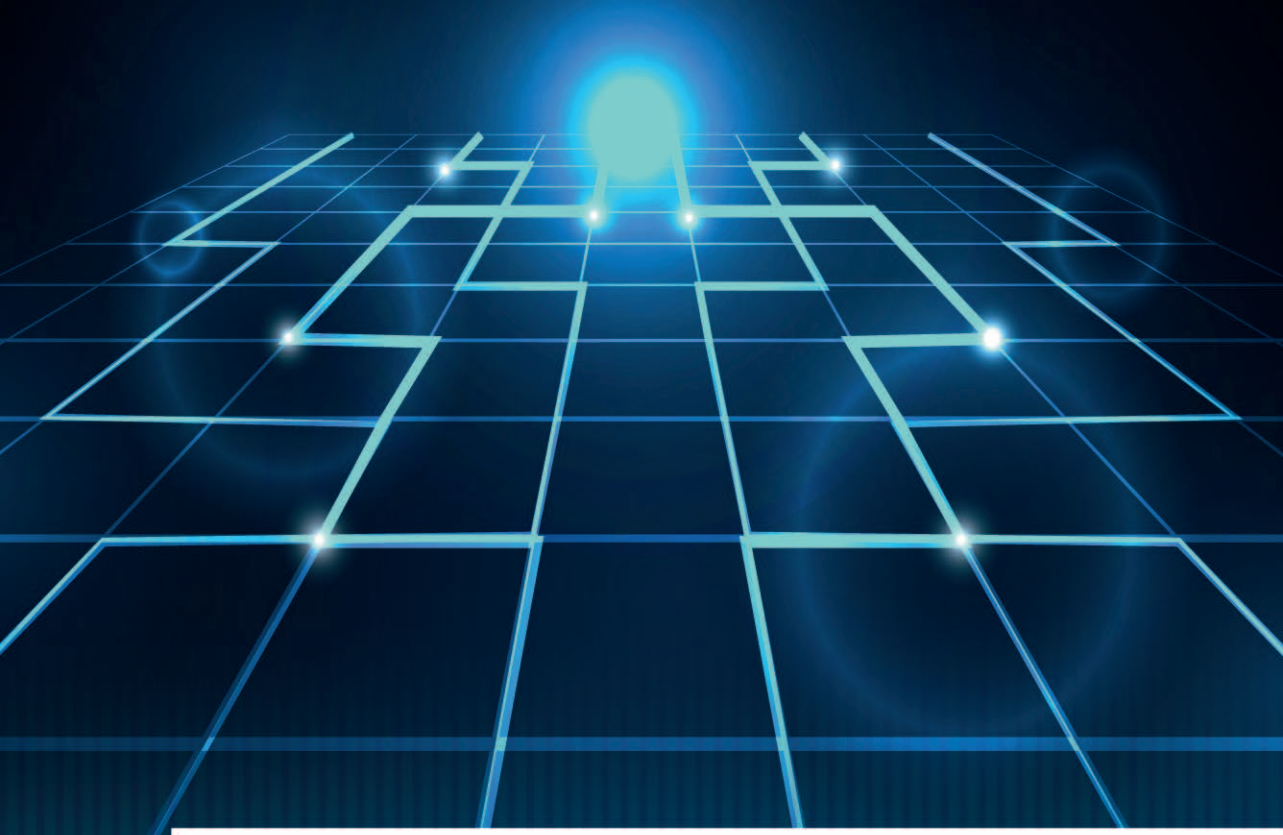


# Grundlagen Elektrotechnik Netzwerke

2., aktualisierte Auflage

Lorenz-Peter Schmidt
Gerd Schaller
Siegfried Martius

EXTRAS ONLINE

ALWAYS LEARNING

PEARSON

# Grundlagen Elektrotechnik

## Netzwerke

# Grundlagen Elektrotechnik
# Netzwerke

2., aktualisierte Auflage

Lorenz-Peter Schmidt
Gerd Schaller
Siegfried Martius

ALWAYS LEARNING
PEARSON

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Die Informationen in diesem Buch werden ohne Rücksicht auf einen eventuellen Patentschutz veröffentlicht. Warennamen werden ohne Gewährleistung der freien Verwendbarkeit benutzt.Bei der Zusammenstellung von Texten und Abbildungen wurde mit größter Sorgfalt vorgegangen. Trotzdem können Fehler nicht ausgeschlossen werden. Verlag, Herausgeber und Autoren können für fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen. Für Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler sind Verlag und Herausgeber dankbar.

Alle Rechte vorbehalten, auch die der fotomechanischen Wiedergabe und der Speicherung in elektronischen Medien. Die gewerbliche Nutzung der in diesem Produkt gezeigten Modelle und Arbeiten ist nicht zulässig.

Es konnten nicht alle Rechteinhaber von Abbildungen ermittelt werden. Sollte dem Verlag gegenüber der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar nachträglich gezahlt.

Fast alle Produktbezeichnungen und weitere Stichworte und sonstige Angaben, die in diesem Buch verwendet werden, sind als eingetragene Marken geschützt. Da es nicht möglich ist, in allen Fällen zeitnah zu ermitteln, ob ein Markenschutz besteht, wird das ®-Symbol in diesem Buch nicht verwendet.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

16 15 14

ISBN 978-3-86894-239-2 (Buch)
ISBN 978-3-86326-142-9 (E-Book)

© 2014 by Pearson Deutschland GmbH
Lilienthalstraße 2, D-85399 Hallbergmoos/Germany
Alle Rechte vorbehalten
www.pearson.de
A part of Pearson plc worldwide

Programmleitung: Birger Peil, bpeil@pearson.de
Korrektorat: Katharina Pieper, Berlin
Herstellung: Philipp Burkart, pburkart@pearson.de
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck und Verarbeitung: Drukarnia Dimograf, Bielsko-Biała

Printed in Poland

# Inhaltsübersicht


| | | |
|---|---|---|
| Vorwort | | 13 |
| Formelzeichen und Symbole | | 15 |
| Kapitel 1 | Einführung | 19 |
| Kapitel 2 | Quelle und Last | 39 |
| Kapitel 3 | Methoden und Sätze für die Berechnung einfacher Schaltungen | 55 |
| Kapitel 4 | Analyse von Netzwerken | 101 |
| Kapitel 5 | Zweipole | 121 |
| Kapitel 6 | Mehrpolige Netzwerke | 155 |
| Kapitel 7 | Zweitore | 181 |
| Kapitel 8 | Nicht sinusförmige periodische Signale | 279 |
| Kapitel 9 | Anhang | 347 |
| Literaturverzeichnis | | 367 |
| Register | | 369 |

# Inhaltsverzeichnis


**Vorwort** 13

**Formelzeichen und Symbole** 15

**Kapitel 1 Einführung** 19

1.1 Zeitharmonische Signale ... 20

1.2 Netzwerkelemente in komplexer Darstellung ... 23

1.3 Kirchhoff-Gesetze ... 26

1.4 Leistung und Energie ... 29

1.4.1 Beliebige Zeitabhängigkeit ... 29

1.4.2 Wechselstrombetrieb mit zeitharmonischen Signalen ... 29

1.4.3 Komplexe Leistung ... 34

1.5 Übungsaufgaben ... 36

**Kapitel 2 Quelle und Last** 39

2.1 Konstantspannungsquelle, Konstantstromquelle ... 40

2.2 Beschaltung einer Quelle mit einer Last ... 42

2.3 Leistungsübertragung von der Quelle zur Last ... 43

2.4 Gesteuerte Quellen ... 46

2.5 Ersatzquellen, Ersatzlast ... 49

2.6 Übungsaufgaben ... 53

**Kapitel 3 Methoden und Sätze für die Berechnung einfacher Schaltungen** 55

3.1 Überlagerungssatz ... 56

3.2 Ähnlichkeitssatz ... 61

3.3 Reihen- und Parallelschaltung von Quellen ... 64

3.4 Quellenversatz, -teilung, -substitution und -reduktion ... 73

3.5 Der Satz von J. M. Miller ... 78

3.6 Äquivalente Schaltungen ..... 81
3.7 Duale Schaltungen ..... 89
3.8 Das Theorem von B. D. H. TELLEGEN ..... 92
3.9 Das Reziprozitäts-Theorem ..... 95
3.10 Übungsaufgaben ..... 99

**Kapitel 4 Analyse von Netzwerken** **101**

4.1 Einführung ..... 102
4.2 Maschenstromverfahren ..... 104
4.2.1 Maschenströme ..... 104
4.2.2 Maschenauswahl im Netzwerk ..... 107
4.2.3 Quellen und Übertrager im Netzwerk ..... 109
4.2.4 Matrixdarstellung ..... 111
4.3 Knotenpotenzialverfahren ..... 112
4.3.1 Knotenpotenziale und Knotenspannungen ..... 112
4.3.2 Festlegung der Knotenspannungen ..... 115
4.3.3 Quellen und Übertrager im Netzwerk ..... 116
4.3.4 Matrixdarstellung ..... 117
4.4 Übungsaufgaben ..... 119

**Kapitel 5 Zweipole** **121**

5.1 Komplexe Frequenz ..... 123
5.2 Eigenschaften der Zweipolfunktion ..... 129
5.3 Verlustlose Zweipole ..... 136
5.4 Normierte Zweipolfunktion und Netzwerkvarianten ..... 143
5.5 Ideale und reale Bauelemente ..... 150
5.6 Übungsaufgaben ..... 153

**Kapitel 6 Mehrpolige Netzwerke** **155**

6.1 Allgemeiner n-Pol ..... 156
6.1.1 Impedanz- und Admittanzmatrix ..... 156
6.1.2 Parallelschaltung von n-Polen ..... 160

6.2 Allgemeines n-Tor ... 163
6.3 Analyse und Torbeschreibung nichttrivialer Schaltungen ... 167
6.3.1 Schaltungsreduktion mit Hilfe des Maschenstromverfahrens ... 167
6.3.2 Schaltungsreduktion mit Hilfe des Knotenpotenzialverfahrens ... 170
6.3.3 Schaltungsreduktion durch Torgruppierung ... 172
6.4 Streumatrix eines Mehrtors ... 174
6.4.1 Definition der Wellengrößen ... 174
6.4.2 Definition einer Streumatrix ... 176
6.4.3 Bedeutung der Streuparameter ... 176
6.5 Übungsaufgaben ... 180

