

wi
wirtschaft



Fred Böker

Formelsammlung für Wirtschaftswissenschaftler

Mathematik und Statistik

PEARSON
Studium

Fred Böker

Formelsammlung für Wirtschaftswissenschaftler

Mathematik und Statistik

PEARSON
Studium

ein Imprint von Pearson Education
München • Boston • San Francisco • Harlow, England
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City
Madrid • Amsterdam

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Die Informationen in diesem Buch werden ohne Rücksicht auf einen eventuellen Patentschutz veröffentlicht.

Warennamen werden ohne Gewährleistung der freien Verwendbarkeit benutzt.

Bei der Zusammenstellung von Texten und Abbildungen wurde mit größter Sorgfalt vorgegangen. Trotzdem können Fehler nicht ausgeschlossen werden.

Verlag, Herausgeber und Autoren können für fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen.

Für Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler sind Verlag und Autor dankbar.

Alle Rechte vorbehalten, auch die der fotomechanischen Wiedergabe und der Speicherung in elektronischen Medien.

Die gewerbliche Nutzung der in diesem Produkt gezeigten Modelle und Arbeiten ist nicht zulässig.

Es konnten nicht alle Rechteinhaber von Abbildungen ermittelt werden. Sollte dem Verlag gegenüber der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar nachträglich gezahlt.

Fast alle Produktbezeichnungen und weitere Stichworte und sonstige Angaben, die in diesem Buch verwendet werden, sind als eingetragene Marken geschützt. Da es nicht möglich ist, in allen Fällen zeitnah zu ermitteln, ob ein Markenschutz besteht, wird das ®-Symbol in diesem Buch nicht verwendet.

Umwelthinweis:

Dieses Produkt wurde auf chlorfrei gebleichtem Papier gedruckt.

Die Einschrumpffolie – zum Schutz vor Verschmutzung – ist aus umweltverträglichem und recyclingfähigem PE-Material.

10 9 8 7 6 5 4 3

11 10 09

ISBN 978-3-8273-7160-7

© 2009 Pearson Studium

ein Imprint der Pearson Education Deutschland GmbH

Martin-Kollar-Straße 10–12, D-81829 München/Germany

Alle Rechte vorbehalten

www.pearson-studium.de

Lektorat: Dennis Brunotte, dbrunotte@pearson.de

Christian Schneider, cschneider@pearson.de

Korrekturat: Barbara Decker, München

Einbandgestaltung: Thomas Arlt, tarlt@adesso21.net

Herstellung: Elisabeth Prümm, epruemm@pearson.de

Satz und Layout mit L^AT_EX: PTP-Berlin Protago-T_EX-Produktion GmbH (www.ptp-berlin.eu)

Druck- und Verarbeitung: Kösel, Krugzell (www.KoeselBuch.de)

Printed in Germany

Inhaltsübersicht

Vorwort	12
Teil I Mathematik	13
Kapitel 1 Algebra	14
Kapitel 2 Gleichungen	25
Kapitel 3 Summen, Produkte, Logik, Mengen, Abbildungen	30
Kapitel 4 Funktionen einer Variablen	47
Kapitel 5 Differentialrechnung	83
Kapitel 6 Univariate Optimierung	103
Kapitel 7 Integration	108
Kapitel 8 Finanzmathematik	123
Kapitel 9 Funktionen mehrerer Variablen	138
Kapitel 10 Multivariate Optimierung	151
Kapitel 11 Matrizen und Vektoralgebra	163
Kapitel 12 Lineare Programmierung	197
Kapitel 13 Differenzengleichungen	203
Kapitel 14 Differentialgleichungen	214
Kapitel 15 Geometrie	237
Teil II Statistik	255
Kapitel 1 Einführung	256
Kapitel 2 Univariate beschreibende Statistik und explorative Darstellungen	258
Kapitel 3 Multivariate beschreibende Statistik und explorative Darstellungen	273

Kapitel 4	Wahrscheinlichkeitsrechnung	282
Kapitel 5	Diskrete Zufallsvariablen	287
Kapitel 6	Stetige Zufallsvariablen	292
Kapitel 7	Mehr über Zufallsvariablen und Verteilungen	296
Kapitel 8	Mehrdimensionale Zufallsvariablen	316
Kapitel 9	Parameterschätzung	325
Kapitel 10	Testen von Hypothesen	334
Kapitel 11	Regressionsanalyse	346
Kapitel 12	Varianzanalyse	356
Kapitel 13	Zeitreihen	361
Kapitel 14	Stochastische Prozesse und Zeitreihenmodelle	366
Tabellenanhang		374
Literatur		386
Register		387

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	12
Teil I Mathematik	13
Kapitel 1 Algebra	14
1.1 Aufbau des Zahlensystems	14
1.2 Ganzzahlige Potenzen	17
1.3 Wichtige Regeln der Algebra	18
1.4 Bruchrechnung	19
1.5 Wurzeln und Potenzen mit gebrochenem Exponenten	19
1.6 Reihenfolge der Rechenoperationen in $\mathbb{R}$	21
1.7 Ungleichungen	22
1.8 Intervalle und Absolutbetrag	23
Kapitel 2 Gleichungen	25
2.1 Lösen einer Gleichung	25
2.2 Lineare Gleichungen	26
2.3 Quadratische Gleichungen	26
2.4 Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten	28
2.5 Nichtlineare Gleichungen	29
Kapitel 3 Summen, Produkte, Logik, Mengen, Abbildungen	30
3.1 Summen	30
3.2 Wichtige Summen und nützliche Formeln für Summen	31
3.3 Doppelsummen	33
3.4 Produkte	34
3.5 Fakultäten und Binomialkoeffizienten	35
3.6 Aussagenlogik	37
3.7 Mathematische Beweise	40
3.8 Mengen	41
3.9 Abbildungen, Relationen	45

Kapitel 4 Funktionen einer Variablen 47

4.1	Grundlegende Definitionen	47
4.2	Graph einer Funktion	48
4.3	Lineare Funktionen	49
4.4	Quadratische Funktionen	52
4.5	Polynome	55
4.6	Potenzfunktionen	58
4.7	Exponentialfunktionen	61
4.8	Logarithmusfunktionen	63
4.9	Trigonometrische Funktionen	65
4.10	Verschiebung von Graphen	75
4.11	Verknüpfung von Funktionen	76
4.12	Inverse Funktion	77
4.13	Graph einer Gleichung	78
4.14	Abstand in der Ebene, Kreise, Ellipsen und andere Kegelschnitte . .	78

Kapitel 5 Differentialrechnung 83

5.1	Steigung von Kurven, Ableitung und Tangenten	83
5.2	Monoton wachsende und fallende Funktionen	84
5.3	Änderungsraten	84
5.4	Grenzwerte	85
5.5	Regeln der Differentiation	86
5.6	Ableitungen höherer Ordnung	88
5.7	Ableitung der Exponentialfunktionen	89
5.8	Ableitung der Logarithmus-Funktionen	89
5.9	Implizites Differenzieren	90
5.10	Differentiation der Inversen	90
5.11	Lineare Approximationen	91
5.12	Polynomiale Approximationen	92
5.13	Elastizitäten	94
5.14	Stetigkeit	95
5.15	Mehr über Grenzwerte	97
5.16	Zwischenwertsatz, Newton-Verfahren, Regula falsi	100
5.17	Unendliche Folgen	101
5.18	Unbestimmte Formen und Regeln von L'Hôpital	101

