



Manfred Albach

Grundlagen der Elektrotechnik 1

**Erfahrungssätze, Bauelemente,
Gleichstromschaltungen**

3., aktualisierte Auflage

Grundlagen der Elektrotechnik 1

Manfred Albach

Grundlagen der Elektrotechnik 1

**Erfahrungssätze, Bauelemente,
Gleichstromschaltungen**

3., aktualisierte Auflage

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Die Informationen in diesem Buch werden ohne Rücksicht auf einen eventuellen Patentschutz veröffentlicht.

Warennamen werden ohne Gewährleistung der freien Verwendbarkeit benutzt.

Bei der Zusammenstellung von Texten und Abbildungen wurde mit größter Sorgfalt vorgegangen. Trotzdem können Fehler nicht ausgeschlossen werden.

Verlag, Herausgeber und Autoren können für fehlerhafte Angaben

und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen.

Für Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler sind Verlag und Autor dankbar.

Alle Rechte vorbehalten, auch die der fotomechanischen Wiedergabe und der Speicherung in elektronischen Medien.

Die gewerbliche Nutzung der in diesem Produkt gezeigten Modelle und Arbeiten ist nicht zulässig.

Fast alle Produktbezeichnungen und weitere Stichworte und sonstige Angaben, die in diesem Buch verwendet werden, sind als eingetragene Marken geschützt.

Da es nicht möglich ist, in allen Fällen zeitnah zu ermitteln, ob ein Markenschutz besteht, wird das ®-Symbol in diesem Buch nicht verwendet.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

13 12 11

ISBN 978-3-86894-079-4

© 2011 Pearson Studium

ein Imprint der Pearson Education Deutschland GmbH,
Martin-Kollar-Straße 10-12, D-81829 München/Germany

Alle Rechte vorbehalten

www.pearson-studium.de

Programmleitung: Birger Peil, bpeil@pearson.de

Korrektur: Brigitta Keul

Einbandgestaltung: Thomas Arlt, tarlt@adesso21.net

Herstellung: Philipp Burkart, pburkart@pearson.de

Satz: mediaService, Siegen (www.media-service.tv)

Druck und Verarbeitung: Kösel, Krugzell (www.KoeselBuch.de)

Printed in Germany

Inhaltsübersicht

Vorwort	11
Kapitel 1 Das elektrostatische Feld	15
Kapitel 2 Das stationäre elektrische Strömungsfeld	79
Kapitel 3 Einfache elektrische Netzwerke	109
Kapitel 4 Stromleitungsmechanismen	151
Kapitel 5 Das stationäre Magnetfeld	175
Kapitel 6 Das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld	233
Anhang A Vektoren	303
Anhang B Orthogonale Koordinatensysteme	311
Anhang C Ergänzungen zur Integralrechnung	319
Anhang D Physikalische Grundbegriffe	327
Literaturverzeichnis	333
Verzeichnis der verwendeten Symbole	335
Griechisches Alphabet	341
Koordinatensysteme	342
Register	345

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	11
Kapitel 1 Das elektrostatische Feld	15
1.1 Die elektrische Ladung	17
1.2 Das Coulomb'sche Gesetz	18
1.3 Die elektrische Feldstärke.	19
1.4 Überlagerung von Feldern	21
1.5 Kräfte zwischen Ladungsverteilungen.	24
1.6 Ladungsdichten.	26
1.7 Darstellung von Feldern	27
1.7.1 Feldbild für zwei Punktladungen.	29
1.7.2 Qualitative Darstellung von Feldbildern	31
1.8 Das elektrostatische Potential.	31
1.8.1 Das Potential einer Punktladung	34
1.8.2 Äquipotentialflächen.	36
1.9 Die elektrische Spannung.	37
1.10 Die elektrische Flussdichte.	38
1.11 Das Verhalten der Feldgrößen bei einer Flächenladung	41
1.12 Feldstärke an leitenden Oberflächen	45
1.13 Die Influenz.	47
1.13.1 Dünne leitende Platten im homogenen Feld	47
1.13.2 Im leitenden Körper eingeschlossener Hohlraum	49
1.14 Die dielektrische Polarisierung.	51
1.15 Kräfte im inhomogenen Feld	57
1.16 Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten	58
1.17 Die Kapazität	60
1.17.1 Der Plattenkondensator.	61
1.17.2 Der Kugelkondensator.	62
1.18 Einfache Kondensatornetzwerke	65
1.19 Praktische Ausführungsformen von Kondensatoren.	67
1.19.1 Der Vielschichtkondensator	67
1.19.2 Der Drehkondensator.	68
1.19.3 Der Wickelkondensator.	69
1.20 Die Teilkapazitäten	69
1.21 Der Energieinhalt des Feldes	70
Zusammenfassung.	74
Übungsaufgaben	75
Kapitel 2 Das stationäre elektrische Strömungsfeld	79
2.1 Der elektrische Strom	81
2.2 Die Stromdichte	83
2.3 Definition des stationären Strömungsfeldes	86

2.4	Ladungsträgerbewegung im Leiter	86
2.5	Die spezifische Leitfähigkeit und der spezifische Widerstand	88
2.6	Das Ohm'sche Gesetz	91
2.7	Praktische Ausführungsformen von Widerständen	96
2.7.1	Festwiderstände	96
2.7.2	Einstellbare Widerstände	98
2.7.3	Weitere Widerstände	98
2.8	Das Verhalten der Feldgrößen an Grenzflächen	99
2.8.1	Verschwindende Leitfähigkeit in einem Teilbereich	101
2.8.2	Perfekte Leitfähigkeit in einem Teilbereich	101
2.9	Energie und Leistung	102
	Zusammenfassung	105
	Übungsaufgaben	106

Kapitel 3 Einfache elektrische Netzwerke 109

3.1	Zählpfeile	111
3.2	Spannungs- und Stromquellen	113
3.3	Zählpfeilsysteme	115
3.4	Die Kirchhoffschen Gleichungen	115
3.5	Einfache Widerstandsnetzwerke	119
3.5.1	Der Spannungsteiler	124
3.5.2	Der belastete Spannungsteiler	126
3.5.3	Messbereichserweiterung eines Spannungsmessgerätes	128
3.5.4	Der Stromteiler	129
3.5.5	Messbereichserweiterung eines Strommessgerätes	130
3.5.6	Widerstandsmessung	130
3.6	Reale Spannungs- und Stromquellen	133
3.7	Wechselwirkungen zwischen Quelle und Verbraucher	135
3.7.1	Zusammenschaltung von Spannungsquellen	135
3.7.2	Leistungsanpassung	136
3.7.3	Wirkungsgrad	139
3.8	Das Überlagerungsprinzip	141
3.9	Analyse umfangreicher Netzwerke	143
	Zusammenfassung	148
	Übungsaufgaben	149

Kapitel 4 Stromleitungsmechanismen 151

4.1	Stromleitung im Vakuum	153
4.2	Stromleitung in Gasen	157
4.3	Stromleitung in Flüssigkeiten	158
4.4	Ladungstransport in Halbleitern	162
4.4.1	Der pn -Übergang	166
4.4.2	Die Diode	169
	Zusammenfassung	171
	Übungsaufgaben	172

Kapitel 5	Das stationäre Magnetfeld	175
5.1	Magnete	177
5.2	Kraft auf stromdurchflossene dünne Leiter	179
5.3	Kraft auf geladene Teilchen	183
5.4	Definition der Stromstärke	183
5.5	Die magnetische Feldstärke	186
5.6	Das Oersted'sche Gesetz	187
5.7	Die magnetische Feldstärke einfacher Leiteranordnungen	189
5.7.1	Unendlich langer kreisförmiger Linienleiter	189
5.7.2	Toroidspule	190
5.7.3	Lang gestreckte Zylinderspule	192
5.8	Die magnetische Spannung	194
5.9	Der magnetische Fluss	195
5.10	Die magnetische Polarisierung	195
5.10.1	Diamagnetismus	199
5.10.2	Paramagnetismus	199
5.10.3	Ferromagnetismus	200
5.10.4	Dauermagnete	202
5.11	Das Verhalten der Feldgrößen an Grenzflächen	204
5.12	Die Analogie zwischen elektrischem und magnetischem Kreis	206
5.13	Die Induktivität	210
5.13.1	Induktivität der Ringkernspule	211
5.13.2	Induktivität einer Doppelleitung	213
5.14	Der magnetische Kreis mit Luftspalt und der A_L -Wert	217
5.14.1	Zusammenhang von Luftspalllänge und Windungszahl	219
5.14.2	Zusammenhang von Luftspalllänge und Flussdichte	221
5.15	Praktische Ausführungsformen von Induktivitäten	223
5.15.1	Drahtgewickelte Luftspulen	223
5.15.2	Planare Luftspulen	226
5.15.3	Spulen mit hochpermeablen Kernen	226
	Zusammenfassung	228
	Übungsaufgaben	229
Kapitel 6	Das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld	233
6.1	Das Induktionsgesetz	235
6.2	Die Selbstinduktion	248
6.3	Einfache Induktivitätsnetzwerke	249
6.4	Die Gegeninduktion	250
6.4.1	Die Gegeninduktivität zweier Doppelleitungen	254
6.4.2	Die Koppelfaktoren	259
6.5	Der Energieinhalt des Feldes	260
6.5.1	Die Energieberechnung aus den Feldgrößen	263
6.5.2	Die Hystereseverluste	265
6.6	Anwendung der Bewegungsinduktion	267
6.6.1	Das Generatorprinzip	267
6.6.2	Das Drehstromsystem	270