**Kapitel 7 Zweitore** 181

7.1 Torbedingung ... 183
7.2 Zweitorgleichungen in Matrixform ... 187
7.2.1 Mögliche Matrixbeschreibungen ... 187
7.2.2 Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen ... 191
7.3 Zweitore mit besonderen Eigenschaften ... 194
7.3.1 Reziprozität (Umkehrbarkeit) ... 194
7.3.2 Rückwirkungsfreiheit ... 195
7.3.3 Symmetrische Zweitore ... 196
7.4 Matrizen elementarer Zweitore ... 200
7.4.1 Matrizen reziproker Zweitore ... 200
7.4.2 Matrizen gesteuerter Quellen ... 206
7.5 Zweitorersatzschaltungen ... 207
7.5.1 Reduktion eines allgemeinen auf ein erdgebundenes Zweitor ... 208
7.5.2 $\pi$-Ersatzschaltung ... 209
7.5.3 T-Ersatzschaltung ... 211
7.5.4 Ersatzschaltungen symmetrischer reziproker Zweitore ... 212
7.5.5 Zweitore mit unabhängigen Quellen ... 214
7.6 Zusammenschaltungen von Zweitoren ... 215
7.6.1 Reihenschaltung von Zweitoren ... 215

7.6.2 Parallelschaltung von Zweitoren ..... 219
7.6.3 Reihen-Parallel-Schaltung von Zweitoren ..... 223
7.6.4 Parallel-Reihen-Schaltung von Zweitoren ..... 223
7.6.5 Kettenschaltung von Zweitoren ..... 225
7.6.6 Beispiele für Zusammenschaltungen ..... 226
7.7 Klemmenvertauschung bei Dreipolen ..... 228
7.7.1 Spannungs-/Stromtransformation ..... 229
7.7.2 Ränderung der Admittanzmatrix ..... 230
7.8 Betriebsverhalten von Zweitoren ..... 233
7.8.1 Reflektanz des beschalteten Zweitors ..... 234
7.8.2 Transmittanz des beschalteten Zweitors ..... 236
7.8.3 Reflektanz, Transmittanz und Kettenparameter ..... 239
7.9 Streumatrix des Zweitors ..... 240
7.9.1 Grundsätzliches ..... 240
7.9.2 Streumatrizen einfacher Zweitore ..... 243
7.9.3 Beziehungen zwischen Streumatrix- und anderen Zweitorparametern ..... 245
7.10 Frequenzverhalten ..... 248
7.10.1 Grundsätzliche Filterarten ..... 249
7.10.2 Frequenzgang und Übertragungsfunktion ..... 251
7.10.3 Transmittanz als Übertragungsfunktion ..... 254
7.10.4 Bode-Diagramme ..... 262
7.11 Übungsaufgaben ..... 273

**Kapitel 8 Nicht sinusförmige periodische Signale 279**

8.1 Fourier-Analyse periodischer Signale ..... 282
8.1.1 Fourier-Reihe ..... 282
8.1.2 Orthogonalität ..... 284
8.1.3 Fourier-Koeffizienten ..... 284
8.2 Darstellungsformen der Fourier-Reihe ..... 287
8.2.1 Sinus-Kosinus-Darstellung ..... 287
8.2.2 Amplituden-Phasen-Darstellung ..... 288

8.2.3 Die komplexe Darstellung von Fourier-Reihen ..... 289
8.2.4 Fourier-Reihe einer Rechteckfunktion ..... 291
8.3 Symmetrien, Verschiebungssatz und Beispiele ..... 295
8.3.1 Symmetrien und Verschiebungssatz ..... 295
8.3.2 Beispiele ..... 297
8.4 Kenngrößen periodischer Signale ..... 301
8.4.1 Definitionen ..... 301
8.4.2 Kenngrößen ausgesuchter Signale ..... 305
8.4.3 Leistungsberechnungen ..... 307
8.4.4 Beispiele zur Verzerrungsblindleistung ..... 310
8.5 Matrixdarstellung der Fourier-Reihe ..... 316
8.6 Stationäre Reaktion auf eine periodische Erregung ..... 322
8.7 Nichtlineare Zweipole im Gleichstromkreis ..... 331
8.8 Nichtlineare Zweipole im Wechselstromkreis ..... 338
8.9 Übungsaufgaben ..... 346

**Kapitel 9 Anhang** **347**

9.1 Fourier-Reihen ..... 348
9.1.1 Allgemeine Fourier-Reihen ..... 348
9.1.2 Gibbs'sches Phänomen ..... 350
9.1.3 Fourier-Reihen-Tabelle ..... 353
9.2 Matrizenumrechnung n-Tore ..... 356
9.3 Matrizen ..... 360

**Literaturverzeichnis** **367**

**Register** **369**

# Vorwort

Das vorliegende Lehrbuch **Grundlagen Elektrotechnik – Netzwerke** richtet sich an Studenten der Fachrichtungen Elektrotechnik, Informations- und Kommunikationstechnik sowie Mechatronik, Maschinenbau und Medizintechnik an Universitäten und Fachhochschulen. Es basiert auf den Erfahrungen aus mehrjährig durchgeführten Vorlesungen an der Universität Erlangen-Nürnberg. Dieses Lehrbuch setzt lediglich Grundwissen über elektrische und elektronische Bauelemente und den Umgang mit Spannungen und Strömen in einfachen elektrischen Schaltungen sowie die Kenntnis komplexer Zahlen und Rechenoperationen voraus. Es ist den Grundlagen der Analyse und Synthese elektrischer Netzwerke gewidmet. Die Darstellungen konzentrieren sich weitgehend auf lineare, zeitunabhängige Netzwerke und zeitharmonische Signale. Im letzten Kapitel wird dann die Betrachtung ausgeweitet auf die Erregung von Netzwerken mit nicht sinusförmigen periodischen Signalen und auch auf nichtlineare Bauelemente als „Verursacher“ von Oberwellen. Insgesamt wird konsequent die komplexe Darstellung von zeitharmonischen Signalen und Bauelementeigenschaften eingesetzt und eingeübt, da für alle vertieften Studien von Netzwerkeigenschaften der Umgang mit der komplexen Darstellungsform problemlos beherrscht werden sollte.

## Inhaltlicher Aufbau

Nach einem einführenden Kapitel mit einigen Konventionen und den Grundlagen der komplexen Wechselstromrechnung werden im zweiten Kapitel Betrachtungen über Quelle und Last als Netzwerkelemente und die Leistungsübertragung von der Quelle zur Last angestellt. Im dritten Kapitel werden Methoden und Sätze der Netzwerktheorie eingeführt, die der Vereinfachung von Netzwerkberechnungen dienen und wesentlich zum Verstehen der Wirkungsweise von einfachen Netzwerken beitragen. Im vierten Kapitel werden mit dem Maschenstromverfahren und dem Knotenpotenzialverfahren systematisierte Methoden zur vollständigen Analyse von Netzwerken mit höherer Komplexität behandelt, die sich prinzipiell auch für den Einsatz in Netzwerkanalyseprogrammen eignen. Das fünfte Kapitel setzt sich grundlegend mit den Eigenschaften von Zweipolfunktionen zur Beschreibung von Zweipolen auseinander. Auf dieser Basis werden für den wichtigen Sonderfall verlustloser Zweipole Methoden aufgezeigt, um einen schnellen Überblick über das Frequenzverhalten von Reaktanzzweipolen zu gewinnen sowie aus vorgegebenen Zweipolfunktionen LC-Netzwerke zu synthetisieren. Im sechsten Kapitel werden die wichtigsten Beschreibungsformen und Netzwerkanalysemethoden für allgemeine mehrpolige Netzwerke eingeführt und der wechselnde Umgang mit n-Pol- und m-Tor-Darstellungen übersichtlich dargestellt. Diese Thematik wird im siebten Kapitel anhand der in der Praxis wichtigsten Schaltungsgruppe der Zweitore weiter vertieft und auf die verschiedenen Zusammenschaltungsformen von Zweitoren ausgeweitet. Neben den strom- und spannungsbezogenen Darstellungen wird auch das Konzept der vor- und rücklaufenden Wellen als Betriebsgrößen eingeführt, da es

sich besonders gut zur Darstellung und Veranschaulichung des Leistungstransports in einem Netzwerk eignet. Das Übertragungsverhalten von einfachen und verketteten Zweitoren wird am Beispiel gängiger Filterarten durchgesprochen, außerdem wird das Bode-Diagramm zur schnellen Übersichtsdarstellung eingeführt. Im achten und letzten Kapitel wird die Fourier-Reihenentwicklung allgemein eingeführt und auf nicht sinusförmige periodische Erregungen von Netzwerken angewendet. Als mögliche Ursache für nicht sinusförmige Spannungen und Ströme in Netzwerken werden nichtlineare Zweipole mit ihren Kennlinien und die Berechnung des erzeugten Oberwellenspektrums vorgestellt.

Abschließend findet der interessierte Leser im Anhang eine reichhaltige Zusammenstellung von Definitionen und Regeln zur Fourier-Reihenentwicklung und zur Matrizenrechnung, die das schnelle Nachschlagen erleichtert.

Ein ganz herzliches Dankeschön geht an Frau Lisa Reiser, B. Sc., und Herrn Dipl.-Ing. Marcus Schramm, die ganz wesentlich zur Anfertigung der Reinschrift und der Abbildungen beigetragen haben.

## Zusätzliche Materialien

Eine umfangreiche Sammlung von Übungsbeispielen ist zusammen mit einer Beschreibung des Lösungswegs auf der buchbegleitenden Website unter www.pearson-studium.de verfügbar.

