



ing
elektrotechnik

Manfred Albach

Elektrotechnik

Elektrotechnik

Manfred Albach

Elektrotechnik

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Die Informationen in diesem Buch werden ohne Rücksicht auf einen eventuellen Patentschutz veröffentlicht.

Warennamen werden ohne Gewährleistung der freien Verwendbarkeit benutzt.

Bei der Zusammenstellung von Texten und Abbildungen wurde mit größter Sorgfalt vorgegangen. Trotzdem können Fehler nicht ausgeschlossen werden.

Verlag, Herausgeber und Autoren können für fehlerhafte Angaben

und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen.

Für Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler sind Verlag und Autor dankbar.

Alle Rechte vorbehalten, auch die der fotomechanischen Wiedergabe und der Speicherung in elektronischen Medien.

Die gewerbliche Nutzung der in diesem Produkt gezeigten Modelle und Arbeiten ist nicht zulässig.

Fast alle Produktbezeichnungen und weitere Stichworte und sonstige Angaben,

die in diesem Buch verwendet werden, sind als eingetragene Marken geschützt.

Da es nicht möglich ist, in allen Fällen zeitnah zu ermitteln, ob ein Markenschutz besteht,

wird das ®-Symbol in diesem Buch nicht verwendet.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

13 12 11

ISBN 978-3-86894-081-7

© 2011 Pearson Studium

ein Imprint der Pearson Education Deutschland GmbH,
Martin-Kollar-Straße 10-12, D-81829 München/Germany

Alle Rechte vorbehalten

www.pearson-studium.de

Programmleitung: Birger Peil, bpeil@pearson.de

Korrektur: Brigitta Keul

Einbandgestaltung: Thomas Arlt, tarlt@adesso21.net

Herstellung: Philipp Burkart, pburkart@pearson.de

Satz: mediaService, Siegen (www.media-service.tv)

Druck und Verarbeitung: Drukarnia Dimograf

Printed in the Republic of Poland

Inhaltsübersicht

Vorwort		15
Teil I	Erfahrungssätze, Bauelemente, Gleichstromschaltungen	19
Kapitel 1	Das elektrostatische Feld	21
Kapitel 2	Das stationäre elektrische Strömungsfeld	85
Kapitel 3	Einfache elektrische Netzwerke	115
Kapitel 4	Stromleitungsmechanismen	157
Kapitel 5	Das stationäre Magnetfeld	181
Kapitel 6	Das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld	239
Teil II	Periodische und nicht periodische Signalformen	309
Kapitel 7	Der Übergang zu den zeitabhängigen Strom- und Spannungsformen	311
Kapitel 8	Wechselspannung und Wechselstrom	325
Kapitel 9	Zeitlich periodische Vorgänge beliebiger Kurvenform	421
Kapitel 10	Schaltvorgänge in einfachen elektrischen Netzwerken	461
Kapitel 11	Die Laplace-Transformation	511
Anhang A	Vektoren	545
Anhang B	Orthogonale Koordinatensysteme	553
Anhang C	Ergänzungen zur Integralrechnung	561

Anhang D	Physikalische Grundbegriffe	569
Anhang E	Komplexe Zahlen	575
Anhang F	Ergänzungen zu den Ortskurven	583
Anhang G	Ergänzungen zur Fourier-Entwicklung	593
Anhang H	Kleine mathematische Formelsammlung	603
	Literaturverzeichnis	613
	Verzeichnis der verwendeten Symbole	615
	Register	623

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	15
Teil I Erfahrungssätze, Bauelemente, Gleichstromschaltungen	19
Kapitel 1 Das elektrostatische Feld	21
1.1 Die elektrische Ladung	23
1.2 Das Coulomb'sche Gesetz	24
1.3 Die elektrische Feldstärke	25
1.4 Überlagerung von Feldern	27
1.5 Kräfte zwischen Ladungsverteilungen	30
1.6 Ladungsdichten	32
1.7 Darstellung von Feldern	33
1.7.1 Feldbild für zwei Punktladungen	35
1.7.2 Qualitative Darstellung von Feldbildern	37
1.8 Das elektrostatische Potential	37
1.8.1 Das Potential einer Punktladung	40
1.8.2 Äquipotentialflächen	42
1.9 Die elektrische Spannung	43
1.10 Die elektrische Flussdichte	44
1.11 Das Verhalten der Feldgrößen bei einer Flächenladung	47
1.12 Feldstärke an leitenden Oberflächen	51
1.13 Die Influenz	53
1.13.1 Dünne leitende Platten im homogenen Feld	53
1.13.2 Im leitenden Körper eingeschlossener Hohlraum	55
1.14 Die dielektrische Polarisierung	57
1.15 Kräfte im inhomogenen Feld	63
1.16 Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten	64
1.17 Die Kapazität	66
1.17.1 Der Plattenkondensator	67
1.17.2 Der Kugelkondensator	68
1.18 Einfache Kondensatornetzwerke	71
1.19 Praktische Ausführungsformen von Kondensatoren	73
1.19.1 Der Vielschichtkondensator	73
1.19.2 Der Drehkondensator	74
1.19.3 Der Wickelkondensator	75
1.20 Die Teilkapazitäten	75
1.21 Der Energieinhalt des Feldes	76
Zusammenfassung	80
Übungsaufgaben	81

Kapitel 2	Das stationäre elektrische Strömungsfeld	85
2.1	Der elektrische Strom	87
2.2	Die Stromdichte	89
2.3	Definition des stationären Strömungsfeldes	92
2.4	Ladungsträgerbewegung im Leiter	92
2.5	Die spezifische Leitfähigkeit und der spezifische Widerstand	94
2.6	Das Ohm'sche Gesetz	97
2.7	Praktische Ausführungsformen von Widerständen	102
2.7.1	Festwiderstände	102
2.7.2	Einstellbare Widerstände	104
2.7.3	Weitere Widerstände	104
2.8	Das Verhalten der Feldgrößen an Grenzflächen	105
2.8.1	Verschwindende Leitfähigkeit in einem Teilbereich	107
2.8.2	Perfekte Leitfähigkeit in einem Teilbereich	107
2.9	Energie und Leistung	108
	Zusammenfassung	111
	Übungsaufgaben	112
Kapitel 3	Einfache elektrische Netzwerke	115
3.1	Zählpeile	117
3.2	Spannungs- und Stromquellen	119
3.3	Zählpeilsysteme	121
3.4	Die Kirchhoffschen Gleichungen	121
3.5	Einfache Widerstandsnetzwerke	125
3.5.1	Der Spannungsteiler	130
3.5.2	Der belastete Spannungsteiler	132
3.5.3	Messbereichserweiterung eines Spannungsmessgerätes	134
3.5.4	Der Stromteiler	135
3.5.5	Messbereichserweiterung eines Strommessgerätes	136
3.5.6	Widerstandsmessung	136
3.6	Reale Spannungs- und Stromquellen	139
3.7	Wechselwirkungen zwischen Quelle und Verbraucher	141
3.7.1	Zusammenschaltung von Spannungsquellen	141
3.7.2	Leistungsanpassung	142
3.7.3	Wirkungsgrad	145
3.8	Das Überlagerungsprinzip	147
3.9	Analyse umfangreicher Netzwerke	149
	Zusammenfassung	154
	Übungsaufgaben	155
Kapitel 4	Stromleitungsmechanismen	157
4.1	Stromleitung im Vakuum	159
4.2	Stromleitung in Gasen	163
4.3	Stromleitung in Flüssigkeiten	164

4.4	Ladungstransport in Halbleitern	168
4.4.1	Der <i>pn</i> -Übergang	172
4.4.2	Die Diode	175
	Zusammenfassung	177
	Übungsaufgaben	178
Kapitel 5 Das stationäre Magnetfeld		181
5.1	Magnete	183
5.2	Kraft auf stromdurchflossene dünne Leiter	185
5.3	Kraft auf geladene Teilchen	189
5.4	Definition der Stromstärke	189
5.5	Die magnetische Feldstärke	192
5.6	Das Oersted'sche Gesetz	193
5.7	Die magnetische Feldstärke einfacher Leiteranordnungen	195
5.7.1	Unendlich langer kreisförmiger Linienleiter	195
5.7.2	Toroidspule	196
5.7.3	Lang gestreckte Zylinderspule	198
5.8	Die magnetische Spannung	200
5.9	Der magnetische Fluss	201
5.10	Die magnetische Polarisation	201
5.10.1	Diamagnetismus	205
5.10.2	Paramagnetismus	205
5.10.3	Ferromagnetismus	206
5.10.4	Dauermagnete	208
5.11	Das Verhalten der Feldgrößen an Grenzflächen	210
5.12	Die Analogie zwischen elektrischem und magnetischem Kreis	212
5.13	Die Induktivität	216
5.13.1	Induktivität der Ringkernspule	217
5.13.2	Induktivität einer Doppelleitung	219
5.14	Der magnetische Kreis mit Luftspalt und der A_L -Wert	223
5.14.1	Zusammenhang von Luftspatlänge und Windungszahl	225
5.14.2	Zusammenhang von Luftspatlänge und Flussdichte	227
5.15	Praktische Ausführungsformen von Induktivitäten	229
5.15.1	Drahtgewickelte Luftspulen	229
5.15.2	Planare Luftspulen	232
5.15.3	Spulen mit hochpermeablen Kernen	232
	Zusammenfassung	234
	Übungsaufgaben	235
Kapitel 6 Das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld		239
6.1	Das Induktionsgesetz	241
6.2	Die Selbstinduktion	254
6.3	Einfache Induktivitätsnetzwerke	255
6.4	Die Gegeninduktion	256
6.4.1	Die Gegeninduktivität zweier Doppelleitungen	260
6.4.2	Die Koppelfaktoren	265

6.5	Der Energieinhalt des Feldes	266
6.5.1	Die Energieberechnung aus den Feldgrößen	269
6.5.2	Die Hystereseverluste	271
6.6	Anwendung der Bewegungsinduktion.	273
6.6.1	Das Generatorprinzip.	273
6.6.2	Das Drehstromsystem	276
6.7	Anwendung der Ruheinduktion.	280
6.7.1	Der verlustlose Übertrager	281
6.7.2	Die Punktkonvention.	286
6.7.3	Der verlustlose streufreie Übertrager	292
6.7.4	Der ideale Übertrager.	293
6.7.5	Die Widerstandstransformation	295
6.7.6	Ersatzschaltbilder für den verlustlosen Übertrager	295
6.7.7	Der verlustbehaftete Übertrager	300
6.7.8	Der Spartransformator	301
	Zusammenfassung	303
	Übungsaufgaben	304

**Teil II Periodische und nicht periodische
Signalformen** 309

**Kapitel 7 Der Übergang zu den zeitabhängigen Strom-
und Spannungsformen** 311

7.1	Vorbetrachtungen	312
7.2	Modellbildung	314
7.3	Quasistationäre Rechnung	315
7.4	Die Netzwerkanalyse.	316
7.5	Kurvenformen und ihre Kenngrößen bei zeitlich periodischen Vorgängen	317
	Zusammenfassung	322
	Übungsaufgaben	323

Kapitel 8 Wechselfspannung und Wechselstrom 325

8.1	Das Zeigerdiagramm	327
8.1.1	Der ohmsche Widerstand an Wechselfspannung	331
8.1.2	Die Induktivität an Wechselfspannung	332
8.1.3	Die Kapazität an Wechselfspannung	333
8.2	Komplexe Wechselstromrechnung	337
8.2.1	Der Übergang zur symbolischen Methode	337
8.2.2	Die Berechnung von Netzwerken mit der symbolischen Methode	338
8.2.3	Gegenüberstellung der unterschiedlichen Vorgehensweisen	344
8.2.4	Strom-Spannungs- und Widerstandsdiagramm	349
8.2.5	Umrechnung zwischen Impedanz und Admittanz	350
8.3	Frequenzabhängige Spannungsteiler	352

8.4	Frequenzkompensierter Spannungsteiler	358
8.5	Resonanzerscheinungen	360
	8.5.1 Der Serienschwingkreis	360
	8.5.2 Der Parallelschwingkreis	369
8.6	Wechselstrom-Messbrücken	375
	8.6.1 Die Wien-Brücke	376
	8.6.2 Die Maxwell-Wien-Brücke	378
8.7	Ortskurven	379
	8.7.1 Ortskurve für die Impedanz einer RL-Reihenschaltung	380
	8.7.2 Umrechnung zwischen Impedanz und Admittanz	381
	8.7.3 Ortskurve für die Admittanz einer RL-Reihenschaltung	384
	8.7.4 Allgemeine Gesetzmäßigkeiten bei der Inversion von Ortskurven	385
	8.7.5 Ortskurven bei komplizierteren Netzwerken	386
8.8	Energie und Leistung bei Wechselspannung	389
	8.8.1 Wirkleistung	390
	8.8.2 Blindleistung	391
	8.8.3 Scheinleistung und Leistungsfaktor	393
	8.8.4 Komplexe Leistung	398
8.9	Leistungsanpassung	400
	8.9.1 Lastimpedanz mit einstellbarem Wirk- und Blindwiderstand	401
	8.9.2 Reiner Wirkwiderstand als Verbraucher	402
8.10	Blindstromkompensation	403
8.11	Leistung beim Drehstromsystem	405
	8.11.1 Sternschaltung mit Sternpunktleiter	405
	8.11.2 Sternschaltung ohne Sternpunktleiter	407
	8.11.3 Dreieckschaltung	410
	8.11.4 Besondere Eigenschaften des Drehstromsystems	412
	Zusammenfassung	417
	Übungsaufgaben	418
Kapitel 9 Zeitlich periodische Vorgänge beliebiger Kurvenform		421
9.1	Grundlegende Betrachtungen	423
9.2	Die Harmonische Analyse	427
	9.2.1 Die komplexe Form der Fourier-Reihe	433
	9.2.2 Vereinfachungen bei der Bestimmung der Fourier-Koeffizienten	435
	9.2.3 Tabellarische Zusammenstellung wichtiger Fourier-Reihen	442
	9.2.4 Die Linienspektren	443
9.3	Anwendung der Fourier-Reihen in der Schaltungsanalyse	444
	9.3.1 Der Ablaufplan	444
	9.3.2 Eine einfache Schaltung	445
	9.3.3 Die Erzeugung von Subharmonischen	447
	9.3.4 Effektivwert und Leistung	450
	9.3.5 Weitere Kenngrößen	456
	Zusammenfassung	459
	Übungsaufgaben	459

Kapitel 10	Schaltvorgänge in einfachen elektrischen Netzwerken	461
10.1	RC-Reihenschaltung an Gleichspannung	464
10.2	Reihenschaltung von Kondensator und Stromquelle	467
10.3	RL-Reihenschaltung an Gleichspannung	468
10.4	Parallelschaltung von Induktivität und Spannungsquelle	470
10.5	Schaltvorgänge in Netzwerken mit Wechselspannungsquellen	471
10.6	Quellen mit periodischen, nicht sinusförmigen Strom- und Spannungsformen	475
10.7	Konsequenzen aus den Stetigkeitsforderungen	477
10.8	Vereinfachte Analyse für Netzwerke mit einem Energiespeicher	478
	10.8.1 Kondensator und Widerstandsnetzwerk.	478
	10.8.2 Induktivität und Widerstandsnetzwerk	480
10.9	Spannungswandlerschaltung	484
10.10	Wirkungsgradbetrachtungen bei Schaltvorgängen.	488
10.11	Zusammenfassung	494
10.12	Netzwerke mit mehreren Energiespeichern	494
	10.12.1 Serienschwingkreis an Gleichspannung.	499
	10.12.2 Serienschwingkreis an periodischer Spannung.	503
	Zusammenfassung	507
	Übungsaufgaben	508
Kapitel 11	Die Laplace-Transformation	511
11.1	Das Fourier-Integral.	513
11.2	Der Übergang zur Laplace-Transformation.	522
11.3	Die Berechnung von Netzwerken mit der Laplace-Transformation	524
	11.3.1 Transformation in den Frequenzbereich	524
	11.3.2 Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems.	532
	11.3.3 Rücktransformation in den Zeitbereich	534
	Zusammenfassung	541
	Übungsaufgaben	542
Anhang A	Vektoren	545
A.1	Einheitsvektoren	547
A.2	Einfache Rechenoperationen mit Vektoren	547
	A.2.1 Addition und Subtraktion von Vektoren	547
	A.2.2 Multiplikation von Vektor und Skalar	548
A.3	Das Skalarprodukt	548
A.4	Das Vektorprodukt.	549
A.5	Zerlegung eines Vektors in seine Komponenten	550
A.6	Vektorbeziehungen in Komponentendarstellung.	551
A.7	Formeln zur Vektorrechnung	552

Anhang B	Orthogonale Koordinatensysteme	553
B.1	Das kartesische Koordinatensystem	554
B.2	Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme	556
B.3	Die Zylinderkoordinaten	558
B.4	Die Kugelkoordinaten	559
Anhang C	Ergänzungen zur Integralrechnung	561
C.1	Das Linienintegral einer vektoriellen Größe	562
C.2	Der Fluss eines Vektorfeldes	565
Anhang D	Physikalische Grundbegriffe	569
D.1	Physikalische Größen	570
D.2	Physikalische Gleichungen	573
	D.2.1 Größengleichungen	573
	D.2.2 Zugeschnittene Größengleichungen	574
Anhang E	Komplexe Zahlen	575
E.1	Bezeichnungen	576
E.2	Rechenoperationen	579
Anhang F	Ergänzungen zu den Ortskurven	583
F.1	Beweis für die Gültigkeit des ersten Verfahrens	584
F.2	Beweis für die Gültigkeit des 2. Verfahrens	585
F.3	Die Inversion einer Geraden durch den Nullpunkt	586
F.4	Die Inversion einer Geraden, die nicht durch den Nullpunkt verläuft	587
F.5	Die Inversion eines Kreises	590
Anhang G	Ergänzungen zur Fourier-Entwicklung	593
G.1	Die Konvergenz der Fourier-Reihen	594
G.2	Das Gibbs'sche Phänomen	599
Anhang H	Kleine mathematische Formelsammlung	603
H.1	Additionstheoreme	604
H.2	Integrale	604
H.3	Fourier-Entwicklungen	606
H.4	Tabellen zur Laplace-Transformation	609
	Literaturverzeichnis	613
	Verzeichnis der verwendeten Symbole	615
	Register	623

Vorwort

Die Aufgabe der Elektrotechnik besteht in der technischen Nutzbarmachung der aus der Physik gewonnenen Erkenntnisse über die elektromagnetischen Erscheinungen und deren Gesetzmäßigkeiten. Von dem in diesem Arbeitsumfeld tätigen Ingenieur wird unabhängig von der speziellen Studienrichtung, z.B. Informations- und Kommunikationstechnik, Mikroelektronik, Leistungselektronik, Automatisierungstechnik oder auch Energie- und Antriebstechnik, ein fundamentales Verständnis der grundlegenden Zusammenhänge erwartet. Selbst in der Mechatronik und im Maschinenbau ist dieses Grundwissen unerlässlich.

