Jahr 0 sind, heißt dieser Index **Preisindex von Laspeyres**. Wenn aber die Mengen $q^{(i)}$ die Verbrauchszahlen aus dem Jahr t sind, heißt dieser Index **Preisindex von Paasche**.

Aufgaben für Kapitel 1.8

1. Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $\sum_{i=1}^{10} i$ (b) $\sum_{k=2}^{6}(5\cdot 3^{k-2}-k)$ (c) $\sum_{m=0}^{5}(2m+1)$

(d) $\sum_{l=0}^{2} 2^{2^l}$ (e) $\sum_{i=1}^{10} 2$ (f) $\sum_{j=1}^{4}\frac{j+1}{j}$

2. Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $\sum_{k=-2}^{2} 2\sqrt{k+2}$ (b) $\sum_{i=0}^{3}(x+2i)^2$ (c) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b^{k+1}$ (d) $\sum_{j=0}^{m} f(x_j)\Delta x_j$

3. Drücken Sie die folgenden Summen in Summennotation aus:

(a) $4+8+12+16+\cdots+4n$ (b) $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3$

(c) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ (d) $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

(e) $3x+9x^2+27x^3+81x^4+243x^5$ (f) $a_i^3b_{i+3}+a_i^4b_{i+4}+\cdots+a_i^pb_{i+p}$

(g) $a_i^3b_{i+3}+a_{i+1}^4b_{i+4}+\cdots+a_{i+p}^{p+3}b_{i+p+3}$ (h) $81297+81495+81693+81891$

4. Berechnen Sie den Preisindex (1.8.1), wenn $n=3$, $p_0^{(1)}=1$, $p_0^{(2)}=2$, $p_0^{(3)}=3$, $p_t^{(1)}=2$, $p_t^{(2)}=3$, $p_t^{(3)}=4$, $q^{(1)}=3$, $q^{(2)}=5$ und $q^{(3)}=7$.

5. Setzen Sie die korrekten Summationsgrenzen in den Summen auf der rechten Seite ein.

(a) $\sum_{k=1}^{10}(k-2)t^k=\sum_{m=}\ mt^{m+2}$ (b) $\sum_{n=0}^{N}2^{n+5}=\sum_{j=} 32\cdot 2^{j-1}$

6. Zu Beginn des Jahres 2016 bestand der Europäische Wirtschaftsraum aus 31 Nationen. Offiziell gibt es das langfristige Ziel der freien Arbeitsmobilität innerhalb des europäischen Wirtschaftsraumes. Für das Jahr 2011 sei c_{ij} die Anzahl der Arbeiter, die ihren Hauptarbeitsplatz von Nation i in die Nation j, $i\neq j$ verlegt haben. Wenn z. B. $i=25$ und $j=10$, dann schreiben wir $c_{25,10}$ für c_{ij}. Erläutern Sie die Bedeutung der Summen: (a) $\sum_{j=1}^{31}c_{ij}$, (b) $\sum_{i=1}^{31}c_{ij}$.

7. Entscheiden Sie, welche der folgenden Gleichungen allgemein gültig sind.

(a) $\sum_{k=1}^{n}ck^2=c\sum_{k=1}^{n}k^2$ (b) $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ (c) $\sum_{j=1}^{n}b_j+\sum_{j=n+1}^{N}b_j=\sum_{j=1}^{N}b_j$

(d) $\sum_{k=3}^{7}5^{k-2}=\sum_{k=0}^{4}5^{k+1}$ (e) $\sum_{i=0}^{n-1}a_{i,j}^2=\sum_{k=1}^{n}a_{k-1,j}^2$ (f) $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\frac{1}{k}\sum_{k=1}^{n}a_k$

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

1.9 Regeln für Summen

Die folgenden Eigenschaften von Summen sind im Umgang mit der Summennotation sehr hilfreich:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \textbf{(Additivität)} \tag{1.9.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \textbf{(Homogenität)} \tag{1.9.2}$$

Die Beweise sind ziemlich einfach und direkt. Zum Beispiel beweist man (1.9.2) so:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Die Homogenitätseigenschaft besagt, dass ein konstanter Faktor aus der Summe herausgezogen werden kann. Wenn insbesondere $a_i = 1$ ist für alle i, dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \tag{1.9.3}$$

Dies besagt, dass die Summe über eine Konstante c gleich dem n-fachen von c ist, wenn n die Anzahl der Summanden ist (und jeder Summand gleich c ist).

Die Summationsregeln können kombiniert angewendet werden, um Formeln wie die folgende zu erhalten

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i - c_i + d) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} c_i + nd$$

Beispiel 1.9.1

Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)m} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

und nutzen Sie dabei, dass $\dfrac{1}{(m-1)m} = \dfrac{1}{m-1} - \dfrac{1}{m}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)m} &= \sum_{m=2}^{n}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m-1} - \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m} \\
&= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Um die letzte Gleichheit zu erhalten, beachten Sie bitte, dass die meisten Terme sich gegeneinander aufheben. Die einzigen Ausnahmen sind der erste Term innerhalb der ersten Klammer und der letzte Term innerhalb der letzten Klammer. Dieser Trick erweist sich hier und bei der Berechnung vieler ähnlicher Summen dieser Art als sehr hilfreich und vereinfachend. Siehe unten Aufgabe 4.

Beispiel 1.9.2

Das **arithmetische Mittel** (oder der **Mittelwert**) μ_x von T Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_T$ ist ihr Durchschnitt, definiert als die Summe über all diese Zahlen, dividiert durch die Anzahl der Summanden, T, d. h.

$$\mu_x = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} x_i.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^{T}(x_i - \mu_x) = 0$ und $\sum_{i=1}^{T}(x_i - \mu_x)^2 = \sum_{i=1}^{T} x_i^2 - T\mu_x^2$.

Lösung: Die Differenz $x_i - \mu_x$ ist die Abweichung zwischen x_i und dem Mittelwert. Wir zeigen zunächst, dass die Summe dieser Abweichungen 0 ist, indem wir die obenstehende Definition von μ_x verwenden:

$$\sum_{i=1}^{T}(x_i - \mu_x) = \sum_{i=1}^{T} x_i - \sum_{i=1}^{T} \mu_x = \sum_{i=1}^{T} x_i - T\mu_x = T\mu_x - T\mu_x = 0$$

Ferner ist die Summe der Quadrate dieser Abweichungen

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{T}(x_i - \mu_x)^2 &= \sum_{i=1}^{T}(x_i^2 - 2\mu_x x_i + \mu_x^2) = \sum_{i=1}^{T} x_i^2 - 2\mu_x \sum_{i=1}^{T} x_i + \sum_{i=1}^{T} \mu_x^2 \\ &= \sum_{i=1}^{T} x_i^2 - 2\mu_x T\mu_x + T\mu_x^2 = \sum_{i=1}^{T} x_i^2 - T\mu_x^2\end{aligned}$$

Indem wir durch T dividieren, erhalten wir, dass die mittlere quadratische Abweichung, $(1/T)\sum_{i=1}^{T}(x_i - \mu_x)^2$, gleich dem Mittel der Quadrate, $(1/T)\sum_{i=1}^{T} x_i^2$, minus dem Quadrat des Mittelwerts, μ_x^2, ist.

Nützliche Formeln

Ein (sehr) anspruchsvoller Lehrer forderte einst seine Schüler auf, die Summe von $81\,297 + 81\,495 + 81\,693 + \cdots + 100\,899$ zu bilden. Dies sind 100 Summanden und die Differenz zwischen den aufeinander folgenden Summanden ist konstant gleich 198. Carl Gauß, (1777–1855), der später einer der weltweit führenden Mathematiker wurde, war in dieser Klasse (im Alter von 9 Jahren!) und gab die richtige Antwort innerhalb weniger Minuten. In Aufgabe 3 sind Sie gefragt, es wenigstens genauso gut wie Gauß zu machen, aber vorher werden wir noch einige Hilfen geben.

Angewandt auf das einfachere Problem, die Summe $x = 1+2+\cdots+n$ zu bestimmen, wäre Gauß' Argument etwa so: Schreiben Sie zunächst die Summe x auf zwei Arten

$$x = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$x = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

Indem Sie die senkrecht übereinander stehenden Terme jeweils addieren, erhalten Sie

$$\begin{aligned} 2x &= (1+n) + \big[2 + (n-1)\big] + \cdots + \big[(n-1) + 2\big] + (n+1) \\ &= (1+n) + (1+n) + \cdots + (1+n) + (1+n) = n(1+n) \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach x erhalten wir das Ergebnis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{1.9.4}$$

Die beiden folgenden Summationsformeln sind gelegentlich nützlich in den Wirtschaftswissenschaften.[24] In Aufgabe 2.4.5 werden Sie aufgefordert, diese Formeln zu beweisen.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{1.9.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2 \tag{1.9.6}$$

Aufgaben für Kapitel 1.9

1. Nutzen Sie die Resultate (1.9.1) bis (1.9.5), um $\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 3k + 2)$ zu bestimmen.

2. Beweisen Sie die Summenformel für eine **arithmetische Reihe**:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a + id) = na + \frac{n(n-1)d}{2}$$

Wenden Sie das Resultat auf die Summe an, von der angenommen wird, dass Gauß sie im Alter von 9 Jahren berechnet hat.

3. (a) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.

(b) Benutzen Sie das Resultat aus (a), um die folgenden Ausdrücke zu berechnen:

(i) $\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ (ii) $\sum_{k=1}^{12}\left(3^{k+1} - 3^k\right)$ (iii) $\sum_{k=1}^{n}\left(ar^{k+1} - ar^k\right)$

▶ Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

[24] Prüfen Sie, ob diese Formeln für $n = 1, 2$ und 3 gültig sind.

1.10 Newtons Binomische Formeln

Wir wissen alle, dass $(a+b)^1 = a+b$ und $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Wenn wir die letzte Gleichheit benutzen und außerdem $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$ und $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3$ schreiben, finden wir heraus, dass

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= a+b\\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

Die entsprechende Formel für $(a+b)^m$, wobei m irgendeine natürliche Zahl ist, ist die folgende:

Newtons Binomische Formeln

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \cdots + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m \tag{1.10.1}$$

Dabei sind die **Binomialkoeffizienten** $\binom{m}{k}$ definiert für $m = 1, 2, \ldots$ und für $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ durch[25]

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}, \tag{1.10.2}$$

Dabei ist $k!$, gelesen als „k Fakultät“, die Standardnotation für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$ der k ersten natürlichen Zahlen mit der Vereinbarung, dass $0! = 1$ ist.

Insbesondere ist $\binom{m}{0} = 1$, $\binom{m}{1} = m$ und $\binom{m}{m} = 1$. Wenn z. B. $m = 5$, erhalten wir

$$\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10, \qquad \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10, \qquad \binom{5}{4} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5$$

Aus (1.10.1) folgt dann $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Die Koeffizienten, die sich in der Entwicklung aufeinander folgender Potenzen von $(a+b)$ ergeben, bilden das folgende Muster, das **Pascal'sches Dreieck**[26] genannt wird:

[25] Äquivalent ist die folgende Definition: $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$.