Erlangen

Lorenz-Peter Schmidt,
Gerd Schaller,
Siegfried Martius

# Formelzeichen und Symbole

## Formelzeichen

| | |
|---|---|
| $Z$ | reelle Größe |
| $\underline{Z}$ | komplexe Größe, $\underline{Z} = \lvert\underline{Z}\rvert \cdot \mathrm{e}^{j\varphi} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} + j\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}$ |
| $\underline{Z}^*$ | zu $\underline{Z}$ konjugiert komplexe Größe, $\underline{Z} = \lvert\underline{Z}\rvert \cdot \mathrm{e}^{-j\varphi} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} - j\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}$ |
| $\lvert\underline{Z}\rvert$ | Betrag der komplexen Größe $\underline{Z}$ |
| $\varphi$ | Phase, Argument (arg) der komplexen Größe $\underline{Z}$ |
| $\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}$ | Realteil der komplexen Größe $\underline{Z}$, $\mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = \lvert Z\rvert \cdot \cos(\varphi) = (\underline{Z} + \underline{Z}^*)/2$ |
| $\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}$ | Imaginärteil der komplexen Größe $\underline{Z}$, $\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = \lvert\underline{Z}\rvert \cdot \sin(\varphi) = (\underline{Z} - \underline{Z}^*)/(2j)$ |
| $\boldsymbol{M}$ | Matrix mit reellen Koeffizienten $m_{ij}$ |
| $\underline{\boldsymbol{M}}$ | Matrix mit komplexen Koeffizienten $\underline{m}_{ij}$ |
| $\underline{\boldsymbol{M}}^*$ | konjugiert komplexe Matrix |
| $\underline{\boldsymbol{M}}^\mathsf{T}$ | transponierte Matrix |
| $\underline{\boldsymbol{M}}^{-1}$ | inverse Matrix |
| $\det \underline{\boldsymbol{M}}$ | Determinante der Matrix $\underline{\boldsymbol{M}}$ |

## Symbole

| | | |
|---|---|---|
| $a(\omega)$ | [dB] | Dämpfung, Betriebsdämpfung |
| $\underline{a}, \underline{b}$ | $[\sqrt{\mathrm{VA}}]$ | Wellengrößen der zu- und wegfließenden Welle |
| $\underline{\boldsymbol{A}}$ | [Ω;S] | Kettenmatrix |
| $\underline{\boldsymbol{a}}$ | [−] | normierte Kettenmatrix |
| $B$ | [S] | Blindleitwert/Suszeptanz, Imaginärteil der Admittanz |
| $C$ | [F] | Kapazität eines Kondensators |
| $\underline{\boldsymbol{C}}$ | [Ω;S] | Parallelreihenmatrix |
| $E$ | [−] | Fehlerfunktion |
| $\boldsymbol{E}$ | [−] | Einheitsmatrix |
| $f$ | [Hz] | Frequenz |
| $f_0$ | [Hz] | Resonanzfrequenz |
| $G$ | [S] | ohmscher Leitwert/ Konduktanz, Realteil der Admittanz |
| $\underline{\boldsymbol{H}}$ | [Ω;S] | Reihenparallelmatrix |
| $\underline{H}(\underline{s})$ | [−] | Übertragungsfunktion |
| $\underline{I}$ | [A] | Strom |
| $\hat{I}$ | [A] | Scheitelwert des Stromes |
| $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$, $\underline{I}_E$ | [A] | Basis-, Kollektor-, Emitterstrom bei Bipolar-Transistoren |

| | | |
|---|---|---|
| $\underline{I}_k$ | [A] | Strom der $k$-ten Harmonischen |
| $\underline{\boldsymbol{I}}_k$ | [A] | Matrix des Stromes mit $k$ Harmonischen |
| $\underline{I}_{KS}$ | [A] | Kurzschlussstrom |
| $\underline{I}_M, \underline{I}^{\mathrm{M}}$ | [A] | Maschenstrom |
| $\underline{\boldsymbol{I}}_M$ | [A] | Matrix der Maschenströme |
| $\underline{I}_q$ | [A] | Quellenstrom |
| $\underline{I}^+, \underline{I}^-$ | [A] | Strom der zu- und wegfließenden Welle |
| $i(t)$ | [A] | zeitabhängiger Strom |
| $\underline{i}_i$ | [–] | normierter Strom am Tor $i$ |
| $j$ | [–] | imaginäre Einheit |
| $K$ | [–] | Anzahl Knoten in einem Netzwerk |
| $L$ | [H] | Induktivität einer Spule, Selbstinduktivität eines Übertragers |
| $M$ | [H] | Gegeninduktivität eines Übertragers |
| $n$ | [–] | Idealitätsfaktor einer Diode |
| $\underline{P}$ | [VA] | komplexe Leistung |
| $P_B$ | [VA] | Blindleistung |
| $P_D$ | [VA] | Verzerrungsblindleistung |
| $P_Q$ | [VA] | reaktive Blindleistung |
| $P_{max}$ | [W] | maximale oder verfügbare Wirkleistung (einer Quelle) |
| $P_S$ | [VA] | Scheinleistung |
| $P_V$ | [W] | Verlustleistung |
| $P_W, P_P$ | [W] | Wirkleistung |
| $P^+, P^-$ | [V] | Wirkleistung der zu- und wegfließenden Welle |
| $Q_0$ | [–] | Güte, Eigengüte |
| $R$ | [Ω] | ohmscher Widerstand/Resistanz, Realteil der Impedanz |
| $\underline{r}$ | [–] | Reflexionsfaktor, Reflektanz |
| $\underline{S}$ | [S] | Steilheit |
| $\underline{\boldsymbol{S}}$ | [–] | Streumatrix |
| $\underline{S}_{\mu\nu}$ | [–] | Koeffizienten der Streumatrix |
| $\underline{s}$ | [$\mathrm{s}^{-1}$] | komplexe Frequenz, eigentlich Kreisfrequenz |
| $s$ | [–] | Konvergenzfaktor |
| $\underline{s}_Z$ | [$\mathrm{s}^{-1}$] | Nullstellen einer Impedanz- oder Admittanzfunktion |
| $\underline{s}_N$ | [$\mathrm{s}^{-1}$] | Polstellen einer Impedanz- oder Admittanzfunktion |
| $t$ | [s] | Zeit |
| $T_0$ | [s] | Periodendauer |
| $\underline{U}$ | [V] | Spannung |
| $\hat{U}$ | [V] | Scheitelwert der Spannung |
| $U_{eff}$ | [V] | Effektivwert der Spannung |
| $U_0$ | [V] | Gleichspannung |
| $\underline{U}_0$ | [V] | Phasor der Gleichspannung, $\underline{U}_0 = \sqrt{2}\, U_0$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\underline{U}_{BE}$, $\underline{U}_{CE}$ | [V] | Basis-Emitter-, Kollektor-Emitterspannung bei Bipolar-Transistoren |
| $\underline{U}_K$ | [V] | Knotenspannung; Spannung der $k$-ten Harmonischen |
| $\underline{\boldsymbol{U}}_k$ | [V] | Matrix der Spannung mit $k$ Harmonischen |
| $\underline{U}_{LL}$ | [V] | Leerlaufspannung |
| $\underline{U}_q$ | [V] | Quellenspannung |
| $U_T$ | [V] | Temperaturspannung |
| $\underline{U}^+$, $\underline{U}^-$ | [V] | Spannung der zu- und wegfließenden Welle |
| $u(t)$ | [V] | zeitabhängige Spannung |
| $\underline{u}_i$ | [−] | normierte Spannung am Tor $i$ |
| $\ddot{u}$ | [−] | Übersetzungsverhältnis eines idealen Übertragers |
| $\underline{V}_U$ | [−] | Spannungsverstärkung |
| $\underline{V}_I$ | [−] | Stromverstärkung |
| $X$ | [Ω] | Blindwiderstand/Reaktanz; Imaginärteil der Impedanz |
| $\underline{Y}$ | [S] | Admittanz, $\underline{Y} = G + jB$ |
| $\underline{\boldsymbol{Y}}$ | [S] | Admittanzmatrix |
| $\underline{\boldsymbol{y}}$ | [−] | normierte Admittanzmatrix |
| $\underline{Y}_i$ | [S] | Innenadmittanz einer Quelle |
| $Z$ | [−] | Anzahl Zweige in einem Netzwerk |
| $\underline{Z}$ | [Ω] | Impedanz, $\underline{Z} = R + jX$ |
| $\underline{\boldsymbol{Z}}$ | [Ω] | Impedanzmatrix |
| $\underline{\boldsymbol{z}}$ | [−] | normierte Impedanzmatrix |
| $\underline{Z}_i$ | [Ω] | Innenimpedanz einer Quelle |
| $\underline{Z}_m$ | [Ω] | Transimpedanz |
| $\underline{\alpha}$ | [−] | Leerlaufspannungsverstärkung |
| $\underline{\beta}$ | [−] | Kurzschlussstromverstärkung |
| $\varphi$, $\varphi(\omega)$ | [°] | Phasenwinkel; Phasendifferenz |
| $\underline{\varphi}_m$ | [V] | Potenzial am Knoten $m$ |
| $\sigma$ | [$s^{-1}$] | Dämpfungsmaß |
| $\omega$ | [$s^{-1}$] | Kreisfrequenz |
| $\omega_0$ | [$s^{-1}$] | Kreisfrequenz bei Resonanz |
| $W_{max}$ | [Ws] | Maximalwert der gespeicherten Energie |
| $\overline{w}_m$ | [Ws] | Mittlere magnetische Energie |
| $\overline{w}_e$ | [Ws] | Mittlere elektrische Energie |

# Einführung

1


1.1 Zeitharmonische Signale ..... 20

1.2 Netzwerkelemente in komplexer Darstellung 23

1.3 Kirchhoff-Gesetze ..... 26

1.4 Leistung und Energie ..... 29

1.5 Übungsaufgaben ..... 36


ÜBERBLICK

» Die Eigenschaften linearer, zeitunabhängiger Netzwerke werden in der Regel im eingeschwungenen Zustand mit Hilfe von zeitharmonischen, also sinus- oder kosinusförmigen periodischen Signalen in komplexer Darstellung analysiert. Durch geeignete Überlagerung (Superposition) von Grund- und Oberwellen können auf dieser Basis auch nicht sinusförmige periodische Vorgänge dargestellt werden. Zur Unterscheidung wird in diesem Werk die Zeitabhängigkeit von Betriebsgrößen und daraus abgeleiteten Kenngrößen durch Kleinschreibung und explizite Angabe der Zeitabhängigkeit $(t)$ gekennzeichnet, während die komplexen Zeigergrößen in Großschreibung durch Unterstriche kenntlich gemacht werden. Häufig wird die Frequenzabhängigkeit dieser Größen auch durch den Suffix $(\omega)$ hervorgehoben. In diesem einleitenden Kapitel werden Ströme, Spannungen und Netzwerkelemente in komplexer Darstellung eingeführt und die grundlegenden Gesetze der Netzwerkanalyse sowie die Leistung und die Energie in einem Netzwerk mit komplexen Zeigergrößen angegeben. Diese Darstellungsform und die hier eingeführte Nomenklatur werden dann durchgängig in den Folgekapiteln verwendet. Sehr viele Rechenschritte werden in komplexer Darstellung durchgeführt. Der problemlose Umgang mit komplexen Zahlen wird daher im Folgenden vorausgesetzt. «

## LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie in der Lage sein,

- zeitharmonische Spannungen und Ströme in einem Netzwerk wahlweise im Zeitbereich oder als komplexe Zeigergrößen darzustellen,
- die Kirchhoff-Gesetze in komplexer Darstellung auf einfache Netzwerke anzuwenden,
- die verschiedenen Darstellungen der Leistung in einem Zweipol angeben und umrechnen zu können: Momentanleistung, Wirkleistung, Blindleistung, komplexe Leistung.