6.7	Anwendung der Ruheinduktion	274
6.7.1	Der verlustlose Übertrager	275
6.7.2	Die Punktkonvention	280
6.7.3	Der verlustlose streufreie Übertrager	286
6.7.4	Der ideale Übertrager	287
6.7.5	Die Widerstandstransformation	289
6.7.6	Ersatzschaltbilder für den verlustlosen Übertrager	289
6.7.7	Der verlustbehaftete Übertrager	294
6.7.8	Der Spartransformator	295
	Zusammenfassung	297
	Übungsaufgaben	298
Anhang A Vektoren		303
A.1	Einheitsvektoren	305
A.2	Einfache Rechenoperationen mit Vektoren	305
A.2.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	305
A.2.2	Multiplikation von Vektor und Skalar	306
A.3	Das Skalarprodukt	306
A.4	Das Vektorprodukt	307
A.5	Zerlegung eines Vektors in seine Komponenten	308
A.6	Vektorbeziehungen in Komponentendarstellung	309
A.7	Formeln zur Vektorrechnung	310
Anhang B Orthogonale Koordinatensysteme		311
B.1	Das kartesische Koordinatensystem	312
B.2	Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme	314
B.3	Die Zylinderkoordinaten	316
B.4	Die Kugelkoordinaten	317
Anhang C Ergänzungen zur Integralrechnung		319
C.1	Das Linienintegral einer vektoriellen Größe	320
C.2	Der Fluss eines Vektorfeldes	323
Anhang D Physikalische Grundbegriffe		327
D.1	Physikalische Größen	328
D.2	Physikalische Gleichungen	331
D.2.1	Größengleichungen	331
D.2.2	Zugeschnittene Größengleichungen	332
Literaturverzeichnis		333
Verzeichnis der verwendeten Symbole		335
Griechisches Alphabet		341
Koordinatensysteme		342
Register		345

Vorwort

Die Aufgabe der Elektrotechnik besteht in der technischen Nutzbarmachung der aus der Physik gewonnenen Erkenntnisse über die elektromagnetischen Erscheinungen und deren Gesetzmäßigkeiten. Von dem in diesem Arbeitsumfeld tätigen Ingenieur wird unabhängig von der speziellen Studienrichtung, z.B. Informations- und Kommunikationstechnik, Mikroelektronik, Automatisierungstechnik oder auch Energie- und Antriebstechnik, ein fundamentales Verständnis der grundlegenden Zusammenhänge erwartet. Selbst in der Mechatronik und im Maschinenbau ist dieses Grundwissen unerlässlich.

Das dreibändige Lehrwerk *Grundlagen der Elektrotechnik* stellt das notwendige Fachwissen in einer leicht verständlichen und klar strukturierten Form zusammen. Es richtet sich an Studenten der genannten Fachrichtungen an Fachhochschulen und Universitäten und basiert auf den Erfahrungen einer mehrjährig durchgeführten Vorlesung an der Universität Erlangen-Nürnberg.

Warum ein neues Grundlagenbuch?

Meine Erfahrungen aus den Vorlesungen im Grundstudium zeigen, dass die vielfältigen Erscheinungen des Elektromagnetismus die Studierenden zunächst vor erhebliche Probleme stellen. Während die Gesetze der Mechanik oft sehr anschaulich sind und viele Begriffe aus dem alltäglichen Bereich zur Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge verwendet werden, ist die Situation bei den elektrischen und magnetischen Vorgängen völlig anders. Zur mathematischen Formulierung der physikalischen Beobachtungen werden neue Begriffe wie z.B. der Begriff des *elektromagnetischen Feldes* oder der Begriff des *Dipols* eingeführt, für die es keine Entsprechung aus dem Erfahrungsschatz des Alltags gibt. Der Überwindung dieser Anfangsschwierigkeiten wird besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

Für ein grundlegendes Verständnis der elektromagnetischen Erscheinungen ist es wichtig, sich schon frühzeitig mit dem Begriff des *Feldes* vertraut zu machen und dessen praktische Anwendung zu üben. An einfachen Anordnungen wird gezeigt, wie aus den im Allgemeinen dreidimensionalen Feldverteilungen die integralen Größen Spannung, Strom, Widerstand, Kapazität und Induktivität abgeleitet werden können, mit deren Hilfe die ursprüngliche Feldbeschreibung auf eine einfache (summarische) Berechnung mit skalaren Größen zurückgeführt werden kann.

Mithilfe der Begriffe *elektrischer* und *magnetischer Dipol* werden die beobachtbaren Phänomene in der Materie am mikroskopischen Verhalten der Atome und Moleküle auf einfache Weise veranschaulicht. Gleichzeitig aber erlaubt die makroskopische Betrachtungsweise, d.h. die Mittelung über das Verhalten einer sehr großen Anzahl von Atomen, die Erfassung der speziellen Materialeigenschaften durch einfache skalare Größen.

Inhaltlicher Aufbau

Den Einstieg in die einzelnen Kapitel bilden die aus Experimenten abgeleiteten und in die Sprache der Mathematik übertragenen *Erfahrungssätze*. Ausgehend von Kraftwirkungen zwischen ruhenden Ladungsverteilungen, die auch ohne das Vorhandensein eines Übertragungsmediums im Vakuum beobachtbar sind, wird der Begriff des *elektrischen Feldes* eingeführt. Die Ladungsträgerbewegung im Leiter mit konstanter mittlerer Geschwindigkeit führt zu den Gleichstromnetzwerken, die im dritten Kapitel ausführlich behandelt werden. Das vierte Kapitel beschreibt die unterschiedlichen Stromleitungsmechanismen im Vakuum, in Gasen, Flüssigkeiten und in Halbleitern. Die Kraftwirkung zwischen den zeitlich konstanten Strömen führt zu dem Begriff des *magnetischen Feldes*. Den Abschluss bildet das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld und seine Anwendung bei der Erzeugung elektrischer Energie in Generatoren sowie die Anwendung bei den Transformatoren und den Übertragern.

Der zweite Band, ISBN: 978-3-86894-080-0, behandelt die Analyse von Wechselstromschaltungen und die Schaltvorgänge. Die ausführliche Netzwerktheorie und die Besonderheiten nicht linearer Schaltungen sind Bestandteil des dritten Bandes, ISBN: 978-3-8273-7107-2.

Didaktische Besonderheiten

Das Lehrwerk ist so aufgebaut, dass es auch zum autodidaktischen Lernen geeignet ist. Aus der Mathematik der gymnasialen Oberstufe sollte die Differential- und Integralrechnung bekannt sein. Die Vektorrechnung und die grundlegenden Koordinatensysteme werden im Anhang ausführlich behandelt. Die immer wiederkehrenden Begriffe eines Linienintegrals und eines Hüllflächenintegrals werden ebenfalls im Anhang an zwei einfachen Beispielen auf anschauliche Weise erläutert.

Die wichtigsten Erkenntnisse aus den einzelnen Abschnitten sind als Zusammenfassungen und Merksätze besonders hervorgehoben. Durch Referenzen in den Formeln auf vorhergehende Gleichungen wird das Nachvollziehen der Ableitungen wesentlich erleichtert. Ausgewählte Beispiele, die zu einem tieferen Verständnis der Zusammenhänge beitragen, sind im Text integriert.

Ohne Hilfe geht es nicht

Für das sorgfältige Korrekturlesen sowie die kritische Durchsicht des Manuskriptes möchte ich Herrn Dr.-Ing. H. Roßmanith und Herrn Dipl.-Ing. Univ. S. Schuh ausdrücklich danken, ebenso Frau H. Schadel und Herrn Dipl.-Ing. H. Weglehner für die Unterstützung beim Erstellen der Bilder und bei der Formatierung des Textes.

Hinweise auf eventuelle Fehler und Verbesserungsvorschläge werden jederzeit dankbar entgegengenommen (M.Albach@emf.eei.uni-erlangen.de).

Ein Buch zu den Grundlagen der Elektrotechnik stellt eine besondere Herausforderung dar, einerseits soll ein solides Fundament für das weitere Studium gelegt werden, andererseits darf die neue Begriffswelt nicht als Abschreckung empfunden werden. Der Autor hofft, dass dieser Kompromiss mit dem vorliegenden Buch gelungen ist.

Erlangen

Manfred Albach

Vorwort zur 2. und 3. Auflage

Mit diesen Auflagen wurde dem Wunsch vieler Leser entsprochen, ergänzende Beispiele mit Lösungen in den Text zu integrieren. Einige Erweiterungen in Form von zusätzlichen Abbildungen und ausführlicheren Erklärungen sollen dazu beitragen, das Verständnis einiger offenbar doch schwieriger Zusammenhänge zu erleichtern.

Gedankt sei an dieser Stelle allen, die mit zahlreichen Anregungen und Kommentaren zu Verbesserungen beigetragen haben.

Handhabung des Buches

Dozent Der vorliegende Band ist Teil einer vierstündigen Vorlesung „Grundlagen der Elektrotechnik“ im 1. Semester an der Universität Erlangen-Nürnberg. Die in einer zusätzlichen zweistündigen Übung behandelten Aufgaben stehen komplett mit Lösungen im Downloadbereich bei der entsprechenden Vorlesung auf der Lehrstuhl-Homepage zur Verfügung. Die im Buch verwendeten Abbildungen sind zum Einsatz in eigenen Vorlesungen auf der Companion Website verfügbar.



Student Jedes Kapitel beginnt mit einer kurzen themenbezogenen Einleitung und mit einer Liste der zu erreichenden Lernziele. Am Ende der Kapitel werden die Kernaussagen und die wichtigsten Gedankengänge noch einmal in einer Übersicht zusammengestellt.



Lösungen

Zur Vertiefung des Stoffes und zur Vorbereitung auf die Klausur endet jedes Kapitel mit einer kleinen Aufgabensammlung. Es wird dringend empfohlen, diese Aufgaben weitestgehend eigenständig zu lösen. Zur Kontrolle stehen die ausführlichen Lösungswege im Downloadbereich bei der entsprechenden Vorlesung auf der Lehrstuhl-Homepage und auf der Companion Website zur Verfügung.