[26] Obwohl es schon um das Jahr 1100 herum in China bekannt war, lange bevor der französische Mathematiker Blaise Pascal (1623–1662) geboren wurde.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&1&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&& \\
&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&& \\
&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&& \\
&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&& \\
&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1& \\
1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1
\end{array}
$$

Diese Tabelle kann unendlich lange fortgesetzt werden. Die Zahlen in diesem Dreieck sind die Binomialkoeffizienten. Zum Beispiel sind die Zahlen in Zeile 6 (wenn die erste Zeile mit 0 beziffert ist)

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

Erkennen Sie zunächst, dass die Zahlen symmetrisch zur Mittelachse sind. Diese Symmetrie kann so ausgedrückt werden:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \tag{1.10.3}$$

Zum Beispiel ist $\binom{6}{2} = 15 = \binom{6}{4}$. Zweitens, abgesehen von der 1 an beiden Enden jeder Zeile, ist jede Zahl die Summe der zwei angrenzenden Zahlen in der Zeile darüber. Zum Beispiel, 56 in der achten Zeile ist die Summe von 21 und 35 in der Zeile sieben. In Symbolen bedeutet das:

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \tag{1.10.4}$$

In Aufgabe 2 sollen Sie diese beiden Eigenschaften beweisen.

Aufgaben für Kapitel 1.10

1. Benutzen Sie die Binomischen Formeln, um $(a+b)^6$ zu bestimmen.

2. (a) Zeigen Sie, dass $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!}$, und dass allgemein

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}. \tag{1.10.5}$$

(b) Überprüfen Sie durch direkte Berechnung, dass

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{8-3} \quad \text{und} \quad \binom{8+1}{3+1} = \binom{8}{3} + \binom{8}{3+1}.$$

(c) Verwenden Sie (1.10.5), um (1.10.3) und (1.10.4) zu verifizieren.

1.11 Doppelsummen

Häufig muss man mehrere Summenzeichen zusammenfügen. Betrachten Sie z. B. die folgende rechteckige Anordnung von Zahlen.

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \tag{1.11.1}$$

Diese Anordnung kann als *Arbeitsblatt (spreadsheet)* angesehen werden. Eine typische Zahl in dieser Anordnung oder Zahlenfeld hat die Form a_{ij}, wobei $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ gilt[27]. Es gibt insgesamt $n \cdot m$ Zahlen. Wir wollen die Summe aller Zahlen in diesem Feld bestimmen, indem wir zunächst die Summe der Zahlen in jeder der m Zeilen bestimmen und dann all diese Zeilensummen addieren. Die m verschiedenen Zeilensummen können in der Form $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}$ geschrieben werden.[28] Die Summe dieser m Summen ist gleich $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{mj}$, was geschrieben werden kann als $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$. Wenn wir stattdessen die Zahlen in jeder der n Spalten zuerst addieren und dann die Summe dieser n Spaltensummen bilden, erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right) \tag{1.11.2}$$

In beiden Fällen haben wir die Summe aller Zahlen in diesem Zahlenfeld berechnet.[29] Aus diesem Grunde muss gelten:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tag{1.11.3}$$

Dabei haben wir, der üblichen Praxis folgend, die Klammern weggelassen. Diese Formel besagt, dass es *in einer (endlichen) Doppelsumme nicht auf die Reihenfolge der Summation ankommt*. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Summationsgrenzen für i und j unabhängig voneinander sind.[30]

Beispiel 1.11.1

Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(i + 2j)$.

[27] Zum Beispiel kann a_{ij} die Gesamteinnahmen einer Firma aus ihren Verkäufen in Region i im Monat j bezeichnen.

[28] In unserem Beispiel sind diese Zeilensummen die Gesamteinnahmen in jeder Region, summiert über alle n Monate.

[29] Wie interpretieren Sie diese Summe in unserem ökonomischen Beispiel?

[30] Denn: Eine Änderung der Reihenfolge in einer Doppelsumme wie $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$ führt zu $\sum_{i=1}^{j}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, d. h. zu einem Ausdruck, der wenig Sinn macht.

Lösung:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(i+2j) = \sum_{i=1}^{3}\big[(i+2)+(i+4)+(i+6)+(i+8)\big]$$
$$= \sum_{i=1}^{3}(4i+20) = 24+28+32 = 84$$

Sie sollten überprüfen, ob Sie dasselbe Resultat erhalten, wenn Sie zunächst über i summieren.

Aufgaben für Kapitel 1.11

1. Berechnen Sie die folgenden Doppelsummen:

(a) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} i\cdot 3^j$ (b) $\sum_{s=0}^{2}\sum_{r=2}^{4}\left(\frac{rs}{r+s}\right)^2$ (c) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(i+j^2)$ (d) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{2} i^j$

2. Betrachten Sie eine Gruppe von Personen, von denen jede eine bestimmte Anzahl Einheiten von m verschiedenen Gütern hat. Sei a_{ij} die Anzahl der Einheiten des Gutes i, die Person j $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$ besitzt. Erklären Sie in Worten die Bedeutung der folgenden Summen:

(a) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ (b) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ (c) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$

3. Beweisen Sie, dass die Summe aller Zahlen in dem Dreieck

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{array}$$

geschrieben werden kann als $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\right)$ und auch $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=j}^{m} a_{ij}\right)$.

Anspruchsvollere Aufgabe

4. Betrachten Sie die $m\cdot n$ Zahlen a_{ij} in dem rechteckigen Zahlenfeld (1.11.1). Bezeichnen Sie den arithmetischen Mittelwert aller Zahlen mit $\overline{a}$ und den Mittelwert aller Zahlen in der j-ten Spalte mit $\overline{a}_j$, so dass

$$\overline{a} = \frac{1}{mn}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} a_{rs}, \qquad \overline{a}_j = \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m} a_{rj}.$$

Beweisen Sie, dass $\overline{a}$ der Mittelwert der Spaltensummen $\overline{a}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ ist und dass

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}(a_{rj}-\overline{a})(a_{sj}-\overline{a}) = m^2(\overline{a}_j-\overline{a})^2. \qquad (*)$$

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

Aufgaben zur Wiederholung für Kapitel 1

1. (a) Was ist das Dreifache der Differenz zwischen 50 und x?

(b) Was ist der Quotient von x und der Summe von y und 100?

(c) Der Preis eines Gutes sei a. Dieser Preis enthalte 20% Mehrwertsteuer. Wie hoch ist der Preis ohne Mehrwertsteuer?

(d) Eine Person kaufe x_1, x_2 bzw. x_3 Einheiten von drei Gütern, deren Preise pro Einheit p_1, p_2 bzw. p_3 sind. Wie hoch sind die Gesamtausgaben?

(e) Ein Mietwagen kostet F Euro pro Tag als feste Kosten und b Euro pro Kilometer. Wieviel muss ein Kunde zahlen, wenn er x Kilometer an einem Tag fährt?

(f) Ein Unternehmen habe feste Kosten von F Euro pro Jahr und c Euro pro produzierter Einheit. Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Gesamtkosten des Unternehmens pro Einheit (Gesamtdurchschnittskosten), wenn das Unternehmen x Einheiten in einem Jahr produziert.

(g) Eine Person habe ein jährliches Einkommen von L Euro und erhält dann eine Erhöhung von $p\%$, gefolgt von einer weiteren Erhöhung um $q\%$. Wie hoch ist das neue Jahreseinkommen?

2. Drücken Sie die folgenden Ausdrücke jeweils als einzelne reelle Zahl in Dezimalnotation aus:

(a) 5^3 (b) 10^{-3} (c) $\dfrac{1}{3^{-3}}$ (d) $\dfrac{-1}{10^{-3}}$

(e) $3^{-2}3^3$ (f) $(3^{-2})^{-3}$ (g) $-\left(\dfrac{5}{3}\right)^0$ (h) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

3. Welche der folgenden Ausdrücke sind definiert und welches sind ihre Werte?

(a) $(0+2)^0$ (b) 0^{-2} (c) $\dfrac{(10)^0}{(0+1)^0}$ (d) $\dfrac{(0+1)^0}{(0+2)^0}$

4. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $(2^3 2^{-5})^3$ (b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1}$ (c) $(3^{-2} - 5^{-1})^{-1}$ (d) $(1.12)^{-3}(1.12)^3$

5. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $(2x)^4$ (b) $(2^{-1} - 4^{-1})^{-1}$ (c) $\dfrac{24x^3y^2z^3}{4x^2yz^2}$

(d) $\left[-(-ab^3)^{-3}(a^6b^6)^2\right]^3$ (e) $\dfrac{a^5 \cdot a^3 \cdot a^{-2}}{a^{-3} \cdot a^6}$ (f) $\left[\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot \dfrac{8}{x^{-2}}\right]^{-3}$

6. Vervollständigen Sie:

(a) $x^{-1}y^{-1} = 3$ impliziert $x^3y^3 =$ (b) $x^7 = 2$ impliziert $(x^{-3})^6(x^2)^2 =$

(c) $\left(\dfrac{xy}{z}\right)^{-2} = 3$ impliziert $\left(\dfrac{z}{xy}\right)^6 =$ (d) $a^{-1}b^{-1}c^{-1} = 1/4$ impliziert $(abc)^4 =$

7. Berechnen Sie: (a) 12 % von 300 (b) 5 % von 2000 (c) 6.5 % von 1500

8. Geben Sie für jeden der folgenden Ausdrücke eine ökonomische Interpretation und benutzen Sie dann einen Taschenrechner zur Bestimmung von Näherungswerten:

(a) $100 \cdot (1.01)^8$ € (b) $50\,000 \cdot (1.15)^{10}$ € (c) $6000 \cdot (1.03)^{-8}$ €

9. (a) 100 000 Euro werden auf einem Konto zu 8 % Zinsen pro Jahr angelegt. Wie groß ist das Kapital nach 10 Jahren?

(b) Wie viel Geld hätten Sie vor 6 Jahren auf einem Bankkonto anlegen müssen, um heute 25 000 Euro zu haben, wenn der Zinssatz 8 % pro Jahr gewesen wäre?

10. Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $a(a-1)$ (b) $(x-3)(x+7)$ (c) $-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)$ (d) $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

(e) $(x-1)^3$ (f) $(1-b^2)(1+b^2)$ (g) $(1+x+x^2+x^3)(1-x)$ (h) $(1+x)^4$

11. Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke in Faktoren:

(a) $25x-5$ (b) $3x^2-x^3y$ (c) $50-x^2$ (d) $a^3-4a^2b+4ab^2$

12. Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke in Faktoren:

(a) $5(x+2y)+a(x+2y)$ (b) $(a+b)c-d(a+b)$ (c) $ax+ay+2x+2y$

(d) $2x^2-5yz+10xz-xy$ (e) p^2-q^2+p-q (f) $u^3+v^3-u^2v-v^2u$

13. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke ohne Taschenrechner:

(a) $16^{1/4}$ (b) $243^{-1/5}$ (c) $5^{1/7}\cdot 5^{6/7}$ (d) $(4^8)^{-3/16}$

(e) $64^{1/3}+\sqrt[3]{125}$ (f) $(-8/27)^{2/3}$ (g) $(-1/8)^{-2/3}+(1/27)^{-2/3}$ (h) $\dfrac{1000^{-2/3}}{\sqrt[3]{5^{-3}}}$

14. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

(a) $2^{2x}=8$ (b) $3^{3x+1}=1/81$ (c) $10^{x^2-2x+2}=100$

15. Bestimmen Sie die Unbekannte x in jeder der folgenden Gleichungen.

(a) $25^5\cdot 25^x=25^3$ (b) $3^x-3^{x-2}=24$ (c) $3^x\cdot 3^{x-1}=81$

(d) $3^5+3^5+3^5=3^x$ (e) $4^{-6}+4^{-6}+4^{-6}+4^{-6}=4^x$ (f) $\dfrac{2^{26}-2^{23}}{2^{26}+2^{23}}=\dfrac{x}{9}$

16. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{s}{2s-1}-\dfrac{s}{2s+1}$ (b) $\dfrac{x}{3-x}-\dfrac{1-x}{x+3}-\dfrac{24}{x^2-9}$ (c) $\dfrac{\dfrac{1}{x^2y}-\dfrac{1}{xy^2}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$

17. Kürzen Sie die folgenden Brüche:

(a) $\dfrac{25a^3b^2}{125ab}$ (b) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ (c) $\dfrac{4a^2-12ab+9b^2}{4a^2-9b^2}$ (d) $\dfrac{4x-x^3}{4-4x+x^2}$

18. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $2(x-4) < 5$ (b) $\dfrac{1}{3}(y-3)+4 \geq 2$ (c) $8-0.2x \leq \dfrac{4-0.1x}{0.5}$

(d) $\dfrac{x-1}{-3} > \dfrac{-3x+8}{-5}$ (e) $|5-3x| \leq 8$ (f) $|x^2-4| \leq 2$

19. Die Benutzung eines Mobiltelefons kostet 30 Euro im Monat und zusätzlich 0.16 Euro pro Minute.

(a) Wie hoch sind die Kosten für einen Monat, wenn das Telefon insgesamt x Minuten gebraucht wird?