## 1.1 Zeitharmonische Signale

### Darstellung im Zeitbereich:

Zur mathematischen Darstellung zeitabhängiger elektrischer Spannungen und Ströme wird überwiegend die Kosinusfunktion verwendet:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \tag{1.1}$$

$$i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{1.2}$$

Dabei sind $\hat{U}$ und $\hat{I}$ die (positiven) Amplituden von Spannung und Strom mit den Dimensionen V (Volt) bzw. A (Ampere),

$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T \tag{1.3}$$

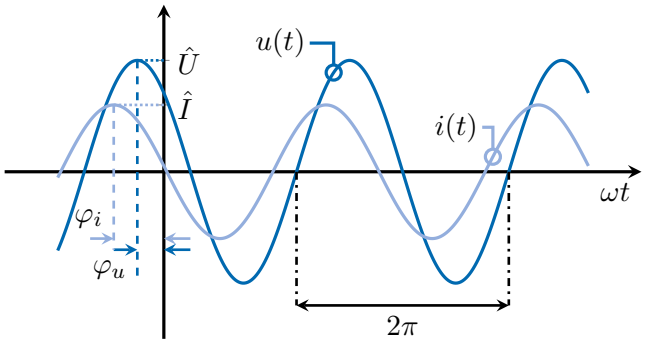



**Abbildung 1.1:** Verlauf einer zeitharmonischen Spannung und eines Stromes mit unterschiedlichen Nullphasenwinkeln

bezeichnet die Kreisfrequenz des periodischen Signals, $f$ die Frequenz und $T$ seine Periodendauer. $\varphi_u$, $\varphi_i$ sind die sogenannten Nullphasenwinkel, geben also einen zeitlichen Versatz der Kosinusfunktionen beim Nulldurchgang an.
Veranschaulicht werden die zeitlichen Verläufe von Strom und Spannung mit ihren Kenngrößen nach Gleichung (1.1) und (1.2) in der Abbildung 1.1.
Als „normierte“ Zeitachse wurde hier die $\omega t$-Achse gewählt, bei der eine Periode der Kosinusschwingung nach $\omega t = 2\pi$ durchlaufen wird.

### Darstellung mit komplexen Zeigern:

Mit Hilfe der Euler'schen Beziehung

$$\mathrm{e}^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{jx} + \mathrm{e}^{-jx}\right) \tag{1.4}$$

kann die zeitabhängige Spannung nach Gleichung (1.1) wie folgt umgewandelt werden:

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \frac{1}{2}\hat{U}\left(\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi_u)} + \mathrm{e}^{-j(\omega t+\varphi_u)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_u}}_{\underline{U}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} + \frac{1}{2}\underbrace{\hat{U} \cdot \mathrm{e}^{-j\varphi_u}}_{\underline{U}^*} \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Es ergeben sich 2 komplexe Ausdrücke, die mit $\omega t$ als Drehzeiger in der komplexen Ebene gegenläufig rotieren. Die additive Überlagerung ergibt jedoch zu jedem Zeitpunkt wieder einen Wert auf der reellen Achse, also unsere reelle harmonische Zeitfunktion. Gehen wir davon aus, dass die Frequenz der Spannungen oder Ströme, mit denen wir das lineare Netzwerk erregen, ohnehin bekannt ist, dann steckt die eigentliche Information über die Spannungen und Ströme im gesamten Netzwerk in ihrer Amplitude und Phase, die wir gemäß Gleichung (1.5) zu einer komplexen Größe zusammenfassen können. Am Beispiel der Spannung in Gleichung (1.5) ergibt sich aus dem ersten Term der komplexe Zeiger $\underline{U}$ und aus dem zweiten Term der dazu konjugiert komplexe Wert $\underline{U}^*$. Damit reicht es also aus, wenn wir (bei bekannter Frequenz) eine Spannung durch ihre komplexe Zeigergröße $\underline{U}$ charakterisieren, in der Amplitude und Phase der Spannung enthalten sind.

**Merke**

In einem **linearen, zeitunabhängigen Netzwerk** haben Spannungen und Ströme immer nur diejenigen Frequenzen, die durch die Anregungen in das Netzwerk eingespeist werden! Es entstehen also niemals „neue“ Frequenzen.

Eine Rückrechnung auf die zugehörige zeitabhängige Spannung kann natürlich jederzeit mit der aus (1.5) abgeleiteten Beziehung erfolgen:

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(\underline{U} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} + \underline{U}^* \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left\{\underline{U} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \tag{1.6}$$

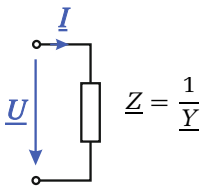
Gleiches gilt für Ströme im Netzwerk. Komplexe Zeigergrößen werden in der Literatur auch häufig als „Phasoren“ bezeichnet. Für Spannungen und Ströme in einem Netzwerk ergeben sich also die folgenden Korrespondenzen, die bei hier gegebener Frequenz im mathematischen Sinne eindeutig sind:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U} = \hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_u} \tag{1.7}$$

$$i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{I} = \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_i} \tag{1.8}$$

Spannungen und Ströme können zur Veranschaulichung ihrer Lage zueinander auch als ruhende Zeiger in die komplexe Ebene eingezeichnet werden, wie in Abbildung 1.2 dargestellt. Der Übersichtlichkeit halber und ohne Beschränkung der Allgemeinheit tritt dabei die Zeitabhängigkeit mit $\omega t$ nicht explizit in Erscheinung.

In einem Netzwerk führt die Verknüpfung von Spannung und Strom an einem Bauelement über das (auch für die komplexe Wechselstromrechnung gültige) ohmsche Gesetz im allgemeinen Fall zu komplexen Impedanzen bzw. Admittanzen, deren Phasenwinkel sich aus der Differenzphase von Spannung und Strom ergibt:




$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} \quad \text{Impedanz}$$

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \underline{Y} \quad \text{Admittanz} \tag{1.9}$$

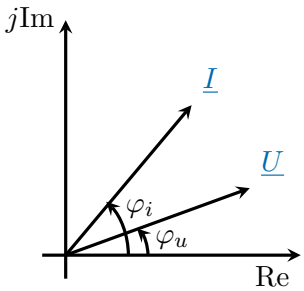



**Abbildung 1.2:** Komplexe Zeiger von Spannung und Strom in der komplexen Ebene, die von der reellen Achse (Re) und der imaginären Achse (Im) aufgespannt wird

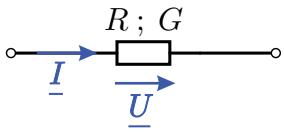
## 1.2 Netzwerkelemente in komplexer Darstellung

Für die elementaren Netzwerkelemente $R, L, C$ gelten demnach in komplexer Schreibweise die folgenden Beziehungen:

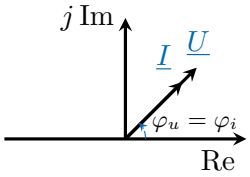
### Ohmscher Widerstand:

Widerstand $R$ $\left[\Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right]$

Leitwert $G = \frac{1}{R}$ $\left[\mathrm{S} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}\right]$

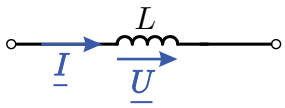



$\underline{Z} = R$ reell
$\underline{U} = R \cdot \underline{I}$ in Phase
$\underline{I} = G \cdot \underline{U}$ in Phase

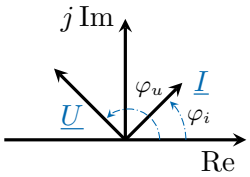



### Spule:

Induktivität $L$ $\left[\mathrm{H} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}\right]$

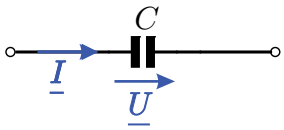



$\underline{Z} = j\omega L$
$\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$ 90° Vorlauf der Spannung

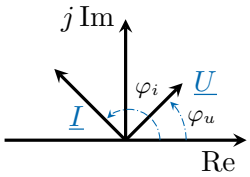



### Kondensator:

Kapazität $C$ $\left[\mathrm{F} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}\right]$




$\underline{Y} = j\omega C$
$\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}$ 90° Vorlauf des Stroms




### Übertrager:

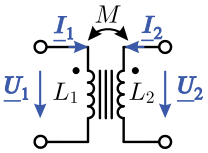
Übertrager (Transformatoren) bestehen in ihrer einfachsten Form aus 2 galvanisch getrennten Wicklungen mit den Windungszahlen $w_1$ und $w_2$, die auf einem gemeinsamen, meist aus hochpermeablen Materialien bestehenden Kern aufgebracht sind. Der magnetische Fluss im Kern, der durch den Strom in der einen Spule hervorgerufen wird, induziert in der zweiten Spule einen Sekundärstrom. Bei Vernachlässigung der Verluste, jedoch endlicher Streuung können die Übertragereigenschaften durch die Selbstinduktivitäten $L_1$, $L_2$ der beiden Spulen und die Gegeninduktivität $M$

beschrieben werden. Der Zusammenhang zwischen Strömen und Spannungen ergibt sich dann für den **streuungsbehafteten Übertrager** in komplexer Schreibweise als ein Paar miteinander verkoppelter Gleichungen mit den Übertragerspannungen als Funktion der Übertragerströme (1.10), in späteren Kapiteln als Zweitorgleichungen in Impedanzform bezeichnet. Verwendet wird hier das symmetrische Zählpfeilsystem mit symmetrisch auf das Zweitor zulaufenden Strömen.