Kapitel 6 Univariate Optimierung 103

6.1	Globale Extrempunkte	103
6.2	Extremwertsatz	104
6.3	Lokale Extrempunkte	105
6.4	Wendepunkte	106

Kapitel 7	Integration	108
7.1	Unbestimmte Integrale	108
7.2	Flächen und bestimmte Integrale	112
7.3	Integrationsmethoden	117
7.4	Multiple Integrale	119
7.5	Differentialgleichungen	122
Kapitel 8	Finanzmathematik	123
8.1	Zinsperioden und effektive Raten	123
8.2	Geometrische Reihen	130
8.3	Gesamtbarwert	131
8.4	Hypothekenrückzahlungen	133
8.5	Investitionsprojekte	135
8.6	Kapitalaufbau bzw. -abbau	136
8.7	Renten mit veränderlichen Raten	136
Kapitel 9	Funktionen mehrerer Variablen	138
9.1	Funktionen von zwei Variablen, Ableitungen, Darstellungen	138
9.2	Flächen und Abstand	140
9.3	Funktionen von mehreren Variablen, Ableitungen	141
9.4	Partielle Elastizitäten	143
9.5	Kettenregel	144
9.6	Implizites Differenzieren	145
9.7	Substitutionselastizität	145
9.8	Homogene und homothetische Funktionen	146
9.9	Lineare Approximation und Differentiale	149
9.10	Gleichungssysteme	150
Kapitel 10	Multivariate Optimierung	151
10.1	Zwei Variablen	151
10.2	Mehr Variablen	154
10.3	Komparative Statik und das Envelope-Theorem	156
10.4	Optimierung unter Nebenbedingungen	156
10.5	Komparative Statik	160
10.6	Nichtlineare Programmierung	161
Kapitel 11	Matrizen und Vektoralgebra	163
11.1	Systeme linearer Gleichungen	163
11.2	Matrizen und Matrizenoperationen	163
11.3	Matrizenmultiplikation	164

11.4	Die transponierte Matrix	167
11.5	Gauß'sche Elimination	168
11.6	Vektoren	170
11.7	Geraden und Ebenen	174
11.8	Determinanten	176
11.9	Die Inverse einer Matrix	181
11.10	Cramer'sche Regel	183
11.11	Das Leontief-Modell	184
11.12	Partitionierte Matrizen	184
11.13	Lineare Unabhängigkeit	187
11.14	Spur einer Matrix	190
11.15	Eigenwerte und Eigenvektoren	191
11.16	Quadratische Formen	194

Kapitel 12 Lineare Programmierung 197

12.1	Das allgemeine lineare Programmierungsproblem	197
12.2	Dualitätstheorie	198
12.3	Simplexverfahren	200

Kapitel 13 Differenzengleichungen 203

13.1	Differenzengleichungen erster Ordnung	203
13.2	Differenzengleichungen zweiter Ordnung	206
13.3	Gleichungen höherer Ordnung	209
13.4	Systeme von Differenzengleichungen	211
13.5	Stabilität nichtlinearer Differenzengleichungen	213

Kapitel 14 Differentialgleichungen 214

14.1	Differentialgleichungen erster Ordnung in einer Variablen	214
14.2	Differentialgleichungen zweiter Ordnung	218
14.3	Differentialgleichungen höherer Ordnung	226

Kapitel 15 Geometrie 237

15.1	Dreiecke	237
15.2	Vierecke	243
15.3	Vielecke	247
15.4	Kreise	248
15.5	Körper	251

Teil II	Statistik	255
Kapitel 1	Einführung	256
1.1	Statistische Einheiten, Merkmale, Gesamtheiten	256
1.2	Merkmalstypen	256
1.3	Stichproben	257
Kapitel 2	Univariate beschreibende Statistik und explorative Darstellungen	258
2.1	Verteilungen und ihre Darstellungen	258
2.2	Beschreibung von Verteilungen	261
2.3	Dichtefunktionen und Normalverteilung	270
2.4	Kerndichteschätzer	271
Kapitel 3	Multivariate beschreibende Statistik und explorative Darstellungen	273
3.1	Zwei diskrete Merkmale, Kontingenztafeln	273
3.2	Graphische Darstellung quantitativer Merkmale	275
3.3	Zusammenfassende Kennzahlen	276
3.4	Regression	279
Kapitel 4	Wahrscheinlichkeitsrechnung	282
4.1	Wahrscheinlichkeiten	282
4.2	Zufallsstichproben und Kombinatorik	284
4.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	284
4.4	Unabhängigkeit von Ereignissen	285
4.5	Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes	286
Kapitel 5	Diskrete Zufallsvariablen	287
5.1	Grundlegende Definitionen	287
5.2	Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen	288
5.3	Unabhängigkeit von diskreten Zufallsvariablen	288
5.4	Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen	289
5.5	Weitere Lageparameter	290
5.6	Varianz und Standardabweichung	290

Kapitel 6	Stetige Zufallsvariablen	292
6.1	Stetige Zufallsvariablen und Dichten	292
6.2	Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen	292
6.3	Unabhängigkeit von stetigen Zufallsvariablen	293
6.4	Erwartungswert, Varianz und andere Kennzahl	293
Kapitel 7	Mehr über Zufallsvariablen und Verteilungen	296
7.1	Ergänzungen zu Zufallsvariablen und ihren Verteilungen	296
7.2	Spezielle diskrete Verteilungsmodelle	300
7.3	Spezielle stetige Verteilungsmodelle	304
7.4	Grenzwertsätze	311
7.5	Approximation von Verteilungen	314
Kapitel 8	Mehrdimensionale Zufallsvariablen	316
8.1	Zweidimensionale diskrete Zufallsvariablen	316
8.2	Zweidimensionale stetige Zufallsvariablen	318
8.3	Erwartungswerte, Kovarianz und Korrelation	319
8.4	Verteilung von n Zufallsvariablen	321
Kapitel 9	Parameterschätzung	325
9.1	Punktschätzung	325
9.2	Eigenschaften von Schätzstatistiken	326
9.3	Konstruktion von Schätzfunktionen	329
9.4	Intervallschätzung	332
Kapitel 10	Testen von Hypothesen	334
10.1	Prinzipien des Testens	334
10.2	Spezielle Testprobleme für den Ein-Stichprobenfall	336
10.3	Vergleiche aus unabhängigen Stichproben	340
10.4	Verbundene Stichproben	343
10.5	Zusammenhangsanalyse	344
Kapitel 11	Regressionsanalyse	346
11.1	Lineare Einfachregression	346
11.2	Multiple lineare Regression	351
11.3	Binäre Regression	355

Kapitel 12 Varianzanalyse	356
12.1 Einfaktorielle Varianzanalyse	356
12.2 Zweifaktorielle Varianzanalyse mit festen Effekten	357
Kapitel 13 Zeitreihen	361
13.1 Indizes	361
13.2 Komponentenmodelle	362
13.3 Globale Regressionsansätze	363
13.4 Lokale Ansätze	364
13.5 Exponentielles Glätten	365
Kapitel 14 Stochastische Prozesse und Zeitreihenmodelle	366
14.1 Grundlegende Definitionen	366
14.2 Moving-Average-Prozesse	368
14.3 Autoregressive Prozesse	369
14.4 Prognosen mit AR-Modellen	372
14.5 ARMA- und ARIMA-Modelle	372
Tabellenanhang	374
Literatur	386
Register	387

Vorwort

„Eine mathematische Formelsammlung hilft auch nicht, wenn man nichts von Mathematik versteht.“ Dies war der Kommentar, den ich zu hören bekam, als ich zum ersten Mal meinen Gedanken äußerte, das Angebot des Verlages Pearson Studium anzunehmen, eine mathematische Formelsammlung für Wirtschaftswissenschaftler zu schreiben. Ich habe mich nicht entmutigen lassen. Denn ich pflege bei Diskussionen um schwierige Formeln, „die man sich ja auf keinen Fall im Kopf merken kann“, zu antworten: „Man muss die nicht im Kopf haben, man muss wissen, wo die stehen.“ Und hier stehen jetzt eine ganze Reihe einfacher, schwieriger und schwerster Formeln gebündelt in einem Buch zusammen. Natürlich sollte jeder Anwender wissen (und insofern ist die obige Kritik berechtigt), was er berechnet und wie die Ergebnisse zu interpretieren sind. Diese Formelsammlung ersetzt also kein Lehrbuch und keine Vorlesung der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Das nötige Verständnis für Mathematik kann nur dort und durch ständiges Training, d.h. Rechnen von Übungsaufgaben erworben werden.