(b) Welches ist die kleinste und größte Anzahl von *Stunden*, die Sie das Telefon in einem Monat benutzen können, wenn die Telefonrechnung zwischen 102 und 126 Euro liegen soll?

20. Wenn man ein Seil entlang des Äquators um die Erdoberfläche spannen würde, wäre es annähernd kreisförmig und ungefähr 40 Millionen Meter lang. Nehmen Sie an, wir wollten das Seil verlängern, so dass es sich in jedem Punkt einen Meter über dem Äquator befindet. Wie viele zusätzliche Meter Seil brauchen wir? (Der Umfang eines Kreises mit dem Radius r ist $2\pi r$.)

21. (a) Zeigen Sie, dass $a+\dfrac{a\cdot p}{100}-\dfrac{\left(a+\dfrac{a\cdot p}{100}\right)\cdot p}{100}=a\left[1-\left(\dfrac{p}{100}\right)^2\right]$.

(b) Ein Artikel kostet ursprünglich 2 000 Euro. Der Preis wird zunächst um 5 % erhöht und schließlich um 5 % gesenkt. Wie groß ist der Endpreis?

(c) Ein Artikel kostet ursprünglich a Euro. Der Preis wird zunächst um p % erhöht und danach wird der (neue) Preis um p % gesenkt. Wie groß ist der Endpreis? (Nachdem Sie dieses Problem gelöst haben, betrachten Sie bitte den Ausdruck in (a).)

(d) Welches Resultat erhält man, wenn man einen Preis zunächst um p % *senkt* und anschließend um p % *erhöht* ?

22. (a) Folgt aus $a > b$ notwendigerweise, dass $a^2 > b^2$?

(b) Zeigen Sie: Wenn $a+b > 0$, dann impliziert $a > b$, dass $a^2 > b^2$.

23. (a) Es sei $a > b$. Verwenden Sie numerische Beispiele, um zu prüfen, ob $1/a > 1/b$ oder $1/a < 1/b$.

(b) Zeigen Sie: Wenn $a > b$ und $ab > 0$, dann gilt $1/b > 1/a$.

24. Zeigen Sie (i) $|ab| = |a| \cdot |b|$ und (ii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ für alle reellen Zahlen a und b. (Die Ungleichung in (ii) wird die **Dreiecksungleichung** genannt.)

25. Betrachten Sie ein gleichseitiges Dreieck. Es sei P ein beliebiger Punkt innerhalb des Dreiecks und h_1, h_2 und h_3 seien die kürzesten Entfernungen von P zu jeder der drei Seiten. Zeigen Sie, dass die Summe $h_1 + h_2 + h_3$ unabhängig davon ist, wo der Punkt innerhalb des Dreiecks liegt. (Hinweis: Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks als Summe der Flächen von drei Dreiecken.)

26. Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i(i+2)}$ (b) $\displaystyle\sum_{j=5}^{9} (2j-8)^2$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{k-1}{k+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{5} (n-1)^2(n+2)$ (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ (f) $\displaystyle\sum_{i=-2}^{3} (i+3)^i$

27. Drücken Sie die folgenden Summen in der Summennotation aus:

(a) $3 + 5 + 7 + \cdots + 199 + 201$ (b) $\dfrac{2}{1} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{3} + \cdots + \dfrac{97}{96}$

(c) $4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + \cdots + 38 \cdot 40$ (d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \cdots + \dfrac{1}{x^n}$

(e) $1 + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{5} + \dfrac{x^6}{7} + \cdots + \dfrac{x^{32}}{33}$ (f) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots - \dfrac{1}{80} + \dfrac{1}{81}$

28. Welche der folgenden Gleichungen sind immer richtig und welche sind manchmal falsch?

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=3}^{n+2} a_{j-2}$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5a_{k+1,j} = 5\sum_{k=1}^{n+1} a_{k,j}$ (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{a_i}{b_i} = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i}{\sum_{i=1}^{3} b_i}$

29. Bestimmen Sie die Summen

(a) $3 + 5 + 7 + \ldots + 197 + 199 + 201$

(b) $1001 + 2002 + 3003 + \ldots + 8008 + 9009 + 10010$

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

Wesentliches aus der Logik und der Mengenlehre

ÜBERBLICK

2

2.1 Wesentliches aus der Mengenlehre 76
2.2 Einige Aspekte der Logik 83
2.3 Mathematische Beweise 88
2.4 Mathematische Induktion 91

Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden,
aber nicht einfacher.

–Albert Einstein[1]

Argumentationen in Mathematik verlangen straffe logische Schlussfolgerungen, Argumentationen in den Wirtschaftswissenschaften bilden keine Ausnahme von dieser Regel. Wir präsentieren hier deshalb einige grundlegende Konzepte der Logik. Ein kurzer Abschnitt über mathematische Beweisführung mag nützlich sein für die ambitionierteren Studierenden.

Eine kurze Einführung in Mengenlehre geht diesem voraus. Dies ist nicht nur wegen ihrer Bedeutung in der Mathematik nützlich, sondern auch wegen der Rolle, die Mengenlehre in den Wirtschaftswissenschaften spielt: In den meisten ökonomischen Modellen wird angenommen, dass Wirtschaftswissenschaftler, einem bestimmen Kriterium folgend, die optimale Wahl aus einer Menge *von möglichen Alternativen zu treffen haben*

Das Kapitel endet mit einer Diskussion der mathematischen Induktion. Gelegentlich wird dies direkt in ökonomischen Argumentationen gebraucht. Häufiger wird es benötigt, um mathematische Resultate zu verstehen, die Ökonomen benutzen.

2.1 Wesentliches aus der Mengenlehre

Im täglichen Leben fassen wir ständig Objekte derselben Art zu Gruppen zusammen. Zum Beispiel sprechen wir von dem Lehrkörper einer Fakultät einer Universität und meinen damit alle lehrenden Mitglieder des akademischen Personals. Ein Garten besteht aus allen Pflanzen, die darin wachsen. Wir sprechen von den schottischen Firmen mit mehr als 300 Beschäftigten, allen Steuerzahlern in Deutschland, die 2004 zwischen 50 000 und 100 000 Euro verdient haben. In allen Fällen haben wir eine Vereinigung von Objekten, betrachtet als ein Ganzes. In der Mathematik nennen wir solch eine Vereinigung eine **Menge** und ihre Objekte heißen **Elemente** oder ihre **Mitglieder**.

Wie wird eine Menge spezifiziert? Die einfachste Methode ist es, alle Mitglieder in irgendeiner Reihenfolge zwischen den zwei Klammern { und } aufzulisten. Ein Beispiel ist die Menge $S = \{a, b, c\}$, deren Mitglieder die drei ersten Buchstaben im Alphabet sind. Oder es könnte eine Menge sein, die aus drei Mitgliedern besteht, die durch die Buchstaben a, b und c repräsentiert werden. Zum Beispiel, wenn $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$ ist, dann ist $S = \{0, 1, 2\}$. Außerdem bezeichnet S die Menge der Wurzeln der kubischen Gleichung $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$ in der Unbekannten x, wobei a, b und c drei beliebige reelle Zahlen sind.

Zwei Mengen A und B werden als **gleich** betrachtet, wenn jedes Element aus A ein Element von B und jedes Element von B ein Element von A ist. In diesem Fall schreiben wir $A = B$. Das bedeutet, dass die zwei Mengen aus genau denselben Elementen bestehen. Folglich ist $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$, weil die Reihenfolge, in der die Elemente

[1] etwa 1933.

aufgelistet sind, keine Bedeutung hat. Ferner ist $\{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$, weil eine Menge sich nicht ändert, wenn einige Elemente mehrfach aufgelistet sind.

Nehmen Sie jetzt an, dass Sie in ein Restaurant zum Essen gehen, das eine Auswahl von mehreren Hauptgerichten anbietet. Vier Gerichte stehen zur Auswahl – Fisch, Pasta, Omelett und Huhn. Dann hat die *zulässige Menge F* der verfügbaren Gerichte diese vier Mitglieder und ist vollständig bestimmt durch

$$F = \{\text{Fisch, Pasta, Omelett, Huhn}\}$$

Beachten Sie, dass die Reihenfolge, in der die Gerichte aufgelistet sind, keine Bedeutung hat. Die Menge F bleibt dieselbe, auch wenn Sie die Reihenfolge der Gerichte auf der Speisekarte vertauschen.

Das Symbol "$\varnothing$" bezeichnet die Menge, die keine Elemente enthält. Sie heißt die *leere Menge*[2]

Spezifikation einer Eigenschaft

Nicht jede Menge kann definiert werden, indem man alle ihre Mitglieder auflistet. Ein Grund dafür ist, dass manche Mengen unendlich sind, d. h. sie enthalten unendlich viele Mitglieder. Und solche unendlichen Mengen kommen in der Tat sehr oft in den Wirtschaftswissenschaften vor. Betrachten Sie z. B. die *Budget-Menge*, die in der Konsumforschung auftritt. Nehmen Sie an, es gebe zwei Güter mit den Preisen p bzw. q pro Einheit. Die Anzahl der gekauften Einheiten werde mit x bzw. y bezeichnet. Man bezeichnet dann das Paar (x, y) als Konsumbündel. Der Wert dieses Bündels zu Preisen p und q ist $px + qy$. Nehmen Sie an, dass ein Verbraucher einen Betrag m für den Kauf dieser beiden Güter zur Verfügung hat. Dann ist die *Budget-Beschränkung* $px + qy \leq m$ (unter der Annahme, dass der Verbraucher die Freiheit hat, weniger auszugeben). Wenn man ferner akzeptiert, dass die Anzahl der Einheiten, die von jedem Gut konsumiert werden, nicht negativ sein müssen, dann besteht die *Budget-Menge*, die mit B bezeichnet werden soll, aus denjenigen Konsumbündeln (x, y), die die drei Ungleichungen $px + qy \leq m$, $x \geq 0$ und $y \geq 0$ erfüllen. (Die Menge B ist in Abb. 4.4.12 gezeigt.) Die Standardnotation für solch eine Menge ist

$$B = \{(x, y) : px + qy \leq m,\ x \geq 0,\ y \geq 0\} \tag{2.1.1}$$

Die Klammern { } werden weiterhin gebraucht und bedeuten „die Menge bestehend aus". Anstatt alle Mitglieder aufzulisten, was unmöglich ist für die unendliche Menge der Punkte in der dreieckigen Budget-Menge B, wird die Menge in zwei Teilen definiert. Links vom Doppelpunkt gibt (x, y) die Gestalt eines typischen Mitglieds der Menge B an, hier ein Konsumbündel, das genauer angegeben wird durch die jeweilige Anzahl der Einheiten der zwei Güter. Rechts vom Doppelpunkt werden die drei Eigenschaften, die diese typischen Mitglieder erfüllen müssen, aufgelistet und dadurch