Didaktische Besonderheiten

Die vielfältigen Erscheinungen des Elektromagnetismus stellen die Studierenden zunächst vor erhebliche Probleme. Während die Gesetze der Mechanik oft sehr anschaulich sind und viele Begriffe aus dem alltäglichen Bereich zur Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge verwendet werden, ist die Situation bei den elektrischen und magnetischen Vorgängen völlig anders. Zur mathematischen Formulierung der physikalischen Beobachtungen werden neue Begriffe wie z.B. der Begriff des *elektromagnetischen Feldes* oder der Begriff des *Dipols* eingeführt, für die es keine Entsprechung aus dem Erfahrungsschatz des Alltags gibt. Der Überwindung dieser Anfangsschwierigkeiten wird besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

Das vorliegende Lehrbuch stellt das notwendige Fachwissen in einer leicht verständlichen und klar strukturierten Form zusammen. Es richtet sich an Studenten der eingangs genannten Fachrichtungen an Fachhochschulen und Universitäten und basiert auf den Erfahrungen einer mehrjährig durchgeführten Vorlesung an der Universität Erlangen-Nürnberg.

Das Lehrwerk ist so aufgebaut, dass es auch zum autodidaktischen Lernen geeignet ist. Aus der Mathematik der gymnasialen Oberstufe sollte die Differential- und Integralrechnung bekannt sein. Die Vektorrechnung und die grundlegenden Koordinatensysteme werden im Anhang ausführlich behandelt. Die bei den Feldberechnungen immer wiederkehrenden Begriffe eines Linienintegrals und eines Hüllflächenintegrals werden ebenfalls im Anhang an zwei einfachen Beispielen auf anschauliche Weise erläutert.

Um die Vorgehensweise bei der Berechnung von Netzwerken möglichst übersichtlich zu gestalten, sind die etwas längeren mathematischen Betrachtungen in den Anhang verlagert. Das betrifft einerseits die Beweise der bei der Inversion von Ortskurven geltenden Gesetzmäßigkeiten und andererseits die Konvergenzbetrachtungen bei der Fourier-Entwicklung.

Die wichtigsten Erkenntnisse aus den einzelnen Abschnitten sind als Zusammenfassungen und Merksätze besonders hervorgehoben. Durch Referenzen in den Formeln auf vorhergehende Gleichungen wird das Nachvollziehen der Ableitungen wesentlich erleichtert. Ausgewählte Beispiele, die zu einem tieferen Verständnis der Zusammenhänge beitragen, sind im Text integriert.

Inhaltlicher Aufbau

Das vorliegende Buch beinhaltet die bisher als Einzelbände erschienenen Bücher *Grundlagen der Elektrotechnik 1 (Erfahrungssätze, Bauelemente, Gleichstromschaltungen)* und *Grundlagen der Elektrotechnik 2 (Periodische und nicht periodische Signalformen)*.

Den Einstieg in die einzelnen Kapitel des ersten Teils bilden die aus Experimenten abgeleiteten und in die Sprache der Mathematik übertragenen *Erfahrungssätze*. Aufbauend auf den grundlegenden physikalischen Zusammenhängen werden die Eigenschaften der einfachen elektrischen Bauelemente und deren Verhalten in Gleichspannungsnetzwerken dargestellt. An einfachen Anordnungen wird gezeigt, wie aus den im Allgemeinen dreidimensionalen Feldverteilungen die integralen Größen Spannung, Strom, Widerstand, Kapazität und Induktivität abgeleitet werden können, mit deren Hilfe die ursprüngliche Feldbeschreibung auf eine einfache (summarische) Berechnung mit skalaren Größen zurückgeführt werden kann.

Mithilfe der Begriffe *elektrischer* und *magnetischer Dipol* werden die beobachtbaren Phänomene in der Materie am mikroskopischen Verhalten der Atome und Moleküle auf einfache Weise veranschaulicht. Gleichzeitig aber erlaubt die makroskopische Betrachtungsweise, d. h. die Mitteilung über das Verhalten einer sehr großen Anzahl von Atomen, die Erfassung der speziellen Materialeigenschaften durch einfache skalare Größen.

Im 1. Kapitel wird ausgehend von den im **Coulomb'schen Gesetz** beschriebenen Kraftwirkungen zwischen ruhenden Ladungsverteilungen, die auch ohne das Vorhandensein eines Übertragungsmediums im Vakuum beobachtbar sind, der Begriff des *elektrischen Feldes* eingeführt. Dieser bildet die Basis zur Einführung der Begriffe *elektrostatisches Potential*, *Spannung* und *elektrische Flussdichte*. Ein zentrales Thema in diesem Kapitel ist der *Kondensator* mit seiner als *Kapazität* bezeichneten Eigenschaft, elektrische Energie speichern zu können.

Im 2. Kapitel ist die Ladungsträgerbewegung im Leiter Ausgangspunkt für das **Ohm'sche Gesetz**. Wir lernen die Begriffe *Stromdichte* und *Widerstand* kennen. Die Zusammenschaltung von Widerständen in Gleichstromnetzwerken wird **im 3. Kapitel** ausführlich behandelt. **Das 4. Kapitel** beschreibt die unterschiedlichen Stromleitungsmechanismen im Vakuum, in Gasen, in Flüssigkeiten und in Halbleitern.

Die Kraftwirkung zwischen den zeitlich konstanten Strömen führt **im 5. Kapitel** zu dem Begriff des *magnetischen Feldes*. Das **Oersted'sche Gesetz** (Durchflutungsgesetz) stellt einen Zusammenhang her zwischen der magnetischen Feldstärke und dem die Feldstärke verursachenden Strom. Wichtige Themen in diesem Kapitel sind die Analogie zwischen elektrischem und magnetischem Kreis sowie die *Spule* und ihre als *Induktivität* bezeichnete Eigenschaft, magnetische Energie zu speichern.

Im 6. Kapitel lernen wir die Ruheinduktion und die Bewegungsinduktion kennen, deren mathematische Formulierung durch das **Faraday'sche Induktionsgesetz** die Beschreibung der Vorgänge im zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Feld erlaubt. Ein Beispiel ist seine Anwendung bei der Umwandlung von Bewegungsenergie und elektrischer Energie in Generatoren und Motoren. Als weitere Bauelemente lernen wir hier die *Transformatoren* und *Übertrager* kennen.

Im zweiten Teil werden lineare Netzwerke mit beliebigen, zeitabhängigen Strom- und Spannungsverläufen analysiert. Wegen der unterschiedlichen Vorgehensweisen bei der Berechnung werden zeitlich periodische Vorgänge und Schaltvorgänge getrennt behandelt.

Nach einer kurzen Betrachtung über die Zulässigkeit der Verfahren zur Berechnung von Netzwerken bei zeitlich veränderlichen Vorgängen **im 7. Kapitel** werden die aus technischer Sicht wichtigen Netzwerke mit zeitlich sinusförmigen Strom- und Spannungsverläufen **im 8. Kapitel** ausführlich behandelt. Die Netzwerkanalyse mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung basiert auf einer Transformation der Netzwerke aus dem Zeitbereich in einen Bildbereich (komplexe Ebene), in dem das entstehende komplexe, algebraische Gleichungssystem auf einfache Weise gelöst werden kann. Die Rücktransformation in den Zeitbereich ist anschließend mit elementaren Rechnungen durchführbar.

Netzwerke mit periodischen, aber nicht mehr sinusförmigen Größen treten z.B. auf, wenn die Quelle eine Rechteckspannung liefert oder wenn in einem Netzwerk mit einer Gleichspannungsquelle ein Schalter periodisch geöffnet und geschlossen wird. Mithilfe der Fourier-Entwicklung können diese zeitlich periodischen Vorgänge als Überlagerung von einem Gleichanteil mit einer gegebenenfalls unendlichen Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen dargestellt werden. Die Zerlegung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe und die Analyse des Netzwerks für diesen Fall werden **im 9. Kapitel** behandelt.

Ausgleichsvorgänge entstehen insbesondere im Zusammenhang mit einmaligen Schaltvorgängen, wenn z.B. eine Spannungsquelle erstmalig mit einem Netzwerk verbunden wird oder wenn eine im Netzwerk eingebaute Sicherung ausgelöst wird und einen Stromkreis unterbricht. Einfache Beispiele werden **im 10. Kapitel** berechnet, indem die auftretenden Differentialgleichungen mit elementaren Verfahren gelöst werden.

Im 11. Kapitel wird zunächst gezeigt, dass einmalige Vorgänge als Sonderfall eines periodischen Vorganges mit unendlich langer Periodendauer aufgefasst werden können. Die Fourier-Reihe in Kapitel 9 geht für diesen Sonderfall in das Fourier-Integral über. Die Konvergenzprobleme im Zusammenhang mit dem Fourier-Integral lassen sich durch Einführung einer komplexen Frequenz vermeiden. Durch diese Verallgemeinerung geht das Fourier-Integral in das Laplace-Integral über, mit dessen Hilfe Netzwerke mit zeitlich beliebigen Verläufen der Quellenströme und -spannungen mit begrenztem Aufwand analysiert werden können.

Der Anhang enthält neben einer kleinen mathematischen Formelsammlung zu den Koordinatensystemen und einigen bei der Fourier-Entwicklung häufig auftretenden Integralen auch eine Tabelle zu den Fourier-Reihen. Die bei der Laplace-Transformation benötigten Korrespondenzen für den Übergang zwischen Zeit- und Bildbereich sind im Anhang ebenfalls tabellarisch zusammengestellt.

Handhabung des Buches

Dozent Der vorliegende Band enthält das Lehrmaterial für die vierstündige Vorlesung „Grundlagen der Elektrotechnik I“, in der die Kapitel 1 bis 8 behandelt werden. Die folgenden Kapitel sind Vorlesungsstoff in den anschließenden Semestern. Die in einer zusätzlichen zweistündigen Übung behandelten Aufgaben stehen komplett mit Lösungen im Downloadbereich bei der entsprechenden Vorlesung auf der Lehrstuhl-Homepage zur Verfügung. Die im Buch verwendeten Abbildungen sind zum Einsatz in eigenen Vorlesungen auf der Companion Website verfügbar.

Student Jedes Kapitel beginnt mit einer kurzen themenbezogenen Einleitung und mit einer Liste der zu erreichenden Lernziele. Am Ende der Kapitel werden die Kernaussagen und die wichtigsten Gedankengänge noch einmal in einer Übersicht zusammengestellt.

CWS



Zur Vertiefung des Stoffes und zur Vorbereitung auf die Klausur endet jedes Kapitel mit einer kleinen Aufgabensammlung. Es wird dringend empfohlen, diese Aufgaben weitestgehend eigenständig zu lösen. Die Lösungen finden Sie unter www.pearsonstudium.de.

Eine umfangreiche Sammlung von Klausuraufgaben und Übungsbeispielen zusammen mit einer ausführlichen Beschreibung des Lösungswegs wird als Übungsbuch Elektrotechnik, ISBN: 978-3-8689-4070-1 erscheinen. In diesem Buch sind auch die ausführlichen Lösungen der am Ende der jeweiligen Kapitel zusammengestellten Aufgaben enthalten.

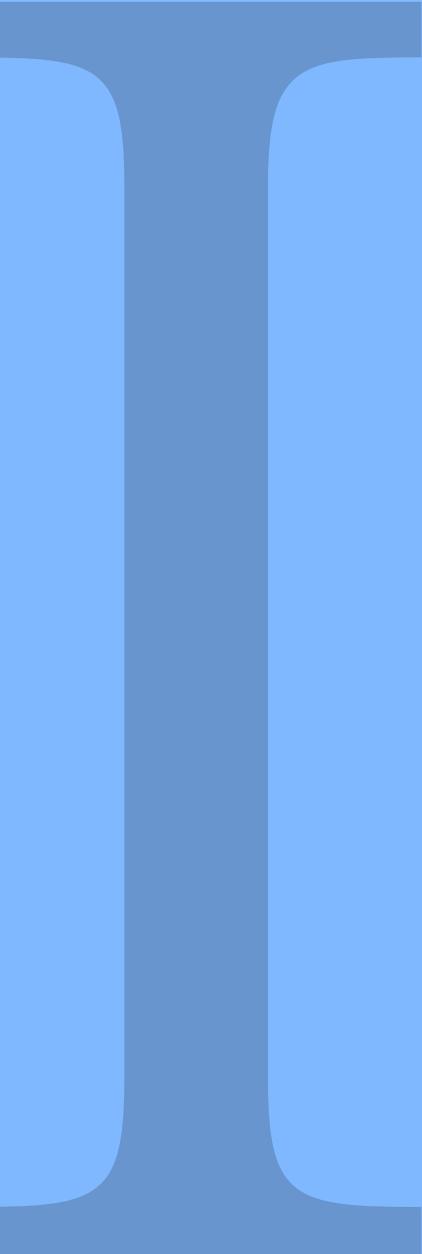
Ohne Hilfe geht es nicht

Herrn Birger Peil vom Pearson-Verlag sei an dieser Stelle für die gute Zusammenarbeit gedankt.

Hinweise auf eventuelle Fehler und Verbesserungsvorschläge werden jederzeit dankbar entgegengenommen (M.Albach@emf.eei.uni-erlangen.de).

Ein Buch zu den Grundlagen der Elektrotechnik stellt eine besondere Herausforderung dar, einerseits soll ein solides Fundament für das weitere Studium gelegt werden, andererseits darf die Vielfalt an neuen Problemstellungen und zugehörigen Lösungsverfahren nicht als Abschreckung empfunden werden. Der Autor hofft, dass dieser Kompromiss mit dem vorliegenden Buch gelungen ist.

Erfahrungssätze, Bauelemente, Gleichstromschaltungen



Das elektrostatische Feld

1

1.1	Die elektrische Ladung	23
1.2	Das Coulomb'sche Gesetz	24
1.3	Die elektrische Feldstärke	25
1.4	Überlagerung von Feldern	27
1.5	Kräfte zwischen Ladungsverteilungen	30
1.6	Ladungsdichten	32
1.7	Darstellung von Feldern	33
1.8	Das elektrostatische Potential	37
1.9	Die elektrische Spannung	43
1.10	Die elektrische Flussdichte	44
1.11	Das Verhalten der Feldgrößen bei einer Flächenladung	47
1.12	Feldstärke an leitenden Oberflächen	51
1.13	Die Influenz	53
1.14	Die dielektrische Polarisierung	57
1.15	Kräfte im inhomogenen Feld	63
1.16	Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten	64
1.17	Die Kapazität	66
1.18	Einfache Kondensatornetzwerke	71
1.19	Praktische Ausführungsformen von Kondensatoren	73
1.20	Die Teilkapazitäten	75
1.21	Der Energieinhalt des Feldes	76
	Zusammenfassung	80

Einführung

» In diesem Kapitel werden wir uns zunächst mit dem Begriff der elektrischen Ladung beschäftigen. Die Existenz solcher Ladungen ist die Ursache für alle elektromagnetischen Erscheinungen. Wer kennt nicht das Zucken im Finger beim Anfassen eines Geländers, nachdem man über einen Teppich gelaufen ist, oder die spektakulären Vorführungen, bei denen eine Person unbeschadet einen Metallkäfig verlässt, in den ein Blitz eingeschlagen hat.

Zur Beschreibung solcher Phänomene werden wir den Begriff des Feldes, in diesem speziellen Kapitel den Begriff des elektrostatischen Feldes einführen. Anordnungen mit ruhenden Ladungen bieten den leichtesten Einstieg in die mathematische Behandlung von Feldberechnungen. Obwohl die Feldtheorie und die ihr zugrunde liegenden Maxwell'schen Gleichungen das zentrale Fundament für die Elektrotechnik bilden, werden wir in diesen Grundlagenbüchern nur die Konzepte kennen lernen und uns auf einfachste Anordnungen beschränken.

Ausgangspunkt für dieses Kapitel ist das Coulomb'sche Gesetz, das die Kraftwirkung zwischen ruhenden Ladungen beschreibt. Als einen der wichtigsten Begriffe werden wir die Kapazität kennen lernen, eine aus der Feldverteilung abgeleitete integrale Größe, die die Fähigkeit einer Anordnung beschreibt, elektrische Energie zu speichern. Erst mit diesen Begriffen, später kommen noch Widerstand und Induktivität hinzu, sind wir gut gerüstet, reale Bauelemente durch mehr oder weniger komplizierte Modelle zu ersetzen und damit Schaltungen aufzubauen, zu analysieren und auch die Grenzen bei der Schaltungsanalyse mit vereinfachten Modellen zu verstehen. «

LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- mithilfe des Coulomb'schen Gesetzes Kräfte auf Ladungen zu berechnen,
- das elektrostatische Feld für einfache Ladungsanordnungen zu berechnen,
- die zugehörigen Äquipotentialflächen und Feldlinien darzustellen,
- die elektrische Spannung aus den Feldgrößen zu bestimmen,
- das Verhalten der Feldgrößen an Sprungstellen der Materialeigenschaften zu bestimmen,
- die Kapazität von einfachen Leiteranordnungen zu berechnen,
- die Zusammenschaltung von Kondensatoren zu vereinfachen sowie
- die im elektrostatischen Feld gespeicherte Energie zu berechnen.

1.1 Die elektrische Ladung

Zum Einstieg in dieses Kapitel betrachten wir ein kleines Experiment. Werden zwei Glasstäbe mit einem Wolltuch gerieben, dann kann man feststellen, dass sich die beiden Stäbe gegenseitig abstoßen. Wird das gleiche Experiment mit zwei Kunststoffstäben wiederholt, dann bleibt das Ergebnis gleich, auch diese beiden Stäbe stoßen sich gegenseitig ab. Im Gegensatz dazu ziehen sich ein Glas- und ein Kunststoffstab gegenseitig an. Diese mit den Gesetzen der Mechanik nicht zu erklärende Erscheinung führt man auf Ladungen zurück. Da sowohl Anziehung als auch Abstoßung auftritt, müssen zwei verschiedene Arten von Ladungen existieren. Man unterscheidet daher positive und negative Ladungen.

Die den beobachteten Kraftwirkungen zugrunde gelegte Modellvorstellung ist in ►Abb. 1.1 dargestellt. Nach diesem vereinfachten Atommodell von Niels Bohr (1885 – 1962) bestehen Atome aus Kernen, die Protonen (positive Ladungsträger) und Neutronen enthalten, sowie aus Elektronen (negative Ladungsträger), die den Kern auf bestimmten Bahnen umkreisen. Mehrere Bahnen bilden zusammen eine Schale. Auf jeder Schale können sich nur eine begrenzte Anzahl von Elektronen aufhalten. Die Summe aller den Kern umkreisenden Elektronen bezeichnet man als Elektronenhülle. Der Atomkern besitzt einen Durchmesser in der Größenordnung von 10^{-14} m, während der Durchmesser der Elektronenumlaufbahnen etwa um den Faktor 10 000 größer ist. (Die Abmessungsverhältnisse in der Abb. 1.1 sind nicht maßstabsgerecht.)