CWS zum Buch

Neben den ausführlichen Lösungen zu diesem Buch ist eine umfangreiche Sammlung von Klausuraufgaben und Übungsbeispielen zusammen mit einer ausführlichen Beschreibung des Lösungswegs unter www.pearson-studium.de verfügbar. Sie gelangen am schnellsten zu der Buchseite, indem Sie dort in das Feld *Schnellsuche* die Buchnummer **4079** eingeben. Dort finden Sie auch weiterführende Links u.a. zur Lehrstuhl-Homepage der Universität Erlangen.



Erlangen

Manfred Albach

Das elektrostatische Feld

1

1.1	Die elektrische Ladung	17
1.2	Das Coulomb'sche Gesetz	18
1.3	Die elektrische Feldstärke	19
1.4	Überlagerung von Feldern	21
1.5	Kräfte zwischen Ladungsverteilungen	24
1.6	Ladungsdichten	26
1.7	Darstellung von Feldern	27
1.8	Das elektrostatische Potential	31
1.9	Die elektrische Spannung	37
1.10	Die elektrische Flussdichte	38
1.11	Das Verhalten der Feldgrößen bei einer Flächenladung	41
1.12	Feldstärke an leitenden Oberflächen	45
1.13	Die Influenz	47
1.14	Die dielektrische Polarisierung	51
1.15	Kräfte im inhomogenen Feld	57
1.16	Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten	58
1.17	Die Kapazität	60
1.18	Einfache Kondensatornetzwerke	65
1.19	Praktische Ausführungsformen von Kondensatoren	67
1.20	Die Teilkapazitäten	69
1.21	Der Energieinhalt des Feldes	70

Einführung

» In diesem Kapitel werden wir uns zunächst mit dem Begriff der elektrischen Ladung beschäftigen. Die Existenz solcher Ladungen ist die Ursache für alle elektromagnetischen Erscheinungen. Wer kennt nicht das Zucken im Finger beim Anfassen eines Geländers, nachdem man über einen Teppich gelaufen ist, oder die spektakulären Vorführungen, bei denen eine Person unbeschadet einen Metallkäfig verlässt, in den ein Blitz eingeschlagen hat.

Zur Beschreibung solcher Phänomene werden wir den Begriff des Feldes, in diesem speziellen Kapitel den Begriff des elektrostatischen Feldes einführen. Anordnungen mit ruhenden Ladungen bieten den leichtesten Einstieg in die mathematische Behandlung von Feldberechnungen. Obwohl die Feldtheorie und die ihr zugrunde liegenden Maxwell'schen Gleichungen das zentrale Fundament für die Elektrotechnik bilden, werden wir in diesen Grundlagenbüchern nur die Konzepte kennen lernen und uns auf einfachste Anordnungen beschränken.

Ausgangspunkt für dieses Kapitel ist das Coulomb'sche Gesetz, das die Kraftwirkung zwischen ruhenden Ladungen beschreibt. Als einen der wichtigsten Begriffe werden wir die Kapazität kennen lernen, eine aus der Feldverteilung abgeleitete integrale Größe, die die Fähigkeit einer Anordnung beschreibt, elektrische Energie zu speichern. Erst mit diesen Begriffen, später kommen noch Widerstand und Induktivität hinzu, sind wir gut gerüstet, reale Bauelemente durch mehr oder weniger komplizierte Modelle zu ersetzen und damit Schaltungen aufzubauen, zu analysieren und auch die Grenzen bei der Schaltungsanalyse mit vereinfachten Modellen zu verstehen. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- mithilfe des Coulomb'schen Gesetzes Kräfte auf Ladungen zu berechnen,
- das elektrostatische Feld für einfache Ladungsanordnungen zu berechnen,
- die zugehörigen Äquipotentialflächen und Feldlinien darzustellen,
- die elektrische Spannung aus den Feldgrößen zu bestimmen,
- das Verhalten der Feldgrößen an Sprungstellen der Materialeigenschaften zu bestimmen,
- die Kapazität von einfachen Leiteranordnungen zu berechnen,
- die Zusammenschaltung von Kondensatoren zu vereinfachen sowie
- die im elektrostatischen Feld gespeicherte Energie zu berechnen.

1.1 Die elektrische Ladung

Zum Einstieg in dieses Kapitel betrachten wir ein kleines Experiment. Werden zwei Glasstäbe mit einem Wolltuch gerieben, dann kann man feststellen, dass sich die beiden Stäbe gegenseitig abstoßen. Wird das gleiche Experiment mit zwei Kunststoffstäben wiederholt, dann bleibt das Ergebnis gleich, auch diese beiden Stäbe stoßen sich gegenseitig ab. Im Gegensatz dazu ziehen sich ein Glas- und ein Kunststoffstab gegenseitig an. Diese mit den Gesetzen der Mechanik nicht zu erklärende Erscheinung führt man auf Ladungen zurück. Da sowohl Anziehung als auch Abstoßung auftritt, müssen zwei verschiedene Arten von Ladungen existieren. Man unterscheidet daher positive und negative Ladungen.

Die den beobachteten Kraftwirkungen zugrunde gelegte Modellvorstellung ist in ►Abb. 1.1 dargestellt. Nach diesem vereinfachten Atommodell von Niels Bohr (1885 – 1962) bestehen Atome aus Kernen, die Protonen (positive Ladungsträger) und Neutronen enthalten, sowie aus Elektronen (negative Ladungsträger), die den Kern auf bestimmten Bahnen umkreisen. Mehrere Bahnen bilden zusammen eine Schale. Auf jeder Schale können sich nur eine begrenzte Anzahl von Elektronen aufhalten. Die Summe aller den Kern umkreisenden Elektronen bezeichnet man als Elektronenhülle. Der Atomkern besitzt einen Durchmesser in der Größenordnung von 10^{-14} m, während der Durchmesser der Elektronenumbahnen etwa um den Faktor 10 000 größer ist. (Die Abmessungsverhältnisse in der Abb. 1.1 sind nicht maßstabsgerecht.)

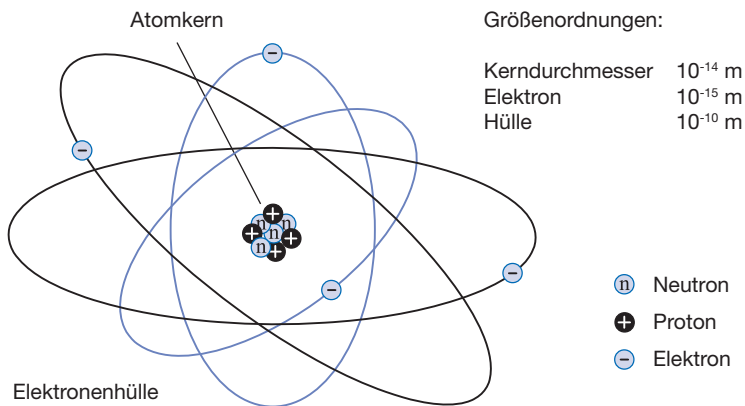


Abbildung 1.1: Bohr'sches Atommodell

Die kleinste, d.h. nicht weiter unterteilbare, Ladungsmenge heißt **Elementarladung** e . Ihr experimentell bestimmter Wert beträgt $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$ As. Da die Ladung der Protonen ($+e$) entgegengesetzt gleich groß ist zur Ladung der Elektronen ($-e$) und da die Anzahl der Protonen und Elektronen in den Atomen gleich groß ist, verhalten sich Atome nach außen elektrisch neutral. Die Anzahl der Protonen bzw. Elektronen in einem Atom wird als **Ordnungszahl** bezeichnet, sie beträgt bei Wasserstoff 1 und bei dem in der Elektrotechnik als Leitermaterial verwendeten Kupfer 29. Der Wert von e

ist konstant, er ist insbesondere unabhängig vom Bewegungszustand (Geschwindigkeit) des Teilchens. Im Gegensatz dazu ist die Teilchenmasse abhängig von der Geschwindigkeit.

Bei dem eingangs beschriebenen Experiment werden keine Ladungen *erzeugt*, sondern die positiven und negativen Ladungen getrennt. Von den Atomen des Glasstabs bleiben einige Elektronen am Wolltuch hängen, so dass die positive Gesamtladung des Glasstabs einem **Elektronenmangel** entspricht, während beim Reiben des Kunststoffstabs einige Elektronen vom Wolltuch an dem Stab hängen bleiben, so dass die negative Gesamtladung des Kunststoffstabs einem **Elektronenüberschuss** entspricht. Erst dadurch entstehen die nach außen hin wirksamen Kräfte.

Die im Kern enthaltenen Protonen und Neutronen werden als Nukleonen bezeichnet. Da die Masse der Nukleonen etwa um den Faktor 1836 größer ist als die Masse der Elektronen, bestimmt die Summe der in einem Atom vorhandenen Nukleonen im Wesentlichen dessen Masse. Trotz der gegenseitigen Abstoßung der Protonen werden die Kerne zusammengehalten. Die Ursache für diese Kernbindung ist die als starke Wechselwirkung bezeichnete Kraft zwischen den Nukleonen.

Fassen wir die wesentlichen Aussagen noch einmal zusammen:

Merke

- Ladungen sind stets ein Vielfaches der Elementarladung.
- In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Ladungen stets konstant. Diese Aussage gilt unabhängig von dem Bewegungszustand des Beobachters.
- Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich gegenseitig ab, Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens ziehen sich gegenseitig an.

1.2 Das Coulomb'sche Gesetz

Durch Messung hat Charles Augustin de Coulomb (1736 – 1806) festgestellt, dass die Kraft F zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2 betragsmäßig proportional zu jeder der beiden Ladungen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r zwischen den Ladungen ist. Mit der Proportionalitätskonstante $1/(4\pi\epsilon_0)$ folgt daraus die Beziehung

$$F \sim \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \rightarrow \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \quad (1.1)$$

Der Faktor ϵ_0 wird als **elektrische Feldkonstante** (Dielektrizitätskonstante des Vakuums) bezeichnet. Durch die Festlegung der Basiseinheit 1A (vgl. Kap. 5.4) ist ϵ_0 nicht mehr frei wählbar. Messungen ergeben einen auf vier Stellen gerundeten Wert von $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$.