[2] Beachten Sie, dass es *die* und nicht *eine* leere Menge ist. Denn, folgt man dem Prinzip, dass eine Menge vollständig definiert ist durch ihre Elemente, so kann es nur eine Menge geben, die keine Elemente enthält. Die leere Menge ist dieselbe, ob sie von einem Kind in der Grundschule untersucht wird oder einem Physiker bei CERN – oder auch bei einem Studierenden der Wirtschaftswissenschaften in seinem Mathe-Grundkurs!

wird die Menge dann spezifiziert. Dies ist ein Beispiel der allgemeinen Spezifikation:

$$S = \{\text{Typisches Mitglied : definierende Eigenschaften}\}$$

Beachten Sie, dass es nicht nur unendliche Mengen sind, die durch ihre Eigenschaften spezifiziert werden können – endliche Mengen können auch auf diese Weise spezifiziert werden. Tatsächlich *müssen* einige endliche Mengen auf diese Art definiert werden, wie z. B. die Menge aller Menschen, die gegenwärtig leben.

Elemente einer Menge

Wie bereits gesagt, enthalten Mengen Mitglieder oder Elemente. Es gibt eine Standardnotation, die die Beziehung zwischen einer Menge und ihren Mitgliedern beschreibt. Zunächst bedeutet

$$x \in S \tag{2.1.2}$$

dass x *ein Element von* S ist. Beachten Sie das spezielle Symbol $\in$ (welches eine Variante des griechischen Buchstaben ϵ oder „epsilon" ist).

Um auszudrücken, dass x *kein* Mitglied von S ist, schreiben wir $x \notin S$. Zum Beispiel $d \notin \{a, b, c\}$ bedeutet: d ist kein Element der Menge $\{a, b, c\}$.

Zur weiteren Illustration der Notation zur Mengenmitgliedschaft kehren wir zu dem Beispiel mit den Hauptgerichten zurück. Konfrontiert mit der Wahl aus der Menge $F = \{\text{Fisch, Pasta, Omelette, Huhn}\}$ bezeichne s Ihre aktuelle Wahl. Dann gilt natürlich $s \in F$. Dies ist es, was wir meinen mit „zulässiger Menge" – es ist nur möglich ein Mitglied aus dieser Menge zu wählen und nichts anderes (nichts außerhalb dieser Menge).

Es seien A und B zwei beliebige Mengen. Dann ist A eine **Teilmenge** von B, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist. Wir schreiben dann $A \subseteq B$. Insbesondere gilt $A \subseteq A$. Aus den Definitionen folgt, dass $A = B$ genau dann gilt, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Mengenoperationen

Mengen können in vielen verschiedenen Weisen kombiniert werden. Besonders wichtig sind die drei Operationen: Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von Mengen, wie in Tabelle 2.1.1 gezeigt wird.

Notation	Name	Die Menge besteht aus
$A \cup B$	A **Vereinigung** B	den Elementen, die zu wenigstens einer der Mengen A und B gehören.
$A \cap B$	A **Durchschnitt** B	den Elementen, die zu A und B gehören.
$A \setminus B$	A **minus** B	den Elementen, die zu A, aber nicht zu B gehören.

Tabelle 2.1.1: Elementare Mengenoperationen

Daher gilt:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ oder } x \in B\} \qquad (2.1.3)$$

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ und } x \in B\} \qquad (2.1.4)$$

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ und } x \notin B\} \qquad (2.1.5)$$

Beispiel 2.1.1

Es sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{3, 6\}$. Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$.

Lösung: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$, $B \setminus A = \{6\}$.

Ein ökonomisches Beispiel erhalten wir, wenn wir Arbeiter in Utopia im Jahre 2001 betrachten. A sei die Menge all derjenigen Arbeiter, die ein Einkommen von wenigstens 15 000 Dollar und sei B die Menge all derjenigen, die einen Nettowert von wenigstens 150 000 Dollar haben. Dann wäre $A \cup B$ die Menge derjenigen Arbeiter, die wenigstens 15 000 utopianischen Dollar verdient haben oder die einen Nettowert von wenigstens 150 000 Dollar hatten, während $A \cap B$ diejenigen Arbeiter sind, die wenigstens 15 000 Dollar verdienten und die auch einen Nettowert von wenigstens 150 000 Dollar hatten. Schließlich wäre $A \setminus B$ die Menge derjenigen, die wenigstens 15 000 Dollar verdienten, aber weniger als 150 000 Dollar Netto hatten.

Wenn zwei Mengen A und B keine gemeinsamen Elemente haben, sagt man, sie seien **disjunkt**. Daher sind die Mengen A und B genau dann disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Eine Ansammlung von Mengen wird oft als **Familie** von Mengen bezeichnet. Wenn man eine bestimmte Familie von Mengen betrachtet, ist es meistens natürlich daran zu denken, dass jede Menge in dieser Familie eine Teilmenge einer speziellen festen Menge Ω ist, die wir ab jetzt als **Grundmenge** bezeichnen. In dem vorangehenden Beispiel wäre die Menge aller Arbeiter in Utopia im Jahre 2001 die offensichtliche Wahl einer Grundmenge.

Wenn A eine Teilmenge der Grundmenge Ω ist, dann ist $\Omega \setminus A$ nach der Definition der Differenz (von Mengen) die Menge derjenigen Elemente von Ω, die nicht zu A gehören. Diese Menge heißt das **Komplement** von A in Ω und wird manchmal mit A^c bezeichnet,[3] so dass $A^c = \Omega \setminus A$. Wenn man das Komplement einer Menge bestimmt, ist es *sehr* wichtig, darüber im Klaren zu sein, bezüglich welcher Grundmenge Ω das Komplement gebildet werden soll.

Beispiel 2.1.2

Die Grundmenge Ω sei die Menge aller Studierenden einer bestimmten Universität. Ferner sei F die Menge der weiblichen Studierenden, M die Menge aller Mathematik-Studierenden, C die Menge der Studierenden, die im Universitätschor sind, B die Menge aller Biologie-Studierenden und T die Menge aller Tennisspieler. Beschreiben Sie die folgenden Mengen: $\Omega \setminus M$, $M \cup C$, $F \cap T$, $M \setminus (B \cap T)$, und $(M \setminus B) \cup (M \setminus T)$.

Lösung: $\Omega \setminus M$ besteht aus denjenigen Studierenden, die nicht Mathematik studieren, $M \cup C$ aus denjenigen Studierenden, die Mathematik studieren und/oder im Chor

[3] Andere Notationen für das Komplement von A sind u.a. $\complement A$, A' und $\tilde{A}$.

sind. Die Menge $F \cap T$ besteht aus denjenigen weiblichen Studierenden, die Tennis spielen. Die Menge $M \setminus (B \cap T)$ enthält diejenigen Mathematik-Studierenden, die nicht sowohl Biologie studieren als auch Tennis spielen. Schließlich enthält die letzte Menge $(M \setminus B) \cup (M \setminus T)$ diejenigen Studierenden, die entweder Mathematik, aber nicht Biologie studieren, oder Mathematik studieren, aber nicht Tennis spielen. Sehen Sie, dass die beiden letzten Mengen gleich sind.[4]

Venn-Diagramme

Wenn man die Beziehungen zwischen mehreren Mengen betrachtet, ist es instruktiv und extrem hilfreich, jede Menge durch eine Region in der Ebene darzustellen. Die Region wird so dargestellt, dass alle Elemente, die zu einer bestimmten Menge gehören, in einer abgeschlossenen Region der Ebene enthalten sind. In dieser Art dargestellte Diagramme heißen **Venn-Diagramme**. Die im vorigen Abschnitt besprochenen Definitionen können wie in Abb. 2.1.1. illustriert werden.

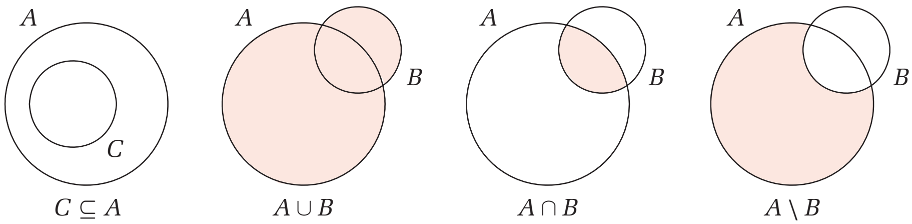

Abbildung 2.1.1: Venn-Diagramme

Indem man die Definitionen direkt benutzt oder indem man Mengen durch Venn-Diagramme darstellt, kann man Formeln herleiten, die universell gültig sind, unabhängig davon, welche Mengen betrachtet werden. Zum Beispiel folgt die Formel $A \cap B = B \cap A$ sofort aus der Definition des Durchschnitts zweier Mengen. Es ist etwas schwieriger, auf direktem Wege nachzuvollziehen, dass die folgende Beziehung für alle Mengen A, B und C gültig ist:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{$*$}$$

Mit Hilfe eines Venn-Diagramms jedoch sehen wir sehr leicht, dass die Mengen auf der rechten und linken Seite jeweils die schattierte Menge in Abb. 2.1.2 darstellen. Das Gleichheitszeichen in $(*)$ ist deshalb gültig.

Es ist wichtig, dass die drei Mengen A, B und C in einem Venn-Diagramm so gezeichnet werden, dass alle möglichen Relationen zwischen einem Element und jeder der drei Mengen dargestellt werden. Mit anderen Worten: Wie in Abbildung 2.1.3 sollten die acht folgenden verschiedenen Mengen alle nicht leer sein:

(1) $(A \cap B) \setminus C$	(2) $(B \cap C) \setminus A$	(3) $(C \cap A) \setminus B$	(4) $A \setminus (B \cup C)$
(5) $B \setminus (C \cup A)$	(6) $C \setminus (A \cup B)$	(7) $A \cap B \cap C$	(8) $(A \cup B \cup C)^c$

[4] Für beliebige Mengen M, B und T gilt: $(M \setminus B) \cup (M \setminus T) = M \setminus (B \cap T)$. Es wird einfacher sein, diese Gleichheit zu verifizieren, wenn Sie die folgende Diskussion der Venn-Diagramme gelesen haben.

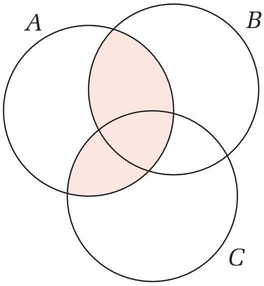

Abbildung 2.1.2: Venn-Diagramm für $A \cap (B \cup C)$

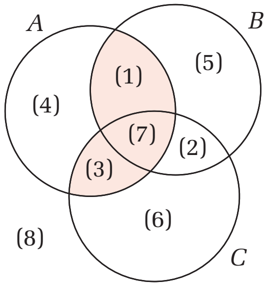

Abbildung 2.1.3: Venn-Diagramm für drei Mengen

Beachten Sie jedoch, dass diese Darstellungsmöglichkeit von Mengen in der Ebene leicht unübersichtlich wird, wenn vier oder mehr Mengen beteiligt sind, weil es dann mindestens 16 $(= 2^4)$ Regionen in solch einem Venn-Diagramm geben müsste.