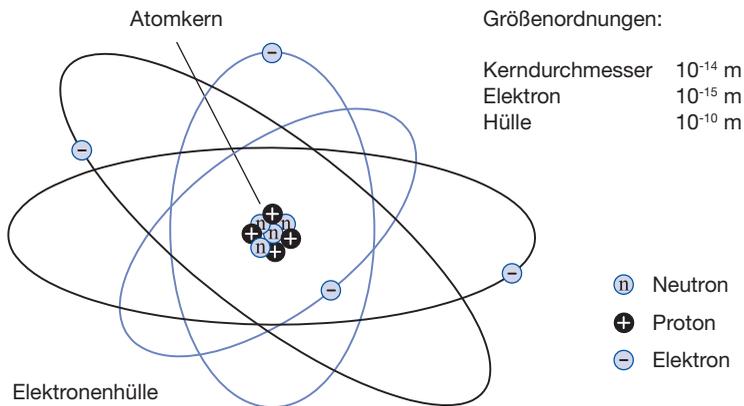


Abbildung 1.1: Bohr'sches Atommodell

Die kleinste, d.h. nicht weiter unterteilbare, Ladungsmenge heißt **Elementarladung** e . Ihr experimentell bestimmter Wert beträgt $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$ As. Da die Ladung der Protonen ($+e$) entgegengesetzt gleich groß ist zur Ladung der Elektronen ($-e$) und da die Anzahl der Protonen und Elektronen in den Atomen gleich groß ist, verhalten sich Atome nach außen elektrisch neutral. Die Anzahl der Protonen bzw. Elektronen in einem Atom wird als **Ordnungszahl** bezeichnet, sie beträgt bei Wasserstoff 1 und bei dem in der Elektrotechnik als Leitermaterial verwendeten Kupfer 29. Der Wert von e

ist konstant, er ist insbesondere unabhängig vom Bewegungszustand (Geschwindigkeit) des Teilchens. Im Gegensatz dazu ist die Teilchenmasse abhängig von der Geschwindigkeit.

Bei dem eingangs beschriebenen Experiment werden keine Ladungen *erzeugt*, sondern die positiven und negativen Ladungen getrennt. Von den Atomen des Glasstabs bleiben einige Elektronen am Wolltuch hängen, so dass die positive Gesamtladung des Glasstabs einem **Elektronenmangel** entspricht, während beim Reiben des Kunststoffstabs einige Elektronen vom Wolltuch an dem Stab hängen bleiben, so dass die negative Gesamtladung des Kunststoffstabs einem **Elektronenüberschuss** entspricht. Erst dadurch entstehen die nach außen hin wirksamen Kräfte.

Die im Kern enthaltenen Protonen und Neutronen werden als Nukleonen bezeichnet. Da die Masse der Nukleonen etwa um den Faktor 1836 größer ist als die Masse der Elektronen, bestimmt die Summe der in einem Atom vorhandenen Nukleonen im Wesentlichen dessen Masse. Trotz der gegenseitigen Abstoßung der Protonen werden die Kerne zusammengehalten. Die Ursache für diese Kernbindung ist die als starke Wechselwirkung bezeichnete Kraft zwischen den Nukleonen.

Fassen wir die wesentlichen Aussagen noch einmal zusammen:

Merke

- Ladungen sind stets ein Vielfaches der Elementarladung.
- In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Ladungen stets konstant. Diese Aussage gilt unabhängig von dem Bewegungszustand des Beobachters.
- Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich gegenseitig ab, Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens ziehen sich gegenseitig an.

1.2 Das Coulomb'sche Gesetz

Durch Messung hat Charles Augustin de Coulomb (1736 – 1806) festgestellt, dass die Kraft F zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2 betragsmäßig proportional zu jeder der beiden Ladungen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r zwischen den Ladungen ist. Mit der Proportionalitätskonstante $1/(4\pi\epsilon_0)$ folgt daraus die Beziehung

$$F \sim \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \rightarrow \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \quad (1.1)$$

Der Faktor ϵ_0 wird als **elektrische Feldkonstante** (Dielektrizitätskonstante des Vakuums) bezeichnet. Durch die Festlegung der Basiseinheit 1A (vgl. Kap. 5.4) ist ϵ_0 nicht mehr frei wählbar. Messungen ergeben einen auf vier Stellen gerundeten Wert von $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$.

Bei der Gleichung (1.1) wird angenommen, dass die geometrische Ausdehnung der einzelnen Ladungen sehr viel kleiner als der Abstand zwischen den Ladungen ist, daher spricht man hier von der Kraft zwischen **Punktladungen**. In dieser Gleichung kommt noch nicht die Richtung der Kraft zum Ausdruck. Mit der Festlegung eines Einheitsvektors \vec{e}_r , der gemäß ►Abb. 1.2 in Richtung der Verbindungslinie von der Punktladung Q_1 zur Punktladung Q_2 zeigt, kann die Kraft auf die Ladung Q_2 als vektorielle Gleichung

$$\vec{F}_2 = \vec{e}_r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (1.2)$$

geschrieben werden. Haben beide Ladungen gleiche Vorzeichen, dann wird die Ladung Q_2 von der Ladung Q_1 abgestoßen, haben sie entgegengesetzte Vorzeichen, dann wirkt die Kraft in Richtung $-\vec{e}_r$ und die Ladung Q_2 wird von Q_1 angezogen.

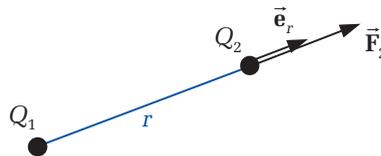


Abbildung 1.2: Zwei Punktladungen gleichen Vorzeichens

Die Unterscheidung der beiden Ladungsarten durch ein positives bzw. negatives Vorzeichen liefert im Zusammenhang mit dem in Gl. (1.2) auftretenden Produkt der Ladungen automatisch die mit den Experimenten übereinstimmende Richtung für den Kraftvektor.

1.3 Die elektrische Feldstärke

Das Coulomb'sche Gesetz (1.2) beschreibt offenbar eine für beliebige Abstände r geltende physikalische Wirkung, ohne dabei eine Aussage über den Raum zwischen den Ladungen zu machen. In diesem Zusammenhang sind zwei Fragen von Bedeutung:

- 1.** Wie kann im Unterschied zur klassischen Mechanik ohne direkten Kontakt und ohne ein stoffliches Medium eine Kraft ausgeübt werden?
- 2.** Ist es möglich, sofort, d.h. ohne Zeitverzug, eine Änderung der Kraftwirkung auf Q_2 wahrzunehmen, wenn Q_1 seine Position relativ zu Q_2 ändert?

Die Schwierigkeiten bei der Beantwortung dieser Fragen lassen sich umgehen mit der Annahme, dass durch die Anwesenheit einer Ladung der umgebende Raum selbst zum Träger physikalischer Eigenschaften wird. Um den Zustand des Raumes in die Beschreibung mit einzubeziehen, wird an dieser Stelle der Begriff des Feldes eingeführt. Unter dem Begriff **Feld** soll hier allgemein verstanden werden, dass jedem Punkt des Raumes zu einem bestimmten Zeitpunkt eindeutig eine oder auch mehrere physikalische Größen zugeordnet werden können und zwar unabhängig von der Wahl eines

Koordinatensystems. Diese Feldgrößen verknüpfen zusammen mit den Materialeigenschaften des Raumes die Ursache und Wirkung an demselben Raumpunkt und zum gleichen Zeitpunkt. Im vorliegenden Fall spricht man von einem **elektrischen Feld**, das sich durch die Kraftwirkung auf Ladungen bemerkbar macht. Ein anderes bekanntes Beispiel für ein Feld ist das Gravitationsfeld, das an den Kraftwirkungen auf Massen erkennbar wird.

Die erste Frage kann unter Zuhilfenahme mechanischer Vorgänge und Wirkungen nicht beantwortet werden. Die Kraft auf die Ladung Q_2 in Gl. (1.2) lässt sich aber mit dem hier eingeführten Feldbegriff darstellen als das Produkt aus dem Wert der Ladung selbst und einer mit \vec{E} bezeichneten vektoriellen Raumzustandsgröße

$$\vec{F}_2 = \vec{e}_r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \vec{E}_1 Q_2 \quad \text{mit} \quad \vec{E}_1 = \vec{e}_r \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} . \quad (1.3)$$

\vec{E} wird **elektrische Feldstärke** genannt und hat die Dimension V/m. Die Kraftwirkung (1.3) als Folge des von der *ruhenden* Ladung Q_1 hervorgerufenen *elektrostatischen* Feldes kann auch im Vakuum nachgewiesen werden und ist nicht an das Vorhandensein von Materie im Raum zwischen den Ladungen gebunden. Misst man die elektrische Feldstärke mit unterschiedlichen Probeladungen Q_2 , dann liefert das Verhältnis aus dem Betrag der Kraft zum Wert der Probeladung immer den gleichen Betrag für die elektrische Feldstärke. Da die Feldstärke (1.3) unabhängig ist von der zu ihrem Nachweis notwendigen Probeladung, existiert das elektrostatische Feld als Raumzustand offenbar auch dann, wenn bei Abwesenheit der Probeladung keine Kräfte beobachtet werden.

Merke

Während sich die als *elektrische Feldstärke* bezeichnete vektorielle Raumzustandsgröße auf einen speziellen Raumpunkt bezieht, kennzeichnet man mit dem Begriff *elektrisches Feld* die Gesamtheit der Feldvektoren in allen Raumpunkten.

Die zweite Frage nach dem *zeitlichen Abstand* zwischen Positionsänderung der einen Ladung und daraus resultierender Änderung der Kraftwirkung auf die andere Ladung kann erst im Zusammenhang mit der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen beantwortet werden. An dieser Stelle soll lediglich darauf hingewiesen werden, dass die Wellenausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt und die Information über die Änderung des Raumzustands infolge der Bewegung von Q_1 um die benötigte Laufzeit der Welle für die Distanz r zwischen den Ladungen später bei Q_2 ankommt. Die Änderung der Kraftwirkung auf Q_2 wird sich entsprechend zeitversetzt bemerkbar machen. Diese Effekte spielen aber bei der Behandlung elektrostatischer Probleme keine Rolle.

Kehren wir noch einmal zu dem neu eingeführten Begriff der elektrischen Feldstärke zurück. Die Richtung von \vec{E} wird allgemein in Richtung der Kraft gezählt, die auf eine positive Ladung wirkt. Betrachten wir in diesem Zusammenhang die Gl. (1.3), dann zeigt die Kraft auf eine positive Ladung Q_2 infolge einer ebenfalls als positiv angenommenen Ladung Q_1 in Richtung des Einheitsvektors \vec{e}_r , also radial von der Punktladung Q_1 nach außen. Die von der positiven Ladung Q_1 hervorgerufene Feldstärke zeigt damit definitionsgemäß ebenfalls radial nach außen. Die Ladung Q_2 reagiert aber nicht nur mit der auf sie ausgeübten Kraftwirkung infolge des von Q_1 hervorgerufenen Feldes, sondern sie erzeugt ihrerseits eine Feldstärke \vec{E}_2 , die eine gleich große entgegengesetzt gerichtete Kraft $\vec{F}_1 = \vec{E}_2 Q_1 = -\vec{F}_2$ auf die Punktladung Q_1 ausübt.

Zusammenfassend gilt:

Merke

- Eine positive Punktladung ruft im homogenen Raum der Dielektrizitätskonstanten ϵ_0 eine radial nach außen gerichtete elektrische Feldstärke hervor, die mit dem Quadrat des Abstandes von der Punktladung abnimmt. Bei einer negativen Punktladung zeigt der Feldstärkevektor zur Punktladung hin.
- Die Kraft auf eine positive Punktladung hat die gleiche Richtung wie die elektrische Feldstärke an der Stelle der Punktladung, bei einer negativen Punktladung zeigen Feldstärke und Kraft in entgegengesetzte Richtungen.
- Die elektrische Feldstärke \vec{E} beschreibt die **Wirkung** (Stärke) des elektrischen Feldes. Sie ist eine **Intensitätsgröße** und wird gemessen durch die auf Ladungen ausgeübte Kraftwirkung.

1.4 Überlagerung von Feldern

Befindet sich eine Punktladung Q_1 im Ursprung des Kugelkoordinatensystems, dann ruft sie die in Gl. (1.3) angegebene Feldstärke hervor. Der Vektor \vec{e}_r entspricht dann dem radialen Einheitsvektor \vec{e}_r des Kugelkoordinatensystems. Zur Verallgemeinerung sei der in ►Abb. 1.3 dargestellte Fall betrachtet, bei dem sich die Punktladung an der **Quellpunktskoordinate** \vec{r}_Q befindet. Der **Aufpunkt** P (Beobachtungspunkt), an dem das Feld berechnet werden soll, befindet sich, bezogen auf den willkürlich gewählten Ursprung, an der **Aufpunktskoordinate** \vec{r}_P . Bezeichnet man den vektoriellen Abstand von dem Quellpunkt Q zum Aufpunkt P mit \vec{r} , dann ist die Richtung der Feldstärke im Aufpunkt P durch den Einheitsvektor $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ gegeben.

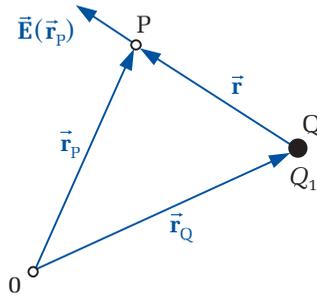


Abbildung 1.3: Punktladung Q_1 am Quellpunkt Q , Berechnung der Feldstärke im Aufpunkt P

Mithilfe der Gl. (1.3) erhält man unmittelbar die an dem Aufpunkt P , d.h. an der Stelle \vec{r}_P , vorliegende Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q \quad \text{und} \quad r = |\vec{r}_P - \vec{r}_Q|. \quad (1.4)$$

Betrachten wir noch einmal die Abb. 1.2. Die Kraft auf die Ladung Q_2 ist nach Gl. (1.3) proportional zu der von der Ladung Q_1 am Ort von Q_2 hervorgerufenen Feldstärke. Sind noch weitere Ladungen vorhanden, dann erhält man die Gesamtkraft auf die Ladung Q_2 durch lineare Überlagerung der einzelnen Kräfte, d.h. auch die gesamte elektrische Feldstärke ergibt sich durch Überlagerung der von den einzelnen Ladungen hervorgerufenen Feldstärkebeiträge.

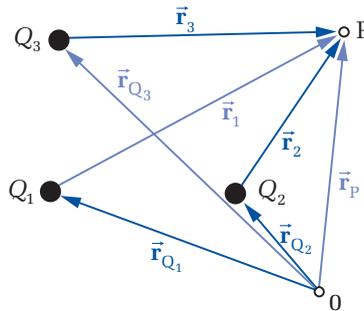


Abbildung 1.4: Das Feld mehrerer Punktladungen

Befinden sich beispielsweise drei Punktladungen Q_i mit $i = 1, 2, 3$ gemäß ►Abb. 1.4 an den Stellen \vec{r}_{Q_i} im homogenen Raum der Dielektrizitätskonstanten ϵ_0 und sind die Abstände der einzelnen Punktladungen von dem Aufpunkt P durch die vektoriellen Entfernungen $\vec{r}_i = \vec{r}_P - \vec{r}_{Q_i}$ der Beträge $r_i = |\vec{r}_i|$ gegeben, dann erhält man die gesamte Feldstärke im Aufpunkt P durch Summation der Beiträge aller drei Ladungen. Für eine beliebige Anzahl Ladungen $i = 1, 2, \dots$ wird die Feldstärke durch Summation über alle Werte i berechnet

$$\vec{E}(\vec{r}_P) \stackrel{(1.4)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1,2,\dots} Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad \text{mit} \quad \vec{r}_i = \vec{r}_P - \vec{r}_{Q_i} \quad \text{und} \quad r_i = |\vec{r}_i|. \quad (1.5)$$

Merke

Die Gesamtfeldstärke einer aus mehreren Ladungen bestehenden Anordnung ergibt sich durch lineare Überlagerung der Beiträge der Einzelladungen.

Der Zusammenhang zwischen einer Ladungsverteilung und der elektrischen Feldstärkeverteilung ist eindeutig. Aus der bekannten Ladungsverteilung kann in jedem Punkt des Raumes die elektrische Feldstärke bestimmt werden, umgekehrt kann aus dem elektrischen Feld eindeutig auf die Ladungsanordnung zurückgerechnet werden.

Erweitern wir die Anordnung in Abb. 1.4 jetzt dahingehend, dass wir eine Punktladung Q_4 an die Stelle des Aufpunktes P bringen (►Abb. 1.5a), dann erfährt diese Ladung eine Gesamtkraft

$$\vec{F}_4 = Q_4 \vec{E}(\vec{r}_P) = Q_4 \vec{E}(\vec{r}_{Q_4}) \stackrel{(1.5)}{=} \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 \vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{Q_2 \vec{r}_2}{r_2^3} + \frac{Q_3 \vec{r}_3}{r_3^3} \right), \quad (1.6)$$

die aus dem Produkt der Ladung Q_4 mit der vektoriellen Raumzustandsgröße $\vec{E}(\vec{r}_{Q_4})$ an der Stelle von Q_4 infolge aller anderen Ladungen berechnet wird. Die Punktladung übt auf sich selber keine Kraft aus¹.

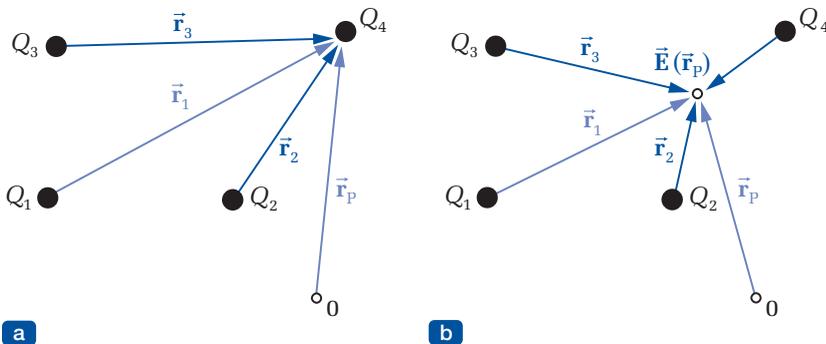


Abbildung 1.5: Kräfte im System mehrerer Punktladungen

Auf die gleiche Weise können auch die Kräfte auf die Punktladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 in der ►Abb. 1.5b berechnet werden. Da alle zwischen jeweils zwei Punktladungen wirkenden Teilkräfte entgegengesetzt gleich groß sind, muss die vektorielle Summe aller Kräfte auf die vier dargestellten Punktladungen verschwinden. Diese Aussage lässt

1 Man beachte, dass zur Berechnung der Feldstärke in einem beliebigen Raumpunkt die Beiträge aller Punktladungen Q_1 bis Q_4 überlagert werden (Abb. 1.5b). Zur Berechnung der Kraft auf eine Punktladung wird aber der Feldstärkebeitrag derjenigen Ladung, auf die die Kraft berechnet werden soll, nicht mit einbezogen (Abb. 1.5a).

sich verallgemeinern. Besteht eine Ladungsanordnung aus mehreren Punktladungen Q_i mit $i = 1, 2, \dots$, dann verschwindet die vektorielle Summe der auf alle Ladungen wirkenden Kräfte

$$\vec{F}_{ges} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (1.7)$$

1.5 Kräfte zwischen Ladungsverteilungen

Wir betrachten jetzt die in ►Abb. 1.6 dargestellte Anordnung. In den beiden Körpern V_1 und V_2 befinden sich ortsfeste Ladungsverteilungen, z.B. Elektronen in V_1 und Elektronen und Protonen in V_2 . Ortsfest soll dabei bedeuten, dass sich die Ladungsträger nicht frei innerhalb des Volumens bewegen können. Da jeder einzelne Ladungsträger Kräfte auf jeden anderen ausübt, wird die Situation sehr schnell unübersichtlich. In den meisten praktischen Fällen ist aber eine umfassende Berechnung aller Teilkräfte auf die einzelnen Elektronen und Protonen nicht erforderlich.