Bei der Gleichung (1.1) wird angenommen, dass die geometrische Ausdehnung der einzelnen Ladungen sehr viel kleiner als der Abstand zwischen den Ladungen ist, daher spricht man hier von der Kraft zwischen **Punktladungen**. In dieser Gleichung kommt noch nicht die Richtung der Kraft zum Ausdruck. Mit der Festlegung eines Einheitsvektors $\vec{e}_r$, der gemäß ►Abb. 1.2 in Richtung der Verbindungslinie von der Punktladung Q_1 zur Punktladung Q_2 zeigt, kann die Kraft auf die Ladung Q_2 als vektorielle Gleichung

$$\vec{F}_2 = \vec{e}_r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (1.2)$$

geschrieben werden. Haben beide Ladungen gleiche Vorzeichen, dann wird die Ladung Q_2 von der Ladung Q_1 abgestoßen, haben sie entgegengesetzte Vorzeichen, dann wirkt die Kraft in Richtung $-\vec{e}_r$ und die Ladung Q_2 wird von Q_1 angezogen.

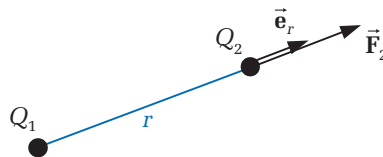


Abbildung 1.2: Zwei Punktladungen gleichen Vorzeichens

Die Unterscheidung der beiden Ladungsarten durch ein positives bzw. negatives Vorzeichen liefert im Zusammenhang mit dem in Gl. (1.2) auftretenden Produkt der Ladungen automatisch die mit den Experimenten übereinstimmende Richtung für den Kraftvektor.

1.3 Die elektrische Feldstärke

Das Coulomb'sche Gesetz (1.2) beschreibt offenbar eine für beliebige Abstände r geltende physikalische Wirkung, ohne dabei eine Aussage über den Raum zwischen den Ladungen zu machen. In diesem Zusammenhang sind zwei Fragen von Bedeutung:

- 1.** Wie kann im Unterschied zur klassischen Mechanik ohne direkten Kontakt und ohne ein stoffliches Medium eine Kraft ausgeübt werden?
- 2.** Ist es möglich, sofort, d.h. ohne Zeitverzug, eine Änderung der Kraftwirkung auf Q_2 wahrzunehmen, wenn Q_1 seine Position relativ zu Q_2 ändert?

Die Schwierigkeiten bei der Beantwortung dieser Fragen lassen sich umgehen mit der Annahme, dass durch die Anwesenheit einer Ladung der umgebende Raum selbst zum Träger physikalischer Eigenschaften wird. Um den Zustand des Raumes in die Beschreibung mit einzubeziehen, wird an dieser Stelle der Begriff des Feldes eingeführt. Unter dem Begriff **Feld** soll hier allgemein verstanden werden, dass jedem Punkt des Raumes zu einem bestimmten Zeitpunkt eindeutig eine oder auch mehrere physikalische Größen zugeordnet werden können und zwar unabhängig von der Wahl eines

Koordinatensystems. Diese Feldgrößen verknüpfen zusammen mit den Materialeigenschaften des Raumes die Ursache und Wirkung an demselben Raumpunkt und zum gleichen Zeitpunkt. Im vorliegenden Fall spricht man von einem **elektrischen Feld**, das sich durch die Kraftwirkung auf Ladungen bemerkbar macht. Ein anderes bekanntes Beispiel für ein Feld ist das Gravitationsfeld, das an den Kraftwirkungen auf Massen erkennbar wird.

Die erste Frage kann unter Zuhilfenahme mechanischer Vorgänge und Wirkungen nicht beantwortet werden. Die Kraft auf die Ladung Q_2 in Gl. (1.2) lässt sich aber mit dem hier eingeführten Feldbegriff darstellen als das Produkt aus dem Wert der Ladung selbst und einer mit $\vec{E}$ bezeichneten vektoriellen Raumzustandsgröße

$$\vec{F}_2 = \vec{e}_r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \vec{E}_1 Q_2 \quad \text{mit} \quad \vec{E}_1 = \vec{e}_r \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} . \quad (1.3)$$

$\vec{E}$ wird **elektrische Feldstärke** genannt und hat die Dimension V/m. Die Kraftwirkung (1.3) als Folge des von der *ruhenden* Ladung Q_1 hervorgerufenen *elektrostatischen* Feldes kann auch im Vakuum nachgewiesen werden und ist nicht an das Vorhandensein von Materie im Raum zwischen den Ladungen gebunden. Misst man die elektrische Feldstärke mit unterschiedlichen Probeladungen Q_2 , dann liefert das Verhältnis aus dem Betrag der Kraft zum Wert der Probeladung immer den gleichen Betrag für die elektrische Feldstärke. Da die Feldstärke (1.3) unabhängig ist von der zu ihrem Nachweis notwendigen Probeladung, existiert das elektrostatische Feld als Raumzustand offenbar auch dann, wenn bei Abwesenheit der Probeladung keine Kräfte beobachtet werden.

Merke

Während sich die als *elektrische Feldstärke* bezeichnete vektorielle Raumzustandsgröße auf einen speziellen Raumpunkt bezieht, kennzeichnet man mit dem Begriff *elektrisches Feld* die Gesamtheit der Feldvektoren in allen Raumpunkten.

Die zweite Frage nach dem *zeitlichen Abstand* zwischen Positionsänderung der einen Ladung und daraus resultierender Änderung der Kraftwirkung auf die andere Ladung kann erst im Zusammenhang mit der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen beantwortet werden. An dieser Stelle soll lediglich darauf hingewiesen werden, dass die Wellenausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt und die Information über die Änderung des Raumzustands infolge der Bewegung von Q_1 um die benötigte Laufzeit der Welle für die Distanz r zwischen den Ladungen später bei Q_2 ankommt. Die Änderung der Kraftwirkung auf Q_2 wird sich entsprechend zeitversetzt bemerkbar machen. Diese Effekte spielen aber bei der Behandlung elektrostatischer Probleme keine Rolle.

Kehren wir noch einmal zu dem neu eingeführten Begriff der elektrischen Feldstärke zurück. Die Richtung von $\vec{E}$ wird allgemein in Richtung der Kraft gezählt, die auf eine positive Ladung wirkt. Betrachten wir in diesem Zusammenhang die Gl. (1.3), dann zeigt die Kraft auf eine positive Ladung Q_2 infolge einer ebenfalls als positiv angenommenen Ladung Q_1 in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_r$, also radial von der Punktladung Q_1 nach außen. Die von der positiven Ladung Q_1 hervorgerufene Feldstärke zeigt damit definitionsgemäß ebenfalls radial nach außen. Die Ladung Q_2 reagiert aber nicht nur mit der auf sie ausgeübten Kraftwirkung infolge des von Q_1 hervorgerufenen Feldes, sondern sie erzeugt ihrerseits eine Feldstärke $\vec{E}_2$, die eine gleich große entgegengesetzt gerichtete Kraft $\vec{F}_1 = \vec{E}_2 Q_1 = -\vec{F}_2$ auf die Punktladung Q_1 ausübt.

Zusammenfassend gilt:

Merke

- Eine positive Punktladung ruft im homogenen Raum der Dielektrizitätskonstanten ϵ_0 eine radial nach außen gerichtete elektrische Feldstärke hervor, die mit dem Quadrat des Abstandes von der Punktladung abnimmt. Bei einer negativen Punktladung zeigt der Feldstärkevektor zur Punktladung hin.
- Die Kraft auf eine positive Punktladung hat die gleiche Richtung wie die elektrische Feldstärke an der Stelle der Punktladung, bei einer negativen Punktladung zeigen Feldstärke und Kraft in entgegengesetzte Richtungen.
- Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ beschreibt die **Wirkung** (Stärke) des elektrischen Feldes. Sie ist eine **Intensitätsgröße** und wird gemessen durch die auf Ladungen ausgeübte Kraftwirkung.

1.4 Überlagerung von Feldern

Befindet sich eine Punktladung Q_1 im Ursprung des Kugelkoordinatensystems, dann ruft sie die in Gl. (1.3) angegebene Feldstärke hervor. Der Vektor $\vec{e}_r$ entspricht dann dem radialen Einheitsvektor $\vec{e}_r$ des Kugelkoordinatensystems. Zur Verallgemeinerung sei der in ►Abb. 1.3 dargestellte Fall betrachtet, bei dem sich die Punktladung an der **Quellpunktskoordinate** $\vec{r}_Q$ befindet. Der **Aufpunkt** P (Beobachtungspunkt), an dem das Feld berechnet werden soll, befindet sich, bezogen auf den willkürlich gewählten Ursprung, an der **Aufpunktskoordinate** $\vec{r}_P$. Bezeichnet man den vektoriellen Abstand von dem Quellpunkt Q zum Aufpunkt P mit $\vec{r}$, dann ist die Richtung der Feldstärke im Aufpunkt P durch den Einheitsvektor $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ gegeben.