Aus der Definition des Durchschnitts und der Vereinigung oder mit Hilfe eines Venn-Diagramms folgt leicht, dass $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ und dass $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Folglich spielt es keine Rolle, wo die Klammern gesetzt werden. In solchen Fällen können die Klammern weggelassen werden und die Ausdrücke geschrieben werden als $A \cup B \cup C$ und $A \cap B \cap C$. Beachten Sie jedoch, dass die Klammern im Allgemeinen in dem Ausdruck $A \cap (B \cup C)$ nicht entfernt werden dürfen, weil diese Menge nicht immer gleich $(A \cap B) \cup C$ ist. Überzeugen Sie sich von dieser Tatsache, indem Sie die drei Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$ und $C = \{4, 5\}$ betrachten oder benutzen Sie ein Venn-Diagramm.

Cantor

Der Begründer der Mengenlehre ist Georg Cantor (1845–1918), der in Sankt Petersburg geboren wurde, aber dann nach Deutschland umzog im Alter von elf Jahren. Er wird als einer der großen Mathematiker der Geschichte angesehen. Und dies nicht wegen seiner Beiträge zu den nützlichen, aber ziemlich trivialen Aspekten der Mengenlehre, die wir weiter oben dargestellt haben, sondern man gedenkt Cantor wegen seiner bedeutenden Studie der unendlichen Mengen. Wir wollen hier versuchen, nur einen Hinweis auf die Konsequenzen seiner Theorie zu geben.

Eine Gruppe von Menschen versammelt sich in einem Raum, der eine gewisse Anzahl an Stühlen hat. Wie können wir herausfinden, dass es genau so viele Menschen wie Stühle gibt? Eine Methode wäre, die Stühle zu zählen und die Menschen zu zählen und dann zu sehen, ob sich dieselbe Anzahl ergibt. Alternativ könnten wir alle Menschen bitten, Platz zu nehmen. Wenn sie alle einen eigenen Stuhl haben und kein Stuhl unbesetzt ist, dann gibt es genau so viele Menschen wie Stühle. In diesem Fall korrespondiert jeder Stuhl mit einem Menschen und jeder Mensch mit einem Stuhl.

Allgemein sagen wir, dass zwei Mengen von Elementen dieselbe **Kardinalität** haben, wenn es eine Eins-zu-Eins Korrespondenz zwischen diesen Mengen gibt. Diese Definition gilt auch für Mengen mit unendlichen vielen Elementen. Cantor mühte sich drei Jahre lang ab, um eine überraschende Folgerung dieser Defintion zu zeigen, nämlich dass es genau so viele Punkte in einem Quadrat wie auf einer der Seiten eines Quadrats gibt, in dem Sinne, dass die beiden Mengen dieselbe Kardinalität haben. In einem Brief an Dedekind aus dem Jahre 1877, schrieb Cantor über dieses Resultat: *„Ich sehe es, aber ich glaube es nicht."*

Aufgaben für Kapitel 2.1

1. Es sei $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 2\}$ und $D = \{6\}$.

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind: $4 \in C$; $5 \in C$; $A \subseteq B$; $D \subseteq C$; $B = C$ und $A = B$.

(b) Bestimmen Sie $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; $A \cup B \cup C \cup D$; $A \cap B \cap C$ und $A \cap B \cap C \cap D$.

2. F, M, C, B und T seien die Mengen aus Beispiel 2.1.2.

(a) Beschreiben Sie die folgenden Mengen: $F \cap B \cap C$, $M \cap F$ und $((M \cap B) \setminus C) \setminus T$.

(b) Schreiben Sie die folgenden Aussagen in Mengennotation:

(i) Alle Biologie-Studierende sind Mathematik-Studierende.

(ii) Es gibt weibliche Studierende der Biologie im Universitätschor.

(iii) Kein Tennisspieler studiert Biologie.

(iv) Die weiblichen Studierenden, die weder Tennis spielen noch zum Universitätschor gehören, studieren alle Biologie.

3. Eine Umfrage ergab, dass 50 Personen Kaffee und 40 Tee mögen. Beide Zahlen schließen 35 ein, die Kaffee und Tee mögen. Schließlich gab es noch 10, die weder Kaffee noch Tee mögen. Wie viele Personen insgesamt haben an der Umfrage teilgenommen?

4. Stellen Sie eine komplette Liste aller verschiedenen Teilmengen der Menge $\{a, b, c\}$ auf. Wie viele gibt es, wenn die leere Menge und die Menge selbst auch dazu gehören? Erstellen Sie dasselbe für die Menge $\{a, b, c, d\}$.

5. Bestimmen Sie, welche der folgenden Formeln gültig sind. Wenn irgendeine Formel falsch ist, so finden Sie ein Gegenbeispiel, um dies zu illustrieren. Nutzen Sie ein Venn-Diagramm, wenn Sie es als hilfreich erachten.

(a) $A \setminus B = B \setminus A$

(b) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$

(c) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$

(d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

6. Nutzen Sie Venn-Diagramme, um zu zeigen, dass: (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ und (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

7. Wenn A eine Menge mit einer endlichen Anzahl von Elementen ist, so bezeichne $n(A)$ ihre *Kardinalität*, definiert als die Anzahl der Elemente in A. Wenn A und B beliebige endliche Mengen sind, so beweisen Sie:

(a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(b) $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$

➡ Fortsetzung

8. An einer Umfrage zur Untersuchung der Frage, welche Zeitung A, B oder C sie an einem bestimmten Tag gelesen hatten, nahmen 1000 Personen teil. Die Antworten zeigten, dass 420 A, 316 B und 160 C gelesen hatten. Diese Zahlen schließen 116 ein, die A und B gelesen hatten, 100, die A und C gelesen hatten und 30, die B und C gelesen hatten. Schließlich enthalten all diese Zahlen noch 16, die alle drei Zeitungen gelesen hatten.

(a) Wie viele hatten A, aber nicht B gelesen?

(b) Wie viele hatten C, aber weder A noch B gelesen?

(c) Wie viele hatten weder A noch B noch C gelesen?

(d) Bezeichnen Sie die gesamte Menge aller 1000 Personen in der Umfrage mit Ω (die Grundmenge). Unter Verwendung der Notation aus Aufgabe 7, haben wir z. B. $n(A) = 420$ und $n(A \cap B \cap C) = 16$. Beschreiben Sie die Zahlen aus den oben gegebenen Antworten unter Benutzung dieser Notation. Warum ist $n(\Omega \setminus (A \cup B \cup C)) = n(\Omega) - n(A \cup B \cup C)$?

Anspruchsvollere Aufgabe

9. Die in Aufgabe 6 gezeigten Gleichheiten sind Spezialfälle der *Gesetze von De Morgan*. Formulieren Sie diese zwei Gesetze durch Formeln und beweisen Sie diese:

(a) Das Komplement der Vereinigung einer beliebigen Familie von Mengen ist der Durchschnitt der Komplemente von allen Mengen.

(b) Das Komplement des Durchschnitts einer beliebigen Familie von Mengen ist die Vereinigung der Komplemente von allen Mengen.

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

2.2 Einige Aspekte der Logik

Mathematische Modelle spielen eine entscheidende Rolle in den empirischen Wissenschaften, besonders in den modernen Wirtschaftswissenschaften. Dies war eine nützliche Entwicklung in diesen Wissenschaften, es verlangt jedoch, dass Fachleute mit Sorgfalt arbeiten: Fehler in mathematischen Schlussweisen passieren leicht. Hier ist ein typisches Beispiel, wie ein mangelhafter Versuch, Logik zu nutzen, dazu führen kann, dass ein Problem falsch beantwortet wird.

Beispiel 2.2.1

Nehmen Sie an, dass wir *alle* Werte von x bestimmen wollen, für die die folgende Gleichung erfüllt ist: $x + 2 = \sqrt{4 - x}$.

Indem man jede Seite der Gleichung quadriert, erhält man $(x+2)^2 = (\sqrt{4-x}\,)^2$ und damit $x^2 + 4x + 4 = 4 - x$. Indem man diese letzte Gleichung umordnet, erhält man $x^2 + 5x = 0$. Indem man x kürzt, hat man $x + 5 = 0$ und daher $x = -5$.

Nach dieser Schlussfolgerung sollte die Antwort $x = -5$ sein. Wir wollen dies überprüfen. Für $x = -5$, haben wir $x + 2 = -3$. Jedoch ist $\sqrt{4 - x} = \sqrt{9} = 3$, so dass diese Antwort falsch ist.[5]

Dieses Beispiel zeigt die Gefahren von Routineberechnungen ohne gründliches Nachdenken auf. Es wird vielleicht leichter, ähnliche Fehler zu vermeiden, nachdem Sie die Struktur solcher logischer Schlussweisen gründlicher studiert haben.

Aussagen

Behauptungen, die entweder wahr oder falsch sind, heißen **Aussagen**. Die meisten der Aussagen in diesem Buch sind mathematische Aussagen. Andere Arten von Aussagen treten im täglichen Leben auf. „Alle Individuen, die atmen, sind lebendig“ ist ein Beispiel einer wahren Aussage, während die Aussage „Alle Individuen, die atmen, sind gesund“ eine falsche Aussage ist. Beachten Sie: Wenn die Worte in der Formulierung solch einer Aussage keine präzise Bedeutung besitzen, wird es oft schwierig sein, zu entscheiden, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Zum Beispiel ist die Ausage „67 ist eine große Zahl“ weder wahr noch falsch ohne präzise Definition einer „großen Zahl“.

Nehmen Sie an, dass eine Aussage, wie „$x^2 - 1 = 0$“, eine oder mehrere Variablen enthält. Indem wir verschiedene reelle Zahlen für die Variable x einsetzen, können wir viele verschiedene Aussagen erzeugen, von denen einige wahr und einige falsch sind. Aus diesem Grunde sagen wir, dass solch eine Aussage eine **offene Aussage** ist. Es zeigt sich, dass die Aussage $x^2 - 1 = 0$ wahr ist für $x = 1$ oder -1, aber sonst nicht. Deshalb ist eine offene Aussage nicht einfach wahr oder falsch. Sie ist weder wahr noch falsch, solange wir keinen speziellen Wert für die Variable wählen.

Implikationen

Um in jedem Schritt einer Kette von logischen Schlüssen die Übersicht zu behalten, ist es oft hilfreich, „Implikations-Pfeile“ (Folge-Pfeile) zu verwenden. Nehmen Sie an, P und Q seien zwei Aussagen, so dass gilt: Wenn P wahr ist, so ist notwendig auch Q wahr. In diesem Fall schreiben wir gewöhnlich

$$P \implies Q \tag{2.2.1}$$

Dies wird gelesen als „P impliziert Q“ oder „wenn P, dann auch Q“, oder „Q ist eine Folgerung aus P.“ Andere Möglichkeiten, dieselbe Implikation auszudrücken, sind u. a. „Q, wenn P“, „P nur, wenn Q“ und „Q ist eine Implikation (Folgerung) von P“. Das Symbol $\implies$ ist ein **Implikations-Pfeil** (Folge-Pfeil) und der Pfeil zeigt in die Richtung der logischen Implikation.