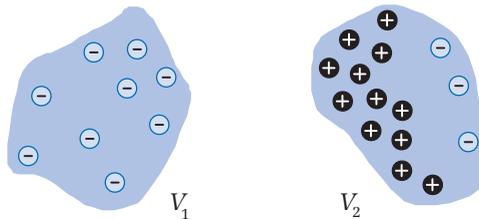


Abbildung 1.6: Mehrere zusammengehörige Ladungsverteilungen

Bei einer solchen Ladungsanordnung sind z.B. folgende Fragen von Interesse:

1. Welche Kräfte treten innerhalb eines Volumens infolge der Ladungsträger in diesem Volumen auf?
2. Welche Kräfte wirken zwischen den beiden Körpern V_1 und V_2 ?

Zur Beantwortung der ersten Frage für den Körper 1 muss die Summe der Kräfte auf die Elektronen in V_1 infolge aller anderen Elektronen im Volumen V_1 berechnet werden. Diese Frage stellt sich im Zusammenhang mit mechanischen Beanspruchungen des Materials. Aufgrund des größeren Abstands des zweiten Körpers kann dessen Beitrag zu den innerhalb von V_1 wirkenden Kräften in der Regel vernachlässigt werden. Die gleiche Frage stellt sich natürlich auch für das Volumen V_2 .

Eine völlig andere Situation ergibt sich im Zusammenhang mit der zweiten Frage. Hier muss die Summe der Kräfte auf alle Elektronen in V_1 berechnet werden, die ausschließlich durch die Ladungsträger in V_2 hervorgerufen werden. Hintergrund der Frage ist die gegenseitige Anziehungskraft zwischen den beiden Körpern, aus der sich bei bekannter Masse der beiden Körper die jeweilige Beschleunigung bestimmen lässt.

Beispiel 1.1: Gedankenexperiment

In diesem Abschnitt wollen wir eine Situation betrachten, die sich in der Praxis nicht realisieren lässt. Um dennoch die gewünschten Aussagen zu erhalten und einen Einblick in bestimmte Zusammenhänge zu bekommen, führen wir dieses Experiment lediglich in Gedanken durch.

Wir entfernen aus 1 mm^3 Kupfer alle Elektronen und bringen sie in einen Abstand $a = 10 \text{ km}$ von den Atomkernen (Protonen). Zu bestimmen ist die Anziehungskraft zwischen den beiden Ladungsverteilungen. Um das Ergebnis besser mit der Alltagserfahrung in Einklang zu bringen, soll die Masse eines Körpers bestimmt werden, der bei der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ die gleiche Kraft erfährt.

Lösung:

Zunächst muss die Anzahl der Ladungsträger bestimmt werden. 1 mm^3 Kupfer wiegt $8,96 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ und enthält nach Gl. (D.3) $8,96 \cdot 10^{-6} \text{ kg} / 1,055 \cdot 10^{-25} \text{ kg} = 8,5 \cdot 10^{19}$ Atome. Da jedes Kupferatom 29 Protonen und 29 Elektronen enthält, gilt für die Gesamtladungen

$$Q_p = -Q_e = 8,5 \cdot 10^{19} \text{ Atome} \cdot 29 \frac{\text{Protonen}}{\text{Atom}} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{As}}{\text{Proton}} = 395 \text{ As} . \quad (1.8)$$

Die Anziehungskraft zwischen den beiden Ladungsverteilungen kann mit Gl. (1.2) berechnet werden

$$F = \frac{Q_p^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{(395 \text{ As})^2 \text{Vm}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As} (10 \text{ km})^2} = 14 \cdot 10^6 \frac{\text{Ws}}{\text{m}} = 14 \cdot 10^6 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} . \quad (1.9)$$

Mit dem bekannten Kraftgesetz $F = mg$ aus der Mechanik erhält man als Ergebnis

$$m = 14 \cdot 10^6 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{9,81 \text{ m}} = 1,427 \cdot 10^6 \text{ kg} \quad (1.10)$$

den erstaunlichen Wert von 1427 Tonnen! Wegen der Abhängigkeit der Kraft vom Quadrat des reziproken Abstands erhöht sich das Ergebnis um den Faktor 100, wenn der Abstand auf $1/10$, d.h. auf 1 km reduziert wird.

Schlussfolgerung:

Aus der Tatsache, dass die in den alltäglichen Situationen auftretenden Kräfte um sehr viele Größenordnungen geringer sind, muss man den Schluss ziehen, dass gemessen an der Gesamtzahl vorhandener Ladungsträger prozentual immer nur eine extrem geringe Anzahl getrennt ist und zur elektrischen Feldstärke beiträgt.

1.6 Ladungsdichten

Bei vielen technischen Problemen werden metallische Leiter unterschiedlicher Abmessungen und Formen verwendet, auf denen freie Ladungen verteilt sein können. Da die atomaren Strukturen praktisch immer vernachlässigbar klein sind gegenüber den Leiterabmessungen, können wir die aus diskreten Ladungsträgern bestehenden Ladungsverteilungen als kontinuierlich, d.h. beliebig fein unterteilt, annehmen. In dieser *makroskopischen* Betrachtungsweise behandeln wir nur noch Ladungsdichten und vernachlässigen dabei ganz bewusst die Tatsache, dass diese im atomaren Bereich von Punkt zu Punkt sehr stark schwanken. Solange wir uns nicht mit Fragestellungen im atomaren Bereich beschäftigen, ist diese Vorgehensweise für die Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge ausreichend. Vergleichbar ist diese Situation mit der Definition der Dichte eines Körpers als Verhältnis von Masse zu Volumen. Auch hier vernachlässigt man die Tatsache, dass die Masse nicht homogen verteilt, sondern in den Atomkernen konzentriert ist.

Die Punktladung als idealisiertes Modell einer Ladungsverteilung in einem sehr kleinen Volumen, verglichen mit den sonstigen Abmessungen der betrachteten Anordnung, haben wir bereits kennen gelernt. Man kann sich aber auch leicht vorstellen, dass eine Gesamtladung Q , bestehend aus einer sehr großen Zahl einzelner Ladungsträger, kontinuierlich auf einem dünnen Stab (eindimensionale Verteilung), auf einer dünnen Folie (zweidimensionale Verteilung) oder in einem ausgedehnten dreidimensionalen Volumen verteilt ist. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einer **Linienladung**, einer **Flächenladung** und einer **Raumladung**. Dimensionsmäßig handelt es sich in allen genannten Fällen um Ladungsdichten. Wir wollen diese Begriffe im Folgenden konkretisieren und beginnen mit der Linienladung.

Ist eine Gesamtladung Q gleichmäßig auf einer Linie der Länge l verteilt, dann bezeichnet man den Quotienten $\lambda = Q/l$ als **Linienladungsdichte**. Diese hat die Dimension As/m. Sind die einzelnen Ladungsträger nicht mehr homogen verteilt, dann ist die Linienladungsdichte ortsabhängig. Befindet sich auf einem elementaren Abschnitt der Länge Δl die elementare Ladungsmenge ΔQ , dann beschreibt der Quotient $\lambda = \Delta Q/\Delta l$ die mittlere Linienladungsdichte auf dem betrachteten Abschnitt. Will man den Wert λ für einen bestimmten Punkt P auf der Linie angeben, dann muss man die elementare Länge Δl gegen Null gehen lassen und zwar so, dass sie den Punkt P jederzeit einschließt. Die Linienladungsdichte in dem betrachteten Punkt P lässt sich dann in der Form

$$\lambda(P) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad (1.11)$$

als Differentialquotient darstellen. Ist im umgekehrten Fall die ortsabhängige Linienladungsdichte für alle Punkte auf der Linie l bekannt, dann kann die Gesamtladung durch Integration

$$Q = \int_l \lambda dl \quad (1.12)$$

über die gesamte Länge berechnet werden.

Die gleichmäßige Verteilung einer Gesamtladung Q auf einer Fläche A führt auf analoge Weise zu einer **Flächenladungsdichte** $\sigma = Q/A$ der Dimension As/m^2 . Für eine ortsabhängige Ladungsverteilung gibt das Verhältnis $\sigma = \Delta Q/\Delta A$ die mittlere Flächenladungsdichte auf dem betrachteten elementaren Flächenelement ΔA an. Im Grenzübergang $\Delta A \rightarrow 0$ erhält man wieder die Flächenladungsdichte in einem betrachteten Punkt aus dem Differentialquotienten

$$\sigma(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA} \quad (1.13)$$

und die Gesamtladung einer mit einer ortsabhängigen Dichte verteilten Flächenladung σ berechnet man aus einer Integration über die ladungsbesetzte Fläche

$$Q = \iint_A \sigma dA. \quad (1.14)$$

Zum Abschluss führen wir noch die **Raumladungsdichte** $\rho = Q/V$ der Dimension As/m^3 ein, die im Falle einer homogenen Ladungsverteilung aus dem Verhältnis von Gesamtladung Q zu ladungsbesetztem Volumen V gegeben ist. Bei ortsabhängiger Ladungsverteilung beschreibt das Verhältnis $\rho = \Delta Q/\Delta V$ die mittlere Raumladungsdichte in dem betrachteten elementaren Volumenelement ΔV . Im Grenzübergang erhält man wieder die Raumladungsdichte in einem betrachteten Punkt P aus dem Differentialquotienten

$$\rho(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \quad (1.15)$$

und die in einem Volumen V enthaltene Gesamtladung Q kann durch Integration über das ladungsbesetzte Volumen berechnet werden

$$Q = \iiint_V \rho dV. \quad (1.16)$$

1.7 Darstellung von Feldern

Zur grafischen Darstellung des Feldverlaufs verwendet man unterschiedliche Feldbilder. In diesem Abschnitt betrachten wir die Feldlinienbilder, in Kap. 1.8.2 die Äquipotentialflächen.

Als **Feldlinien** bezeichnet man Raumkurven, deren gerichtetes Wegelement immer in Richtung der Feldstärke zeigt. Der vektorielle Charakter des Feldverlaufs wird dadurch zum Ausdruck gebracht, dass die Feldlinien mit Pfeilen versehen werden, deren Spitzen in Richtung der Feldstärke zeigen. Aus der Darstellung in ►Abb. 1.7 ist zu erkennen, dass die Richtung der Feldstärke an jeder Stelle entlang der Feldlinie durch die Tangente an die Feldlinie gegeben ist.

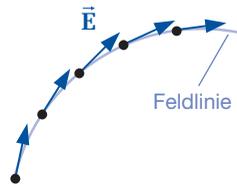


Abbildung 1.7: Konstruktion der Feldlinie

Die Dichte der in einem Feldlinienbild eingezeichneten Feldlinien kann in vielen Fällen so gewählt werden, dass sie ein Maß für den Betrag der Feldstärke darstellt. Die mit zunehmendem Abstand von einer Punktladung geringer werdende elektrische Feldstärke drückt sich in der ►Abb. 1.8 z.B. dadurch aus, dass der Abstand zwischen den Feldlinien größer wird.

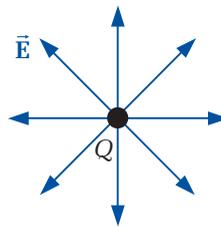


Abbildung 1.8: Feldlinienbild einer positiven Punktladung

Man muss sich jedoch immer darüber im Klaren sein, dass das gezeichnete Feldbild nur einen zweidimensionalen Schnitt durch eine dreidimensionale Feldverteilung darstellt. In der Abb. 1.8 liegen die Punktladung und damit zwangsläufig auch alle dargestellten Feldlinien in der Zeichenebene. Bei umfangreicheren, nicht mehr symmetrischen Ladungsverteilungen oder bei ungünstiger Wahl der Schnittebene wird die Darstellung des Feldlinienbildes schwieriger, da die Feldlinien einen beliebigen Winkel zur Zeichenebene aufweisen können.

Entsprechend der Einführung der elektrischen Feldstärke in Gl. (1.3) gehen die Feldlinien immer von den positiven Ladungen aus und enden auf den negativen. In vielen Fällen sind die Abstände zwischen den Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens sehr groß, z.B. können sich die negativen Ladungen sehr weit entfernt befinden, verglichen mit der räumlichen Verteilung der positiven Ladungen. Das Feldbild in unmittelbarer Umgebung der positiven Ladungen wird dann allein von diesen bestimmt. Zur Vereinfachung nimmt man in diesen Fällen an, dass sich die zugehörigen negativen Ladungen auf der **unendlich fernen Hülle** befinden, ihr Beitrag zur Feldstärke wird dann bei der Berechnung vernachlässigt. Einen derartigen Sonderfall stellt das von einer Punktladung hervorgerufene radialsymmetrische Feld in Abb. 1.8 dar, bei dem die elektrische Feldstärke radial nach außen zeigt und nur vom Abstand zur Punktladung abhängt.

Einen weiteren Sonderfall bildet das **homogene Feld**, bei dem die Feldstärke überall die gleiche Richtung und den gleichen Betrag aufweist. Ein derartiges Feld lässt sich nur näherungsweise und auch nur in einem begrenzten räumlichen Bereich realisieren (►Abb. 1.20). Den allgemeinen Fall stellt das inhomogene (ortsabhängige) Feld dar.

1.7.1 Feldbild für zwei Punktladungen

Als Beispiel wollen wir in diesem Abschnitt das Feldlinienbild für zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 berechnen, die sich auf der y -Achse an den Stellen $y = a$ und $y = -a$ befinden. Zu bestimmen ist zunächst die elektrische Feldstärke in einem allgemeinen Punkt in der xy -Ebene (Zeichenebene).

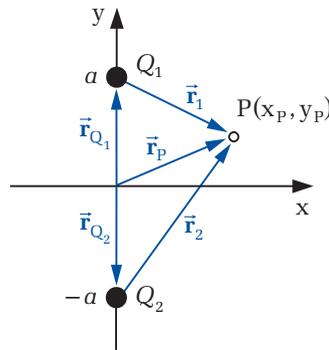


Abbildung 1.9: Zur Berechnung eines Feldlinienbildes

Zur Berechnung der Feldstärke mithilfe der Gl. (1.5) werden die Abstände der Ladungen vom Aufpunkt benötigt. Mit den Quellpunktskoordinaten $\vec{r}_{Q_1} = \vec{e}_y a$ und $\vec{r}_{Q_2} = -\vec{e}_y a$ sowie den Koordinaten des Aufpunkts $\vec{r}_P = \vec{e}_x x_P + \vec{e}_y y_P$ erhält man die Abstände

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_P - \vec{r}_{Q_1} = \vec{e}_x x_P + \vec{e}_y (y_P - a) \quad \text{mit} \quad r_1 = \sqrt{x_P^2 + (y_P - a)^2} \quad (1.17)$$

und

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_P - \vec{r}_{Q_2} = \vec{e}_x x_P + \vec{e}_y (y_P + a) \quad \text{mit} \quad r_2 = \sqrt{x_P^2 + (y_P + a)^2}. \quad (1.18)$$

Durch Einsetzen in die Beziehung (1.5) kann die elektrische Feldstärke unmittelbar angegeben werden

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_P) &\stackrel{(1.5)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[Q_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + Q_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\vec{e}_x \left(Q_1 \frac{x_P}{r_1^3} + Q_2 \frac{x_P}{r_2^3} \right) + \vec{e}_y \left(Q_1 \frac{y_P - a}{r_1^3} + Q_2 \frac{y_P + a}{r_2^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Die Auswertung dieser Beziehung für die beiden Sonderfälle gleicher $Q_1 = Q_2 = Q$ bzw. entgegengesetzter gleicher Punktladungen $Q_1 = Q, Q_2 = -Q$ ist in ►Abb. 1.10 dargestellt.

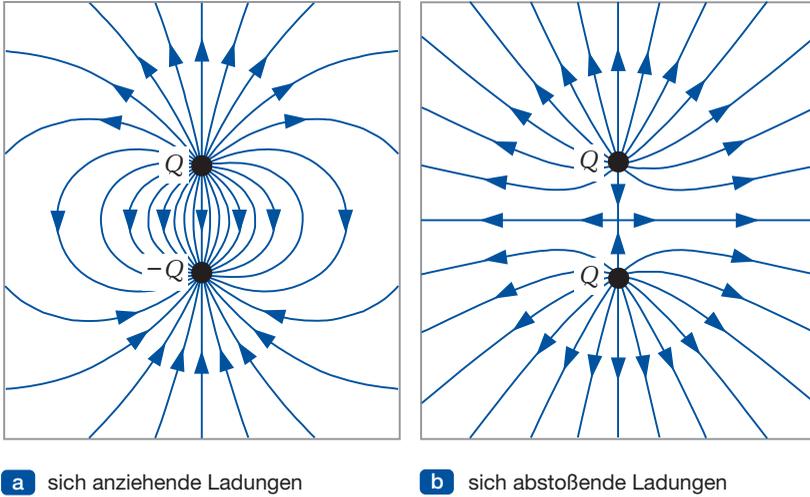


Abbildung 1.10: Feldlinienbilder

Eine Besonderheit ergibt sich bei den Punktladungen gleichen Vorzeichens in Abb. 1.10b. Hier treffen die Feldlinien in der Mitte zwischen den beiden Ladungen scheinbar aufeinander und laufen dann in zwei dazu senkrechten Richtungen auseinander. Bringen wir nun eine weitere Punktladung genau an diese Position, dann kann die Kraft auf diese Punktladung nicht gleichzeitig in verschiedene Richtungen zeigen. Das bedeutet aber auch, dass die elektrische Feldstärke in diesem Punkt eine eindeutige Richtung haben muss, d.h. die elektrischen Feldlinien dürfen sich nicht schneiden. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich dadurch auf, dass die Feldstärke bei Annäherung an diesen Punkt immer kleiner wird und in dem Punkt selber verschwindet. Diese Aussage lässt sich leicht überprüfen. Für $Q_1 = Q_2 = Q$ erhält man im Ursprung $x_P = y_P = 0$ aus der Gl. (1.19) tatsächlich den Wert $\vec{E}(0) = \vec{0}$.

Merke

Eine nicht verschwindende elektrische Feldstärke besitzt immer eine eindeutige Richtung, d.h. die elektrischen Feldlinien können sich nicht schneiden.

1.7.2 Qualitative Darstellung von Feldbildern

In vielen Fällen lässt sich ein Feldbild bereits qualitativ angeben, auch ohne umfangreiche Rechnungen durchzuführen. Dabei können folgende Informationen verwendet werden:

- Das Feld in unmittelbarer Nähe einer Punktladung wird im Wesentlichen von der Punktladung bestimmt und hat den in Abb. 1.8 dargestellten radialsymmetrischen Verlauf.
- In sehr großem Abstand von einer Ladungsanordnung verhält sich das Feld wie bei einer im Ladungsschwerpunkt angebrachten Punktladung, die den gleichen Wert wie die Gesamtladung besitzt. Die Feldlinien zeigen bei positiver Gesamtladung radial nach außen (Abb. 1.10b).
- Bei verschwindender Gesamtladung müssen alle von den positiven Ladungen ausgehenden Feldlinien auf den negativen Ladungen enden. Es verlaufen keine Feldlinien zur unendlich fernen Hülle (Abb. 1.10a). Die einzige Ausnahme bildet hier die Feldlinie auf der Verbindungslinie zwischen den beiden Punktladungen, d.h. auf der y-Achse.
- Oftmals lassen sich Symmetrieebenen finden, auf denen die Feldrichtung angegeben werden kann. In den beiden Feldbildern der Abb. 1.10 betrifft das sowohl die durch beide Punktladungen verlaufende vertikale Verbindungslinie als auch die horizontale Ebene zwischen den Ladungen.