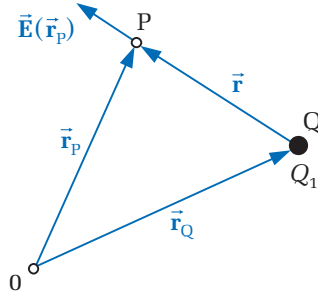


Abbildung 1.3: Punktladung Q_1 am Quellpunkt Q, Berechnung der Feldstärke im Aufpunkt P

Mithilfe der Gl. (1.3) erhält man unmittelbar die an dem Aufpunkt P, d.h. an der Stelle $\vec{r}_P$, vorliegende Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q \quad \text{und} \quad r = |\vec{r}_P - \vec{r}_Q|. \quad (1.4)$$

Betrachten wir noch einmal die Abb. 1.2. Die Kraft auf die Ladung Q_2 ist nach Gl. (1.3) proportional zu der von der Ladung Q_1 am Ort von Q_2 hervorgerufenen Feldstärke. Sind noch weitere Ladungen vorhanden, dann erhält man die Gesamtkraft auf die Ladung Q_2 durch lineare Überlagerung der einzelnen Kräfte, d.h. auch die gesamte elektrische Feldstärke ergibt sich durch Überlagerung der von den einzelnen Ladungen hervorgerufenen Feldstärkebeiträge.

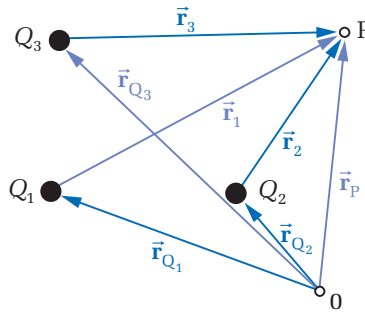


Abbildung 1.4: Das Feld mehrerer Punktladungen

Befinden sich beispielsweise drei Punktladungen Q_i mit $i = 1, 2, 3$ gemäß ►Abb. 1.4 an den Stellen $\vec{r}_{Q_i}$ im homogenen Raum der Dielektrizitätskonstanten ϵ_0 und sind die Abstände der einzelnen Punktladungen von dem Aufpunkt P durch die vektoriellen Entfernungen $\vec{r}_i = \vec{r}_P - \vec{r}_{Q_i}$ der Beträge $r_i = |\vec{r}_i|$ gegeben, dann erhält man die gesamte Feldstärke im Aufpunkt P durch Summation der Beiträge aller drei Ladungen. Für eine beliebige Anzahl Ladungen $i = 1, 2, \dots$ wird die Feldstärke durch Summation über alle Werte i berechnet

$$\vec{E}(\vec{r}_P) \stackrel{(1.4)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1,2,\dots} Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad \text{mit} \quad \vec{r}_i = \vec{r}_P - \vec{r}_{Q_i} \quad \text{und} \quad r_i = |\vec{r}_i|. \quad (1.5)$$

Merke

Die Gesamtfeldstärke einer aus mehreren Ladungen bestehenden Anordnung ergibt sich durch lineare Überlagerung der Beiträge der Einzelladungen.

Der Zusammenhang zwischen einer Ladungsverteilung und der elektrischen Feldstärkeverteilung ist eindeutig. Aus der bekannten Ladungsverteilung kann in jedem Punkt des Raumes die elektrische Feldstärke bestimmt werden, umgekehrt kann aus dem elektrischen Feld eindeutig auf die Ladungsanordnung zurückgerechnet werden.

Erweitern wir die Anordnung in Abb. 1.4 jetzt dahingehend, dass wir eine Punktladung Q_4 an die Stelle des Aufpunktes P bringen (►Abb. 1.5a), dann erfährt diese Ladung eine Gesamtkraft

$$\vec{F}_4 = Q_4 \vec{E}(\vec{r}_P) = Q_4 \vec{E}(\vec{r}_{Q_4}) \stackrel{(1.5)}{=} \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 \vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{Q_2 \vec{r}_2}{r_2^3} + \frac{Q_3 \vec{r}_3}{r_3^3} \right), \quad (1.6)$$

die aus dem Produkt der Ladung Q_4 mit der vektoriellen Raumzustandsgröße $\vec{E}(\vec{r}_{Q_4})$ an der Stelle von Q_4 infolge aller anderen Ladungen berechnet wird. Die Punktladung übt auf sich selber keine Kraft aus¹.

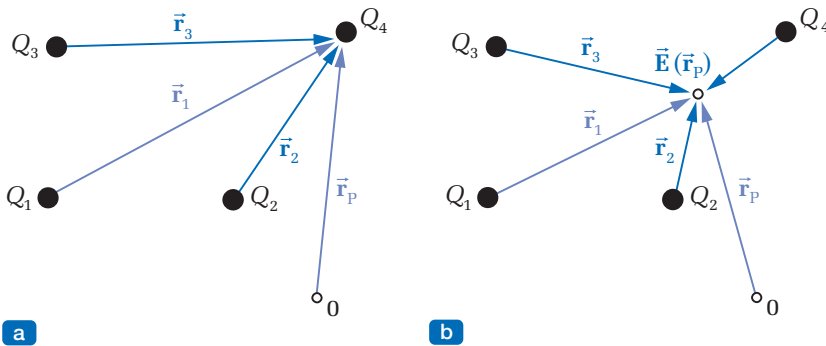


Abbildung 1.5: Kräfte im System mehrerer Punktladungen

Auf die gleiche Weise können auch die Kräfte auf die Punktladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 in der ►Abb. 1.5b berechnet werden. Da alle zwischen jeweils zwei Punktladungen wirkenden Teilkräfte entgegengesetzt gleich groß sind, muss die vektorielle Summe aller Kräfte auf die vier dargestellten Punktladungen verschwinden. Diese Aussage lässt

1 Man beachte, dass zur Berechnung der Feldstärke in einem beliebigen Raumpunkt die Beiträge aller Punktladungen Q_1 bis Q_4 überlagert werden (Abb. 1.5b). Zur Berechnung der Kraft auf eine Punktladung wird aber der Feldstärkebeitrag derjenigen Ladung, auf die die Kraft berechnet werden soll, nicht mit einbezogen (Abb. 1.5a).

sich verallgemeinern. Besteht eine Ladungsanordnung aus mehreren Punktladungen Q_i mit $i = 1, 2, \dots$, dann verschwindet die vektorielle Summe der auf alle Ladungen wirkenden Kräfte

$$\vec{F}_{ges} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (1.7)$$

1.5 Kräfte zwischen Ladungsverteilungen

Wir betrachten jetzt die in ►Abb. 1.6 dargestellte Anordnung. In den beiden Körpern V_1 und V_2 befinden sich ortsfeste Ladungsverteilungen, z.B. Elektronen in V_1 und Elektronen und Protonen in V_2 . Ortsfest soll dabei bedeuten, dass sich die Ladungsträger nicht frei innerhalb des Volumens bewegen können. Da jeder einzelne Ladungsträger Kräfte auf jeden anderen ausübt, wird die Situation sehr schnell unübersichtlich. In den meisten praktischen Fällen ist aber eine umfassende Berechnung aller Teilkräfte auf die einzelnen Elektronen und Protonen nicht erforderlich.

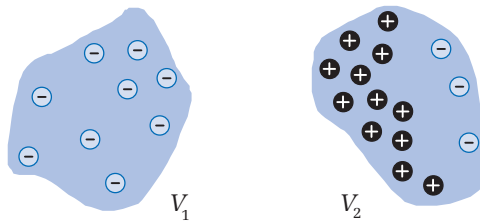


Abbildung 1.6: Mehrere zusammengehörige Ladungsverteilungen

Bei einer solchen Ladungsanordnung sind z.B. folgende Fragen von Interesse:

- 1.** Welche Kräfte treten innerhalb eines Volumens infolge der Ladungsträger in diesem Volumen auf?
- 2.** Welche Kräfte wirken zwischen den beiden Körpern V_1 und V_2 ?

Zur Beantwortung der ersten Frage für den Körper 1 muss die Summe der Kräfte auf die Elektronen in V_1 infolge aller anderen Elektronen im Volumen V_1 berechnet werden. Diese Frage stellt sich im Zusammenhang mit mechanischen Beanspruchungen des Materials. Aufgrund des größeren Abstands des zweiten Körpers kann dessen Beitrag zu den innerhalb von V_1 wirkenden Kräften in der Regel vernachlässigt werden. Die gleiche Frage stellt sich natürlich auch für das Volumen V_2 .

Eine völlig andere Situation ergibt sich im Zusammenhang mit der zweiten Frage. Hier muss die Summe der Kräfte auf alle Elektronen in V_1 berechnet werden, die ausschließlich durch die Ladungsträger in V_2 hervorgerufen werden. Hintergrund der Frage ist die gegenseitige Anziehungskraft zwischen den beiden Körpern, aus der sich bei bekannter Masse der beiden Körper die jeweilige Beschleunigung bestimmen lässt.

Beispiel 1.1: Gedankenexperiment

In diesem Abschnitt wollen wir eine Situation betrachten, die sich in der Praxis nicht realisieren lässt. Um dennoch die gewünschten Aussagen zu erhalten und einen Einblick in bestimmte Zusammenhänge zu bekommen, führen wir dieses Experiment lediglich in Gedanken durch.

Wir entfernen aus 1 mm^3 Kupfer alle Elektronen und bringen sie in einen Abstand $a = 10 \text{ km}$ von den Atomkernen (Protonen). Zu bestimmen ist die Anziehungskraft zwischen den beiden Ladungsverteilungen. Um das Ergebnis besser mit der Alltagserfahrung in Einklang zu bringen, soll die Masse eines Körpers bestimmt werden, der bei der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ die gleiche Kraft erfährt.