In der Netzwerktheorie wird häufig vereinfachend davon ausgegangen, dass ein Übertrager streuungsfrei ist und die Induktivitäten sehr große Werte annehmen. Der resultierende **Ideale Übertrager** kann dann in seinem Übertragungsverhalten sehr einfach durch das Übersetzungsverhältnis charakterisiert werden (1.11). Zu beachten ist, dass sich die Verknüpfung von Spannungen bzw. Strömen über das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}$ auf die eingezeichnete Zuordnung 1:$\ddot{u}$ zur Primär- und Sekundärwicklung bezieht. Bei umgekehrter Zuordnung ändern sich die Gleichungen entsprechend. Die beiden Punkte auf gleicher Höhe neben den Übertragerwicklungen symbolisieren, dass die beiden Übertragerwicklungen gleichsinnig auf den Kern gewickelt sind, die magnetischen Flüsse bei positiven Strömen also in gleicher Richtung verlaufen. Bei diagonal versetzten Punkten sind die Wicklungen gegensinnig auf den Kern gewickelt. Dann ändern die Gegeninduktivität $M$ und das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}$ ihr Vorzeichen.

### Streuungsbehafteter Übertrager:

Selbstinduktivitäten $L_1, L_2$
Gegeninduktivität $M$

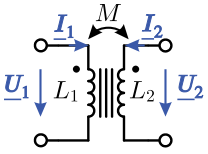



Zweitorgleichungen mit symmetrischer Zählpfeilrichtung:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= j\omega M \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

### Idealer Übertrager:

$\ddot{u}$ = Übersetzungsverhältnis
$w_1, w_2$ = Windungszahlen




Zweitorgleichungen mit symmetrischer Zählpfeilrichtung:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \ddot{u}\,; \quad \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\frac{1}{\ddot{u}} \left( \frac{1}{\ddot{u}} = \frac{w_1}{w_2} \right) \tag{1.11}$$

### Ideale Quellen:

In der Netzwerktheorie werden für Netzwerkumformungen oder in der Modellbildung vereinfachend häufig „ideale“ Spannungs- und Stromquellen verwendet, deren Innenwiderstand bzw. Innenleitwert zu null gesetzt ist. Für reale Quellen trifft diese Idealisierung nicht zu; diese werden im Folgekapitel behandelt.

Bei einer **idealen Spannungsquelle** ist der Innenwiderstand also gleich null. In Abbildung 1.3 ist das hier verwendete Schaltsymbol für ideale Gleich- und Wechselspannungsquellen dargestellt. Diese Quellenform stellt unabhängig von der Beschaltung an den Anschlussklemmen immer die konstante Quellenspannung $\underline{U} = \underline{U}_q$ bereit. Nehmen wir der Einfachheit halber eine Gleichspannungsquelle und beschalten sie mit einem ohmschen Widerstand $R$, dann können wir auf die komplexe Darstellung verzichten und in einem einfachen Diagramm den Klemmenstrom

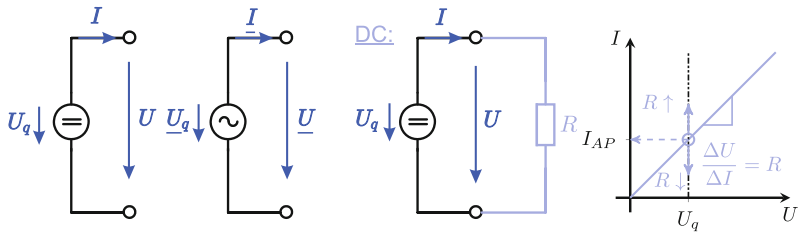



**Abbildung 1.3:** Ideale Gleich- und Wechselspannungsquelle; Beschaltung mit einem ohmschen Lastwiderstand und resultierende Kennlinien

über der Klemmenspannung darstellen und die Kennlinien von Quelle (konstante Spannung) und Last (ohmsches Gesetz) mit reellen Größen eintragen. Im Schnittpunkt der Kennlinien ergibt sich der Arbeitspunkt der Zusammenschaltung. Diese an sich triviale Darstellung veranschaulicht, wie der von der Quelle abgegebene Strom für kleinere Lastwiderstände anwächst und bei Kurzschluss an den Anschlussklemmen unendlich groß wird, was natürlich unphysikalisch ist, die Risiken bei Quellen mit sehr kleinem Innenwiderstand (Netzsteckdose!) aber sehr deutlich macht. Im Kapitel 8 werden nichtlineare Lastkennlinienformen angesprochen, bei denen solche grafischen Darstellungen sehr dienlich für das umfassende Verständnis sein können.

Ist die Spannung der idealen Spannungsquelle gleich null, dann ist also der Potenzialunterschied zwischen den Anschlussklemmen gleich null und die ideale Spannungsquelle kann in diesem Betriebszustand durch einen Kurzschluss ersetzt werden.

Bei einer **idealen Stromquelle** (Abbildung 1.4) ist der Innenleitwert der Quelle gleich null. An den Anschlussklemmen wird unabhängig von der Beschaltung immer der Quellenstrom $I_q$ bereitgestellt, wie aus dem Diagramm anschaulich hervorgeht. Dies ist auch bei Kurzschluss an den Anschlussklemmen der Fall!

Bei größer werdenden Lastwiderständen nimmt die Klemmenspannung der Quelle gemäß ohmschem Gesetz immer weiter zu und wird theoretisch bei unendlich großen Lastwiderständen (also Leerlauf an den Anschlussklemmen) ebenfalls unendlich groß, was unphysikalisch ist. Streng genommen ist es also nicht sinnvoll, eine ideale Stromquelle ohne Last darzustellen. Ist wiederum der Quellenstrom einer idealen Stromquelle in einem Netzwerk gleich null, dann kann die Quelle durch einen Leerlauf an den Anschlussklemmen ersetzt werden, da ja in diesem Fall kein Strom durch die Quelle hindurchfließen kann.

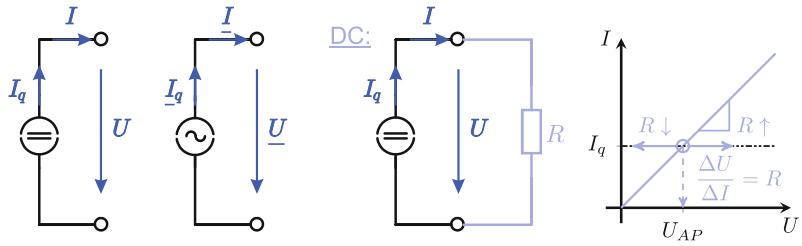



**Abbildung 1.4:** Ideale Gleich- und Wechselstromquelle; Beschaltung mit einem ohmschen Lastwiderstand und resultierende Kennlinien

## 1.3 Kirchhoff-Gesetze

Die Kirchhoff'schen Maschen- und Knotenregeln sind sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich und für beliebige Signalformen gültig und bilden die Basis für die weitergehenden Netzwerkbetrachtungen.

### Kirchhoff'sche Maschenregel:

**Merke**

In einer beliebigen Masche mit den Spannungen $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3, \ldots, \underline{U}_n$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} \underline{U}_n = 0 \qquad \text{(Vorzeichen beachten!)} \tag{1.12}$$

Diese Regel gilt bei beliebigen geschlossenen Maschenumläufen in einem Netzwerk und soll anhand der einfachen Schaltung in Abbildung 1.5 erläutert werden.

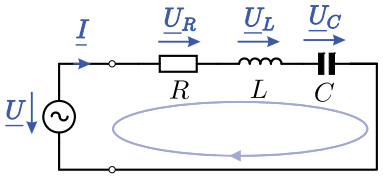



**Abbildung 1.5:** Ideale Spannungsquelle, beschaltet mit einem Serienschwingkreis: Maschenumlauf in gekennzeichneter Richtung

Die Anwendung der Kirchhoff'schen Maschenregel mit Maschenumlauf in Pfeilrichtung in Abbildung 1.5 (unter Beachtung der Vorzeichen!) ergibt:

$$-\underline{U} + \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = 0 \tag{1.13}$$

Wegen der Serienschaltung ist der **Strom** durch alle 3 Netzwerkelemente identisch. Durch Einsetzen der Spannungsabfälle an den Bauelementen $R$, $L$ und $C$ und Auflösen nach dem Quotienten aus Klemmenspannung und -strom folgt die Gesamtimpedanz, mit der die Quelle beschaltet ist, wahlweise nach Real- und Imaginärteil oder Betrag und Phase:

$$-\underline{U} + R \cdot \underline{I} + j\omega L \cdot \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} = 0$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |\underline{Z}| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_z} \tag{1.14}$$

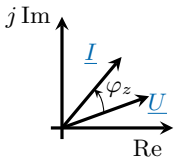
Die Impedanz dieses Serienschwingkreises wird bei der Resonanzfrequenz $\omega_0$ rein reell, wenn sich der induktive und der kapazitive Anteil im Imaginärteil gerade aufheben:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}\,; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1.15}$$

Damit gilt für die Impedanz:

$$\underline{Z} = R + j\omega_0 L \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \tag{1.16}$$

Der Phasenunterschied zwischen Klemmenspannung und Klemmenstrom in der Schaltung nach Abbildung 1.5 ist gleich dem Phasenwinkel der komplexen Lastimpedanz!