1.8 Das elektrostatische Potential

Wir haben bereits gesehen, dass auf eine Punktladung Q in einem äußeren, d.h. von anderen Ladungen hervorgerufenen, elektrischen Feld eine Kraft ausgeübt wird. Soll diese Ladung von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 verschoben werden, dann muss gegen die Feldkräfte eine Arbeit aufgewendet werden. Mit der Beziehung (1.3) für die Kraft $\vec{F} = \vec{E}Q$ erhält man aus dem Linienintegral (C.7) die erforderliche Arbeit

$$W_e = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} . \quad (1.20)$$

An dieser Stelle wollen wir kurz innehalten und die Frage nach dem richtigen Vorzeichen in Gl. (1.20) untersuchen. Stellen wir uns vor, dass wir eine positive Ladung Q im Feld einer zweiten, ebenfalls positiven Ladung bewegen und zwar so, dass der Abstand zwischen beiden Ladungen verringert werden soll (die ausführliche Rechnung folgt in Kapitel 1.8.1). Das vektorielle Wegelement $d\vec{s}$ zeigt wegen der Annäherung in Richtung auf die zweite Ladung. Die von der zweiten (positiven) Ladung hervorgerufene Feldstärke zeigt aber von dieser Ladung weg, d.h. das Integral über das Skalarprodukt $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ liefert einen negativen Wert. Mit dem bereits in Gl. (1.20) vorhandenen negativen Vorzeichen nimmt W_e insgesamt einen positiven Wert an. Diese zu leistende

Arbeit beim Zusammenschieben zweier sich gegenseitig abstoßender Ladungen führt zu einer Erhöhung der im System gespeicherten Energie. Der Wert W_e in Gl. (1.20) beschreibt also die von außen dem System zugeführte Energie.

Betrachten wir nun den Sonderfall, dass eine Ladung Q entsprechend ►Abb. 1.11 entlang eines geschlossenen Weges, beginnend beim Punkt P_0 entlang der Kontur C_1 zum Punkt P_1 und anschließend entlang der Kontur C_2 wieder zurück zum Punkt P_0 bewegt wird².

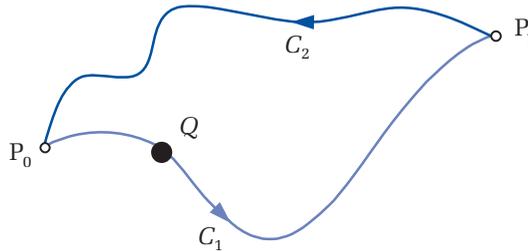


Abbildung 1.11: Bewegung einer Punktladung entlang eines geschlossenen Weges

Die dabei aufzuwendende Arbeit kann mit Gl. (1.20) durch die beiden Teilintegrale

$$W_e = -Q \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} - Q \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} - Q \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.21)$$

beschrieben werden. Da sich die Punktladung nach dem Umlauf an der gleichen Position befindet wie vorher, ist auch die Energie des Systems unverändert. Die insgesamt nach Gl. (1.21) geleistete Arbeit verschwindet daher, mit anderen Worten, das Linienintegral der elektrischen Feldstärke entlang der Kontur C_1 ist entgegengesetzt gleich dem Linienintegral der elektrischen Feldstärke entlang der Kontur C_2 .

Kennzeichnet man den geschlossenen Integrationsweg durch einen Ring im Integralzeichen, wir sprechen dann von einem **Ringintegral** oder einem Umlaufintegral (vgl. Anhang C), dann erhält man für die Gl. (1.21) folgende mathematische Darstellung

$$W_e = -Q \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} - Q \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \rightarrow \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.22)$$

Die geschlossene Kontur C in der letzten Gleichung setzt sich aus den beiden Konturen C_1 und C_2 zusammen.

² Wir wollen hier voraussetzen, dass dieser Bewegungsvorgang hinreichend langsam erfolgt, so dass die Abstrahlung elektromagnetischer Felder vernachlässigt werden kann.

Merke

Im elektrostatischen Feld verschwindet das entlang einer geschlossenen Kontur gebildete Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke.

Diese Aussage trägt natürlich auch der Tatsache Rechnung, dass die elektrischen Feldlinien bei den positiven Ladungen beginnen und bei den negativen enden. Wären die elektrischen Feldlinien in sich geschlossen, z.B. in Form eines Kreises, dann würde die Berechnung des Integrals (1.22) entlang einer derart **geschlossenen Feldlinie** auf jedem elementaren Wegelement einen Beitrag mit jeweils gleichem Vorzeichen zu dem Gesamtergebnis liefern, das somit nicht mehr verschwinden könnte. Die Ladungen stellen die Quellen für das elektrostatische Feld dar. Dieses wird daher als **Quellenfeld** bezeichnet (im Gegensatz zu dem später noch zu behandelnden **Wirbelfeld**).

Auch das Gravitationsfeld ist ein Quellenfeld, wobei die Quellen in diesem Fall durch die Massen gegeben sind. Wird ein Körper der Masse m gegen die Kräfte eines Gravitationsfeldes von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 bewegt, dann ist dafür eine Arbeit aufzuwenden, die zu einer Erhöhung der *potentiellen* Energie des Körpers um den Betrag der geleisteten Arbeit führt. Ganz analog führt die Bewegung einer Ladung gegen die Kräfte des elektrischen Feldes zu einer Erhöhung der Energie dieser Ladung, die auch in diesem Fall gleich dem Betrag der geleisteten Arbeit ist. Man spricht auch hier von der **potentiellen Energie** der Ladung und beschreibt damit die Möglichkeit dieser Ladung, durch Abgabe ihrer potentiellen Energie Arbeit leisten zu können. Nach Gl. (1.20) ist der Zuwachs an potentieller Energie bei einer Bewegung der Ladung Q von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 gegeben durch das Produkt aus dem Wert der Ladung und dem negativen Wegintegral der elektrischen Feldstärke. Wir haben aber bereits in Abb. 1.11 gesehen, dass dieses Wegintegral nicht von dem Verlauf des gewählten Weges, sondern lediglich vom Anfangs- und Endpunkt abhängt. Wählt man jeweils ausgehend von dem gleichen Anfangspunkt P_0 unterschiedliche Endpunkte für den Integrationsweg, dann unterscheiden sich die Ergebnisse bei der Berechnung der potentiellen Energie nach Gl. (1.20) nur durch den Wert einer skalaren Größe. Damit kann jeder Punkt des Raumes, bezogen auf einen willkürlichen Anfangspunkt (Bezugswert) durch eine skalare Größe charakterisiert werden, für die die Bezeichnung φ_e verwendet und die **elektrostatisches Potential** (Dimension V) genannt wird

$$W_e^{(1.20)} = Q \left[\int_{P_0}^{P_1} (-\vec{E}) \cdot d\vec{s} \right] = Q \left[\varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_0) \right]. \quad (1.23)$$

Der Zuwachs an potentieller Energie ist proportional zur Größe der bewegten Ladung Q und zur Potentialdifferenz $\varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_0)$, die bei der Ladungsbewegung durchlaufen wird. Da in dieser Beziehung nicht das Potential selbst, sondern lediglich die Änderung des Potentials zwischen Anfangs- und Endpunkt von Bedeutung ist, kann dem gesamten Raum ein beliebiges konstantes Potential überlagert werden, ohne dass das Ergebnis (1.23) davon beeinflusst wird. Die Festlegung eines Bezugspunktes ist willkürlich und wird üblicherweise so vorgenommen, dass man der Erde oder auch der unendlich fernen Hülle das Bezugspotential $\varphi_e = 0$ zuordnet. Die Erdoberfläche stellt aufgrund ihrer Leitfähigkeit eine Äquipotentialfläche dar (vgl. Kap. 1.8.2). In Schaltungen wird üblicherweise der so genannten *Masse*, d.h. dem Minusanschluss bei einer Batterie oder dem an die Schaltung angeschlossenen metallischen Gehäuse der Bezugswert $\varphi_e = 0$ zugeordnet³.

Legt man insbesondere den Anfangspunkt P_0 so, dass $\varphi_e(P_0) = 0$ gilt, dann ist die absolute potentielle Energie einer Punktladung im Punkt P_1 durch die Beziehung

$$W_e(P_1) \stackrel{(1.23)}{=} Q \left[\varphi_e(P_1) - \underbrace{\varphi_e(P_0)}_0 \right] = Q \varphi_e(P_1) \quad (1.24)$$

gegeben, umgekehrt lässt sich das absolute Potential in diesem Punkt aus der Beziehung

$$\varphi_e(P_1) = \frac{W_e(P_1)}{Q} \stackrel{(1.23)}{=} - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.25)$$

berechnen.

Merke

Das elektrostatische Potential $\varphi_e(P)$ an der Stelle eines Punktes P ist der Quotient aus der Arbeit, die nötig ist, um eine Ladung Q von einem Punkt P_0 mit dem Bezugspotential $\varphi_e(P_0) = 0$ zu dem betrachteten Punkt P zu bringen, und der Ladung.

1.8.1 Das Potential einer Punktladung

Als Beispiel wollen wir das von einer im Ursprung des Kugelkoordinatensystems befindlichen positiven Punktladung Q in einem beliebigen Punkt P hervorgerufene Potential berechnen. Die radial gerichtete Feldstärke (Abb. 1.8) ist nach Gl. (1.3) gege-

3 Die beschriebene Situation ist vergleichbar der Festlegung von Höhenangaben auf der Erde. Die Aussage, dass sich ein beliebiger Punkt auf der Erdoberfläche auf einer bestimmten Höhe befindet, ist nur sinnvoll bei gleichzeitiger Angabe des willkürlich gewählten Bezugswertes. Dieser wird üblicherweise auf die Höhe des Meeresspiegels gelegt.

ben. Bringen wir eine zweite Punktladung Q_1 von der Stelle $r = r_1$ entgegen der Feldrichtung an die Stelle $r = r_2 < r_1$ (vgl. ►Abb. 1.12), dann muss die Arbeit

$$\begin{aligned}
 W_e &\stackrel{(1.23)}{=} -Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \underbrace{\vec{e}_r}_{\vec{E}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \underbrace{\vec{e}_r}_{d\vec{s}} dr = -Q_1 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr \\
 &= -Q_1 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = Q_1 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.26}$$

geleistet werden. Verlegen wir den Anfangspunkt r_1 auf die unendlich ferne Hülle $r_1 \rightarrow \infty$, dann gilt mit dem dort vorliegenden Bezugspotential $\varphi_e(\infty) = 0$ für die Energie der Punktladung Q_1 an der Stelle r_2 nach Gl. (1.26)

$$W_e \stackrel{(1.26)}{=} Q_1 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \stackrel{(1.24)}{=} Q_1 \varphi_e(r_2) \quad \rightarrow \quad \varphi_e(r_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}.
 \tag{1.27}$$

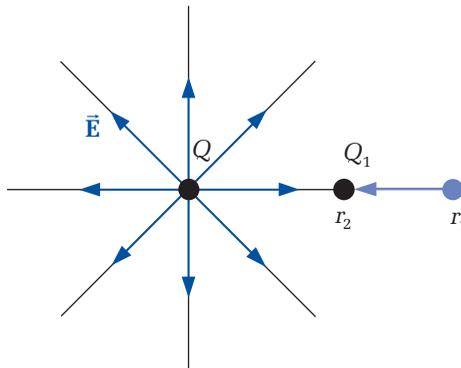


Abbildung 1.12: Verschiebung einer Punktladung im Feld einer zweiten Punktladung

Der Ausdruck $\varphi_e(r_2)$ beschreibt das von der Punktladung Q an der Stelle $r = r_2$ hervorgerufene Potential. Dieses ist proportional zur Ladung und umgekehrt proportional zum Abstand von der Ladung. Die Flächen konstanten Potentials sind konzentrisch um die Punktladung angeordnete Kugelflächen. An dem ersten Ausdruck in Gl. (1.27) erkennt man, dass die zu leistende Arbeit positiv ist, wenn beide Ladungen gleiche Vorzeichen haben und sich gegenseitig abstoßen.

Betrachten wir noch einmal das Ergebnis (1.26), dann beschreibt dieses in der Form $W_e = Q_1\varphi_e(r_2) - Q_1\varphi_e(r_1)$ die aufzuwendende Arbeit bzw. die Zunahme der potentiellen Energie der Punktladung Q_1 , wenn diese von einem Punkt r_1 mit dem Potential $\varphi_e(r_1)$ zu einem Punkt r_2 mit dem Potential $\varphi_e(r_2)$ bewegt wird. Dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\varphi_e(r_2) = \varphi_e(r_1)$ gilt, d.h. das Verschieben einer Ladung zwischen zwei Punkten mit gleichem Potential erfordert als Integral über den gesamten Weg betrachtet keine Arbeit.

1.8.2 Äquipotentialflächen

In diesem Kapitel wollen wir eine weitere Möglichkeit zur grafischen Darstellung von Feldern, nämlich mithilfe von Äquipotentialflächen, kennen lernen. Zur besseren Übersicht zeichnet man die Schnittlinien der Äquipotentialflächen mit der Zeichenebene. Die sich so ergebenden Linien werden als **Äquipotentiallinien** bezeichnet. Für das Beispiel der Punktladung erhält man als Schnittlinien konzentrisch um die Ladung angeordnete Kreise. Eine zusätzliche Information kann man diesen Feldbildern aus der Dichte der Linien entnehmen, wenn die Potentialdifferenzen zwischen jeweils zwei benachbarten Äquipotentiallinien konstant gehalten werden. Das bisherige Feldlinienbild der Punktladung nach Abb. 1.8 kann jetzt entsprechend ►Abb. 1.13 erweitert werden.

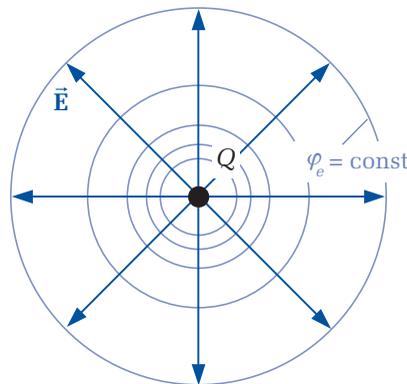


Abbildung 1.13: Feldbild einer Punktladung

Aus diesem Bild ist zu erkennen, dass die Feldlinien an jeder Stelle senkrecht auf den Äquipotentialflächen stehen. Dieser Zusammenhang ist nach Gl. (1.23) allgemein gültig. Bewegt man sich nämlich auf einer Äquipotentialfläche von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 , dann ist das Potential entlang des gerichteten Wegelementes überall gleich groß. Wegen der verschwindenden Potentialdifferenz muss dann aber auch das Linienintegral der elektrischen Feldstärke verschwinden

$$\varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_0) = 0 \stackrel{(1.23)}{=} - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (1.28)$$

Diese Bedingung lässt sich bei nicht verschwindender Feldstärke nur erfüllen, wenn das Skalarprodukt aus Feldstärke und vektorielltem Wegelement in Gl. (1.28) Null wird. Nach Gl. (A.7) folgt daraus unmittelbar, dass Äquipotentialflächen und Feldlinien senkrecht aufeinander stehen.

Betrachten wir nun einen metallischen Leiter, der in ein ortsabhängiges *externes* elektrisches Feld gebracht wird. Mit der Kennzeichnung *extern* soll verdeutlicht werden, dass das Feld von Ladungen außerhalb des Leiters hervorgerufen wird. Nehmen wir zunächst an, dass sich in dem Leiter infolge des externen Feldes ein nicht konstantes Potential einstellt. Nach Gl. (1.28) tritt dann zwischen den Punkten unterschiedlichen

Potentials eine elektrische Feldstärke auf, die Kräfte auf die in dem Leiter vorhandenen Ladungsträger ausübt. Die frei beweglichen Ladungsträger werden sich in dem Leiter also so lange verschieben, bis keine Kräfte mehr auftreten und die Potentialdifferenzen innerhalb des Leiters verschwinden. Die benötigte Dauer für diese Ladungsverschiebung ist bei metallischen Leitern extrem kurz und liegt in dem Bereich $< 10^{-12}$ s. Bei Materialien mit geringerer Leitfähigkeit (vgl. Kap. 2) wird dieser Ausgleichsvorgang mehr Zeit in Anspruch nehmen. Im statischen Zustand nach Beendigung der Ladungsträgerbewegungen werden die Potentialdifferenzen auch innerhalb der schwach leitfähigen Materialien verschwinden. Eine Ausnahme bilden die so genannten Nichtleiter, bei denen der Ausgleichsvorgang theoretisch unendlich lange dauert.

Da jeder Leiter ein konstantes Potential annimmt, ist er in seinem Inneren feldfrei. Die verschobenen Ladungen im Leiter erzeugen ein elektrisches Feld, das das externe Feld innerhalb des Leiters gerade kompensiert. Die sich einstellende Ladungsverteilung auf der Leiteroberfläche (vgl. Kap. 1.13) hängt von der Geometrie des Körpers und von seiner Lage bezogen auf die externen Ladungsverteilungen ab. Resultierend gilt die Aussage:

Merke

Im elektrostatischen Feld besitzt ein leitender Körper ein konstantes Potential. Seine Oberfläche wird zur Äquipotentialfläche, auf der die elektrische Feldstärke senkrecht steht. Das Leiterinnere ist feldfrei.

Diese Feldfreiheit ist aber nicht nur gewährleistet, wenn sich der Körper in einem externen Feld befindet, sie bleibt auch erhalten, wenn der leitende Körper eine eigene nicht verschwindende Gesamtladung besitzt. Auch diese Ladungsträger werden sich unter dem Einfluss der Coulomb'schen Kräfte so auf der Oberfläche verteilen, dass das Leiterinnere stets feldfrei ist.