Natürlich haben einige Lehrbücher der Mathematik und Statistik für Wirtschaftswissenschaftler als Vorlage gedient zum Zusammentragen dieser Formelsammlung und z.T. sind auch die Notationen und Formulierungen aus diesen Büchern in die vorliegende Formelsammlung eingeflossen. Zu nennen sind hier *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* von Knut Sydsæter und Peter Hammond, sowie *Statistik* von Fahrmeir, Künstler, Pigeot und Tutz. Im zweiten, dritten und vierten Durchlauf wurden dann weitere bekannte Lehrbücher der Mathematik und Statistik herangezogen, bis die Zahl der noch nicht aufgenommenen Formeln gegen Null konvergierte. Einige dieser Lehrbücher finden Sie im Literaturverzeichnis.

Ich wünsche, dass dieses Buch für viele Studierende während des Studiums und auch danach als Nachschlagewerk eine *Hilfe* sein möge.

Es bleibt mir nur noch zu danken, den Lektoren des Verlages Pearson Studium, Dennis Brunotte und Christian Schneider, dass Sie das Vertrauen hatten, mich mit dieser Aufgabe zu betrauen, dass Sie mich fortwährend (zwar manchmal mit sanftem nötigen) Druck unterstützt und ermutigt haben. Ich danke beiden für die angenehme Zusammenarbeit. Ich danke Herrn Oleg Nenadic, der die Tabelle zum Wilcoxon-Rangsummen-Test erstellt hat.

Fred Böker

TEIL I

Mathematik

1	Algebra	14
2	Gleichungen	25
3	Summen, Produkte, Logik, Mengen, Abbildungen	30
4	Funktionen einer Variablen	47
5	Differentialrechnung	83
6	Univariate Optimierung	103
7	Integration	108
8	Finanzmathematik	123
9	Funktionen mehrerer Variablen	138
10	Multivariate Optimierung	151
11	Matrizen und Vektoralgebra	163
12	Lineare Programmierung	197
13	Differenzengleichungen	203
14	Differentialgleichungen	214
15	Geometrie	237

Kapitel 1

Algebra

1

1.1 Aufbau des Zahlensystems

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen oder **positiven ganzen Zahlen** mit den Teilmengen:

$$\{2, 4, 6, 8, \dots\} \quad (\text{Gerade Zahlen}) \qquad \{1, 3, 5, 7, \dots\} \quad (\text{Ungerade Zahlen})$$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ist die Menge der **nichtnegativen ganzen Zahlen**.

Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen bestehend aus:

$\{1, 2, 3, \dots\}$ (**positive ganze Zahlen**),

$\{-1, -2, -3, \dots\}$ (**negative ganze Zahlen**)

und 0 (**Null**)

Rationale Zahlen

$\mathbb{Q} = \{a/b, \text{ wobei } a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } b \neq 0\}$ Menge der rationalen Zahlen

Äquivalente Definition: $\mathbb{Q} = \{a/b, \text{ wobei } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$

Dezimaldarstellung

Mit den Ziffern $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ gelten die folgenden Dezimaldarstellungen für

■ Natürliche Zahlen: $x = \sum_{i=0}^k c_i 10^i \quad k \in \mathbb{N}_0, c_k \neq 0$

■ Ganze Zahlen: $x = \pm \sum_{i=0}^k c_i 10^i \quad k \in \mathbb{N}_0$

- Rationale Zahlen: $x = \sum_{i=-\infty}^k c_i 10^i \quad k \in \mathbb{Z}, c_k \neq 0$, wobei die Anzahl der Summanden (Dezimalstellen) entweder endlich ist (**endlicher Dezimalbruch**) oder sich eine endliche Folge von Ziffern unendlich oft wiederholt (**periodischer Dezimalbruch**).

Reelle Zahlen

$\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen, d.h. aller endlichen oder unendlichen Dezimalbrüche

$$x = m.c_1c_2c_3 \dots$$

mit $m \in \mathbb{Z}$ und $c_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $n = 1, 2, \dots$ mit den Teilmengen:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \quad (\text{nichtnegative Zahlen})$$

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \quad (\text{Zahlen ungleich Null})$$

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}_+ : x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad (\text{Zahlen größer als Null})$$

Alle Dezimalbrüche, die nicht endlich oder periodisch, d.h. nicht rational sind, bilden die Menge der **irrationalen Zahlen**.

Komplexe Zahlen

Grundlegende Definitionen

$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der **komplexen Zahlen**, wobei $i = \sqrt{-1}$ die **imaginäre Einheit** ($i^2 = -1$), a der Realteil und b der Imaginärteil ist.

Die zu $z = a + bi$ **konjugiert komplexe** Zahl ist definiert durch $\bar{z} = a - bi$.

Zwei komplexe Zahlen $z = a + bi$ und $w = c + di$ sind genau dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$.

Der **Absolutbetrag** einer komplexen Zahl $z = a + bi$ ist definiert durch:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Rechenregeln für komplexe Zahlen

Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ und $w = c + di \in \mathbb{C}$ gilt:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

Addition

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

Subtraktion

$$\lambda z = \lambda a + \lambda bi$$

Multiplikation mit einer reellen Zahl

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Multiplikation

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i, \text{ falls } c^2 + d^2 > 0$$

Division

Für das Rechnen mit Beträgen komplexer Zahlen gilt:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0) \quad |\bar{z}| = |z|$$

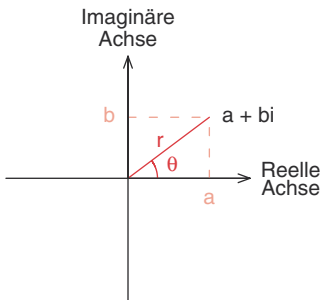


Abbildung 1.1. Polarkoordinaten

Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten

Nach Abb. 1.1 ist $z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$, wobei θ (das **Argument** der komplexen Zahl) der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Vektor von $(0, 0)$ nach (a, b) ist*. Es gilt:

$$a = r \cos \theta \quad b = r \sin \theta \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Für $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ und $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ gilt:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist die komplexe Zahl, deren Betrag das Produkt der Beträge und deren Argument die Summe der Argumente ist. Der Quotient zweier komplexer Zahlen ist die komplexe Zahl, deren Betrag der Quotient der Beträge ist und deren Argument die Differenz der Argumente ist.

* Jeder Punkt (a, b) in der Ebene kann auch durch seine Polarkoordinaten (r, θ) dargestellt werden.

Nach der **Formel von De Moivre**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ist $n\theta$ das Argument der n -ten Potenz einer komplexen Zahl mit Argument θ .

1

1.2 Ganzzahlige Potenzen

Definition der n -ten Potenz

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ Faktoren}$$

die n -te Potenz von a mit der **Basis** a und dem **Exponenten** n .

$$a^0 = 1 \quad \text{für } a \neq 0 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \text{für } a \neq 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

0^0 ist nicht definiert, jedoch wird es gelegentlich auch als 1 definiert!