[5] Merken Sie sich, wie weise es ist, die Probe zu machen, wann immer Sie glauben, eine Gleichung gelöst zu haben. In Beispiel 2.2.4 werden wir erklären, wie der Fehler entstanden ist.

Beispiel 2.2.2

Hier sind einige Beispiele korrekter Implikationen:

(a) $x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4$

(b) $xy = 0 \Longrightarrow x = 0$ oder[6] $y = 0$

(c) S ist ein Quadrat $\Longrightarrow$ S ist ein Rechteck

(d) Sie lebt in Paris[7] $\Rightarrow$ Sie lebt in Frankreich.

In manchen Fällen, in denen die Implikation (2.2.1) wahr ist, kann es auch möglich sein, einen logischen Schluss in die andere Richtung zu ziehen:

$$Q \Longrightarrow P \tag{2.2.2}$$

In solchen Fällen können wir beide Implikationen zusammen in einer einzigen **logischen Äquivalenz** schreiben:

$$P \Longleftrightarrow Q \tag{2.2.3}$$

Wir sagen dann, dass „P äquivalent zu Q" ist. Weil beide Aussagen „P, wenn Q" und „P nur, wenn Q" wahr sind, sagen wir auch „P dann und nur dann, wenn Q", das im Englischen oft als „P iff Q" (if and only if) geschrieben wird. Wir sagen dafür auch: „P gilt genau dann, wenn Q gilt." Das Symbol $\Longleftrightarrow$ ist ein **Äquivalenz-Pfeil.**

Wir sehen, dass in Beispiel 2.2.2 der Implikations-Pfeil in (b) durch einen Äquivalenz-Pfeil ersetzt werden kann, weil auch die folgende Aussage wahr ist: $x = 0$ oder $y = 0$ impliziert, dass $xy = 0$ gilt. Beachten Sie jedoch, dass keine andere Implikation in Beispiel 2.2.2 durch einen Äquivalenz-Pfeil ersetzt werden kann. Denn, wenn x^2 größer als 4 ist, ist es nicht notwendig wahr, dass x größer als 2 ist (z. B. könnte x gleich -3 sein); auch ist ein Rechteck nicht notwendig ein Quadrat; und schließlich: Die Tatsache, dass eine Person in Frankreich lebt, bedeutet nicht, dass sie in Paris lebt.

Beispiel 2.2.3

Hier sind einige Beispiele korrekter Äquivalenzen:

(a) $(x < -2 \text{ oder } x > 2) \Leftrightarrow x^2 > 4$

(b) $xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ oder } y = 0)$

(c) $A \subseteq B \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Es gibt andere allgemein übliche Ausdrucksweisen dafür, dass die Aussage P die Aussage Q impliziert oder dass P äquivalent zu Q ist. Daher sagen wir, wenn die Aussage P die Aussage Q impliziert, P ist eine „hinreichende Bedingung" für Q, d. h.: damit Q wahr ist, reicht es, dass P wahr ist. Dementsprechend gilt: Wenn wir wissen, dass P

[6] Es ist wichtig zu beachten, dass das Wort „oder" in Mathematik *einschließend/inklusiv* ist, in dem Sinn, dass die Aussage „P oder Q" die Möglichkeit erlaubt, dass P und Q *beide* wahr sind.

[7] Hauptstadt Frankreichs.

gilt, dann ist es sicher, dass auch Q gilt. In diesem Fall sagen wir, dass Q eine „notwendige Bedingung“ für P ist, denn Q muss notwendigerweise wahr sein, wenn P wahr ist. Daher gilt:

P ist eine **hinreichende Bedingung** für Q bedeutet:	$P \Longrightarrow Q$	(2.2.4)
Q ist eine **notwendige Bedingung** für P bedeutet:	$P \Longrightarrow Q$	(2.2.5)

Der entsprechende verbale Ausdruck für $P \iff Q$ ist einfach: *P ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für Q.*

Es ist lohnenswert, die Wichtigkeit zu betonen, zwischen den Aussagen, „P ist eine notwendige Bedingung für Q“, „P ist eine hinreichende Bedingung für Q“ und „P ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für Q“ zu unterscheiden. Um es auf den Punkt zu bringen, betrachten Sie die Aussagen:

Leben in Frankreich ist eine notwendige Bedingung für eine Person, um in Paris zu leben.[8]

und

Leben in Paris ist eine notwendige Bedingung für eine Person, um in Frankreich zu leben.

Die erste Aussage ist selbstverständlich wahr. Aber die zweite ist falsch,[9] weil es möglich ist in Frankreich zu leben, aber außerhalb von Paris. Wahr ist jedoch die folgende Aussage

Leben in Paris ist eine hinreichende Bedingung für eine Person, um in Frankreich zu leben.

Auf den folgenden Seiten werden wir wiederholt von notwendigen und hinreichenden Bedingungen sprechen. Das Verständnis dieser und die Unterscheidung zwischen diesen beiden Bedingungen ist eine notwendige Bedingung für das Verständnis vieler ökonomischer Analysen. Es ist jedoch bei weitem keine hinreichende Bedingung.

Beispiel 2.2.4

Warum war es in Beispiel 2.2.1 nötig, zu prüfen, ob die gefundenen Werte tatsächlich die Gleichung lösen? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die logische Struktur unseres Lösungsweges zu Beispiel 2.2.1 untersuchen. Wenn wir mit Buchstaben versehene Implikations-Pfeile benutzen, können wir die Lösung wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} x+2=\sqrt{4-x} &\overset{(a)}{\Longrightarrow} (x+2)^2 = 4-x \\ &\overset{(b)}{\Longrightarrow} x^2+4x+4 = 4-x \\ &\overset{(c)}{\Longrightarrow} x^2+5x = 0 \\ &\overset{(d)}{\Longrightarrow} x(x+5) = 0 \\ &\overset{(e)}{\Longrightarrow} [x=0 \ \text{ oder } \ x=-5] \end{aligned}$$

[8] Es sei denn, die Person lebt in Paris, Texas.

[9] Genau so wie die Aussage *Leben in Frankreich ist äquivalent zu Leben in Paris.*

Die Implikation (a) ist wahr (weil gilt: $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$ und $(\sqrt{a})^2 = a$). *Es ist jedoch wichtig zu beachten, dass diese Implikation nicht durch eine Äquivalenz ersetzt werden kann.* Wenn $a^2 = b^2$, dann ist entweder $a = b$ oder $a = -b$; es muss nicht wahr sein, dass $a = b$ gilt. Die Implikationen (b), (c), (d) und (e) sind auch alle wahr und darüberhinaus hätten sie alle als Äquivalenzen geschrieben werden können, obwohl dies nicht nötig ist, um die Lösung zu finden. Wir haben also eine Kette von Implikationen erhalten, die von der Gleichung $x + 2 = \sqrt{4 - x}$ zu der Aussage „$x = 0$ oder $x = -5$" führt.

Da die Implikation (a) nicht umgekehrt werden kann, gibt es keine Kette von Implikationen in die umgekehrte Richtung. Wir haben herausgefunden: Wenn eine Zahl x die Gleichung $x + 2 = \sqrt{4 - x}$ erfüllt, dann muss x entweder 0 oder -5 sein; kein anderer Wert kann die gegebene Gleichung erfüllen. Wir haben jedoch bisher nicht gezeigt, dass einer der Werte 0 oder -5 tatsächlich die Gleichung erfüllt. Bevor wir nicht 0 und -5 in die Gleichung eingesetzt haben, können wir nicht sehen, dass nur $x = 0$ eine Lösung ist.[10]

Wenn wir auf Beispiel 2.2.1 zurückschauen, erkennen wir jetzt, dass wir dort zwei Fehler begangen haben. Erstens ist die Implikation $x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x + 5 = 0$ falsch, weil $x = 0$ auch eine Lösung von $x^2 + 5x = 0$ ist. Zweitens ist es logisch notwendig, zu überprüfen, ob 0 oder -5 tatsächlich die Gleichung erfüllen.

Aufgaben für Kapitel 2.2

1. Implikationen und Äquivalenzen können auf andere Arten ausgedrückt werden, die sich von den bereits erwähnten unterscheiden. Stellen Sie die logischen Schlüsse in den folgenden Aussagen mit Hilfe der Implikations- oder Äquivalenz-Pfeile dar.

(a) Die Gleichung $2x - 4 = 2$ ist nur erfüllt, wenn $x = 3$.

(b) Wenn $x = 3$ ist, dann ist $2x - 4 = 2$.

(c) Die Gleichung $x^2 - 2x + 1 = 0$ ist erfüllt, wenn $x = 1$ ist.

(d) Wenn $x^2 > 4$ ist, dann ist $|x| > 2$ und umgekehrt.

2. Bestimmen Sie, welche der folgenden Formeln gültig sind. Wenn eine Formel falsch ist, so finden Sie ein Gegenbeispiel, um dies zu illustieren. Nutzen Sie ein Venn-Diagramm, wenn Sie es als hilfreich erachten.

(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ (b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ (c) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

(d) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ (e) $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

3. Bei jeder der folgenden Implikationen, in denen x, y und z Zahlen sind, entscheiden Sie, ob die Implikation wahr ist und ob die umgekehrte Implikation wahr ist.

(a) $x = \sqrt{4} \Rightarrow x = 2$ (b) $(x = 2 \text{ und } y = 5) \Rightarrow x + y = 7$

(c) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1$ (d) $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0$

(e) $(x = 0 \text{ und } y = 0) \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$ (f) $xy = xz \Rightarrow y = z$

[10] Beachten Sie, dass in diesem Fall die Probe, die wir vorgeschlagen haben, nicht nur dazu dient, unsere Berechnungen zu überprüfen, sie ist in diesem Fall auch eine logische Notwendigkeit.

4. Betrachten Sie die Aussage $2x + 5 \geq 13$.

(a) Ist die Bedingung $x \geq 0$ notwendig, hinreichend oder beides notwendig und hinreichend, damit die Ungleichung erfüllt ist?

(b) Beantworten Sie dieselbe Frage, wenn $x \geq 0$ ersetzt wird durch $x \geq 50$.

(c) Beantworten Sie dieselbe Frage, wenn $x \geq 0$ ersetzt wird durch $x \geq 4$.

Anspruchsvollere Aufgabe

5. Wenn P eine Aussage ist, so wird die *Negation* von P mit $\neg P$ bezeichnet. Wenn P wahr ist, dann ist $\neg P$ falsch und umgekehrt. Zum Beispiel ist die Negation der Aussage $2x + 3y \leq 8$ gegeben durch $2x + 3y > 8$. Formulieren Sie für jede der 6 folgenden Aussagen die Negation so einfach wie möglich.

(a) $x \geq 0$ und $y \geq 0$.

(b) Alle x erfüllen $x \geq a$.

(c) Weder x noch y ist kleiner als 5.

(d) Für jedes $\varepsilon > 0$, existiert ein $\delta > 0$ so dass B erfüllt ist.

(e) Jeder mag Katzen.

(f) Jeder liebt jemanden einige Zeit.