Lösung:

Zunächst muss die Anzahl der Ladungsträger bestimmt werden. 1 mm^3 Kupfer wiegt $8,96 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ und enthält nach Gl. (D.3) $8,96 \cdot 10^{-6} \text{ kg} / 1,055 \cdot 10^{-25} \text{ kg} = 8,5 \cdot 10^{19}$ Atome. Da jedes Kupferatom 29 Protonen und 29 Elektronen enthält, gilt für die Gesamtladungen

$$Q_p = -Q_e = 8,5 \cdot 10^{19} \text{ Atome} \cdot 29 \frac{\text{Protonen}}{\text{Atom}} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{As}}{\text{Proton}} = 395 \text{ As} . \quad (1.8)$$

Die Anziehungskraft zwischen den beiden Ladungsverteilungen kann mit Gl. (1.2) berechnet werden

$$F = \frac{Q_p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{(395 \text{ As})^2 \text{ Vm}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As}} \frac{1}{(10 \text{ km})^2} = 14 \cdot 10^6 \frac{\text{Ws}}{\text{m}} = 14 \cdot 10^6 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} . \quad (1.9)$$

Mit dem bekannten Kraftgesetz $F = mg$ aus der Mechanik erhält man als Ergebnis

$$m = 14 \cdot 10^6 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{9,81} \frac{\text{s}^2}{\text{m}} = 1,427 \cdot 10^6 \text{ kg} \quad (1.10)$$

den erstaunlichen Wert von 1427 Tonnen! Wegen der Abhängigkeit der Kraft vom Quadrat des reziproken Abstands erhöht sich das Ergebnis um den Faktor 100, wenn der Abstand auf $1/10$, d.h. auf 1 km reduziert wird.

Schlussfolgerung:

Aus der Tatsache, dass die in den alltäglichen Situationen auftretenden Kräfte um sehr viele Größenordnungen geringer sind, muss man den Schluss ziehen, dass gemessen an der Gesamtzahl vorhandener Ladungsträger prozentual immer nur eine extrem geringe Anzahl getrennt ist und zur elektrischen Feldstärke beiträgt.

1.6 Ladungsdichten

Bei vielen technischen Problemen werden metallische Leiter unterschiedlicher Abmessungen und Formen verwendet, auf denen freie Ladungen verteilt sein können. Da die atomaren Strukturen praktisch immer vernachlässigbar klein sind gegenüber den Leiterabmessungen, können wir die aus diskreten Ladungsträgern bestehenden Ladungsverteilungen als kontinuierlich, d.h. beliebig fein unterteilt, annehmen. In dieser *makroskopischen* Betrachtungsweise behandeln wir nur noch Ladungsdichten und vernachlässigen dabei ganz bewusst die Tatsache, dass diese im atomaren Bereich von Punkt zu Punkt sehr stark schwanken. Solange wir uns nicht mit Fragestellungen im atomaren Bereich beschäftigen, ist diese Vorgehensweise für die Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge ausreichend. Vergleichbar ist diese Situation mit der Definition der Dichte eines Körpers als Verhältnis von Masse zu Volumen. Auch hier vernachlässigt man die Tatsache, dass die Masse nicht homogen verteilt, sondern in den Atomkernen konzentriert ist.

Die Punktladung als idealisiertes Modell einer Ladungsverteilung in einem sehr kleinen Volumen, verglichen mit den sonstigen Abmessungen der betrachteten Anordnung, haben wir bereits kennen gelernt. Man kann sich aber auch leicht vorstellen, dass eine Gesamtladung Q , bestehend aus einer sehr großen Zahl einzelner Ladungsträger, kontinuierlich auf einem dünnen Stab (eindimensionale Verteilung), auf einer dünnen Folie (zweidimensionale Verteilung) oder in einem ausgedehnten dreidimensionalen Volumen verteilt ist. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einer **Linienladung**, einer **Flächenladung** und einer **Raumladung**. Dimensionsmäßig handelt es sich in allen genannten Fällen um Ladungsdichten. Wir wollen diese Begriffe im Folgenden konkretisieren und beginnen mit der Linienladung.

Ist eine Gesamtladung Q gleichmäßig auf einer Linie der Länge l verteilt, dann bezeichnet man den Quotienten $\lambda = Q/l$ als **Linienladungsdichte**. Diese hat die Dimension As/m. Sind die einzelnen Ladungsträger nicht mehr homogen verteilt, dann ist die Linienladungsdichte ortsabhängig. Befindet sich auf einem elementaren Abschnitt der Länge Δl die elementare Ladungsmenge ΔQ , dann beschreibt der Quotient $\lambda = \Delta Q/\Delta l$ die mittlere Linienladungsdichte auf dem betrachteten Abschnitt. Will man den Wert λ für einen bestimmten Punkt P auf der Linie angeben, dann muss man die elementare Länge Δl gegen Null gehen lassen und zwar so, dass sie den Punkt P jederzeit einschließt. Die Linienladungsdichte in dem betrachteten Punkt P lässt sich dann in der Form

$$\lambda(P) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad (1.11)$$

als Differentialquotient darstellen. Ist im umgekehrten Fall die ortsabhängige Linienladungsdichte für alle Punkte auf der Linie l bekannt, dann kann die Gesamtladung durch Integration

$$Q = \int_l \lambda dl \quad (1.12)$$

über die gesamte Länge berechnet werden.

Die gleichmäßige Verteilung einer Gesamtladung Q auf einer Fläche A führt auf analoge Weise zu einer **Flächenladungsdichte** $\sigma = Q/A$ der Dimension As/m^2 . Für eine ortsabhängige Ladungsverteilung gibt das Verhältnis $\sigma = \Delta Q/\Delta A$ die mittlere Flächenladungsdichte auf dem betrachteten elementaren Flächenelement ΔA an. Im Grenzübergang $\Delta A \rightarrow 0$ erhält man wieder die Flächenladungsdichte in einem betrachteten Punkt aus dem Differentialquotienten

$$\sigma(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA} \quad (1.13)$$

und die Gesamtladung einer mit einer ortsabhängigen Dichte verteilten Flächenladung σ berechnet man aus einer Integration über die ladungsbesetzte Fläche

$$Q = \iint_A \sigma dA. \quad (1.14)$$

Zum Abschluss führen wir noch die **Raumladungsdichte** $\rho = Q/V$ der Dimension As/m^3 ein, die im Falle einer homogenen Ladungsverteilung aus dem Verhältnis von Gesamtladung Q zu ladungsbesetztem Volumen V gegeben ist. Bei ortsabhängiger Ladungsverteilung beschreibt das Verhältnis $\rho = \Delta Q/\Delta V$ die mittlere Raumladungsdichte in dem betrachteten elementaren Volumenelement ΔV . Im Grenzübergang erhält man wieder die Raumladungsdichte in einem betrachteten Punkt P aus dem Differentialquotienten

$$\rho(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \quad (1.15)$$

und die in einem Volumen V enthaltene Gesamtladung Q kann durch Integration über das ladungsbesetzte Volumen berechnet werden

$$Q = \iiint_V \rho dV. \quad (1.16)$$

1.7 Darstellung von Feldern

Zur grafischen Darstellung des Feldverlaufs verwendet man unterschiedliche Feldbilder. In diesem Abschnitt betrachten wir die Feldlinienbilder, in Kap. 1.8.2 die Äquipotentialflächen.

Als **Feldlinien** bezeichnet man Raumkurven, deren gerichtetes Wegelement immer in Richtung der Feldstärke zeigt. Der vektorielle Charakter des Feldverlaufs wird dadurch zum Ausdruck gebracht, dass die Feldlinien mit Pfeilen versehen werden, deren Spitzen in Richtung der Feldstärke zeigen. Aus der Darstellung in ►Abb. 1.7 ist zu erkennen, dass die Richtung der Feldstärke an jeder Stelle entlang der Feldlinie durch die Tangente an die Feldlinie gegeben ist.

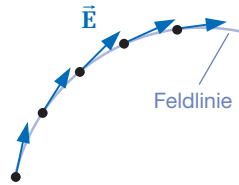


Abbildung 1.7: Konstruktion der Feldlinie

Die Dichte der in einem Feldlinienbild eingezeichneten Feldlinien kann in vielen Fällen so gewählt werden, dass sie ein Maß für den Betrag der Feldstärke darstellt. Die mit zunehmendem Abstand von einer Punktladung geringer werdende elektrische Feldstärke drückt sich in der ►Abb. 1.8 z.B. dadurch aus, dass der Abstand zwischen den Feldlinien größer wird.

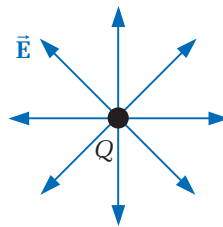


Abbildung 1.8: Feldlinienbild einer positiven Punktladung

Man muss sich jedoch immer darüber im Klaren sein, dass das gezeichnete Feldbild nur einen zweidimensionalen Schnitt durch eine dreidimensionale Feldverteilung darstellt. In der Abb. 1.8 liegen die Punktladung und damit zwangsläufig auch alle dargestellten Feldlinien in der Zeichenebene. Bei umfangreicheren, nicht mehr symmetrischen Ladungsverteilungen oder bei ungünstiger Wahl der Schnittebene wird die Darstellung des Feldlinienbildes schwieriger, da die Feldlinien einen beliebigen Winkel zur Zeichenebene aufweisen können.

Entsprechend der Einführung der elektrischen Feldstärke in Gl. (1.3) gehen die Feldlinien immer von den positiven Ladungen aus und enden auf den negativen. In vielen Fällen sind die Abstände zwischen den Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens sehr groß, z.B. können sich die negativen Ladungen sehr weit entfernt befinden, verglichen mit der räumlichen Verteilung der positiven Ladungen. Das Feldbild in unmittelbarer Umgebung der positiven Ladungen wird dann allein von diesen bestimmt. Zur Vereinfachung nimmt man in diesen Fällen an, dass sich die zugehörigen negativen Ladungen auf der **unendlich fernen Hülle** befinden, ihr Beitrag zur Feldstärke wird dann bei der Berechnung vernachlässigt. Einen derartigen Sonderfall stellt das von einer Punktladung hervorgerufene radialsymmetrische Feld in Abb. 1.8 dar, bei dem die elektrische Feldstärke radial nach außen zeigt und nur vom Abstand zur Punktladung abhängt.