Rechenregeln für Potenzen

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ und $r, s \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a^r a^s = a^{r+s} \quad (a^r)^s = a^{rs} = (a^s)^r \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} = \frac{1}{a^{s-r}} \quad (ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r b^{-r}$$

$$(abcd)^r = a^r b^r c^r d^r \quad a^n a^{-n} = a^0 = 1$$

Speziell für **Zehnerpotenzen** gilt: $10^0 = 1$ $10^n = 1 \underbrace{00 \dots 0}_n \text{ Nullen}$

$$10^{-n} = \underbrace{0.00 \dots 01}_n \text{ Nullen} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Achtung: $(a + b)^r \neq a^r + b^r$ im Allgemeinen.

1.3 Wichtige Regeln der Algebra

Grundlegende Gesetze

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a + b = b + a$$

Kommutativgesetz der Addition

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

Assoziativgesetz der Addition

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Null ist neutrales Element der Addition

$$a + (-a) = 0$$

$-a$ ist invers zu a bezüglich Addition

$$ab = ba$$

Kommutativgesetz der Multiplikation

$$(ab)c = a(bc) = abc$$

Assoziativgesetz der Multiplikation

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

1 ist neutrales Element der Multiplikation

$$aa^{-1} = a^{-1}a = \frac{a}{a} = 1 \text{ für } a \neq 0$$

a^{-1} ist invers zu a bezüglich Multiplikation

$$-a = (-1) \cdot a = a \cdot (-1) \quad -(-a) = a$$

Rechnen mit Minuszeichen

$$(-a)b = a(-b) = -(ab) = -ab \quad (-a)(-b) = ab$$

Rechnen mit Minuszeichen

$$a(b + c) = ab + ac$$

Distributivgesetz oder Ausklammern

$$(a + b)c = ac + bc$$

Distributivgesetz

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Multiplikation mit Null

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ oder } b = 0$$

Produkt Null, wenn ein Faktor Null

$$a \neq 0 \implies \frac{0}{a} = 0$$

Division der Null

$$\frac{a}{0} \text{ nicht definiert}$$

Division durch Null nicht erlaubt

$$\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0 \text{ und } b \neq 0$$

Quotient Null, wenn Zähler Null

Folgerungen

$a(b - c) = ab - ac$ $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$, d.h. jedes Glied der einen Klammer ist mit jedem Glied der anderen Klammer zu multiplizieren.

$-(a + b - c + d) = -a - b + c - d$, d.h. alle Vorzeichen sind zu ändern.

Quadratische Identitäten oder binomische Formeln

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

1.4 Bruchrechnung

Definition eines Bruches

$\frac{a}{b} = a/b$ $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ ist ein Bruch mit dem **Zähler** a und dem **Nenner** b .

1

Rechenregeln für Brüche

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt, wenn alle Nenner $\neq 0$ sind:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad (c \neq 0)$$

Erweitern eines Bruches

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

Kürzen eines Bruches

$$\frac{-a}{-b} = \frac{(-1)a}{(-1)b} = \frac{a}{b}$$

Vorzeichenregel

$$-\frac{a}{b} = (-1)\frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{(-1)(-a)}{-b}$$

Vorzeichenregel

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Addition von Brüchen mit gleichem Nenner

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Subtraktion von Brüchen mit gleichem Nenner

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Addition von beliebigen Brüchen

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

Subtraktion von beliebigen Brüchen

$$a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$$

Addition/Subtraktion eines Bruches zu einer Zahl

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$$

Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Multiplikation zweier Brüche

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Division zweier Brüche = Multiplikation mit dem Kehrwert

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = (a/b)/c = a/(bc) = \frac{a}{bc}$$

Division eines Bruches durch eine Zahl

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a/(c/d) = a \cdot d/c = ad/c = \frac{ad}{c}$$

Division einer Zahl durch einen Bruch

1.5 Wurzeln und Potenzen mit gebrochenem Exponenten

Definition der Quadratwurzel

Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $\sqrt{a} \geq 0$, die Quadratwurzel von a , definiert durch $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$, d.h. $b = \sqrt{a} \iff b \geq 0$ und $b^2 = a$.

Ferner wird definiert $a^{1/2} = \sqrt{a}$, wobei $\sqrt{a}$ die eindeutige nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Rechenregeln für Quadratwurzeln

Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \quad (b > 0)$$

Achtung: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Achtung: $x^2 = a \iff x = \pm\sqrt{a}$, aber $\sqrt{a^2} = |a| \geq 0$

Definition der n -ten Wurzel

Für $a > 0, n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt[n]{a}$, die n -te Wurzel von a , definiert als die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^n = a$, d.h. $b = \sqrt[n]{a} \iff b^n = a$.

Ferner wird definiert: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

Rechenregeln für n -te Wurzeln

Für $n, m \in \mathbb{N}$ und $a, b > 0$ gilt:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = a^{1/(m \cdot n)}$$

Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Für $a > 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ ist:

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (\sqrt[q]{a})^p$$

Rechenregeln für Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Für $a > 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (\sqrt[q]{a})^p = (a^p)^{1/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Rechenregeln für Wurzeln aus Potenzen mit rationalem Exponenten

Für $a, b > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^r} \cdot \sqrt[m]{a^s} &= \sqrt[nm]{a^{rm+sn}} & \frac{\sqrt[n]{a^r}}{\sqrt[m]{a^s}} &= \sqrt[nm]{a^{rm-sn}} & \sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a^r}\right)^s} &= \sqrt[nm]{a^{rs}} \\ \sqrt[n]{a^r} \cdot \sqrt[n]{b^r} &= \sqrt[n]{(ab)^r} & \frac{\sqrt[n]{a^r}}{\sqrt[n]{b^r}} &= \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^r} \end{aligned}$$

1

Potenzen mit reellen Exponenten können als Grenzwerte von Potenzen mit rationalen Exponenten erklärt werden.

Rechenregeln für Potenzen mit reellen Exponenten

Für $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^r a^s &= a^{r+s} & (a^r)^s &= a^{rs} = (a^s)^r & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} = \frac{1}{a^{s-r}} & (ab)^r &= a^r b^r \\ \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} = a^r b^{-r} & ab^r &= a(b^r) & -a^r &= -(a^r) & a^{b^r} &= a^{(b^r)} = (a^{b^r})^r \\ a^r = a^s &\iff (r = s \text{ oder } a = 1) & a^r = b^r &\iff (a = b \text{ oder } r = 0) & a^r &> 0 \end{aligned}$$

1.6 Reihenfolge der Rechenoperationen in $\mathbb{R}$

- 1) Klammern werden stets zuerst berechnet.
- 2) Danach werden alle Potenzen berechnet, bei fehlenden Klammern von *oben nach unten*.
- 3) Danach werden alle Punktoperationen (Multiplikation; Division) durchgeführt, bei fehlenden Klammern von links nach rechts.
- 4) Danach werden alle Strichoperationen (Addition, Subtraktion) durchgeführt, bei fehlenden Klammern von links nach rechts.

Klammern vor Potenz vor Punkt vor Strich.

1.7 Ungleichungen

1

Definition einer Größenrelation

Ist $a \in \mathbb{R}$ positiv, so schreiben wir $a > 0$, d.h. $a > 0 \iff a \in \mathbb{R}_+$ und $a \neq 0$.