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

2.3 Mathematische Beweise

In allen Bereichen der Mathematik werden die wichtigsten Resultate **Theoreme** oder *Sätze* genannt. Die Konstruktion logisch einwandfreier Beweise für diese Resultate kann oft sehr kompliziert sein. Zum Beispiel behauptet das „Vierfarben-Theorem“, dass jede Landkarte in der Ebene höchstens vier Farben benötigt, um alle angrenzenden Regionen in verschiedenen Farben darstellen zu können. Der Beweis verlangt, dass Hunderttausende von verschiedenen Fällen überprüft werden müssen, eine Aufgabe, die unmöglich ist ohne ein hochentwickeltes Computer-Programm.

In diesem Buch lassen wir oft formale Beweise von Theoremen weg. Stattdessen legen wir den Schwerpunkt darauf, einen guten intuitiven Hintergrund zu vermitteln über das, was die Theoreme uns sagen wollen. Nichtsdestoweniger ist es dennoch nützlich, einiges über die verschiedenen Beweismethoden in der Mathematik zu wissen.

Jedes mathematische Theorem kann als eine oder mehrere Implikationen formuliert werden in der Form

$$P \Longrightarrow Q \tag{2.3.1}$$

wobei P eine Aussage oder eine Reihe von Aussagen darstellt, die *Voraussetzungen* (Prämissen, „das, was wir wissen“) genannt werden und Q ist eine oder eine Reihe von Aussagen, die *(Schluss-)Folgerungen* („das, was wir wissen wollen“) genannt werden.

Gewöhnlich ist es der natürliche Weg ein Resultat der Art (2.3.1) zu beweisen, indem man mit den Voraussetzungen P beginnt und sich nach und nach zu den Folgerungen Q vorarbeitet. Wir nennen diese Vorgehensweise einen **direkten Beweis**. Manchmal ist es jedoch vorteilhafter, die Implikation $P \Longrightarrow Q$ durch einen **indirekten Beweis**, eine sogenannte **Kontraposition** zu beweisen. In diesem Fall beginnen wir mit der Annahme, dass Q nicht wahr ist und zeigen dann auf dieser Grundlage, dass P auch nicht wahr sein kann. Dies ist völlig legitim, da die folgende Äquivalenz gilt:

Das Prinzip der Kontraposition

Die Aussage $P \Rightarrow Q$ ist äquivalent zu der Aussage

$$\textit{Nicht } Q \Rightarrow \textit{Nicht } P \tag{2.3.2}$$

Es ist hilfreich, diese logische Regel in einem konkreten Anwendungsfall zu betrachten: „Wenn es regnet, wird das Gras nass." drückt genau dasselbe aus wie „Wenn das Gras nicht nass wird, dann regnet es nicht."

Beispiel 2.3.1

Benutzen Sie die zwei Beweismethoden, um zu zeigen, dass gilt:
$-x^2 + 5x - 4 > 0 \Longrightarrow x > 0$.

Lösung:

(a) *Direkter Beweis:* Nehmen Sie an, dass $-x^2 + 5x - 4 > 0$. Addition von $x^2 + 4$ zu jeder Seite ergibt $5x > x^2 + 4$. Weil $x^2 + 4 \geq 4$ ist für alle x, folgt $5x > 4$ und damit $x > 4/5$. Insbesondere ist dann $x > 0$.

(b) *Indirekter Beweis:* Nehmen Sie an, dass $x \leq 0$. Dann ist $5x \leq 0$ und damit ist $-x^2 + 5x - 4$ als Summe von drei nichtpositiven Termen selbst nichtpositiv..

Die Methode des indirekten Beweises ist eng verwandt mit einer anderen Methode, die bekannt ist als *Beweis durch Widerspruch* oder als *reductio ad absurdum*. Um zu zeigen, dass $P \Rightarrow Q$ wahr ist, nimmt man bei dieser Methode an, dass P wahr ist und Q nicht, und entwickelt dann etwas, das *nicht* wahr sein *kann*. Da P und die Negation von Q zu etwas Absurdem führen, muss es so sein: Wann immer P gilt, dann muss auch Q gelten.

Lassen Sie uns in dem letzten Beispiel annehmen, dass $-x^2 + 5x - 4 > 0$ und $x \leq 0$ gleichzeitig wahr sind. Dann haben wir wie im ersten Schritt des direkten Beweises, dass $5x > x^2 + 4$. Da aber $5x \leq 0$, wie im ersten Schritt des indirekten Beweises, müssen wir schliessen, dass $0 > x^2 + 4$. Da letzteres unmöglich wahr sein kann, haben wir gezeigt, dass $-x^2 + 5x - 4 > 0$ und $x \leq 0$ nicht gleichzeitig wahr sein kann, so dass gilt $-x^2 + 5x - 4 > 0 \Rightarrow x > 0$, wie behauptet.

Deduktive und induktive Schlussfolgerung

Die zwei gerade vorgestellten Beweismethoden sind Beispiele der *deduktiven Schlussweise*, d. h. Schlussweisen, die auf konsistenten Regeln der Logik beruhen. Im Gegensatz dazu benutzen viele Zweige der Wissenschaft *induktive Schlussweisen*. Dabei werden allgemeine Schlüsse gezogen, die nur auf wenigen (manchmal auch vielen) Beobachtungen beruhen. Die Aussage „das Preisniveau hat in den letzten n Jahren in jedem Jahr zugenommen, deshalb wird es im nächsten Jahr auch zunehmen“ ist ein Beispiel einer induktiven Schlussweise. Diese induktive Vorgehensweise ist dennoch von fundamentaler Bedeutung in den experimentellen und empirischen Wissenschaften trotz der Tatsache, dass darauf beruhende Schlussfolgerungen niemals absolut sicher sind. In der Tat erweisen sich solche Beispiele induktiver Schlussweisen (oder der implizierten Vorhersagen) in den Wirtschaftswissenschaften oft im Nachhinein als falsch.

In der Mathematik ist induktive Schlussweise nicht als Beweismethode anerkannt. Nehmen Sie an, dass Studierende in einem Geometrie-Kurs zeigen sollen, dass die Summe der Winkel in einem Dreieck immer 180 Grad ist. Wenn sie gewissenhaft so genau wie möglich 1000 Dreiecke ausmessen und zeigen, dass in jedem Fall die Summe der Winkel 180 ist, würde das nicht als Beweis für diese Behauptung gelten. Es würde ein sehr gutes Anzeichen dafür sein, dass die Behauptung wahr ist, aber es ist kein mathematischer Beweis. Ebenso ist in der Betriebswirtschaft die Tatsache, dass die Gewinne eines Unternehmens in jedem der letzten 20 Jahren angestiegen sind, keine Garantie dafür, dass sie auch in diesem Jahr wieder steigen werden.

Aufgaben für Kapitel 2.3

1. Betrachten Sie die folgende (zweifelhafte) Aussage: „Wenn die Inflation steigt, fällt die Arbeitslosigkeit.“ Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu der gegebenen?

(a) Damit die Arbeitslosigkeit fällt, muss die Inflation steigen.

(b) Eine hinreichende Bedingung für das Fallen der Arbeitslosigkeit ist, dass die Inflation steigt.

(c) Arbeitslosigkeit kann nur fallen, wenn die Inflation steigt.

(d) Wenn die Arbeitslosigkeit nicht fällt, steigt die Inflation nicht.

(e) Eine notwendige Bedingung für das Steigen der Inflation ist das Fallen der Arbeitslosigkeit.

2. Analysieren Sie die folgende Grabinschrift mit Hilfe der Logik: *Diejenigen, die ihn kannten, liebten ihn. Diejenigen, die ihn nicht liebten, kannten ihn nicht.* Ist dies vielleicht ein Fall, in dem Poesie besser ist als Logik?

3. Nutzen Sie das Prinzip der Kontraposition, um zu zeigen: Wenn x und y ganze Zahlen sind und xy eine ungerade Zahl ist, dann sind x und y beide ungerade.

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

2.4 Mathematische Induktion

Beweisführung durch mathematische oder vollständige Induktion ist eine wichtige Technik, um Formeln für natürliche Zahlen zu beweisen. Betrachten Sie z. B. die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} 1 &= 1 &= 1^2 \\ 1+3 &= 4 &= 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 16 &= 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 &= 5^2 \end{aligned}$$

Dies lässt ein allgemein gültiges Muster vermuten, nämlich, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2 \tag{$*$}$$

Um zu zeigen, dass dies allgemein gilt, können wir wie folgt vorgehen. Nehmen Sie an, dass die Formel in $(*)$ korrekt ist für eine gewisse natürliche Zahl $n = k$, so dass

$$1+3+5+\cdots+(2k-1) = k^2$$

Indem wir die nächste ungerade Zahl $2k+1$ zu jeder Seite addieren, erhalten wir

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = k^2+(2k+1) = (k+1)^2$$

Dies ist jedoch die Formel $(*)$ für $n = k+1$. Damit haben wir bewiesen: Wenn die Summe der ersten k ungeraden Zahlen k^2 ist, dann ist die Summe der ersten $k+1$ ungeraden Zahlen gleich $(k+1)^2$. Diese Implikation, zusammen mit der Tatsache, dass $(*)$ gültig *ist* für $n = 1$, impliziert, dass $(*)$ allgemein gültig ist. Denn wir haben gerade gezeigt: wenn $(*)$ wahr ist für $n = 1$, dann ist es wahr für $n = 2$; und wenn es für $n = 2$ wahr ist, dann ist es wahr für $n = 3$; ...; und wenn es für $n = k$ wahr ist, dann ist es wahr für $n = k+1$; usw.

Ein Beweis dieser Art heißt *Beweis durch Induktion*. Er verlangt zu zeigen, dass die Formel tatsächlich wahr ist für $n = 1$ und zweitens, dass die Formel auch für $n = k+1$ gültig ist, *wenn* sie für $n = k$ gültig ist. Es folgt durch Induktion, dass die Formel dann für alle natürlichen Zahlen n gültig ist.

Beispiel 2.4.1

Zeigen Sie durch Induktion: Für alle positiven ganzen Zahlen n gilt:

$$3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1}-3) \tag{$**$}$$

Lösung: Für $n = 1$ sind beide Seiten 3. Nehmen Sie an, dass $(**)$ gültig ist für $n = k$. Dann gilt:

$$3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^k+3^{k+1} = \frac{1}{2}(3^{k+1}-3)+3^{k+1} = \frac{1}{2}(3^{k+2}-3)$$

Dies ist $(**)$ für $n = k+1$. Damit ist durch Induktion $(**)$ gültig für alle n.

Auf der Grundlage dieses Beispiels kann die allgemeine Struktur eines Induktionsbeweises wie folgt beschrieben werden: Wir wollen beweisen, dass eine mathematische Formel $A(n)$, die von n abhängt, für alle natürlichen Zahlen n gültig ist. In den beiden vorausgehenden Beispielen (*) und (**) waren die entsprechenden Aussagen $A(n)$ gegeben durch:

$$A(n): \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

$$A(n): \quad 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n = \tfrac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$$

Die in jedem Beweis verlangten Schritte sind wie folgt: Zeigen Sie zunächst, dass $A(1)$ gültig ist, d. h., dass die Formel korrekt ist für $n = 1$. Beweisen Sie dann für jede natürliche Zahl k: Wenn $A(k)$ gültig ist, dann folgt, dass auch $A(k+1)$ gültig ist. Dabei wird $A(k)$ die *Induktionshypothese* genannt und der Schritt von $A(k)$ auf $A(k+1)$ heißt *der Induktionsschritt* in dem Beweis. Wenn der Induktionsschritt für eine beliebige natürliche Zahl k bewiesen ist, dann ist, durch Induktion, die Aussage $A(n)$ für alle n gültig.