1.9 Die elektrische Spannung

Die Potentialdifferenz zwischen zwei beliebigen Punkten P_1 und P_2 kann mit Gl. (1.23) bzw. mit Gl. (1.25) berechnet werden. Wählt man wieder für einen willkürlichen Bezugspunkt P_0 das Potential $\varphi_e(P_0) = 0$, dann gilt

$$\varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_2) \stackrel{(1.25)}{=} - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} . \quad (1.29)$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes P_0 und wird als elektrische Spannung U (Dimension V) zwischen den Punkten P_1 und P_2 bezeichnet

$$U_{12} = \varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} . \quad (1.30)$$

1.10 Die elektrische Flussdichte

Die Feldstärke einer positiven Punktladung ist nach Gl. (1.3) radial nach außen gerichtet und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands von der Ladung. Für eine im Ursprung des Kugelkoordinatensystems befindliche Punktladung Q schreiben wir diese Gleichung zunächst in der Form

$$\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{e}}_r \varepsilon_0 E_r(r) \stackrel{(1.3)}{=} \vec{\mathbf{e}}_r \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (1.31)$$

Denken wir uns eine Kugel vom Radius r mit der Oberfläche $A_K = 4\pi r^2$ um die Punktladung Q geschlagen, dann ist der rechts stehende Ausdruck in Gl. (1.31) das Verhältnis aus der von der Kugel eingeschlossenen Ladung zur Kugeloberfläche. Multiplizieren wir also die vektorielle Gl. (1.31) skalar mit dem Einheitsvektor $\vec{\mathbf{e}}_r$ und integrieren wir diesen Ausdruck über die Kugeloberfläche, dann erhalten wir als Ergebnis auf der rechten Seite der Gleichung die innerhalb der Kugel befindliche Ladung

$$\iint_{A_K} \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_r dA = \iint_{A_K} \vec{\mathbf{e}}_r \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{\mathbf{e}}_r dA = \frac{Q}{4\pi r^2} \iint_{A_K} dA = Q. \quad (1.32)$$

Man beachte, dass die Koordinate r bezüglich der Integration über die Kugeloberfläche eine Konstante ist und somit vor das Integral gezogen werden darf. In dieser Gleichung bezeichnet dA das skalare Flächenelement, das über die Kugeloberfläche integriert den Wert der Kugeloberfläche ergibt. Dagegen bezeichnet $\vec{\mathbf{e}}_r dA = d\vec{\mathbf{A}}$ das vektorielle Flächenelement, dessen Richtung senkrecht auf der Fläche steht und nach außen zeigt (vgl. Anhang C.2). Damit erhalten wir die Darstellung

$$\iint_{A_K} \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_r dA = \iint_{A_K} \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = Q. \quad (1.33)$$

Das in dem Integral stehende Produkt

$$\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{D}} \quad (1.34)$$

der Dimension As/m^2 wird als **elektrische Flussdichte** bezeichnet. Das Integral von $\vec{\mathbf{D}}$ über eine Fläche A mit dem gerichteten Flächenelement $d\vec{\mathbf{A}}$ (► Abb. 1.14) gibt den **elektrischen Fluss** Ψ der Dimension As an, der die Fläche A in Richtung der Flächennormalen durchsetzt⁴

$$\Psi = \iint_A \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}. \quad (1.35)$$

4 Die Begriffe Fluss und Flussdichte sind an dieser Stelle irreführend. Es gibt hier keinen physikalischen Vorgang, der durch die Bewegung von Teilchen oder dergleichen beschrieben werden kann. Die Verwendung dieser Begriffe erklärt sich aus dem Aufbau der Gleichung (1.35), die in Kapitel C.2 ausführlich behandelt wird und dort tatsächlich einen Fluss (von Teilchen) durch eine Fläche im Sinne des üblichen Sprachgebrauchs darstellt.

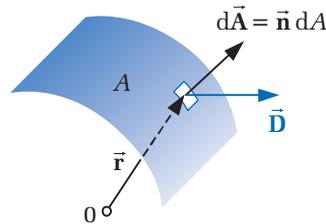


Abbildung 1.14: Elektrischer Fluss Ψ durch die Fläche A

Handelt es sich bei der Fläche um eine geschlossene Hüllfläche, innerhalb der sich eine Punktladung Q befindet, dann liefert das Integral nach Gl. (1.33) den Wert der eingeschlossenen Ladung. Dieser Sachverhalt, den wir am Beispiel einer Kugelfläche und einer im Kugelmittelpunkt angebrachten Punktladung gezeigt haben, lässt sich auch allgemein für eine beliebig gewählte Hüllfläche beweisen. Damit ist der Zusammenhang zwischen eingeschlossener Punktladung und Gesamtfluss durch die Hüllfläche unabhängig davon, an welcher Stelle sich die Ladung in dem umschlossenen Volumen befindet.

Da man sich jede Ladungsanordnung im Elementaren aus Punktladungen aufgebaut denken kann, kommt man zur folgenden allgemein gültigen Aussage:

Merke

Das Hüllflächenintegral der elektrischen Flussdichte über eine beliebig geschlossene Fläche A entspricht der im umschlossenen Volumen enthaltenen Gesamtladung Q . Der Fluss Ψ ist also ein Maß für die vorhandene Ladungsmenge

$$\Psi = \oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad . \quad (1.36)$$

Die elektrische Flussdichte \vec{D} ist eine **Quantitätsgröße** und beschreibt die **Ursache** für den Raumzustand, der sich durch Kraftwirkungen auf Ladungen bemerkbar macht.

Da die Ladungen als Erregung für den Raumzustand angesehen werden, wird die Flussdichte \vec{D} oft auch als **elektrische Erregung** bezeichnet.

Die Gl. (1.36) kann in einfachen, meist symmetrischen Anordnungen dazu verwendet werden, die Feldstärke im allgemeinen Raumpunkt zu berechnen. Wir werden in den folgenden beiden Kapiteln ausgehend von dieser Beziehung das Verhalten der Flussdichte und der Feldstärke einerseits beim Durchgang durch eine ortsabhängige Flächenladung und andererseits an leitenden Oberflächen untersuchen.

Beispiel 1.2: Feldberechnung

Im zylindrischen Koordinatensystem (ρ, φ, z) ist der gesamte Bereich $\rho \leq a$ und $-\infty < z < \infty$ mit einer Raumladung der Dichte ρ_0 ausgefüllt. Von dem unendlich langen Zylinder ist in der ►Abb. 1.15 nur ein Ausschnitt der Länge l dargestellt.

1. Wie groß ist die Gesamtladung Q in einem Abschnitt der Länge l ?
2. Welchen Wert nimmt die elektrische Flussdichte \vec{D} in einem beliebigen Punkt des Raumes an?

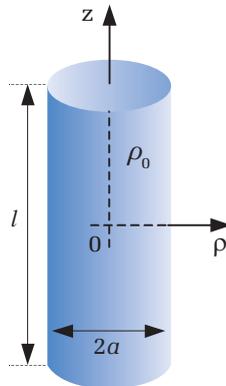


Abbildung 1.15: Raumladungsverteilung

Lösung:

1. Für die Gesamtladung in einem Abschnitt der Länge l gilt:

$$Q \stackrel{(1.16)}{=} \iiint_V \rho_0 \, dV = \rho_0 \iiint_V dV = \rho_0 V \quad \rightarrow \quad Q = \rho_0 l \pi a^2. \quad (1.37)$$

2. Die Anordnung ist unabhängig von den Koordinaten φ und z . Die aus Symmetriegründen radial gerichtete Flussdichte $\vec{D} = \vec{e}_\rho D(\rho)$ hängt nur von dem Achsabstand ab. Für einen Zylinder der Länge l gilt:

$$Q \stackrel{(1.36)}{=} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iint_{\text{Mantel}} \vec{e}_\rho D(\rho) \cdot \vec{e}_\rho dA = D(\rho) 2\pi \rho l \stackrel{(1.37)}{=} \begin{cases} \rho_0 l \pi \rho^2 & \text{für } \rho \leq a \\ \rho_0 l \pi a^2 & \text{für } \rho > a \end{cases} \quad (1.38)$$

Für die Flussdichte gilt resultierend das Ergebnis

$$\vec{D}(\rho) = \begin{cases} \vec{e}_\rho \rho_0 \frac{\rho}{2} = \vec{e}_\rho \frac{Q}{2\pi a l} \frac{\rho}{a} & \text{innerhalb des Zylinders} \\ \vec{e}_\rho \rho_0 \frac{a^2}{2\rho} = \vec{e}_\rho \frac{Q}{2\pi a l} \frac{a}{\rho} & \text{außerhalb des Zylinders} \end{cases}. \quad (1.39)$$

1.11 Das Verhalten der Feldgrößen bei einer Flächenladung

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der Feldgrößen beim Durchgang durch eine ortsabhängige Flächenladung untersucht werden. Zu diesem Zweck betrachten wir die in ►Abb. 1.16 dargestellte dünne Kunststoffolie mit vernachlässigbarer Dicke, die z.B. durch Reiben mit einem Wolltuch aufgeladen ist und eine im Allgemeinen ortsabhängige Flächenladungsverteilung aufweist. Zur einfacheren Behandlung des Problems werden wir in diesem und auch in späteren Fällen die vektoriellen Feldgrößen \vec{E} und \vec{D} , die in Bezug auf die betrachtete Folie eine beliebige Orientierung aufweisen, in eine zur Fläche senkrechte Komponente, die so genannte Normalkomponente (Index n) und in eine Tangentialkomponente (Index t) zerlegen. Die Betrachtung wird für die beiden Komponenten getrennt durchgeführt.

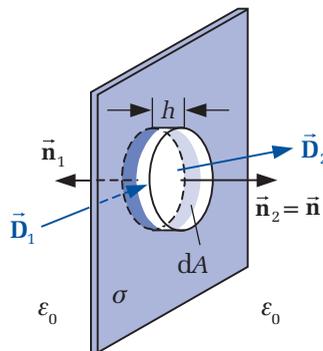


Abbildung 1.16: Flächenladungsverteilung

Um das Verhalten der Normalkomponente zu untersuchen, legen wir gemäß Abb. 1.16 einen kleinen Flächzylinder um die ladungsbesetzte Fläche und lassen die Höhe h des Zylinders gegen Null gehen. Die elementare Fläche dA des Zylinders wählen wir so klein, dass wir die Flächenladung σ innerhalb des Zylinders als konstant, d.h. ortsunabhängig ansehen können. Nach Gl. (1.36) muss der insgesamt durch die Zylinderoberfläche austretende elektrische Fluss der innerhalb des Zylinders eingeschlossenen Gesamtladung σdA entsprechen. Wegen $h \rightarrow 0$ liefert die Mantelfläche keinen Beitrag und wegen der innerhalb von dA voraussetzungsgemäß ortsunabhängigen Flächenladungsdichte geht die Integration der Flussdichte über die Deckflächen in eine einfache Multiplikation mit dem als dA bezeichneten Flächenelement über. Mit den Bezeichnungen \vec{n}_1 und \vec{n}_2 für die beiden von der Folie jeweils nach außen zeigenden Einheitsvektoren kann der gesamte aus dem Flächzylinder austretende Fluss nach Gl. (1.36) folgendermaßen geschrieben werden

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 dA = \sigma dA. \quad (1.40)$$

Bezeichnen wir nun eine der beiden Flächennormalen zur Vereinfachung mit \vec{n} , z.B. $\vec{n}_2 = \vec{n}$, dann gilt $\vec{n}_1 = -\vec{n}$ und die Gl. (1.40) nimmt die neue Form

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 dA + \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 dA = \vec{D}_2 \cdot \vec{n} dA - \vec{D}_1 \cdot \vec{n} dA = D_{n2} dA - D_{n1} dA = \sigma dA \quad (1.41)$$

an. Die Werte D_{n1} und D_{n2} bezeichnen die Komponenten der Flussdichten \vec{D}_1 und \vec{D}_2 in Richtung des Einheitsvektors \vec{n} . Die Gl. (1.41) lässt sich nun auf einfache Weise interpretieren: die Differenz zwischen dem auf der rechten Seite der Folie in Richtung der Flächennormalen \vec{n} aus dem Flachzylinder austretenden Fluss $D_{n2}dA$ und dem auf der gegenüberliegenden Seite in Richtung des gleichen Einheitsvektors \vec{n} in den Zylinder eintretenden Fluss $D_{n1}dA$ ist durch die eingeschlossene Ladung gegeben. Nach Kürzen des auf beiden Gleichungsseiten identischen Flächenelementes dA folgt unmittelbar die gesuchte Beziehung

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma \quad (1.42)$$

für die Normalkomponente der Flussdichte. Bei verschwindender Flächenladung $\sigma = 0$ folgt aus dieser Gleichung die triviale Aussage, dass sich die Normalkomponente der Flussdichte dann auch nicht ändert, d.h. $D_{n1} = D_{n2}$.

Mit der auf beiden Seiten der Flächenladung gleichen Dielektrizitätskonstanten ϵ_0 erhält man mithilfe der Gl. (1.34) die Übergangsbedingung für die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke

$$\epsilon_0 E_{n2} - \epsilon_0 E_{n1} = \sigma \quad (1.43)$$

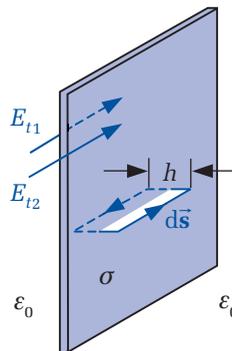


Abbildung 1.17: Flächenladungsverteilung

Im zweiten Schritt soll das Verhalten der Tangentialkomponenten untersucht werden. Zu diesem Zweck betrachten wir das in ►Abb. 1.17 um die Trennfläche gelegte Rechteck mit den tangential zur Trennebene verlaufenden elementaren Seitenlängen $d\vec{s}$ und der wiederum verschwindenden Abmessung $h \rightarrow 0$. Bilden wir gemäß Gl. (1.22) das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke entlang dieses Rechtecks, dann liefern wegen $h \rightarrow 0$ nur die auf beiden Seiten entlang der Folie verlaufenden Wegelemente $d\vec{s}$ einen Beitrag. Wir wählen die Strecke ds so klein, dass die elektrische Feldstärke in

diesem Abschnitt als konstant, d.h. ortsunabhängig angesehen werden kann. Das Wegintegral der Feldstärke geht dann über in eine einfache Multiplikation der Feldstärke mit der Länge ds . Aus dem geforderten Verschwinden des Umlaufintegrals nach Gl. (1.22) folgt unmittelbar die Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke auf beiden Seiten der Flächenladung

$$E_{t2} ds - E_{t1} ds = 0 \quad \rightarrow \quad E_{t1} = E_{t2} . \quad (1.44)$$

Die Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke erfordert wegen der auf beiden Seiten der Flächenladung gleichen Dielektrizitätskonstanten auch die Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Flussdichte

$$E_{t1} = \frac{1}{\varepsilon_0} D_{t1} = E_{t2} = \frac{1}{\varepsilon_0} D_{t2} \quad \rightarrow \quad D_{t1} = D_{t2} . \quad (1.45)$$

Die in diesem Abschnitt am Beispiel der Flächenladung abgeleiteten Beziehungen für die Komponenten der beiden vektoriellen Feldgrößen werden allgemein als **Randbedingungen** bezeichnet. In den folgenden Abschnitten werden wir weitere Randbedingungen, z.B. an Sprungstellen von Materialeigenschaften kennen lernen.

Wegen der besonderen Bedeutung der Randbedingungen bei der Feldberechnung und wegen der immer wieder gleichen Vorgehensweise bei der Ableitung dieser Beziehungen fassen wir die einzelnen Schritte noch einmal zusammen:

- Zerlegung der vektoriellen Feldgrößen in Normal- und Tangentialkomponenten
- Betrachtung der *Normalkomponente der Flussdichte*, da hier bereits eine bekannte Gesetzmäßigkeit vorliegt, z.B. Gl. (1.36)
- Betrachtung der *Tangentialkomponente der Feldstärke*, hier liegt ebenfalls eine bekannte Gesetzmäßigkeit vor, z.B. Gl. (1.22)
- Aufstellung der Randbedingungen für die Tangentialkomponente der Flussdichte und die Normalkomponente der Feldstärke mithilfe einer bekannten Beziehung zwischen den beiden Feldgrößen, z.B. Gl. (1.34)

Für die Randbedingungen bei einer Flächenladung gilt allgemein die Aussage:

Merke

Beim Durchgang durch eine ladungsbesetzte Fläche erleidet die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte einen der Flächenladungsdichte am Durchgangsort proportionalen Sprung (1.42), während die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke stetig ist (1.44). Die Forderungen für die beiden anderen Komponenten (1.43) und (1.45) ergeben sich aus der Beziehung $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

Beispiel 1.3: Zwei parallel angeordnete homogene Flächenladungen der Dichten $\pm\sigma$

In den Ebenen $y_1 = \text{const}$ und $y_2 = \text{const}$ befinden sich homogene Flächenladungsverteilungen $\pm\sigma$, die zur Vereinfachung in x - und in z -Richtung als unendlich ausgedehnt angenommen werden sollen. Unter der Voraussetzung, dass sich die Anordnung in Luft befindet, sind im allgemeinen Raumpunkt die elektrische Flussdichte und die elektrische Feldstärke zu bestimmen.

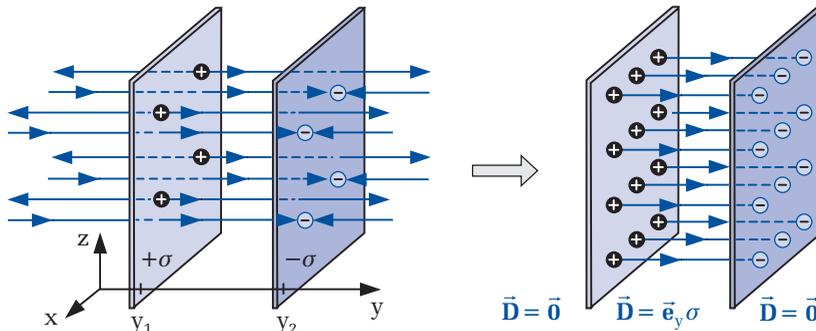


Abbildung 1.18: Zwei parallel angeordnete, unendlich ausgedehnte homogene Flächenladungsverteilungen

Lösung:

Da die gesamte Ladungsverteilung von den beiden Koordinaten x und z unabhängig ist, muss auch das elektrische Feld von diesen Koordinaten unabhängig sein. Betrachten wir zunächst nur das Feld infolge der Flächenladung $+\sigma$ in der Ebene $y = y_1$. Aus Symmetriegründen wird die Feldstärke auf beiden Seiten der Flächenladung betragsmäßig gleich sein. Da die Feldlinien von den positiven Ladungen ausgehen, zeigt das Feld im Bereich $y > y_1$ in die positive y -Richtung, im Bereich $y < y_1$ dagegen in die negative y -Richtung. Mit der willkürlich gewählten Flächennormalen $\vec{n} = \vec{e}_y$ kann die Flussdichte in der folgenden Form dargestellt werden

$$\vec{D}_{+\sigma} = \begin{cases} \vec{e}_y D_{y2} & \text{für } y > y_1 \\ \vec{e}_y D_{y1} & \text{für } y < y_1 \end{cases} \quad (1.46)$$

Aus der Randbedingung (1.42) folgt wegen der zur Ebene $y = y_1$ schiefssymmetrischen Flussdichteverteilung das Ergebnis

$$D_{y2} - D_{y1} = D_{y2} - (-D_{y2}) = \sigma \quad \rightarrow \quad \vec{D}_{+\sigma} = \pm \vec{e}_y \frac{\sigma}{2} \quad \text{für } \begin{cases} y > y_1 \\ y < y_1 \end{cases} \quad (1.47)$$

Für die negative Flächenladungsverteilung in der Ebene $y = y_2$ gilt entsprechend

$$\vec{D}_{-\sigma} = \mp \vec{e}_y \frac{\sigma}{2} \quad \text{für } \begin{cases} y > y_2 \\ y < y_2 \end{cases} \quad (1.48)$$

Überlagert man die beiden Teillösungen (1.47) und (1.48), dann stellt man fest, dass sich im Bereich zwischen den beiden Ebenen $y_1 < y < y_2$ ein von der Koordinate y unabhängiges homogenes Feld vom Gesamtwert

$$\vec{D} = \vec{D}_{+\sigma} + \vec{D}_{-\sigma} = \vec{e}_y \sigma \tag{1.49}$$

einstellt. In den Bereichen $y < y_1$ und $y > y_2$ kompensieren sich die beiden Teillösungen, so dass dieser Raum feldfrei ist (rechte Seite der ►Abb. 1.18). Die elektrische Feldstärke nimmt in dem Zwischenraum $y_1 < y < y_2$ den Wert $\vec{E} = \vec{e}_y \sigma / \epsilon_0$ an und verschwindet ebenfalls in den Bereichen $y < y_1$ und $y > y_2$.