Ist $a \in \mathbb{R}$ negativ, so schreiben wir $a < 0$, d.h. $a < 0 \iff a \notin \mathbb{R}_+$.

a ist größer als b (in Zeichen: $a > b$) oder b ist kleiner als a (in Zeichen: $b < a$) genau dann, wenn $a - b > 0$.

a ist größer oder gleich b (in Zeichen: $a \geq b$) oder b ist kleiner oder gleich a (in Zeichen: $b \leq a$) genau dann, wenn $a > b$ oder $a = b \iff a - b \geq 0$. In allen Fällen spricht man von Ungleichungen.

Rechenregeln für Ungleichungen

Für $a, b, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$a > 0$ und $b > 0 \implies a + b > 0$	$a \geq 0$ und $b > 0 \implies a + b > 0$
$a > 0$ und $b > 0 \implies a \cdot b > 0$	$a \geq 0$ und $b > 0 \implies a \cdot b \geq 0$
$a > 0$ und $b < 0 \implies a \cdot b < 0$	$a \geq 0$ und $b < 0 \implies a \cdot b \leq 0$
$a > b \iff a + c > b + c \quad \forall c$	$a \geq b \iff a + c \geq b + c \quad \forall c$
$a > b \iff a - c > b - c \quad \forall c$	$a \geq b \iff a - c \geq b - c \quad \forall c$
$a > b$ und $b > c \implies a > c$	$a \geq b$ und $b \geq c \implies a \geq c$
$a > b$ und $c > 0 \iff ac > bc$	$a \geq b$ und $c \geq 0 \iff ac \geq bc$
$a > b$ und $c > 0 \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	$a \geq b$ und $c > 0 \iff \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$
$a > b$ und $c < 0 \iff ac < bc$	$a \geq b$ und $c \leq 0 \iff ac \leq bc$
$a > b$ und $c < 0 \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$	$a \geq b$ und $c < 0 \iff \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$
$a > b$ und $c > d \implies a + c > b + d$	$a \geq b$ und $c \geq d \implies a + c \geq b + d$
$a > b$ und $c > d \implies ac > bd$	$a \geq b$ und $c \geq d \implies ac \geq bd$
$0 < a < b \iff a^n < b^n$	$0 < a \leq b \iff a^n \leq b^n$
$0 < a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	$0 < a \leq b \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$
$0 < a < b \iff a^{-n} = \frac{1}{a^n} > \frac{1}{b^n} = b^{-n}$	$0 < a \leq b \iff a^{-n} = \frac{1}{a^n} \geq \frac{1}{b^n} = b^{-n}$
$a < b < 0 \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	$a \leq b < 0 \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$
$ab > 0 \iff (a > 0 \text{ und } b > 0) \text{ oder } (a < 0 \text{ und } b < 0)$	
$\frac{a}{b} > 0 \iff (a > 0 \text{ und } b > 0) \text{ oder } (a < 0 \text{ und } b < 0)$	
$ab < 0 \iff (a < 0 \text{ und } b > 0) \text{ oder } (a > 0 \text{ und } b < 0)$	
$\frac{a}{b} < 0 \iff (a < 0 \text{ und } b > 0) \text{ oder } (a > 0 \text{ und } b < 0)$	
$0 < a < b \iff \log_c a < \log_c b \quad (c > 1)$	$0 < a \leq b \iff \log_c a \leq \log_c b \quad (c > 1)$
$a < b \iff c^a < c^b \quad (c > 1)$	$a \leq b \iff c^a \leq c^b \quad (c > 1)$
$a < b \iff c^{-a} = \frac{1}{c^a} > \frac{1}{c^b} = c^{-b} \quad (c > 1)$	$a \leq b \iff c^{-a} = \frac{1}{c^a} \geq \frac{1}{c^b} = c^{-b} \quad (c > 1)$

Doppelungleichung

Wir schreiben $a \leq z < b \iff a \leq z$ und $z < b$ und sprechen von einer Doppelungleichung. Ebenso: $a \leq z \leq b \iff a \leq z$ und $z \leq b$.

Achtung: Nicht zulässig: $a \leq z > b$, d.h. erlaubt sind nur Ungleichungen in gleicher Richtung!

1

1.8 Intervalle und Absolutbetrag

Beschränkte Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist

- $(a, b) = \{x: a < x < b\}$ das **offene** Intervall von a bis b
- $[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$ das **abgeschlossene** Intervall von a bis b
- $(a, b] = \{x: a < x \leq b\}$ das **halboffene** (links offene, rechts abgeschlossene) Intervall von a bis b
- $[a, b) = \{x: a \leq x < b\}$ das **halboffene** (rechts abgeschlossene, links offene) Intervall von a bis b

Die **Länge** aller Intervalle ist $b - a$. Anstelle (a, b) schreibt man auch $]a, b[$.

Das Symbol ∞

Wir benutzen das Symbol ∞ für **Unendlich**. Für jede reelle Zahl x ist $-\infty < x < \infty$.

Achtung: ∞ ist ein Symbol, keine Zahl.

Unbeschränkte Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist:

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < \infty\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < \infty\} = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < b\} = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty), \quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \quad \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$$

Absolutbetrag

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Betrag oder Absolutbetrag von x definiert durch:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

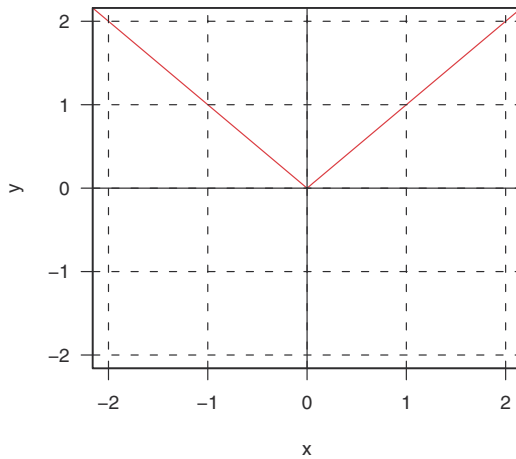


Abbildung 1.2. Graph der Funktion $f(x) = |x|$

Rechenregeln für Absolutbeträge

Für $a \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} |x| \geq 0 \quad |x| = a &\iff x = a \text{ oder } x = -a & |x| &= |-x| \\ |x| = 0 &\iff x = 0 & |x \cdot y| &= |x| \cdot |y| & \left| \frac{x}{y} \right| &= \frac{|x|}{|y|} & |x - y| &= |y - x| \end{aligned}$$

Dreiecksungleichungen:

$$\begin{aligned} |x + y| &\leq |x| + |y| & (\text{Gleichheit bei gleichen Vorzeichen von } x \text{ und } y) \\ ||x| - |y|| &\leq |x + y| & (\text{Gleichheit bei entgegengesetzten Vorzeichen von } x \text{ und } y) \end{aligned}$$

Abstand zwischen zwei Zahlen

Der Abstand zwischen zwei Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ist definiert durch:

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

Rechenregeln für Abstände

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x|$ der Abstand zwischen x und Null auf der Zahlengeraden.