Das allgemeine Prinzip kann jetzt formuliert werden:

Das Prinzip der mathematischen Induktion

Für jede natürliche Zahl n bezeichne $A(n)$ eine Aussage, die von n abhängt. Nehmen Sie an, dass:

(a) $A(1)$ ist wahr.

(b) Wenn die Induktionshypothese $A(k)$ wahr ist, dann ist auch $A(k+1)$ wahr für jede natürliche Zahl k. (2.4.1)

Dann ist $A(n)$ wahr für alle natürlichen Zahlen n.

Das Prinzip der Induktion erscheint unmittelbar einleuchtend. Wenn die Gültigkeit von $A(k)$ für jedes k die Gültigkeit von $A(k+1)$ impliziert, dann ist wegen der Gültigkeit von $A(1)$ auch $A(2)$ gültig, was wiederum bedeutet, dass $A(3)$ gültig ist usw.[11]

Das Prinzip der mathematischen Induktion kann leicht auf den Fall verallgemeinert werden, in dem wir eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl größer oder gleich einer beliebigen Zahl n_0 haben. Nehmen Sie an, dass wir beweisen können, dass $A(n_0)$ gültig ist und dass ferner für jedes $k \geq n_0$, gilt: Wenn $A(k)$ wahr ist, dann ist auch $A(k+1)$ wahr. Dann folgt, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq n_0$.

Aufgaben für Kapitel 2.4

1. Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad (*)$$

[11] Eine Analogie: Betrachten Sie eine Leiter mit einer unendlichen Anzahl von Stufen. Nehmen Sie an, dass Sie die erste Stufe erklimmen können. Nehmen Sie weiter an, dass Sie nach jeder Stufe jeweils die nächste ersteigen können. Dann sind Sie in der Lage, zu jeder beliebigen Stufe hinaufzukommen.

➡ Fortsetzung

2. Beweisen Sie das Folgende durch Induktion:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad (**)$$

3. $1^3+2^3+3^3=36$ ist teilbar durch 9. Zeigen Sie durch Induktion, dass die Summe $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ dreier aufeinander folgender Kubikzahlen immer durch 9 teilbar ist.

4. Sei $A(n)$ die Aussage:

Für jede Menge von n Personen in einem Raum gilt: Alle haben dasselbe Einkommen.

Finden Sie heraus, was an dem folgendem "Induktionsargument" falsch ist:

$A(1)$ ist offensichtlich wahr. Nehmen Sie an, dass $A(k)$ wahr ist für eine natürliche Zahl k. Wir wollen jetzt beweisen, dass dann $A(k+1)$ wahr ist. Nehmen Sie also irgendeine Menge von $k+1$ Personen in einem Raum und schicken Sie einen von ihnen nach draußen. Die verbleibenden k Personen haben nach der Induktionshypothese alle dasselbe Einkommen. Bringen Sie die Person zurück in den Raum und schicken Sie stattdessen eine andere Person nach draußen. Wiederum werden die im Raum verbliebenen Personen dasselbe Einkommen haben. Aber dann werden alle $k+1$ Personen dasselbe Einkommen haben. Durch Induktion ist damit bewiesen, dass alle n Personen dasselbe Einkommen haben.

5. Beweisen Sie die Formeln (1.9.5) und (1.9.6) durch Induktion.

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

Aufgaben zur Wiederholung für Kapitel 2

1. Sei $A=\{1,3,4\}$, $B=\{1,4,6\}$, $C=\{2,4,3\}$ und $D=\{1,5\}$.
Bestimmen Sie $A\cap B$; $A\cup B$; $A\setminus B$; $B\setminus A$; $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$; $A\cup B\cup C\cup D$; $A\cap B\cap C$ und $A\cap B\cap C\cap D$.

2. Die Grundmenge sei $\Omega=\{1,2,3,4,\ldots,11\}$. Definieren Sie $A=\{1,4,6\}$ und $B=\{2,11\}$. Bestimmen Sie $A\cap B$; $A\cup B$; $\Omega\setminus B$; A^c.

3. Eine Fakultät für Geisteswissenschaften hat 1000 Studierende. Die Anzahlen der Studierenden, die die folgenden Sprachen studieren, seien Englisch (E) 780; Französisch (F) 220; und Spanisch (S) 52. Unter diesen sind 110, die Englisch und Französisch, 32, die Englisch und Spanisch, 15, die Französisch und Spanisch studieren. Schließlich sind unter all diesen Zahlen noch 10 Studierende, die alle drei Sprachen studieren.

(a) Wie viele studieren Englisch und Französisch, aber nicht Spanisch?

(b) Wie viele studieren Englisch, aber nicht Französisch?

(c) Wie viele studieren keine Sprachen?

4. Seien x und y reelle Zahlen. Betrachten Sie die folgenden Implikationen und entscheiden Sie in jedem Fall: (i) ob die Implikation wahr ist und (ii) ob die umgekehrte Implikation wahr ist.

(a) $x = 5$ und $y = -3 \Longrightarrow x + y = 2$

(b) $x^2 = 16 \Longrightarrow x = 4$

(c) $(x-3)^2(y+2) > 0 \Longrightarrow y > -2$

(d) $x^3 = 8 \Longrightarrow x = 2$

Anspruchsvollere Aufgabe

5. (a) Zeigen Sie, dass $(1+x)^2 \geq 1 + 2x$ für alle x.

(b) Zeigen Sie, dass $(1+x)^3 \geq 1 + 3x$ für alle $x \geq -3$.

(c) Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle n und alle $x \geq -1$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \textbf{(Bernoullische Ungleichung)}$$

► Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

Gleichungen lösen

3

3.1 Gleichungen lösen 96
3.2 Gleichungen und ihre Parameter 99
3.3 Quadratische Gleichungen 102
3.4 Nichtlineare Gleichungen 107
3.5 Lösung von Gleichungen mit Hilfe von Implikationspfeilen 110
3.6 Zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten 111

ÜBERBLICK

Der wahre Mathematiker ist kein Jongleur von Zahlen,
sondern von Konzepten.

–Ian Stewart (1975)

Praktisch alle Anwendungen der Mathematik verlangen das Lösen von Gleichungen. Die Wirtschaftswissenschaften bilden da keine Ausnahme. Dieses Kapitel behandelt einige Gleichungstypen, die häufig in ökonomischen Modellen auftauchen.

Viele Studierende sind den Umgang mit algebraischen Ausdrücken und Gleichungen gewohnt, bei denen nur eine Variable (gewöhnlich x) auftritt. Oft haben sie zunächst Schwierigkeiten, Ausdrücke mit mehreren Variablen und einer Vielzahl von Namen, die durch verschiedene Buchstaben benannt sind, zu handhaben. Für Wirtschaftswissenschaftler ist es jedoch wichtig, mit solchen algebraischen Ausdrücken und Gleichungen umgehen zu können.

3.1 Gleichungen lösen

Eine Gleichung zu *lösen* bedeutet, alle Werte der Variablen zu finden, für die die Gleichung erfüllt ist. Betrachten Sie das folgende einfache Beispiel

$$3x + 10 = x + 4,$$

das die *Variable* x enthält. Um die Unbekannte x auf einer Seite der Gleichung zu isolieren, addieren wir $-x$ zu beiden Seiten. Dabei erhalten wir: $2x+10 = 4$. Indem wir -10 zu beiden Seiten der Gleichung addieren, folgt $2x = 4 - 10 = -6$. Wir dividieren durch 2 und erhalten die Lösung $x = -3$.

Dieses Verfahren war Ihnen wahrscheinlich schon bekannt. Die Methode wird gleich zusammengefasst, wobei zu bemerken ist, dass zwei Gleichungen, die genau dieselben Lösungen haben *äquivalent* genannt werden.

Äquivalente Gleichungen

Um äquivalente Gleichungen zu erhalten, sind die folgenden Operationen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens erlaubt:

(A) Addition (oder Subtraktion) derselben Zahl

(B) Multiplikation mit derselben (oder Division durch dieselbe) Zahl $\neq 0$

Wenn wir es mit komplizierteren Gleichungen mit Klammern und Brüchen zu tun haben, werden wir gewöhnlich zunächst die Klammern ausmultiplizieren, anschließend multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner aller Brüche.

Beispiel 3.1.1

Lösen Sie die Gleichung $6p - \frac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2)$.

Lösung: Wir multiplizieren zunächst die Klammern aus: $6p - p + \frac{3}{2} = 3 - 3p - \frac{7}{6}p - \frac{7}{3}$. Jetzt multiplizieren wir beide Seiten mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner: $36p - 6p + 9 = 18 - 18p - 7p - 14$. Schließlich sammeln wir Terme gleichen Typs: $55p = -5$. Damit gilt: $p = -5/55 = -1/11$.

Wenn für irgendeinen Wert der Variablen ein Ausdruck in einer Gleichung nicht definiert ist, so wird dieser Wert als nicht zulässig erklärt. Zum Beispiel ist die Wahl des Wertes 5 für die Variable z nicht erlaubt in einer Gleichung, die den Ausdruck

$$\frac{z}{z-5}$$

enthält, weil $5/0$ nicht definiert ist. Wie wir in dem nächsten Beispiel zeigen werden, hat diese Tatsache Konsequenzen für die Existenz einer Lösung einer Gleichung.

Beispiel 3.1.2

Lösen Sie die Gleichung $\dfrac{z}{z-5} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{-5}{5-z}$.

Lösung: Wir sehen, dass z nicht 5 sein darf. Unter dieser Restriktion multiplizieren wir beide Seiten mit $3(z-5)$. Wir erhalten dann $3z + z - 5 = 15$. Diese Gleichung hat die einzige Lösung $z = 5$. Da wir jedoch $z \neq 5$ annehmen mussten, müssen wir schließen, dass die ursprüngliche Gleichung keine Lösung hat.

Das nächste Beispiel zeigt, dass manchmal ein hohes Maß an Sorgfalt nötig ist, um die richtigen Lösungen zu finden.

Beispiel 3.1.3

Lösen Sie die Gleichung $\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{8}{x^2-2x} = \dfrac{2}{x}$.

Lösung: Da $x^2 - 2x = x(x-2)$, ist der gemeinsame Nenner $x(x-2)$: Wir sehen, dass $x = 2$ und $x = 0$ nicht zulässig sind, da dann wenigstens einer der Nenner 0 wird. Wenn $x \neq 0$ und $x \neq 2$, können wir beide Seiten der Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner $x(x-2)$ multiplizieren und erhalten:

$$\frac{x+2}{x-2} \cdot x(x-2) - \frac{8}{x(x-2)} \cdot x(x-2) = \frac{2}{x} \cdot x(x-2)$$

Indem wir gemeinsame Faktoren kürzen, reduziert sich dies zu $(x+2)x - 8 = 2(x-2)$ oder $x^2 + 2x - 8 = 2x - 4$ und somit $x^2 = 4$. Gleichungen der Gestalt $x^2 = a$ mit $a > 0$ haben zwei Lösungen $x = \sqrt{a}$ und $x = -\sqrt{a}$. In unserem Fall hat $x^2 = 4$ die Lösungen $x = 2$ und $x = -2$. Jedoch ist $x = 2$ nicht zulässig für die ursprüngliche Gleichung. Deshalb ist *nur* $x = -2$ *eine Lösung*.

Häufig verlangt die Lösung eines ökonomischen Problems die Formulierung einer geeigneten algebraischen Gleichung.