Einen weiteren Sonderfall bildet das **homogene Feld**, bei dem die Feldstärke überall die gleiche Richtung und den gleichen Betrag aufweist. Ein derartiges Feld lässt sich nur näherungsweise und auch nur in einem begrenzten räumlichen Bereich realisieren (►Abb. 1.20). Den allgemeinen Fall stellt das inhomogene (ortsabhängige) Feld dar.

1.7.1 Feldbild für zwei Punktladungen

Als Beispiel wollen wir in diesem Abschnitt das Feldlinienbild für zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 berechnen, die sich auf der y -Achse an den Stellen $y = a$ und $y = -a$ befinden. Zu bestimmen ist zunächst die elektrische Feldstärke in einem allgemeinen Punkt in der xy -Ebene (Zeichenebene).

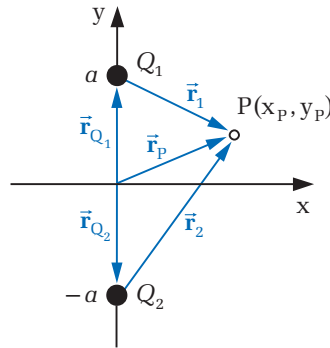


Abbildung 1.9: Zur Berechnung eines Feldlinienbildes

Zur Berechnung der Feldstärke mithilfe der Gl. (1.5) werden die Abstände der Ladungen vom Aufpunkt benötigt. Mit den Quellpunktskoordinaten $\vec{r}_{Q_1} = \vec{e}_y a$ und $\vec{r}_{Q_2} = -\vec{e}_y a$ sowie den Koordinaten des Aufpunkts $\vec{r}_P = \vec{e}_x x_P + \vec{e}_y y_P$ erhält man die Abstände

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_P - \vec{r}_{Q_1} = \vec{e}_x x_P + \vec{e}_y (y_P - a) \quad \text{mit} \quad r_1 = \sqrt{x_P^2 + (y_P - a)^2} \quad (1.17)$$

und

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_P - \vec{r}_{Q_2} = \vec{e}_x x_P + \vec{e}_y (y_P + a) \quad \text{mit} \quad r_2 = \sqrt{x_P^2 + (y_P + a)^2}. \quad (1.18)$$

Durch Einsetzen in die Beziehung (1.5) kann die elektrische Feldstärke unmittelbar angegeben werden

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_P) &\stackrel{(1.5)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[Q_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + Q_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\vec{e}_x \left(Q_1 \frac{x_P}{r_1^3} + Q_2 \frac{x_P}{r_2^3} \right) + \vec{e}_y \left(Q_1 \frac{y_P - a}{r_1^3} + Q_2 \frac{y_P + a}{r_2^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Die Auswertung dieser Beziehung für die beiden Sonderfälle gleicher $Q_1 = Q_2 = Q$ bzw. entgegengesetzter gleicher Punktladungen $Q_1 = Q, Q_2 = -Q$ ist in ►Abb. 1.10 dargestellt.

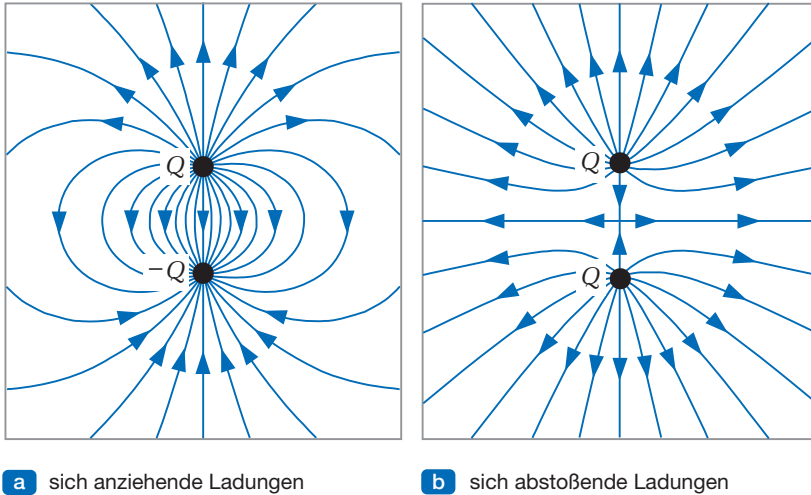


Abbildung 1.10: Feldlinienbilder

Eine Besonderheit ergibt sich bei den Punktladungen gleichen Vorzeichens in Abb. 1.10b. Hier treffen die Feldlinien in der Mitte zwischen den beiden Ladungen scheinbar aufeinander und laufen dann in zwei dazu senkrechten Richtungen auseinander. Bringen wir nun eine weitere Punktladung genau an diese Position, dann kann die Kraft auf diese Punktladung nicht gleichzeitig in verschiedene Richtungen zeigen. Das bedeutet aber auch, dass die elektrische Feldstärke in diesem Punkt eine eindeutige Richtung haben muss, d.h. die elektrischen Feldlinien dürfen sich nicht schneiden. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich dadurch auf, dass die Feldstärke bei Annäherung an diesen Punkt immer kleiner wird und in dem Punkt selber verschwindet. Diese Aussage lässt sich leicht überprüfen. Für $Q_1 = Q_2 = Q$ erhält man im Ursprung $x_P = y_P = 0$ aus der Gl. (1.19) tatsächlich den Wert $\vec{E}(0) = \vec{0}$.

Merke

Eine nicht verschwindende elektrische Feldstärke besitzt immer eine eindeutige Richtung, d.h. die elektrischen Feldlinien können sich nicht schneiden.

1.7.2 Qualitative Darstellung von Feldbildern

In vielen Fällen lässt sich ein Feldbild bereits qualitativ angeben, auch ohne umfangreiche Rechnungen durchzuführen. Dabei können folgende Informationen verwendet werden:

- Das Feld in unmittelbarer Nähe einer Punktladung wird im Wesentlichen von der Punktladung bestimmt und hat den in Abb. 1.8 dargestellten radialsymmetrischen Verlauf.
- In sehr großem Abstand von einer Ladungsanordnung verhält sich das Feld wie bei einer im Ladungsschwerpunkt angebrachten Punktladung, die den gleichen Wert wie die Gesamtladung besitzt. Die Feldlinien zeigen bei positiver Gesamtladung radial nach außen (Abb. 1.10b).
- Bei verschwindender Gesamtladung müssen alle von den positiven Ladungen ausgehenden Feldlinien auf den negativen Ladungen enden. Es verlaufen keine Feldlinien zur unendlich fernen Hülle (Abb. 1.10a). Die einzige Ausnahme bildet hier die Feldlinie auf der Verbindungslinie zwischen den beiden Punktladungen, d.h. auf der y-Achse.
- Oftmals lassen sich Symmetrieebenen finden, auf denen die Feldrichtung angegeben werden kann. In den beiden Feldbildern der Abb. 1.10 betrifft das sowohl die durch beide Punktladungen verlaufende vertikale Verbindungslinie als auch die horizontale Ebene zwischen den Ladungen.

1.8 Das elektrostatische Potential

Wir haben bereits gesehen, dass auf eine Punktladung Q in einem äußeren, d.h. von anderen Ladungen hervorgerufenen, elektrischen Feld eine Kraft ausgeübt wird. Soll diese Ladung von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 verschoben werden, dann muss *gegen* die Feldkräfte eine Arbeit aufgewendet werden. Mit der Beziehung (1.3) für die Kraft $\vec{F} = \vec{E}Q$ erhält man aus dem Linienintegral (C.7) die erforderliche Arbeit

$$W_e = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} . \quad (1.20)$$

An dieser Stelle wollen wir kurz innehalten und die Frage nach dem richtigen Vorzeichen in Gl. (1.20) untersuchen. Stellen wir uns vor, dass wir eine positive Ladung Q im Feld einer zweiten, ebenfalls positiven Ladung bewegen und zwar so, dass der Abstand zwischen beiden Ladungen verringert werden soll (die ausführliche Rechnung folgt in Kapitel 1.8.1). Das vektorielle Wegelement $d\vec{s}$ zeigt wegen der Annäherung in Richtung auf die zweite Ladung. Die von der zweiten (positiven) Ladung hervorgerufene Feldstärke zeigt aber von dieser Ladung weg, d.h. das Integral über das Skalarprodukt $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ liefert einen negativen Wert. Mit dem bereits in Gl. (1.20) vorhandenen negativen Vorzeichen nimmt W_e insgesamt einen positiven Wert an. Diese zu leistende

Arbeit beim Zusammenschieben zweier sich gegenseitig abstoßender Ladungen führt zu einer Erhöhung der im System gespeicherten Energie. Der Wert W_e in Gl. (1.20) beschreibt also die von außen dem System zugeführte Energie.

Betrachten wir nun den Sonderfall, dass eine Ladung Q entsprechend ►Abb. 1.11 entlang eines geschlossenen Weges, beginnend beim Punkt P_0 entlang der Kontur C_1 zum Punkt P_1 und anschließend entlang der Kontur C_2 wieder zurück zum Punkt P_0 bewegt wird².

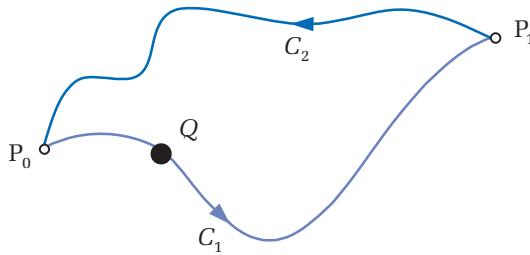


Abbildung 1.11: Bewegung einer Punktladung entlang eines geschlossenen Weges

Die dabei aufzuwendende Arbeit kann mit Gl. (1.20) durch die beiden Teilintegrale

$$W_e = -Q \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} - Q \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} - Q \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.21)$$

beschrieben werden. Da sich die Punktladung nach dem Umlauf an der gleichen Position befindet wie vorher, ist auch die Energie des Systems unverändert. Die insgesamt nach Gl. (1.21) geleistete Arbeit verschwindet daher, mit anderen Worten, das Linienintegral der elektrischen Feldstärke entlang der Kontur C_1 ist entgegengesetzt gleich dem Linienintegral der elektrischen Feldstärke entlang der Kontur C_2 .