Für $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, d.h. $a > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} |x| < a &\iff -a < x < a &\iff x \in (-a, a) \\ |x| \leq a &\iff -a \leq x \leq a &\iff x \in [-a, a] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x - c| < a &\iff -a < x - c < a &\iff c - a < x < c + a &\iff x \in (c - a, c + a) \\ |x - c| \leq a &\iff -a \leq x - c \leq a &\iff c - a \leq x \leq c + a &\iff x \in [c - a, c + a] \end{aligned}$$

Kapitel 2

Gleichungen

2

2.1 Lösen einer Gleichung

Allgemeine Definitionen im Zusammenhang mit Gleichungen und deren Lösung

Eine **Gleichung** ist die Verbindung zweier algebraischer Ausdrücke a und b durch ein Gleichheitszeichen: $a = b$, wobei in a und (oder) b im Allgemeinen Variablen auftreten. Zulässige Werte der Variablen sind diejenigen Werte, für die die algebraischen Ausdrücke definiert sind. **Lösungsmenge** L einer Gleichung ist die Menge aller Werte der Variablen in der Gleichung, die die Gleichung erfüllen. Unter dem **Lösen einer Gleichung** verstehen wir die Bestimmung der Lösungsmenge. **Erlaubte Umformungen** oder **Äquivalenzumformungen** einer Gleichung sind Umformungen der ursprünglichen Gleichung in eine neue äquivalente Gleichung mit derselben Lösungsmenge. **Definitionsmenge** D_G der Gleichung ist die Menge aller Elemente der Grundmenge, bei deren Einsetzen anstelle der Variablen die Gleichung in eine (wahre oder falsche) Aussage übergeht.

Die Gleichung ist **nicht lösbar**, wenn $L = \emptyset$, **lösbar**, wenn $L \neq \emptyset$, **allgemeingültig**, wenn sie für alle Werte aus der Definitionsmenge D_G der Gleichung erfüllt ist.

Erlaubte Umformungen einer Gleichung

Es sei D_G die Definitionsmenge einer Gleichung und $c \in \mathbb{R}$ oder ein auf D_G definierter algebraischer Ausdruck. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll}
 a = b \iff a + c = b + c & a = b \iff a - c = b - c & \\
 a = b \iff ac = bc & a = b \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{c} & c \neq 0 \\
 a = b \iff \frac{1}{a} = \frac{1}{b} & a = b \iff \frac{c}{a} = \frac{c}{b} & a, b, c \neq 0 \\
 a = b \iff d^a = d^b & a = b \iff \exp(a) = \exp(b) & d \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \\
 a = b \iff \log_d a = \log_d b & a = b \iff \ln a = \ln b & d \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \\
 a = b \iff a^n = b^n & a = b \iff \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} & n \in \mathbb{N}, n \text{ ungerade} \\
 a = b \iff a^c = b^c & & c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a, b > 0 \\
 a^n = b^n \iff a = b \text{ oder } a = -b & & n \in \mathbb{N}, n \text{ gerade} \\
 \text{Wenn } a = a^* \text{ und } b = b^* \text{ allgemeingültig sind, so gilt } a = b \iff a^* = b^*. & & \\
 a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0 & a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 0 \iff a_1 = 0 \vee a_2 = 0 \vee \dots \vee a_n = 0 &
 \end{array}$$

2.2 Lineare Gleichungen

Definition

Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine lineare Gleichung gegeben durch:

$$ax + b = 0$$

Lösung der linearen Gleichung

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \neq 0: \quad ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}$$

$$a = 0, b = 0: \quad ax + b = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$a = 0, b \neq 0: \quad ax + b = 0 \text{ ist nicht lösbar.}$$

$$a \neq c: \quad ax + b = cx + d \iff (a - c)x = d - b \iff x = \frac{d - b}{a - c}$$

2.3 Quadratische Gleichungen

Definition

Für $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ist

$$ax^2 + bx + c = 0$$

die **allgemeine Form** der quadratischen Gleichung, während

$$x^2 + px + q = 0$$

die **Normalform** der quadratischen Gleichung ist.

Überführen der allgemeinen Form in Normalform

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \text{ d.h. } p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$$

Lösungen der quadratischen Gleichung

Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ ist genau dann für $x \in \mathbb{R}$ lösbar, wenn $b^2 - 4ac \geq 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es gilt: $x_1 = x_2 \iff b^2 - 4ac = 0$. Für $b^2 - 4ac < 0$ gibt es keine Lösung in $\mathbb{R}$. Dabei heißt $D = b^2 - 4ac$ die **Diskriminante**.

Die Normalform der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist genau dann für $x \in \mathbb{R}$ lösbar, wenn $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Es gilt: $x_1 = x_2 \iff \frac{p^2}{4} - q = 0$. Für $\frac{p^2}{4} - q < 0$ gibt es keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Zwei Spezialfälle:

Für $c = 0$ gilt: $ax^2 + bx = 0 \iff x = 0$ oder $x = -\frac{b}{a}$

Für $b = 0$ gilt: $ax^2 + c = 0 \iff x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, falls $\frac{c}{a} \leq 0$, andernfalls gibt es keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Eigenschaften der Lösungen

Es seien x_1, x_2 Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$ bzw. $x^2 + px + q = 0$. Dann gilt:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

Methode der quadratischen Ergänzung

$$x^2 + 2bx = c \iff x^2 + 2bx + b^2 = c + b^2 \iff (x + b)^2 = c + b^2$$

$$x^2 + bx = c \iff x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4} \iff \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$$

b^2 bzw. $\frac{b^2}{4}$ ist die quadratische Ergänzung zu $x^2 + 2bx$ bzw. $x^2 + bx$.

2.4 Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Definition

Für $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, $a, b, d, e \neq 0$ ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Ungleichungen und zwei Unbekannten gegeben durch:

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

Erlaubte Umformungen oder Äquivalenzumformungen

Eine Gleichung darf mit einer Zahl $k \neq 0$ multipliziert werden.

Zu einer Gleichung darf ein beliebiges Vielfaches der anderen Gleichung addiert werden.

Allgemeine Lösungsmethoden

Einsetzungs- oder Substitutionsmethode: Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen ergibt z.B. $y = f(x)$, Einsetzen in die andere Gleichung ergibt Gleichung mit einer Variablen, hier mit x . Auflösen nach dieser Variablen ergibt Lösung für x , Einsetzen in $y = f(x)$ ergibt Lösung für y .

Gleichsetzungsverfahren: Beide Gleichungen werden nach derselben Variablen aufgelöst und die Ausdrücke werden gleichgesetzt. Dies ergibt eine Gleichung mit einer (der anderen) Variablen. Auflösen nach dieser Variablen ergibt Lösung für diese, Einsetzen in einen der beiden Ausdrücke für die andere Variable ergibt Lösung für diese.

Eliminationsmethode: Addition oder Subtraktion eines geeigneten Vielfachen einer Gleichung zur anderen führt zu einer Gleichung mit einer Variablen und ergibt eine Lösung für diese Variable. Einsetzen dieser Lösung in eine der Originalgleichungen führt zur Lösung für die andere Variable.

Lösungsformel

Falls $ae - bd \neq 0$, gilt:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

2.5 Nichtlineare Gleichungen

Lösungshinweise

Ein Produkt von zwei oder mehr Faktoren ist genau dann gleich Null, wenn wenigstens einer der Faktoren Null ist:

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ oder } b = 0$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 0 \iff a_1 = 0 \text{ oder } a_2 = 0 \text{ oder } \dots \text{ oder } a_n = 0$$

$$ab = ac \iff a = 0 \text{ oder } b = c$$

Eine **Bruchgleichung** ist eine Gleichung, in der die gesuchte Variable mindestens einmal im Nenner auftaucht. Man multipliziere die Gleichung mit dem Hauptnenner.

Eine **Wurzelgleichung** ist eine Gleichung, in der die gesuchte Variable mindestens einmal im Radikanden einer Wurzel auftaucht. Man versuche die Wurzel zu isolieren, d.h. allein auf eine Seite zu bringen, und wende dann die entsprechende Umkehroperation an (z.B. n -te Potenz bei n -ter Wurzel). Eine Probe ist unerlässlich!