### Kirchhoff'sche Knotenregel:

**Merke**

In einem beliebigen Knoten mit den Strömen $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, \ldots, \underline{I}_n$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} \underline{I}_n = 0 \qquad \text{(Vorzeichen beachten!)} \tag{1.17}$$

Ein Knoten in einem Netzwerk ist im einfachsten Fall ein Zusammenschluss von 2 oder mehr Anschlussleitungen. Im Schaltungsbeispiel in Abbildung 1.6 wird die Knotenregel auf den markierten Verzweigungspunkt angewendet. Aus dem Knoten herausfließende Ströme werden dabei positiv, in den Knoten hineinfließende Ströme negativ angenommen (die umgekehrte Festlegung führt zum selben Ergebnis!):

$$-\underline{I} + \underline{I}_G + \underline{I}_L + \underline{I}_C = 0 \tag{1.18}$$

Wegen der Parallelschaltung ist in diesem Fall die **Spannung** an allen 3 Netzwerkelementen identisch. Durch Einsetzen der Spannungsabfälle an den Bauelementen $G$, $L$ und $C$ und Auflösen nach dem Quotienten aus Klemmenstrom und -spannung folgt die Gesamtadmittanz, mit der die Quelle beschaltet ist, wahlweise nach Real- und Imaginärteil oder Betrag und Phase:

$$\begin{aligned} -\underline{I} + G \cdot \underline{U} + j\omega C \cdot \underline{U} + \frac{1}{j\omega L} \cdot \underline{U} &= 0 \\ \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) &= |\underline{Y}| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_y} \end{aligned} \tag{1.19}$$

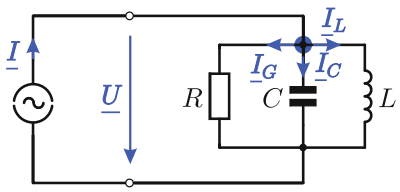



**Abbildung 1.6:** Ideale Stromquelle, beschaltet mit einem Parallelschwingkreis mit markiertem Knoten, auf den die Kirchhoff'sche Knotenregel angewendet wird

Die Admittanz dieses Parallelschwingkreises wird bei der Resonanzfrequenz $\omega_0$ rein reell, wenn sich der induktive und der kapazitive Anteil im Imaginärteil gerade aufheben:

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}\,; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1.20}$$

Für die Admittanz gilt dann:

$$\underline{Y} = G + j\omega_0 C \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{1.21}$$

## Erkenntnis

Beim Vergleich von (1.13)–(1.16) mit (1.18)–(1.21) fällt auf, dass Serienschaltung und Parallelschaltung von Bauelementen zu formal identischen Gleichungsformen führen, wenn in dem einen Fall die Impedanzform und in dem anderen Fall die Admittanzform verwendet wird und auch Spannungen und Ströme vertauscht werden. Diese Eigenschaft wird als Dualität bezeichnet und in Kapitel 3 detaillierter besprochen.

Der Begriff des Knotens und die Anwendung der Kirchhoff'schen Knotengleichung kann auch auf „Superknoten" ausgedehnt werden. Ein Superknoten schneidet einen zusammenhängenden Teil eines Netzwerkes an den Anschlussleitungen der Bauelemente vollständig heraus und erfasst **alle Ströme**, die in diesen Netzwerkteil hinein- oder aus ihm herausfließen, wie in Abbildung 1.7 verdeutlicht. Wichtig ist dabei, dass es keine nicht erfassten Leistungsflüsse zur herausgeschnittenen Schaltungsumgebung gibt, zum Beispiel über die magnetisch gekoppelte Sekundärwicklung eines Übertragers.

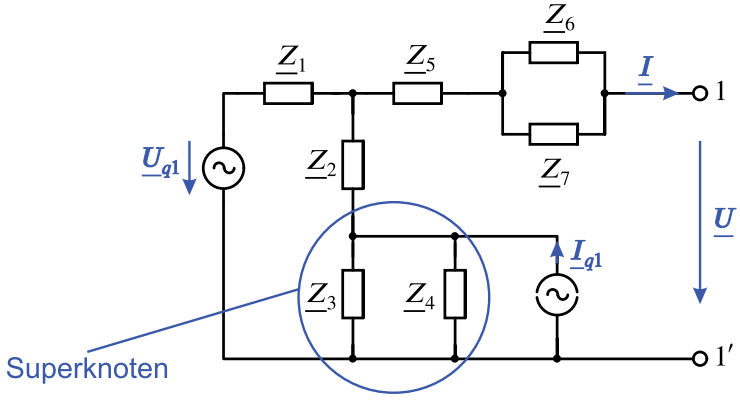


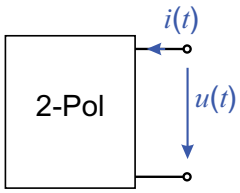

**Abbildung 1.7:** Superknoten in einem willkürlichen Netzwerk; bei der Knotenanalyse sind die Ströme auf allen 4 Anschlussleitungen (vorzeichenrichtig) zu berücksichtigen, die von der Hülle des Superknotens geschnitten werden!

## 1.4 Leistung und Energie

Die Speicherung und Übertragung von Energie und Leistung gehören zu den charakteristischen Eigenschaften eines Netzwerkes. Ausgehend von der allgemeingültigen Zeitbereichsdarstellung werden Leistung und Energie für zeitharmonische Verläufe von Spannung und Strom zunächst als zeitabhängige Größen, dann als komplexe Zeigergrößen eingeführt.

### 1.4.1 Beliebige Zeitabhängigkeit

Die Momentanleistung $p(t)$, die in einen (passiven) Zweipol fließt, kann zu jedem Zeitpunkt als Produkt von Klemmenspannung und Klemmenstrom angegeben werden:




$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \tag{1.22}$$

Die Leistung kann auch als Energiezufluss pro Zeiteinheit definiert werden. Das führt im allgemeinen Fall zu dem differenziellen Zusammenhang:

$$p(t) = \frac{\partial w(t)}{\partial t} \tag{1.23}$$

In Umkehrung kann die Energie, die in einem Zeitintervall $\Delta t$ einem Zweipol zugeführt wird, durch zeitliche Integration aus der Leistung ermittelt werden:

$$w(t) = \int_{t-\Delta t}^{t} p(t')dt' = \int_{t-\Delta t}^{t} u(t') \cdot i(t')dt' \tag{1.24}$$

Für Gleichstrombetrieb ergeben sich die elementaren Beziehungen:

$$\text{Leistung:} \quad P = U \cdot I \qquad [\text{W}] \tag{1.25}$$

$$\text{Energie:} \quad W = P \cdot \Delta t = U \cdot I \cdot \Delta t \qquad [\text{Ws}];[\text{kWh}] \tag{1.26}$$

### 1.4.2 Wechselstrombetrieb mit zeitharmonischen Signalen

Bei zeitharmonischen Spannungen und Strömen ohne Gleichanteil gemäß (1.1) und (1.2) ist der zeitliche Mittelwert gleich null, da sich bei Integration über eine volle Periode die negative und die positive Halbwelle gerade gegenseitig aufheben:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\,dt = 0\,; \quad \bar{i} = 0 \quad \text{mit } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.27}$$

Der einfache zeitliche Mittelwert eignet sich also nicht als charakteristische Größe, mit der eine Aussage über die gleichstromäquivalenten Eigenschaften eines Wechselstromsignals gemacht werden kann.
Dagegen ist der **quadratische Mittelwert**, der sich aus der Integration des quadrierten Wechselsignals über eine Periode und anschließender Quadratwurzelbildung ergibt, für diesen Zweck sehr gut geeignet. Für eine zeitharmonische Spannung nach (1.1) ergibt sich der quadratische Mittelwert:

$$\sqrt{\bar{u^2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{\hat{U}^2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(\omega t + \varphi_u)\,dt} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \tag{1.28}$$

Dieser quadratische Mittelwert einer Spannung oder eines Stromes wird allgemein auch als Effektivwert bezeichnet und kann als gleichstromäquivalente Größe angesehen werden:

$$\sqrt{\bar{u^2}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = U_{eff} \quad \text{(Effektivwert der Spannung)} \tag{1.29}$$

$$\sqrt{\bar{i^2}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = I_{eff} \quad \text{(Effektivwert des Stromes)} \tag{1.30}$$

Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 1.8 die zeitharmonische Spannung $u(t)$, die quadrierte Spannung $u^2(t)$ und der Mittelwert des Quadrates eingezeichnet. Durch die Quadratwurzelbildung des quadratischen Mittelwertes ergibt sich von der Dimension her eine Spannung, die mit der Amplitude verglichen werden kann. Das Verhältnis von Amplitude zu Effektivwert wird auch als **Scheitelfaktor** bezeichnet und hat bei rein sinusförmigen Spannungen und Strömen einen festen Zahlenwert:

$$\text{Scheitelfaktor:} \quad \frac{\hat{U}}{U_{eff}} = \sqrt{2}\,; \quad \frac{\hat{I}}{I_{eff}} = \sqrt{2}$$

Bei nicht sinusförmigen periodischen Signalen, die in den beiden letzten Buchkapiteln behandelt werden, ist dieser Scheitelfaktor von der Signalform abhängig und daher eine sehr aussagekräftige Beschreibungsgröße.

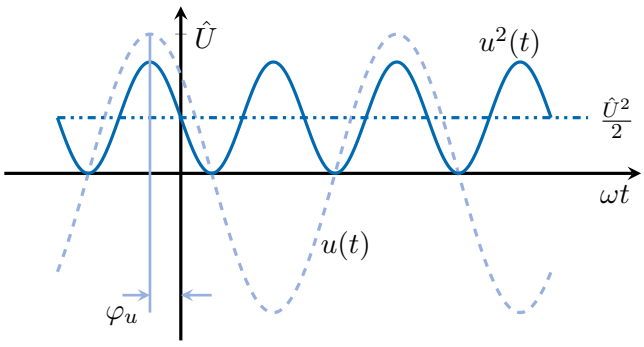



**Abbildung 1.8:** Zur Herleitung des quadratischen Mittelwertes oder Effektivwertes einer Spannung $u(t)$

**Momentanleistung bei Wechselstrombetrieb:**

Mit den zeitharmonischen Ansätzen für Spannung und Strom in (1.1) und (1.2) ergibt sich für die zeitabhängige Momentanleistung:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] \quad (1.31)$$

Es ergibt sich ein zeitunabhängiger Term, der von der Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom abhängt, überlagert durch einen zeitabhängigen Term, der mit $2\omega t$, also mit der doppelten Frequenz um einen Mittelwert $P_W$ schwankt. Für willkürlich gewählte Amplituden und Phasen sind Spannung, Strom und Momentanleistung in Abbildung 1.9 beispielhaft über der Zeit aufgetragen. Die Momentanleistung nimmt offensichtlich kurzzeitig auch negative Werte an. Leistung wird also (bei der Vorzeichenwahl in der Abbildung neben (1.22)) während des größten Teils einer Periode vom Zweipol aufgenommen, jedoch kurzzeitig auch vom Zweipol abgegeben.