1.12 Feldstärke an leitenden Oberflächen

Als zweites Anwendungsbeispiel für die Gl. (1.36) untersuchen wir das Verhalten der Feldgrößen an einer leitenden Oberfläche. Zu diesem Zweck betrachten wir die in ►Abb. 1.19 dargestellte leitende metallische Kugel des Durchmessers $2a$, auf der sich die Gesamtladung $Q > 0$ befindet. Wegen der kugelsymmetrischen Anordnung ist die Feldstärke und damit auch die Flussdichte außerhalb der Kugel radial nach außen gerichtet und nur von der Kugelkoordinate r abhängig. Die Integration der Flussdichte nach Gl. (1.36) über eine um den gleichen Mittelpunkt geschlagene, in der Abbildung gestrichelt angedeutete Kugel des Radius $r > a$ liefert wegen der von den Integrationsvariablen ϑ und φ unabhängigen Flussdichte $D(r)$ das Ergebnis

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{e}_r D(r) \cdot \vec{e}_r dA = D(r) \iint_A dA = D(r) 4\pi r^2 = Q \quad \rightarrow \tag{1.50}$$

$$D(r) = \epsilon_0 E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Ein Vergleich mit der Beziehung (1.31) zeigt, dass die geladene Kugel in ihrem Außenraum das gleiche Feld wie eine Punktladung Q im Ursprung erzeugt. Die Kugel besitzt nach Kapitel 1.8.2 ein konstantes Potential und ist in ihrem Inneren feldfrei. Diese Aussage bedeutet aber gleichzeitig, dass die Ladungen homogen auf der Kugeloberfläche als Flächenladung

$$\sigma = \frac{Q}{A_K} = \frac{Q}{4\pi a^2} \tag{1.51}$$

verteilt sein müssen. Integrieren wir nämlich die Flussdichte über eine konzentrisch um den Mittelpunkt angeordnete kugelförmige Hüllfläche, deren Radius kleiner ist als der Kugelradius a , dann folgt wegen der Feldfreiheit im Inneren $D(r) = 0$ für $r < a$ nach Gl. (1.50) unmittelbar das Verschwinden der innerhalb der Hüllfläche vorhandenen Gesamtladung.

Ein Vergleich der beiden letzten Beziehungen zeigt, dass der Betrag der Flussdichte $D(r)$ unmittelbar an der Kugeloberfläche $r \rightarrow a$ dem Wert der Flächenladung entspricht

$$D(a) = \epsilon_0 E(a) = \sigma. \tag{1.52}$$

Der Sprung der Flussdichte vom Wert Null für $r < a$ auf den Wert σ nach Gl. (1.52) beim Durchgang durch die Kugeloberfläche $r = a$ entspricht genau der Randbedingung (1.42). Der Verlauf der Flussdichte als Funktion des Mittelpunktsabstandes r ist ebenfalls in Abb. 1.19 dargestellt.

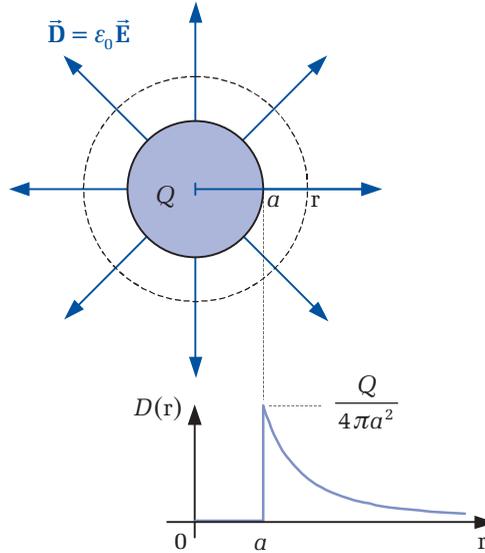


Abbildung 1.19: Geladene metallische Kugel

Da die elektrische Feldstärke von den positiven Ladungen ausgeht, ist die in Gl. (1.52) festgestellte Proportionalität zwischen Feldstärke und Flächenladung leicht einzusehen. Dieser aus Symmetriegründen am Beispiel einer Kugel demonstrierte Zusammenhang ist auch bei ortsabhängiger Ladungsverteilung an jeder Stelle der leitenden Oberfläche gültig. Bezeichnet man mit \vec{n} die Flächennormale, d.h. den auf der Oberfläche senkrecht stehenden Einheitsvektor, und mit D_n bzw. E_n die beiden Normalkomponenten, dann lässt sich die auf der Leiteroberfläche geltende Beziehung (1.52) $D_n = \epsilon_0 E_n = \sigma$ mithilfe der Gl. (A.12) in der vektoriellen Form

$$D_n = \vec{n} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{n} \cdot \vec{E} = \sigma \Big|_{\text{auf der Oberfläche}} \quad (1.53)$$

schreiben. Zerlegt man die beiden Vektoren in ihre auf der leitenden Oberfläche senkrecht stehende Normalkomponente und in die Tangentialkomponente, dann gelten die skalaren Beziehungen

$$D_n = \sigma, \quad D_t = 0 \quad \text{und} \quad E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E_t = 0 \quad (1.54)$$

für die entsprechenden Komponenten auf der Oberfläche. Innerhalb des Leiters verschwinden die Feldgrößen.

1.13 Die Influenz

Wir wollen jetzt noch einmal die bereits in Kap. 1.8.2 diskutierte Situation untersuchen, bei der sich ein leitender Körper in einem externen elektrischen Feld befindet. Wir haben bereits festgestellt, dass der leitende Körper ein konstantes Potential annimmt und in seinem Inneren feldfrei ist. Die Folgerungen aus dieser Aussage wollen wir an zwei unterschiedlichen Beispielen detailliert untersuchen, indem wir die zur Erzeugung der Feldfreiheit notwendige Ladungsträgerverschiebung in den Körpern quantitativ bestimmen.

1.13.1 Dünne leitende Platten im homogenen Feld

Im ersten Beispiel verwenden wir zur Felderzeugung die in ►Abb. 1.20 dargestellte Anordnung mit zwei parallelen Platten der Gesamtladungen $\pm Q$, die sich in einem im Vergleich mit den Plattenabmessungen kleinen Abstand gegenüberstehen.

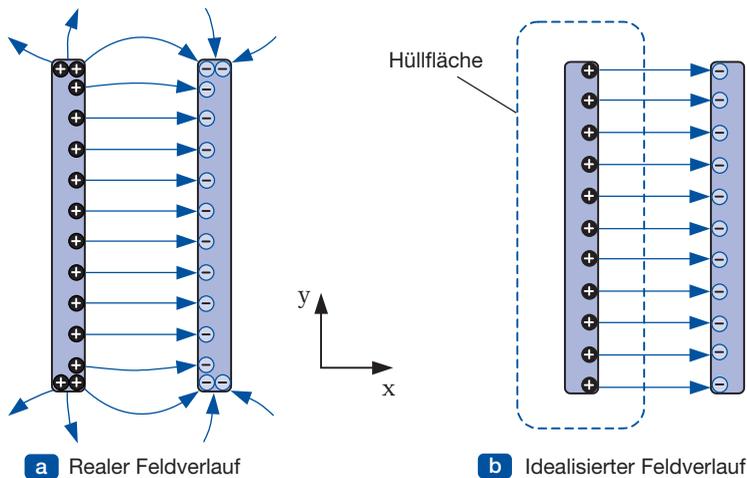


Abbildung 1.20: Elektrisch geladene Platten

Die in der Abb. 1.20a angedeutete Ladungsträgerverteilung innerhalb der beiden Platten lässt sich auf einfache Weise verstehen. Aufgrund der Anziehungskräfte zwischen den positiven und negativen Ladungsträgern müssen sich diese zwangsläufig auf den Innenseiten der Platten, d.h. auf den sich gegenüberliegenden Oberflächen konzentrieren. Man kann diese Verteilung auch noch anders begründen. Betrachten wir die rechte Platte, dann befindet sich diese in dem von den positiven Ladungsträgern hervorgerufenen externen x -gerichteten Feld. Feldfreiheit in der rechten Platte kann aber nur erreicht werden, wenn das von den Elektronen innerhalb der Platte erzeugte Feld die entgegengesetzte Richtung aufweist. Da die Feldlinien zu den negativen Ladungsträgern hinzeigen, müssen sich diese auf der innen liegenden Oberfläche befinden. Diese Feldfreiheit innerhalb der rechten Platte wird auf die gleiche Weise erreicht wie die Feldfreiheit im Bereich $y > y_2$ in der Abb. 1.18.

Das elektrische Feld wird sich in der dargestellten Weise zwischen den beiden Platten konzentrieren und einen näherungsweise homogenen Verlauf aufweisen. Außerhalb der Platten verschwindet das Feld fast völlig. Es wird hier umso kleiner, je größer die Plattenfläche und je kleiner der Abstand zwischen den Platten wird. In dem Übergangsbereich an den Plattenrändern bildet sich ein so genanntes **Strefeld** aus. Sein Verlauf ist in Abb. 1.20a angedeutet.

Zur näherungsweise Berechnung der Feldstärke zwischen den Platten können das Strefeld und auch das Feld außerhalb der Platten vernachlässigt werden. Man erkennt, dass die idealisierte Feldverteilung in Abb. 1.20b identisch ist mit der Feldverteilung in Abb. 1.18. Mit der Bezeichnung A für die Fläche der Platten und mit den Gesamtladungen $\pm Q$ erhält man die homogen verteilten Flächenladungsdichten $\pm\sigma = \pm Q/A$. Nach Gl. (1.49) wird sich auf den innen liegenden Oberflächen der beiden Platten das x -gerichtete Feld der Flussdichte $D_x = \epsilon_0 E_x = \sigma$ einstellen. Wegen der Homogenität des Feldes wird es überall zwischen den Platten diesen Wert aufweisen. Da es unter den gemachten Voraussetzungen außerhalb der Platten verschwindet, steht diese Feldverteilung auch in Einklang mit der Aussage (1.36). Das Flächenintegral der Flussdichte über die in Abb. 1.20b gestrichelt angedeutete Hüllfläche liefert wegen der Feldfreiheit außerhalb nur im Bereich zwischen den Platten einen Beitrag zum elektrischen Fluss, der nach Auswertung des Integrals der eingeschlossenen Ladung entspricht

$$\Psi \stackrel{(1.36)}{=} \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iint_{\text{Plattenfläche}} \vec{e}_x D_x \cdot \vec{e}_x dA \stackrel{(1.49)}{=} \sigma \iint_{\text{Plattenfläche}} dA = \sigma A = Q. \quad (1.55)$$

In das homogene Feld zwischen den beiden Platten bringen wir jetzt gemäß ►Abb. 1.21 einen aus zwei dünnen leitenden Scheiben bestehenden ungeladenen Körper.

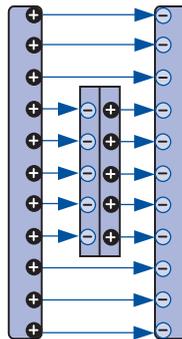


Abbildung 1.21: Leitender Körper im elektrischen Feld

Auf die in den Scheiben vorhandenen Ladungsträger werden infolge der Feldstärke Kräfte ausgeübt. Die freien Elektronen werden in Richtung der linken, positiv geladenen Platte angezogen, so dass die linke Scheibe einen Elektronenüberschuss und die rechte Scheibe einen Elektronenmangel aufweist (zur Ladungsträgerbewegung vgl.

Kap. 2). Diese Ladungstrennung, man spricht hier von **influenzierten Ladungen** auf den beiden Scheiben, kann man leicht nachweisen, indem man die beiden Scheiben getrennt aus dem Feld herausnimmt und die Ladungen auf den einzelnen Scheiben getrennt untersucht.

Unter der Voraussetzung, dass die beiden leitenden Scheiben sehr dünn sind, werden sie das ursprünglich vorhandene elektrische Feld \vec{E} praktisch nicht beeinflussen. Die auf ihrer Oberfläche influenzierte (*verschobene*) Ladung entspricht nach Gl. (1.53) der elektrischen Flussdichte $\sigma = D_x$. Aus diesem Grund wird \vec{D} oft auch als **Verschiebungsdichte** bezeichnet.

1.13.2 Im leitenden Körper eingeschlossener Hohlraum

Im zweiten Beispiel betrachten wir eine ungeladene leitende Hohlkugel mit Innenradius a und Außenradius b . Im Mittelpunkt der Hohlkugel befindet sich eine Punktladung Q . Wegen der von den Koordinaten ϑ und φ unabhängigen kugelsymmetrischen Feldverteilung wird das Feld sowohl im Hohlraum $r < a$ als auch im Außenraum $r > b$ entsprechend der Ableitung in Gl. (1.50) identisch sein zu dem Feld der im Ursprung angeordneten Punktladung.

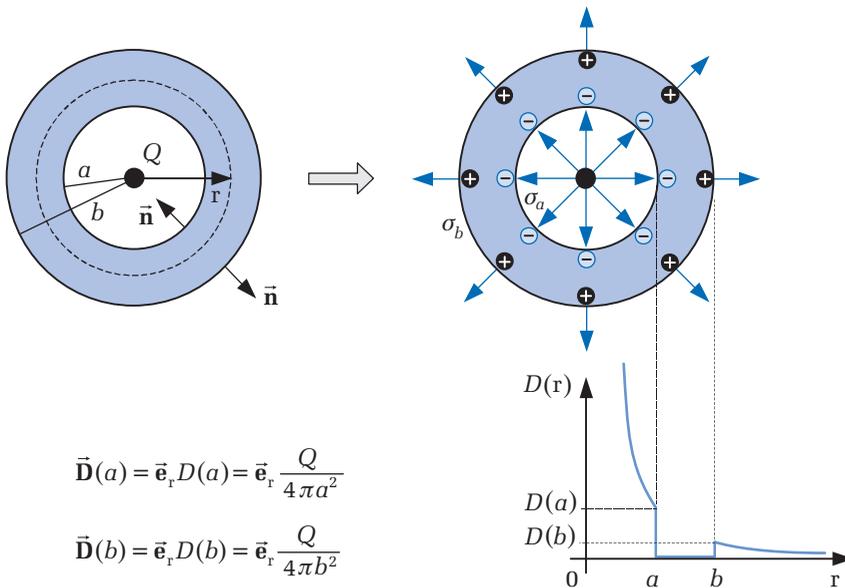


Abbildung 1.22: Leitende Hohlkugel mit Punktladung im Mittelpunkt

Damit ist aber auch bereits festgelegt, wie sich die Influenzladungen auf der Hohlkugel verteilen. Die Flussdichte infolge der Punktladung verlangt nach Gl. (1.54) auf der inneren Oberfläche $r = a$ das Vorhandensein einer negativen Flächenladungsvertei-

lung gleichen Betrages. Die Flächennormale auf der inneren Kugeloberfläche $\vec{n} = -\vec{e}_r$ zeigt entgegen der Flussdichte, so dass die Gl. (1.53) das Ergebnis

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = -\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r D_r(r=a) \stackrel{(1.31)}{=} -\frac{Q}{4\pi a^2} \stackrel{(1.53)}{=} \sigma_a \quad \rightarrow \quad \sigma_a = -\frac{Q}{4\pi a^2} \quad (1.56)$$

liefert. Auf der Kugeloberfläche $r = b$ gilt $\vec{n} = \vec{e}_r$ und damit

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r D_r(r=b) \stackrel{(1.31)}{=} \frac{Q}{4\pi b^2} \stackrel{(1.53)}{=} \sigma_b \quad \rightarrow \quad \sigma_b = \frac{Q}{4\pi b^2}. \quad (1.57)$$

Es lässt sich leicht verifizieren, dass die Gesamtladung der Hohlkugel Q_K verschwindet

$$Q_K = \sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 = 0. \quad (1.58)$$

Als zusätzliche Kontrolle kann man die Flussdichte innerhalb des leitenden Bereichs $a < r < b$ berechnen. Bildet man das Hüllflächenintegral über die in ►Abb. 1.22 gestrichelt eingezeichnete Kugelfläche vom Radius r , dann verschwindet die Flussdichte wegen der ebenfalls verschwindenden eingeschlossenen Ladung

$$\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \stackrel{(1.50)}{=} D(r) 4\pi r^2 = Q + \sigma_a 4\pi a^2 = 0 \quad \rightarrow \quad D(r) = 0 \quad \text{für } a < r < b. \quad (1.59)$$

Merke

Befindet sich ein leitender Körper in einem von externen Ladungsverteilungen hervorgerufenen elektrischen Feld, dann werden auf seiner Oberfläche Ladungen induziert. Der Wert der induzierten Flächenladungsdichte in einem Punkt P der Oberfläche entspricht genau dem Wert der senkrecht auftreffenden Flussdichte an dieser Stelle P . Die Flussdichte springt aber infolge der Randbedingung (1.42) genau um den Wert der Flächenladungsdichte und damit auf den Wert Null auf der Innenseite des leitenden Körpers. Die Felder der externen Ladungsverteilungen und der Influenzladungen kompensieren sich innerhalb des leitenden Körpers, der somit feldfrei ist.

Erweitern wir die Problemstellung jetzt dahingehend, dass die Hohlkugel eine nicht verschwindende Gesamtladung $Q_K \neq 0$ aufweist, dann wird die Flussdichte im Bereich $r > b$ nach Gl. (1.50) den Wert

$$D(r) = \frac{Q + Q_K}{4\pi r^2} \quad (1.60)$$

aufweisen und die Ladung Q_K wird sich wie in Abb. 1.19 dargestellt ebenfalls auf der Oberfläche $r = b$ homogen verteilen, so dass die Flächenladung σ_b den Wert

$$\sigma_b = \frac{Q + Q_K}{4\pi b^2} \quad (1.61)$$

annimmt. Die Feldfreiheit innerhalb des leitenden Körpers ist somit unabhängig davon, ob der Körper eine Ladung besitzt oder ob er ungeladen ist.

Betrachten wir noch den Sonderfall, dass sich die Feld erzeugenden Ladungen außerhalb der Hohlkugel befinden und der Hohlraum ladungsfrei ist. In diesem Fall werden sich nur an der äußeren Oberfläche $r = b$ Influenzladungen ausbilden, so dass nicht nur das Leiterinnere, sondern auch der nicht leitende Hohlraum vollständig gegenüber dem elektrischen Feld abgeschirmt ist. Dieses Prinzip der elektrostatischen Abschirmung ist als **Faraday'scher Käfig** bekannt und findet vielfältige Anwendung. Empfindliche Halbleiterbauelemente werden z.B. zum Schutz gegen elektrostatische Entladungen in leitfähige Materialien verpackt.

Auch in den Fällen, in denen der Hohlraum nicht vollständig von einem leitenden Körper umschlossen wird, ist er dennoch sehr gut gegen äußere elektrostatische Felder abgeschirmt. Selbst bei Verwendung eines Drahtgitters ist das Feld im Innenraum sehr stark reduziert, lediglich in der unmittelbaren Umgebung der Löcher ist die Schirmwirkung gering. Diese Abschirmung funktioniert auch noch bei zeitlich langsam veränderlichen Feldern, erst bei schnell veränderlichen darf der Abstand zwischen den Gitterstäben einen von der Geschwindigkeit der zeitlichen Änderung abhängigen Maximalwert nicht überschreiten, um eine entsprechende Schirmwirkung zu erzielen.