Eine **Exponentialgleichung** ist eine Gleichung, in der die gesuchte Variable mindestens einmal im Exponenten einer Potenz oder einer Wurzel auftaucht. Tritt die Variable nur im Exponenten auf, isoliere man diesen Ausdruck und wende die entsprechende Umkehroperation an, d.h. Logarithmieren oder Potenzieren, wobei die Gesetze des Logarithmierens anzuwenden sind. Es ist eine Probe erforderlich!

$$a^x = b \iff x \ln a = \ln b \iff x = \frac{\ln b}{\ln a} \iff x = \log_a b \quad (a, b > 0, \ a \neq 1)$$

Eine **Logarithmengleichung** ist eine Gleichung, in der die gesuchte Variable mindestens einmal im Argument eines Logarithmus auftaucht. Man versuche die Gleichung durch Potenzieren mit der Basis des vorkommenden Logarithmus (**entlogarithmieren**) zu lösen.

Kapitel 3

Summen, Produkte, Logik, Mengen, Abbildungen

3

3.1 Summen

Definition des Summenzeichens

Für $n \in \mathbb{N}$, $q > p$, $p, q \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \qquad \sum_{i=p}^q a_i = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$$

Rechenregeln für Summen

Für $n, k \in \mathbb{N}$, $q > p$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $a_i, b_i, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \qquad \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i \qquad \text{Additivität}$$

$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \qquad \text{Homogenität}$$

$$\sum_{i=1}^n c = nc \qquad \sum_{i=p}^q c = (q - p + 1)c \qquad \text{Summe über eine Konstante}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1} \qquad \text{Verschiebung des Summationsindex}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + a_{n+1} \qquad \sum_{i=1}^1 a_i = a_1 \qquad \sum_{i=1}^0 a_i = 0 \qquad \text{Rekursion}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k \qquad \text{Unabhängigkeit von Bezeichnung des Index}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=k+1}^n a_i \quad (1 \leq k < n) \qquad \text{Aufteilung in Teilsummen}$$

3.2 Wichtige Summen und nützliche Formeln für Summen

Arithmetisches Mittel oder Mittelwert

Definition

Das arithmetische Mittel oder der Mittelwert der Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist

$$\mu_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

3

Nützliche Rechenregeln

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x) = 0 \quad \text{Summe der Abweichungen vom Mittelwert ist Null}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_x^2 \quad \text{Summe der quadratischen Abweichungen vom Mittelwert}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu_x^2 \quad \text{Mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert}$$

Arithmetische Reihe

Definition

Die Folge $a_1 = a, a_2, a_3, \dots$ heißt eine arithmetische Reihe mit der **Differenz** d , wenn

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d = a + (n-1)d$$

Summenformel

Die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Reihe $a = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n = z$ mit Anfangsglied a und Schlussglied z ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=0}^{n-1} (a + id) = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + [n-1]d) \\ &= na + \frac{n(n-1)d}{2} = \frac{n}{2} \left(a + \underbrace{(a + [n-1]d)}_{=:z} \right) = \frac{n}{2} (a + z) \end{aligned}$$

Einige Summen spezieller arithmetischer Reihen

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{Summe der Zahlen von 1 bis } n$$

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \text{Summe der ersten } n \text{ ungeraden Zahlen}$$

$$\sum_{i=1}^n 2i = 2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1) \quad \text{Summe der ersten } n \text{ geraden Zahlen}$$

Summe der Quadrat- und Kubikzahlen

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{Summe der Quadrate}$$

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1) \quad \text{ungerade}$$

$$\sum_{i=1}^n (2i)^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) \quad \text{gerade}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \text{Summe der Kubikzahlen}$$

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1) \quad \text{ungerade}$$

$$\sum_{i=1}^n (2i)^3 = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2 \quad \text{gerade}$$

Geometrische Reihe

Definition

Die Folge $a_0, a_1, a_2, \dots$ heißt eine geometrische Reihe oder geometrische Folge mit dem Quotienten k , wenn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. $a_{n+1} = a_n \cdot k$ und $a_n = a_0 k^n$.

Summenformel*

Für eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $a_0 = a$ und dem Quotienten k gilt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} ak^i = a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = a \frac{k^n - 1}{k - 1} = a \frac{1 - k^n}{1 - k} \quad (k \neq 1)$$

Speziell für $a_0 = 1$ gilt:

$$\sum_{i=0}^n k^i = 1 + k + k^2 + \dots + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \quad (k \neq 1)$$

3

Summe aufeinanderfolgender Differenzen

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ gilt: $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$

3.3 Doppelsummen**Annahmen**

Gegeben seien $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$, geschrieben in rechteckiger Anordnung:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

Zeilen- und Spaltensummen

Für die obige Anordnung ist die Zeilensumme über die i -te Zeile: $\sum_{j=1}^n a_{ij}$

Die Spaltensumme über die j -te Spalte ist: $\sum_{i=1}^m a_{ij}$

* Siehe auch S. 130

Summe der Zeilen- oder Spaltensummen

Die Summe über alle Zeilensummen ist

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} + \sum_{j=1}^n a_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^n a_{mj} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n}) + \dots + (a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mn})$$

Die Summe über alle Spaltensummen ist

$$\sum_{i=1}^m a_{i1} + \sum_{i=1}^m a_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^m a_{in} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right) = (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{m1}) + (a_{12} + a_{22} + \dots + a_{m2}) + \dots + (a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{mn})$$

Unabhängigkeit von der Reihenfolge der Summation

Die Summe der Zeilensummen ist gleich der Summe der Spaltensummen, d.h.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

Definition einer Doppelsumme

Eine Summe der Gestalt $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$ heißt eine Doppelsumme.

3.4 Produkte

Definition des Produktzeichens

Für $n \in \mathbb{N}$, $q > p$, $p, q \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ ist

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \qquad \prod_{i=p}^q a_i = a_p \cdot a_{p+1} \cdot \dots \cdot a_q$$

Rechenregeln für Produkte

Für $n, k \in \mathbb{N}$, $q > p$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $a_i, b_i, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\prod_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$$

Multiplikativität

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n b_i} \quad (b_i \neq 0)$$

$$\prod_{i=1}^n (c \cdot a_i) = c^n \prod_{i=1}^n a_i$$

Homogenität vom Grad n

$$\prod_{i=1}^n c = c^n \quad \prod_{i=p}^q c = c^{q-p+1}$$

Produkt über eine Konstante

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \prod_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$$

Verschiebung des Index

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot a_{n+1} \quad \prod_{i=1}^1 a_i = a_1$$

Rekursion

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{j=1}^n a_j = \prod_{k=1}^n a_k$$

Unabhängigkeit von Bezeichnung des Index

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^k a_i \cdot \prod_{i=k+1}^n a_i \quad (1 \leq k < n)$$

Aufteilung in Teilprodukte

3

3.5 Fakultäten und Binomialkoeffizienten

n Fakultät

Definition

Für $n \in \mathbb{N}$ ist n Fakultät definiert durch: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^n i \quad 0! = 1$

Eigenschaften

$$(n+1)! = n!(n+1) \\ n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Stirlingsche Formel für große $n \in \mathbb{N}$

Binomialkoeffizient

Für $m, k \in \mathbb{N}_0$; $k \leq m$ ist der Binomialkoeffizient (gelesen als „ m über k “) definiert durch

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

Äquivalente Definition

Für $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m$ gilt die äquivalente Definition

$$\binom{m}{k} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{k!} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}$$

Man merke sich: Im Zähler und Nenner stehen jeweils k Faktoren natürlicher Zahlen, um 1 absteigend, beginnend bei m im Zähler und k im Nenner!

Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

Es gelten die folgenden Regeln, die am Pascal'schen Dreieck überprüfbar sind!

$$\binom{0}{0} = 1 \quad \binom{m}{0} = 1 \quad \binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m \quad \binom{m}{m} = 1$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \quad \text{Symmetrie}$$

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \quad \text{Additionssatz}$$

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k} + \dots + \binom{k}{k} \quad \text{Additionssatz}$$

$$\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \dots + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n} \quad \text{Additionstheoreme}$$

$$\binom{n}{0} \binom{m}{k} + \binom{n}{1} \binom{m}{k-1} + \dots + \binom{n}{k} \binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$$

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{m} = 2^m$$

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \dots = \binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \dots = 2^{m-1}$$

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} = 0$$

$$\binom{m}{0}^2 + \binom{m}{1}^2 + \dots + \binom{m}{m}^2 = \binom{2m}{m}$$

Pascal'sches Dreieck

m	k									
0					1		1			
1				1		1		2		
2			1		2		1		3	
3			1		3		3		1	
4			1		4		6		4	
5			1		5		10		10	
6			1		6		15		20	
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	...	...	...	$\binom{n}{n-1}$	$\binom{n}{n}$		

Jede Zahl ist Summe der beiden Nachbarn links und rechts in der Zeile darüber.

Newtons Binomische Formeln

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \dots + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}a^{m-k}b^k$$

3.6 Aussagenlogik

Aussage und Aussageform

Eine Aussage ist eine Behauptung (Satz) p , der (dem) eindeutig der Wahrheitswert wahr (W) oder falsch (F) zugeordnet werden kann.

Eine offene Aussage oder Aussageform ist eine Aussage $p(x)$, in der eine Variable vorkommt. Erst nach Einsetzen des Variablenwertes kann über den Wahrheitswert entschieden werden.

Negation einer Aussage

Ist p eine Aussage, so ist $\neg p$ (Nicht p , gelegentlich auch $\bar{p}$ oder $\sim p$) die Negation dieser Aussage mit den Wahrheitswerten $\begin{cases} W & \text{falls } p \text{ falsch} \\ F & \text{falls } p \text{ wahr} \end{cases}$

Verbindung zweier Aussagen

Zwischen zwei Aussagen p und q gibt es die folgenden Verbindungen oder Verknüpfungen:

Aussagenverbindung	Name	Notation
p und q	Konjunktion	$p \wedge q$
p oder q	Disjunktion	$p \vee q$
Wenn p , so q (Aus p folgt q)	Implikation (Subjunktion)	$p \rightarrow q$
p genau dann, wenn q (p äquivalent zu q)	Äquivalenz (Bijunktion)	$p \leftrightarrow q$

Sie werden durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Notation: Statt $p \rightarrow q$ bzw. $p \leftrightarrow q$ findet man auch $p \Rightarrow q$ bzw. $p \Leftrightarrow q$

Tautologie

Definition

Eine Tautologie (Identität oder ein aussagenlogisches Gesetz) ist eine Aussagenverbindung, die stets wahr ist.

Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten und vom Widerspruch

Die folgenden Aussagenverbindungen sind Tautologien:

$p \vee \neg p$	Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten
$\neg(p \wedge \neg p)$	Gesetz vom Widerspruch

Tautologische Äquivalenzen ($\Leftrightarrow$)

$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Doppelte Negation
$p \vee p \Leftrightarrow p \quad p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotenz
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$	Assoziativität
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$	Assoziativität
$((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \Leftrightarrow p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$	Assoziativität
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \quad (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$	Kommutativität
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributivität
$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$	Negation der Implikation
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \quad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	de Morgansche Regeln
$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$	
$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	Kontraposition
„entweder p oder q “ $\Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)]$	
$p \vee (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \quad p \wedge (q \vee \neg q) \Leftrightarrow p$	
$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$	
$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$	
$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \quad (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	

Tautologische Implikationen: ($\Rightarrow$)

$p \wedge q \Rightarrow p \quad p \wedge q \Rightarrow q$	Vereinfachung
$p \Rightarrow p \vee q \quad q \Rightarrow p \vee q$	Addition
$\neg p \Rightarrow (p \rightarrow q) \quad q \Rightarrow (p \rightarrow q)$	
$\neg(p \rightarrow q) \Rightarrow p \quad \neg(p \rightarrow q) \Rightarrow \neg q$	
$\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$	
$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$	Transitivität, Kettenschluss
$[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$	Abtrennungsregel, direkter Schluss
$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \neg p$	
$[p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)] \Rightarrow q$	Indirekter Schluss
$[(p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q)] \Rightarrow q$	Fallunterscheidung
$[(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)] \Rightarrow q$	Fallunterscheidung, Alternativschluss

Quantoren

Definition

Das Zeichen $\forall$ heißt der **Allquantor** und $(\forall x: p(x))$ bedeutet: für alle x ist die Aussage $p(x)$ wahr.

Das Zeichen $\exists$ heißt der **Existenzquantor** und $(\exists x: p(x))$ bedeutet: Es gibt (existiert) ein x , für das $p(x)$ wahr ist.

Rechenregeln für Quantoren

$\forall x: p(x) \Leftrightarrow \neg \exists x: \neg p(x)$	$\exists x: p(x) \Leftrightarrow \neg \forall x: \neg p(x)$	Austausch der Quantoren
$\forall x: p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow \forall x: p(x) \wedge \forall x: q(x)$		Distributivgesetz
$\exists x: p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow \exists x: p(x) \vee \exists x: q(x)$		Distributivgesetz
$\forall x: (p \vee q(x)) \Leftrightarrow p \vee (\forall x: q(x))$	$\forall x: (p \wedge q(x)) \Leftrightarrow p \wedge (\forall x: q(x))$	
$\exists x: (p \vee q(x)) \Leftrightarrow p \vee (\exists x: q(x))$	$\exists x: (p \wedge q(x)) \Leftrightarrow p \wedge (\exists x: q(x))$	
$\forall x: p(x) \rightarrow q \Leftrightarrow \exists x: p(x) \rightarrow q$		
$p \rightarrow \forall x: q(x) \Leftrightarrow \forall x: p \rightarrow q(x)$	$p \rightarrow \exists x: q(x) \Leftrightarrow \exists x: p \rightarrow q(x)$	
$(\forall x: p(x)) \vee (\forall x: q(x)) \Rightarrow \forall x: p(x) \vee q(x)$		
$(\exists x: p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists x: p(x)) \wedge (\exists x: q(x))$		
$\forall x: \forall y: p(x, y) \Leftrightarrow \forall y: \forall x: p(x, y)$		Kommutativgesetz
$\exists x: \exists y: p(x, y) \Leftrightarrow \exists y: \exists x: p(x, y)$		Kommutativgesetz

3.7 Mathematische Beweise

Mathematische Sätze als Implikationen

Mathematische Sätze (Theoreme) können als Implikationen $P \Rightarrow Q$ formuliert werden, wobei P und Q jeweils eine Aussage oder eine Reihe von Aussagen sind. Bedeutung: Wenn P wahr ist, so ist notwendig auch Q wahr. Andere Redeweisen für $P \Rightarrow Q$: P impliziert Q ; wenn P , dann auch Q ; Q ist eine Folgerung (folgt) aus P ; Q , wenn P ; P nur, wenn Q oder Q ist eine Implikation von P . Besonders wichtig sind die Formulierungen:

P ist eine **hinreichende Bedingung** für Q und Q ist eine **notwendige Bedingung** für P .

Direkter und indirekter Beweis

Bei einem direkten Beweis zeigt man ausgehend von P , dass Q wahr ist.