Kennzeichnet man den geschlossenen Integrationsweg durch einen Ring im Integralzeichen, wir sprechen dann von einem **Ringintegral** oder einem Umlaufintegral (vgl. Anhang C), dann erhält man für die Gl. (1.21) folgende mathematische Darstellung

$$W_e = -Q \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} - Q \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \rightarrow \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.22)$$

Die geschlossene Kontur C in der letzten Gleichung setzt sich aus den beiden Konturen C_1 und C_2 zusammen.

² Wir wollen hier voraussetzen, dass dieser Bewegungsvorgang hinreichend langsam erfolgt, so dass die Abstrahlung elektromagnetischer Felder vernachlässigt werden kann.

Merke

Im elektrostatischen Feld verschwindet das entlang einer geschlossenen Kontur gebildete Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke.

Diese Aussage trägt natürlich auch der Tatsache Rechnung, dass die elektrischen Feldlinien bei den positiven Ladungen beginnen und bei den negativen enden. Wären die elektrischen Feldlinien in sich geschlossen, z.B. in Form eines Kreises, dann würde die Berechnung des Integrals (1.22) entlang einer derart **geschlossenen Feldlinie** auf jedem elementaren Wegelement einen Beitrag mit jeweils gleichem Vorzeichen zu dem Gesamtergebnis liefern, das somit nicht mehr verschwinden könnte. Die Ladungen stellen die Quellen für das elektrostatische Feld dar. Dieses wird daher als **Quellenfeld** bezeichnet (im Gegensatz zu dem später noch zu behandelnden **Wirbelfeld**).

Auch das Gravitationsfeld ist ein Quellenfeld, wobei die Quellen in diesem Fall durch die Massen gegeben sind. Wird ein Körper der Masse m gegen die Kräfte eines Gravitationsfeldes von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 bewegt, dann ist dafür eine Arbeit aufzuwenden, die zu einer Erhöhung der *potentiellen* Energie des Körpers um den Betrag der geleisteten Arbeit führt. Ganz analog führt die Bewegung einer Ladung gegen die Kräfte des elektrischen Feldes zu einer Erhöhung der Energie dieser Ladung, die auch in diesem Fall gleich dem Betrag der geleisteten Arbeit ist. Man spricht auch hier von der **potentiellen Energie** der Ladung und beschreibt damit die Möglichkeit dieser Ladung, durch Abgabe ihrer potentiellen Energie Arbeit leisten zu können. Nach Gl. (1.20) ist der Zuwachs an potentieller Energie bei einer Bewegung der Ladung Q von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 gegeben durch das Produkt aus dem Wert der Ladung und dem negativen Wegintegral der elektrischen Feldstärke. Wir haben aber bereits in Abb. 1.11 gesehen, dass dieses Wegintegral nicht von dem Verlauf des gewählten Weges, sondern lediglich vom Anfangs- und Endpunkt abhängt. Wählt man jeweils ausgehend von dem gleichen Anfangspunkt P_0 unterschiedliche Endpunkte für den Integrationsweg, dann unterscheiden sich die Ergebnisse bei der Berechnung der potentiellen Energie nach Gl. (1.20) nur durch den Wert einer skalaren Größe. Damit kann jeder Punkt des Raumes, bezogen auf einen willkürlichen Anfangspunkt (Bezugswert) durch eine skalare Größe charakterisiert werden, für die die Bezeichnung φ_e verwendet und die **elektrostatisches Potential** (Dimension V) genannt wird

$$W_e^{(1.20)} = Q \left[\int_{P_0}^{P_1} (-\vec{E}) \cdot d\vec{s} \right] = Q \left[\varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_0) \right]. \quad (1.23)$$

Der Zuwachs an potentieller Energie ist proportional zur Größe der bewegten Ladung Q und zur Potentialdifferenz $\varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_0)$, die bei der Ladungsbewegung durchlaufen wird. Da in dieser Beziehung nicht das Potential selbst, sondern lediglich die Änderung des Potentials zwischen Anfangs- und Endpunkt von Bedeutung ist, kann dem gesamten Raum ein beliebiges konstantes Potential überlagert werden, ohne dass das Ergebnis (1.23) davon beeinflusst wird. Die Festlegung eines Bezugspunktes ist willkürlich und wird üblicherweise so vorgenommen, dass man der Erde oder auch der unendlich fernen Hülle das Bezugspotential $\varphi_e = 0$ zuordnet. Die Erdoberfläche stellt aufgrund ihrer Leitfähigkeit eine Äquipotentialfläche dar (vgl. Kap. 1.8.2). In Schaltungen wird üblicherweise der so genannten *Masse*, d.h. dem Minusanschluss bei einer Batterie oder dem an die Schaltung angeschlossenen metallischen Gehäuse der Bezugswert $\varphi_e = 0$ zugeordnet³.

Legt man insbesondere den Anfangspunkt P_0 so, dass $\varphi_e(P_0) = 0$ gilt, dann ist die absolute potentielle Energie einer Punktladung im Punkt P_1 durch die Beziehung

$$W_e(P_1) \stackrel{(1.23)}{=} Q \left[\varphi_e(P_1) - \underbrace{\varphi_e(P_0)}_0 \right] = Q \varphi_e(P_1) \quad (1.24)$$

gegeben, umgekehrt lässt sich das absolute Potential in diesem Punkt aus der Beziehung

$$\varphi_e(P_1) = \frac{W_e(P_1)}{Q} \stackrel{(1.23)}{=} - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.25)$$

berechnen.

Merke

Das elektrostatische Potential $\varphi_e(P)$ an der Stelle eines Punktes P ist der Quotient aus der Arbeit, die nötig ist, um eine Ladung Q von einem Punkt P_0 mit dem Bezugspotential $\varphi_e(P_0) = 0$ zu dem betrachteten Punkt P zu bringen, und der Ladung.

1.8.1 Das Potential einer Punktladung

Als Beispiel wollen wir das von einer im Ursprung des Kugelkoordinatensystems befindlichen positiven Punktladung Q in einem beliebigen Punkt P hervorgerufene Potential berechnen. Die radial gerichtete Feldstärke (Abb. 1.8) ist nach Gl. (1.3) gege-

3 Die beschriebene Situation ist vergleichbar der Festlegung von Höhenangaben auf der Erde. Die Aussage, dass sich ein beliebiger Punkt auf der Erdoberfläche auf einer bestimmten Höhe befindet, ist nur sinnvoll bei gleichzeitiger Angabe des willkürlich gewählten Bezugswertes. Dieser wird üblicherweise auf die Höhe des Meeresspiegels gelegt.

ben. Bringen wir eine zweite Punktladung Q_1 von der Stelle $r = r_1$ entgegen der Feldrichtung an die Stelle $r = r_2 < r_1$ (vgl. ►Abb. 1.12), dann muss die Arbeit

$$\begin{aligned}
 W_e &\stackrel{(1.23)}{=} -Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \underbrace{\vec{e}_r}_{\vec{E}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \underbrace{\vec{e}_r}_{d\vec{s}} dr = -Q_1 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr \\
 &= -Q_1 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = Q_1 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} \right)
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

geleistet werden. Verlegen wir den Anfangspunkt r_1 auf die unendlich ferne Hülle $r_1 \rightarrow \infty$, dann gilt mit dem dort vorliegenden Bezugspotential $\varphi_e(\infty) = 0$ für die Energie der Punktladung Q_1 an der Stelle r_2 nach Gl. (1.26)

$$W_e \stackrel{(1.26)}{=} Q_1 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \stackrel{(1.24)}{=} Q_1 \varphi_e(r_2) \quad \rightarrow \quad \varphi_e(r_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \tag{1.27}$$

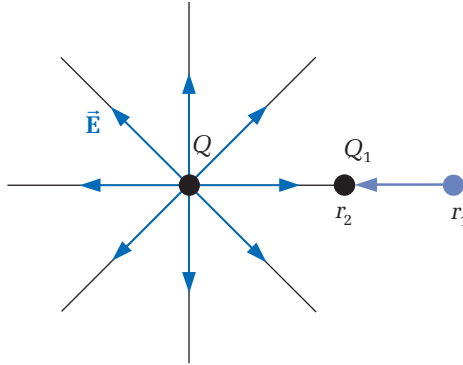


Abbildung 1.12: Verschiebung einer Punktladung im Feld einer zweiten Punktladung

Der Ausdruck $\varphi_e(r_2)$ beschreibt das von der Punktladung Q an der Stelle $r = r_2$ hervorgerufene Potential. Dieses ist proportional zur Ladung und umgekehrt proportional zum Abstand von der Ladung. Die Flächen konstanten Potentials sind konzentrisch um die Punktladung angeordnete Kugelflächen. An dem ersten Ausdruck in Gl. (1.27) erkennt man, dass die zu leistende Arbeit positiv ist, wenn beide Ladungen gleichen Vorzeichen haben und sich gegenseitig abstoßen.

Betrachten wir noch einmal das Ergebnis (1.26), dann beschreibt dieses in der Form $W_e = Q_1\varphi_e(r_2) - Q_1\varphi_e(r_1)$ die aufzuwendende Arbeit bzw. die Zunahme der potentiellen Energie der Punktladung Q_1 , wenn diese von einem Punkt r_1 mit dem Potential $\varphi_e(r_1)$ zu einem Punkt r_2 mit dem Potential $\varphi_e(r_2)$ bewegt wird. Dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\varphi_e(r_2) = \varphi_e(r_1)$ gilt, d.h. das Verschieben einer Ladung zwischen zwei Punkten mit gleichem Potential erfordert als Integral über den gesamten Weg betrachtet keine Arbeit.