1.14 Die dielektrische Polarisation

In diesem Abschnitt gehen wir noch einmal von dem idealisierten Feldverlauf der Abb. 1.20 aus. Wird in das Feld zwischen den im Abstand d befindlichen Platten der ►Abb. 1.23a ein leitender Körper eingebracht, dann werden an seiner Oberfläche Ladungen induziert und das Innere des Körpers bleibt feldfrei (►Abb. 1.23c). Hält man die Ladungen $\pm Q = \pm \sigma A$ auf den äußeren Platten beim Einbringen des leitenden Körpers konstant, dann bleibt auch die von ihnen hervorgerufene elektrische Flussdichte nach Gl. (1.53) unverändert. In den Zwischenräumen zwischen den äußeren Platten und dem leitenden Körper muss dann auch die elektrische Feldstärke $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon_0$ gleich bleiben. Die zwischen den beiden Platten anliegende Spannung kann nach Gl. (1.30) als das Wegintegral der elektrischen Feldstärke berechnet werden. Da die Feldstärke und das gerichtete Wegelement zwischen den Platten parallel verlaufen und sich die Feldstärke im homogenen Feld längs des Weges nicht ändert, kann die Spannung von der positiv zur negativ geladenen Platte im Teilbild a durch eine Multiplikation des Feldstärkebetrages E mit der Weglänge d ersetzt werden. Im Teilbild c wird die elektrische Spannung entsprechend der verkürzten Weglänge kleiner sein als im Teilbild a.

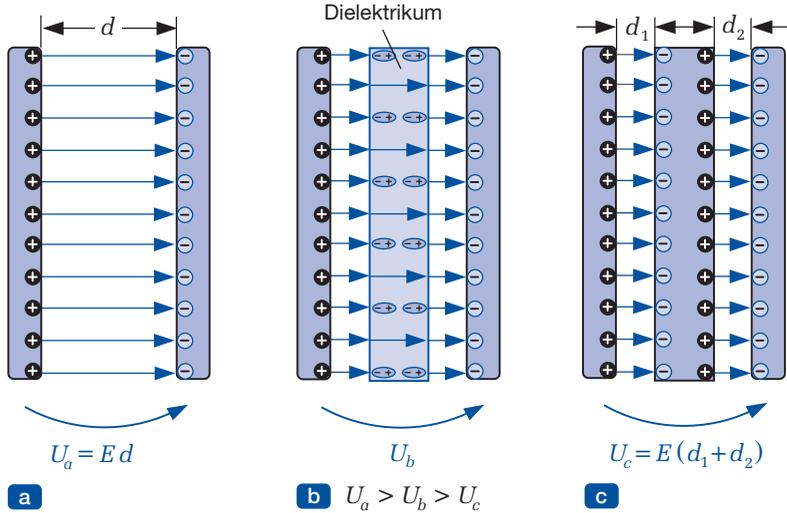


Abbildung 1.23: Reduzierung der Spannung zwischen den Platten durch unterschiedliche Materialien

Bringt man dagegen anstelle des Metallkörpers ein homogenes, isolierendes Material gleicher Abmessungen zwischen die geladenen Platten, dann stellt man bei wiederum unveränderter Gesamtladung auf den äußeren Platten eine Spannung zwischen den Platten fest, die kleiner ist als im Teilbild a, jedoch größer als bei dem leitenden Körper im Teilbild c. Die Ursache für dieses Verhalten liegt in dem inneren Aufbau des isolierenden Materials. Im Gegensatz zu dem Leiter sind die Elektronen zwar nicht frei beweglich, dennoch tritt eine Ladungsverschiebung innerhalb der atomaren Strukturen auf. Infolge des von außen angelegten elektrischen Feldes wirken Kräfte auf die Ladungsträger, die dazu führen, dass die Atome bzw. Moleküle in der einen Richtung negativ und in der entgegengesetzten Richtung positiv **polarisiert** werden.

Als Ursache für die Polarisation können unterschiedliche Mechanismen verantwortlich sein. Von **Verschiebungspolarisation** spricht man, wenn die positiven und negativen Ladungsträger beim Anlegen eines äußeren Feldes gegeneinander verschoben werden. Die an zwei gegenüberliegenden Seiten entgegengesetzt geladenen Teilchen werden als **Dipole** bezeichnet. Befinden sich zwei Punktladungen $\pm Q$ im Abstand d , dann bezeichnet man das Produkt aus dem von der negativen zur positiven Ladung zeigenden Abstandsvektor \vec{d} mit dem positiven Wert der Ladung Q als **Dipolmoment** \vec{p}

$$\vec{p} = Q \vec{d}. \quad (1.62)$$

Diese Definition lässt sich verallgemeinern. Handelt es sich bei den Ladungen nicht um konzentrierte Punktladungen, sondern um räumlich verteilte Ladungen, dann verwendet man für \vec{d} den vektoriellen Abstand zwischen den Schwerpunkten der beiden Ladungsanordnungen $+Q$ und $-Q$. Ein Beispiel für die Verschiebungspolarisation ist

in ►Abb. 1.24 dargestellt. Unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes verschiebt sich die Elektronenhülle gegenüber dem Atomkern. Man spricht in diesem Fall von **Elektronenpolarisation**.

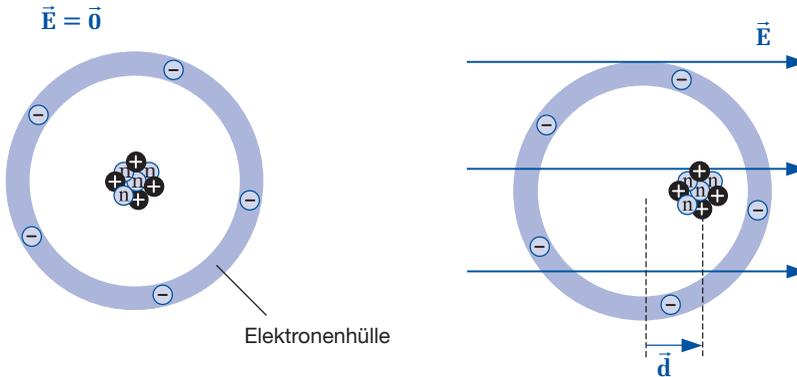


Abbildung 1.24: Elektronenpolarisation

Ein weiteres Beispiel für die Verschiebungspolarisation tritt in Substanzen auf, die Ionen enthalten. Die Situation bei der so genannten Ionenpolarisation ist vergleichbar dem vorhergehenden Beispiel. Die positiven Ionen werden in Richtung der elektrischen Feldstärke und die negativen Ionen in Gegenrichtung verschoben.

Ein etwas anderer Mechanismus liegt der **Orientierungspolarisation** zugrunde. Manche Moleküle besitzen aufgrund ihres unsymmetrischen Aufbaus bereits ein permanentes Dipolmoment. Bei dem in ►Abb. 1.25 dargestellten Wassermolekül ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für die Hüllenelektronen der beiden Wasserstoffatome in der Nähe des Sauerstoffkerns größer als in der Nähe der beiden H-Kerne (Protonen). Als Folge dieser Ionenbindung enthält das Sauerstoffatom eine mittlere negative Ladung und die Wasserstoffatome enthalten eine mittlere positive Ladung.

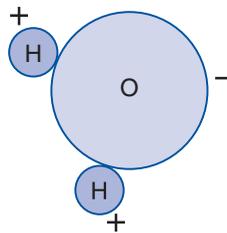


Abbildung 1.25: Wassermolekül H_2O

Das Dipolmoment entsteht dadurch, dass die Schwerpunkte der positiv bzw. negativ geladenen Ionen nicht zusammenfallen. Solange kein elektrisches Feld vorhanden ist, sind die Dipolmomente der Moleküle innerhalb der Flüssigkeit statistisch verteilt und es ist keine Polarisation nach außen feststellbar. Unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes erfahren die beiden Ladungen eines Dipols Kräfte in entgegengesetzter Richtung. Die Zerlegung dieser Vektoren gemäß ►Abb. 1.26 zeigt, dass neben einer Kraft-

komponente in Längsrichtung des Dipols eine weitere Kraftkomponente entsteht, die ein Drehmoment auf den Dipol ausübt. Die Dipole werden in Abhängigkeit von dem Wert der Feldstärke mehr oder weniger in Feldrichtung ausgerichtet, so dass auch makroskopisch betrachtet eine Polarisation auftritt. Dieser Effekt ist im Gegensatz zur Verschiebungspolarisation stark temperaturabhängig, da die Wärmebewegungen der Moleküle einer geordneten Ausrichtung entgegenwirken.

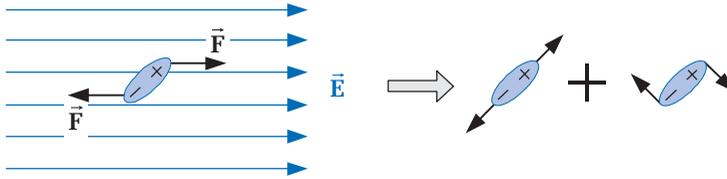


Abbildung 1.26: Drehmoment auf einen Dipol im homogenen Feld

Befinden sich N Dipole in einem Volumen V , dann wird die auf das Volumen bezogene vektorielle Summe der Dipolmomente als **dielektrische Polarisation** \vec{P}

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \vec{p}_n \quad (1.63)$$

und das nicht leitende Material als **Dielektrikum** bezeichnet. Für den Sonderfall gleich gerichteter Dipole vereinfacht sich die Beziehung (1.63) zu

$$\vec{p} = \frac{N \vec{P}}{V} . \quad (1.64)$$

Die Ladungen der Dipole bezeichnet man als **Polarisationsladungen**, die frei beweglichen Ladungen bei den Metallen dagegen als **freie Ladungen**. Diese Unterscheidung ist physikalisch begründet. Während man die freien Ladungen voneinander trennen kann, ist diese Trennung bei den Polarisationsladungen nicht möglich. Aus diesem Grund ist die gesamte Polarisationsladung in einem Dielektrikum immer gleich Null. Die influenzierten Ladungen auf den beiden Scheibchen der Abb. 1.21 sind in diesem Sinne freie Ladungen, da sie durch getrennte Herausnahme der beiden Scheibchen aus dem Feld separiert werden können.

Durch die besondere Ausrichtung der Dipole im homogenen Feld heben sich ihre Wirkungen im Inneren des Dielektrikums auf. Betrachtet man die ►Abb. 1.27, dann erkennt man jedoch, dass sich infolge der Ladungsträgerverschiebung an den Oberflächen des Dielektrikums Ladungsverteilungen ausbilden, die in ihrer Wirkung den Flächenladungen bei den Leitern vergleichbar sind⁵.

5 Die geordnete Ausrichtung aller Dipole in der Abb. 1.27 dient nur zur Veranschaulichung der entstehenden Flächenladungen, in der Praxis werden die Dipole bei den üblichen Temperaturen relativ ungeordnet bleiben und die makroskopisch wirksame Polarisation kommt lediglich durch die Mittelwertbildung über die unvorstellbar große Zahl der nur zum Teil ausgerichteten Moleküle entsprechend Gl. (1.63) zustande.

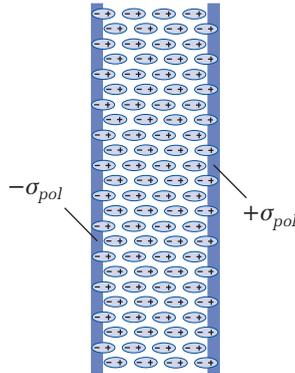


Abbildung 1.27: Polarisationsflächenladung

Als Folge der Polarisation wird das elektrische Feld \vec{E} im Dielektrikum bei gleicher Flussdichte \vec{D} zwar schwächer, es verschwindet aber nicht völlig wie beim Leiter. Dieser Zustand ist schematisch in ►Abb. 1.23b durch den größeren Abstand zwischen den Feldlinien im Dielektrikum angedeutet. Auch hier ist die Situation im mikroskopischen Bereich sehr kompliziert. Die elektrische Feldstärke wird zwischen den Molekülen sehr stark ortsabhängig sein, so dass die angesprochene Reduzierung der Feldstärke im Dielektrikum nicht für einen beliebigen Punkt innerhalb des Materials gilt, sondern wiederum als Mittelwert über einen Bereich, dessen Ausdehnung wesentlich größer als die Abmessungen der Moleküle sein muss.

Vom Standpunkt einer makroskopischen Betrachtungsweise aus kann die Reduzierung der elektrischen Feldstärke \vec{E} im Dielektrikum bei gleicher Flussdichte \vec{D} durch einen dimensionslosen Faktor ϵ_r erfasst werden, der als (relative) **Dielektrizitätszahl** bezeichnet wird. Die Gl. (1.34) wird also folgendermaßen erweitert

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = \text{Dielektrizitätskonstante.} \quad (1.65)$$

Merke

Die Dielektrizitätszahl ϵ_r beschreibt das Verhältnis der elektrischen Feldstärke ohne Dielektrikum zur elektrischen Feldstärke im Dielektrikum bei gleicher Flussdichte.

Die Beziehung (1.65) setzt voraus, dass zwischen den beiden Feldgrößen \vec{D} und \vec{E} ein linearer Zusammenhang besteht und dass beide Feldgrößen gleich gerichtet sind. Mit den Materialien, bei denen diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, werden wir uns im weiteren Verlauf nicht beschäftigen. In der Praxis tritt zudem häufig der Fall auf, dass ϵ_r ortsabhängig ist und von weiteren physikalischen Einflussgrößen abhängt wie z.B. von der Temperatur, vom Druck oder von der Frequenz bei zeitlich veränderlichen Feldgrößen.

In der folgenden Tabelle ist die Dielektrizitätszahl für verschiedene Materialien angegeben.

Tabelle 1.1

Dielektrizitätszahl ϵ_r für verschiedene Materialien

Stoff	ϵ_r	Stoff	ϵ_r
Trockene Luft	1,000594	Polyäthylen	2,3
Bariumtitanat	1 000 ... 4 000	Polystyrol	2,3 ... 2,7
Bernstein	2,8	Porzellan	6,0 ... 8,0
Glimmer	7	Quarz	3,5 ... 4,5
Gummi	2,6	Quarzglas	4
Hartpapier	5,0 ... 6,0	Transformatoröl	2,2 ... 2,5
Papier	1,2 ... 3,0	Destilliertes Wasser	81
Pertinax	3,5 ... 5,5		

In Luft unterscheidet sich der Wert ϵ_r nur unwesentlich von dem Wert im Vakuum $\epsilon_r = 1$, d.h. in Luft kann praktisch in allen Fällen $\epsilon = \epsilon_0$ gesetzt werden.

Im Gegensatz zur Gl. (1.65) kann der Zusammenhang zwischen den beiden vektoriellen Feldgrößen als Folge der dielektrischen Materialeigenschaften auch auf andere Weise formelmäßig erfasst werden. Man kann nämlich die Dielektrizitätszahl ϵ_r auch auffassen als die Erhöhung der elektrischen Flussdichte im Dielektrikum gegenüber der elektrischen Flussdichte im Vakuum bei gleicher elektrischer Feldstärke. Denkt man sich also die elektrische Flussdichte im Dielektrikum zusammengesetzt aus der Flussdichte, die bereits bei Abwesenheit des Dielektrikums vorliegt $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, und dem zusätzlich durch das Dielektrikum verursachten Anteil \vec{P} , dann erhält man die Darstellung

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (1.66)$$

Durch Gleichsetzen der beiden Beziehungen (1.65) und (1.66) findet man den Zusammenhang

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (1.67)$$

Nach dieser Gleichung sind Polarisation und Feldstärke zueinander proportional. Die Differenz χ zwischen der Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ der Materie und dem Wert 1 des Vakuums wird **dielektrische Suszeptibilität** genannt.

Nach den vorstehenden Gleichungen ergeben sich prinzipiell zwei Möglichkeiten, die besonderen Eigenschaften eines Dielektrikums in den Rechnungen zu berücksichtigen, zum einen mithilfe der Dielektrizitätszahl ϵ_r nach Gl. (1.65), zum anderen mithilfe der

Polarisation \vec{P} nach Gl. (1.66). Die Rechnung mit der Polarisation setzt aber die Kenntnis der **Polarisationsflächenladungen** voraus, die sich z.B. an den Oberflächen des Dielektrikums in Abb. 1.23b ausbilden. Bei nicht homogenen Materialeigenschaften heben sich die Wirkungen der Dipole im Inneren der Dielektrika nicht vollständig auf, so dass in diesem Fall zusätzlich mit einer ortsabhängigen **Polarisationsraumladung** gerechnet werden muss. Aus diesem Grund werden wir in den folgenden Abschnitten den Einfluss der Dielektrika auf die Feldverteilung nicht durch die Polarisationsladungen, sondern durch die skalare Dielektrizitätszahl ϵ_r erfassen.

1.15 Kräfte im inhomogenen Feld

In den vorausgegangenen Abschnitten haben wir die Influenz und die Polarisation als Folge-Erscheinungen der Kräfte auf die Ladungsträger im elektrischen Feld kennen gelernt. Damit verbunden war die vollkommene Abschirmung des Leiterinneren gegenüber dem äußeren Feld bzw. die Reduzierung der Feldstärke im Inneren eines Dielektrikums.

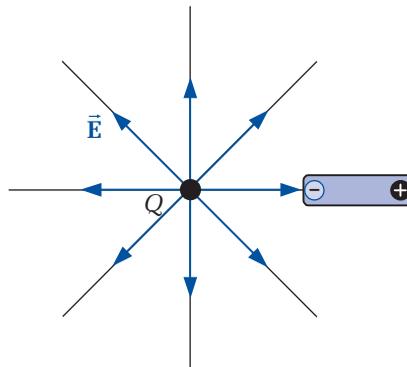


Abbildung 1.28: Leitender ungeladener Körper im Feld einer Punktladung

Befindet sich ein leitender ungeladener Körper oder ein aus dielektrischem Material bestehender Körper in einem *homogenen* elektrischen Feld wie in der Abb. 1.23, dann heben sich die Kräfte auf die positiven und auf die negativen Ladungsträger gegenseitig auf. Es kann zwar im allgemeinen Fall ein Drehmoment auf den Körper ausgeübt werden (Abb. 1.26), die Gesamtkraft verschwindet aber. Bringen wir dagegen einen leitenden ungeladenen Körper in ein *inhomogenes* Feld, z.B. in das Feld einer positiven Punktladung gemäß ►Abb. 1.28, dann wird wegen der mit wachsendem Abstand von der Punktladung abnehmenden Feldstärke die Kraft auf die influenzierten negativen Ladungsträger dominieren und es wird sich eine resultierende (anziehende) Kraft einstellen. Besitzt die Feld erzeugende Ladung Q einen Wert $Q < 0$, dann wird sich auch das Vorzeichen bei den influenzierten Ladungen umkehren und es tritt auch in diesem Fall eine anziehende Kraft auf. Aus der Tatsache, dass sich zwei Körper gegenseitig anziehen, kann also nicht zwangsläufig geschlossen werden, dass beide Körper