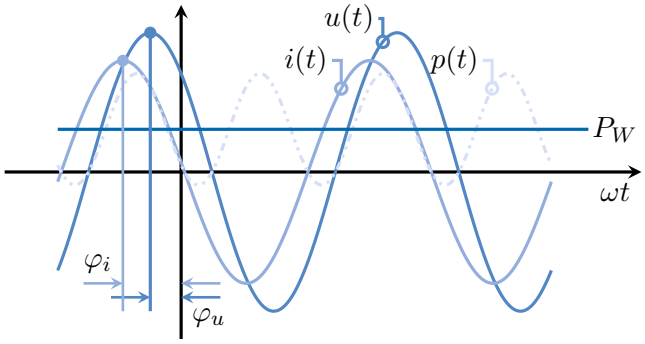



**Abbildung 1.9:** Beispielhafter Verlauf von Spannung, Strom und Momentanleistung für zeitharmonische Signale

Für die weitere Interpretation kann (1.31) noch etwas umgeformt werden. Mit trigonometrischen Summenformeln ergibt sich für den zweiten Term die Umrechnung:

$$\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) = \cos(2(\omega t + \varphi_u))\ \cos(\varphi_u - \varphi_i) + \sin(2(\omega t + \varphi_u))\sin(\varphi_u - \varphi_i)$$

Durch Einsetzen und Zusammenfassung von Termen ergibt sich die folgende Darstellungsform für die Momentanleistung:

$$p(t) = \frac{1}{2}\hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) \cdot [1 + \cos\ 2(\omega t + \varphi_u)]$$
$$+ \frac{1}{2}\hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi_i) \cdot \sin\ 2(\omega t + \varphi_u) \quad (1.32)$$

Wie in Abbildung 1.10 veranschaulicht, nimmt der erste Term der Momentanleistung immer positive Werte an und schwankt kosinusförmig mit doppelter Frequenz zwischen null und der zweifachen Amplitude $2P_W$. Er hat also den zeitlichen Mittelwert

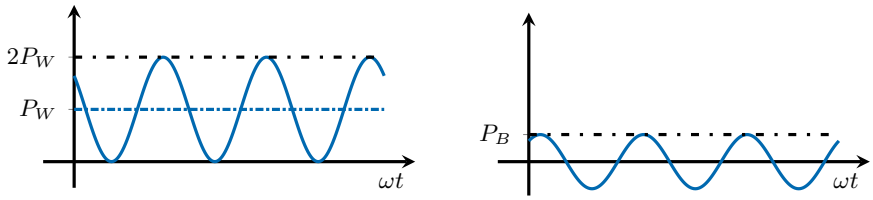



**Abbildung 1.10:** Momentane Wirkleistung mit Mittelwert $P_W$ und momentane Blindleistung mit der Amplitude $P_B$ und dem Mittelwert null

$P_W$, der auch als Wirkleistung bezeichnet wird, da er im Mittel die tatsächlich vom Zweipol aufgenommene Leistung darstellt:

$$P_W = \frac{1}{2}\hat{U}\cdot\hat{I}\cdot\cos(\varphi_u-\varphi_i) = U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos\ \varphi \qquad [\mathrm{W}] \tag{1.33}$$

Der zweite Term in (1.32) schwankt sinusförmig mit doppelter Frequenz um den Mittelwert null und gibt denjenigen Teil der Momentanleistung an, der periodisch in den Zweipol eingespeist und in gleicher Größe wieder von ihm abgegeben wird, was in der Regel auf Energiespeicher im Zweipol zurückzuführen ist. Die Amplitude $P_B$ dieses Teils der Momentanleistung wird auch als Blindleistung bezeichnet, da von diesem Term im zeitlichen Mittel keine Leistung in den Zweipol eingespeist wird:

$$P_B = \frac{1}{2}\hat{U}\cdot\hat{I}\cdot\sin(\varphi_u-\varphi_i) = U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\sin\ \varphi \qquad [\mathrm{VA}] \tag{1.34}$$

In (1.33) und (1.34) sind wahlweise auch die Effektivwerte von Strom und Spannung verwendet. Bei dieser Leistungsbetrachtung zeigt sich (bei Gleichphasigkeit von Spannung und Strom) besonders gut die Äquivalenz der Effektivwerte zu den Gleichstromgrößen. Als weitere Kenngröße wird häufig die Scheinleistung $P_S$ eingeführt, die ohne direkte physikalische Bedeutung ist, aber zum Beispiel bei der Auslegung von Leistungstransformatoren herangezogen wird:

$$P_S = \sqrt{P_W^2+P_B^2} = U_{eff}\cdot I_{eff} \qquad [\mathrm{VA}] \tag{1.35}$$

Nur für die Wirkleistung wird die zusammengesetzte Einheit

$$\mathrm{W} = \mathrm{V}\cdot\mathrm{A} \quad (\text{Watt} = \text{Volt}\cdot\text{Ampere})$$

verwendet, um den Bezug zum tatsächlichen Leistungsverbrauch in elektrischen Anlagen in Äquivalenz zum Gleichstromfall herzustellen. Zur Unterscheidung wird bei Blind- und Scheinleistung als Einheit VA eingesetzt. Gemäß (1.33)–(1.35) wird die Wirkleistung bei vorgegebenen Amplituden von Spannung und Strom dann maximal, wenn die Phasendifferenz $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ zu null verschwindet, Spannung und Strom also „in Phase“ sind. Die Blindleistung ist in diesem Fall gleich null und die Scheinleistung ist gleich der Wirkleistung. Diese Verhältnisse liegen bei der Leistungsbetrachtung an ohmschen Widerständen vor, wo Strom und Spannung am Bauelement immer gleichphasig sind (siehe Tabelle 1.1). Bei 90° Phasenunterschied

zwischen Spannung und Strom ist die Wirkleistung gleich null und die Blindleistung wird maximal. Die Scheinleistung ist dann gleich der Blindleistung. Diese Verhältnisse liegen bei rein reaktiven Bauelementen, also Spulen und Kondensatoren vor, wo im einen Fall die Spannung und im anderen Fall der Strom um 90° voreilt. Mit Hilfe von (1.32)–(1.35) ergeben sich direkt die in Tabelle 1.1 illustrierten Falldarstellungen. Es zeigt sich, dass bei Spulen die Blindleistung immer positive und bei Kondensatoren immer negative Werte annimmt.

Die Energie in der Spule pendelt zwischen dem Wert null und dem Maximalwert $W_{max} = 1/2\, L\hat{I}^2$ hin und her und ist dann maximal, wenn der Strom durch die Spule sein Maximum hat. Damit ergibt sich der zeitliche Mittelwert der magnetischen Energie in der Spule zu:

$$\overline{w}_m = \frac{1}{4} L\hat{I}^2 \tag{1.36}$$

Auch bei einem Kondensator pendelt die Energie zwischen dem Wert null und dem Maximalwert $W_{max} = 1/2\, C\hat{U}^2$ hin und her. Sie ist dann maximal, wenn die Spannung am Kondensator ihr Maximum aufweist. Damit ergibt sich der zeitliche Mittelwert der elektrischem Energie im Kondensator zu:

$$\overline{w}_e = \frac{1}{4} C\hat{U}^2 \tag{1.37}$$

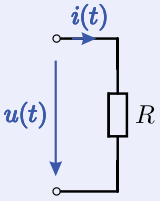
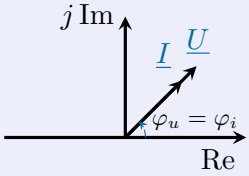
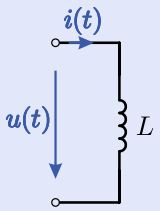
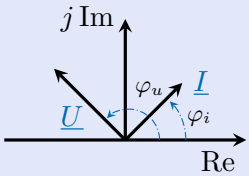
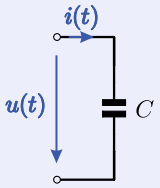
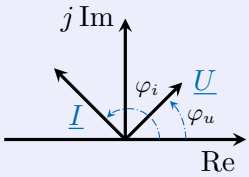
| | | |
|---|---|---|
|  | (Strom und Spannung in Phase,<br>z.B $\varphi_u = \varphi_i = 0$)<br>$p(t) = \frac{1}{2}\hat{U}\cdot\hat{I}\cdot\,(1+\cos(2\omega t))$<br>$P_W = \frac{1}{2}\hat{U}\cdot\hat{I} = \frac{1}{2}\frac{\hat{U}^2}{R} = \frac{1}{2}\hat{I}^2\cdot R$<br>$P_B = 0$<br>$P_S = P_W$ |  |
|  | (90° Vorlauf der Spannung,<br>z. B. $\varphi_u = 0$ und $\varphi_i = -\pi/2$)<br>$p(t) = \frac{1}{2}\hat{U}\cdot\hat{I}\cdot(\sin(2\omega t))$<br>$P_W = 0$<br>$P_B = \frac{1}{2}\hat{U}\cdot\hat{I} = \frac{1}{2}\omega L\cdot\hat{I}^2$<br>$P_S = P_B$ |  |
|  | (90° Vorlauf des Stromes,<br>z. B. $\varphi_u = 0$ und $\varphi_i = +\pi/2$)<br>$p(t) = -\frac{1}{2}\hat{U}\cdot\hat{I}\cdot(\sin(2\omega t))$<br>$P_W = 0$<br>$P_B = -\frac{1}{2}\hat{U}\cdot\hat{I} = -\frac{1}{2}\omega C\cdot\hat{U}^2$<br>$P_S = P_B$ |  |

**Tabelle 1.1:** Leistungsbeziehungen bei Widerständen, Spulen und Kondensatoren

### 1.4.3 Komplexe Leistung

Beim Übergang zu komplexen Zeigerdarstellungen für Spannung und Strom gemäß

$$\underline{U} = \hat{U} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_u}\,; \quad \underline{I} = \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_i}$$

stellt sich die Frage nach einer zweckmäßigen Leistungsdarstellung. Mit der Definition

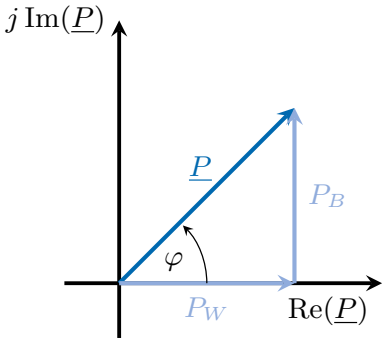
**Definition**

$$\underline{P} = \frac{1}{2}\,\underline{U} \cdot \underline{I}^{*} = \frac{1}{2}\,\hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{1}{2}\,\hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi} \tag{1.38}$$

wird die komplexe Leistung $\underline{P}$ so eingeführt, dass aufgrund des konjugiert komplex eingesetzten Stromes wieder die Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom auftritt. Mit Hilfe der Euler'schen Beziehung folgt sofort, dass dann der Realteil der komplexen Leistung gerade gleich der Wirkleistung und der Imaginärteil gleich der Blindleistung ist:

$$\underline{P} = \frac{1}{2}\hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos\,\varphi + j\frac{1}{2}\hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin\,\varphi = P_W + jP_B \tag{1.39}$$

Die Scheinleistung ist dann gleich dem Betrag der komplexen Leistung. Damit ergeben sich in der komplexen Zeigerdarstellung die folgenden Leistungsbeziehungen:




Scheinleistung:

$$P_S = |\underline{P}| = \frac{1}{2}|\underline{U} \cdot \underline{I}^{*}| \tag{1.40}$$

Wirkleistung: (1.41)

$$P_W = \mathrm{Re}(\underline{P}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\underline{U} \cdot \underline{I}^{*}) \tag{1.42}$$

Blindleistung: (1.43)

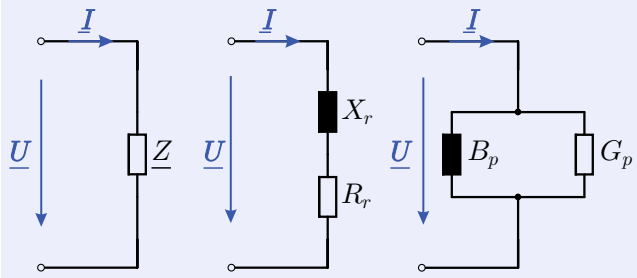
$$P_B = \mathrm{Im}(\underline{P}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\underline{U} \cdot \underline{I}^{*}) \tag{1.44}$$

Wichtig bei dieser sehr zweckmäßigen Definition der komplexen Leistung ist jedoch, dass sich die komplexe Leistung $\underline{P}$ und die zeitliche Momentanleistung $p(t)$ nicht im Sinne der Korrespondenzen zwischen Zeitbereichsgrößen und Zeigergrößen entsprechen.

Die Anwendung der komplexen Leistungsbeziehungen (1.38) – (1.44) auf allgemeine komplexe Impedanzen $\underline{Z}$ und Admittanzen $\underline{Y}$ ist in Tabelle 1.2 zusammengestellt. Dabei werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Impedanzen durch eine Serienschaltung von Widerstand $R_r$ und Reaktanz $X_r$ und die Admittanzen durch Parallelschaltung von Leitwert $G_p$ und Suszeptanz $B_p$ ersetzt, wenn eine Aufspaltung nach Real- und Imaginärteil vorgenommen wird. Wird im Fall der Serienschaltung die Reaktanz $X_r$ durch eine Spule mit $X_r = \omega L_r$ und im Fall der Parallelschaltung die Suszeptanz $B_p$ durch einen Kondensator mit $B_p = \omega C_p$ ersetzt, dann hat die

Blindleistung der Spule wieder einen positiven und die Blindleistung des Kondensators wieder einen negativen Wert. Auch für Zusammenschaltungen von Bauelementen gilt also, dass die Wirkleistung ausschließlich in den ohmschen Bauelementen umgesetzt wird und die Blindleistung ausschließlich in den reaktiven Bauelementen gespeichert wird.

Während die Leistungsberechnung an Zusammenschaltungen von Bauelementen in der Zeitbereichsdarstellung im allgemeinen Fall zu Differenzialgleichungen führt, sind in der komplexen Zeigerdarstellung lediglich algebraische komplexe Gleichungen auszuwerten.




Komplexe Leistung:

$$\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{U}\cdot\underline{I}^* = \frac{1}{2}\underline{Z}\cdot\underline{I}\cdot\underline{I}^* = \frac{1}{2}\underline{Z}\cdot|\underline{I}^2| = \frac{1}{2}\underline{Z}\cdot\hat{I}^2 = \frac{1}{2}\frac{\hat{I}^2}{\underline{Y}}$$

$$\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{Y}^*\cdot\underline{U}\cdot\underline{U}^* = \frac{1}{2}\underline{Y}^*\cdot\hat{U}^2 = \frac{1}{2}\frac{\hat{U}^2}{\underline{Z}^*}$$

Wirkleistung:

$$P_W = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\underline{U}\cdot\underline{I}^*) = \frac{1}{2}\hat{I}^2\cdot\mathrm{Re}(\underline{Z}) = \frac{1}{2}\hat{I}^2\cdot R_r = \frac{1}{2}\hat{U}^2\cdot G_p$$

Blindleistung:

$$P_B = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\underline{U}\cdot\underline{I}^*) = \frac{1}{2}\hat{I}^2\cdot\mathrm{Im}(\underline{Z}) = \frac{1}{2}\hat{I}^2\cdot X_r = -\frac{1}{2}\hat{U}^2\cdot B_p$$

**Tabelle 1.2:** Komplexe Leistungsbeziehungen bei Impedanzen und Admittanzen

## ZUSAMMENFASSUNG

- Die Eigenschaften linearer, zeitunabhängiger Netzwerke können im eingeschwungenen Zustand vorteilhaft mit Hilfe von zeitharmonischen, also sinus- oder kosinusförmigen periodischen Signalen in komplexer Darstellung analysiert werden.
- Die Kirchhoff-Gesetze können sowohl im Zeitbereich als auch in der komplexen Zeigerdarstellung zur Analyse von Netzwerken eingesetzt werden.
- Wirkleistung und Blindleistung in einem Netzwerk können als Real- und Imaginärteil zur komplexen Leistung zusammengefasst werden.

Literatur: [1]

EXTRAS ONLINE

## 1.5 Übungsaufgaben

### Aufgabe 1.1: Zweipol

Gegeben ist der Zweipol nach Abbildung 1.11 mit den Anschlussklemmen 1-1′.

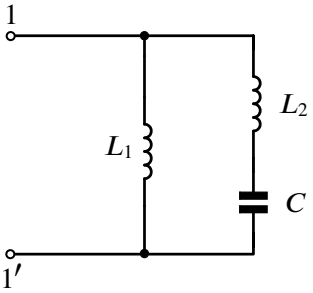



**Abbildung 1.11:** Zweipol mit $L_1 = 10\,\text{nH}$; $L_2 = 75\,\text{nH}$; $C = 12\,\text{pF}$

- Geben Sie allgemein die Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ bezüglich der Klemmen 1-1′ als Funktion von $L_1$, $L_2$, $C$ an!
  Bei welchen Frequenzen stellt sich Leerlauf an den Anschlussklemmen ein?
- Bei welchen Frequenzen ergibt sich ein Kurzschluss zwischen den Anschlussklemmen?

### Aufgabe 1.2: Leistungsberechnung an einem Zweipol

In der Schaltung nach Abbildung 1.12 seien die Spannung $\underline{U} = 10\,\text{V} \cdot \text{e}^{j0°}$ und die Frequenz $f = 100\,\text{kHz}$ gegeben.

- Berechnen Sie den Strom $\underline{I}$ nach Betrag und Phase sowie Real- und Imaginärteil!
- Wie groß ist die Wirkleistung, die vom Zweipol aufgenommen wird?
- Wie groß ist die Blindleistung?

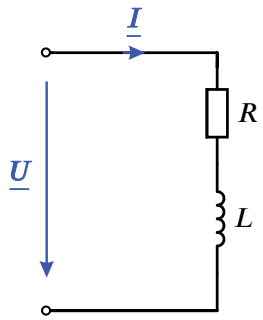



**Abbildung 1.12:** Schaltung mit den Bauelementen $R = 10\,\Omega$, $L = 31{,}8\,\mu\mathrm{H}$

### Aufgabe 1.3: Netzwerk mit Stromquellen

Gegeben ist die Schaltung nach Abbildung 1.13.

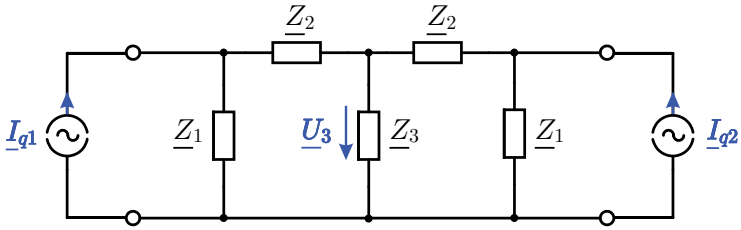



**Abbildung 1.13:** Netzwerk mit Stromquellen

- Welchen Wert hat die Spannung $\underline{U}_3$ in Abhängigkeit von den Bauelementwerten, wenn $\underline{I}_{q2} = 0$ ist?
- Wie muss $\underline{I}_{q2}$ eingestellt werden, damit $\underline{U}_3 = 0$ wird?

### Aufgabe 1.4: Reihen und Parallelschaltung

Gegeben ist die Schaltung nach Abbildung 1.14, die bei der Frequenz $f$=1 MHz betrieben wird.

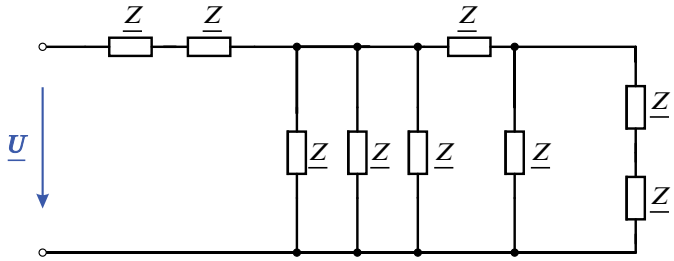



**Abbildung 1.14:** Netzwerk mit Impedanzen $\underline{Z}$