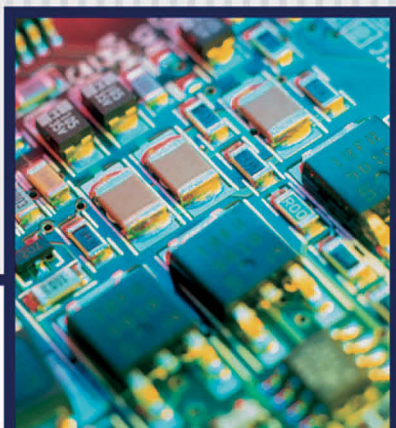




informatik

**Heinz-Dietrich Wuttke
Karsten Henke**

Schaltsysteme

Eine automatenorientierte Einführung

Schaltsysteme

**Unser Online-Tipp
für noch mehr Wissen ...**



... aktuelles Fachwissen rund
um die Uhr – zum Probelesen,
Downloaden oder auch auf Papier.

www.InformIT.de

Heinz-Dietrich Wuttke
Karsten Henke

Schaltsysteme

Eine automatenorientierte Einführung

eBook

Die nicht autorisierte Weitergabe dieses eBooks
an Dritte ist eine Verletzung des Urheberrechts!

Pearson
Studium

ein Imprint der Pearson Education Deutschland GmbH

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Die Informationen in diesem Buch werden ohne Rücksicht auf einen eventuellen Patentschutz veröffentlicht. Warennamen werden ohne Gewährleistung der freien Verwendbarkeit benutzt.

Bei der Zusammenstellung von Texten und Abbildungen wurde mit größter Sorgfalt vorgegangen. Trotzdem können Fehler nicht vollständig ausgeschlossen werden. Verlag, Herausgeber und Autoren können jedoch für fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen. Für Verbesserungsvorschläge und Hinweise sind Verlag und Herausgeber dankbar.

Alle Rechte vorbehalten, auch die der fotomechanischen Wiedergabe und Speicherung in elektronischen Medien. Die gewerbliche Nutzung der in diesem Produkt gezeigten Modelle und Arbeiten ist nicht zulässig. Fast alle Hardware- und Softwarebezeichnungen, die in diesem Buch erwähnt werden, sind gleichzeitig eingetragene Warenzeichen oder sollten als solche betrachtet werden.

Umwelthinweis: Dieses Buch wurde auf chlorfrei gebleichtem Papier gedruckt. Die Einschumpffolie — zum Schutz vor Verschmutzung — ist aus umweltverträglichem und recyclingfähigem PE-Material.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

06 05 04 03

ISBN ISBN 3-8273-7035-3

© 2003 by Pearson Studium,
ein Imprint der Pearson Education Deutschland GmbH
Martin-Kollar-Straße 10-12, D-81829 München/Germany
Alle Rechte vorbehalten
www.pearson-studium.de
Lektorat: Dr. Isabel Schneider, ischneider@pearson.de
Produktion: Anna Plenk, aplenk@pearson.de
Satz: Arne Zellentin für mediaService, Siegen
Einbandgestaltung: Julia Graff, dyadesign, Düsseldorf
Druck und Verarbeitung: Kösel, Kempten (www.koeselbuch.de)
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	9
1 Einleitung	11
2 Mathematische Grundlagen	15
2.1 Aussagen und Prädikate	15
2.1.1 Aussagen	15
2.1.2 Prädikate	18
2.2 Mengen, Relationen, Abbildungen	22
2.2.1 Mengen	22
2.2.2 Relationen	25
2.2.3 Abbildungen	27
2.3 Zusammenfassung	30
2.4 Aufgaben	31
Teil I Kombinatorische Schaltungen	35
3 Entwurf kombinatorischer Schaltungen	37
3.1 Mengenorientierte Funktionsbeschreibung	38
3.1.1 Digitale Schaltung, Wertetabelle	38
3.1.2 Belegungsmengen – Boolesche Mengenalgebra	43
3.2 Strukturorientierte Funktionsbeschreibung	47
3.2.1 Schaltalgebraische Ausdrücke, Wertfunktion	47
3.2.2 Wertverlaufsgleichheit	50
3.2.3 Boolesche Ausdrucksalgebra	50
3.2.4 Verallgemeinerte Wertverlaufsgleichheit	56
3.2.5 Gleichungen und Normalformen	64
3.3 Minimierung Boolescher Funktionen	80
3.3.1 Karnaugh-Veith-Diagramme	82
3.3.2 Minimierung nach Quine McCluskey	86
3.3.3 Minimierung nach Kasakow	92
3.3.4 Gegenüberstellung der Minimierungsverfahren	94
3.4 Weitere Darstellungsformen	96

3.4.1	Kanonische Darstellungsformen	96
3.4.2	Nicht kanonische Darstellungsformen	99
3.5	Strukturbeschreibung	102
3.5.1	Koppelfunktion	103
3.5.2	Modulverkettung	105
3.5.3	Hierarchie, Abstraktion	108
3.5.4	Blockbildung, Kaskadierung	109
3.6	Synthese und Beispiele kombinatorischer Strukturen	111
3.6.1	Elementare Funktionen und Strukturen mit zwei Variablen	111
3.6.2	Struktursynthese	114
3.6.3	Basissysteme	115
3.6.4	Kombinatorische Grundstrukturen	116
3.6.5	Programmierbare Strukturen	127
3.7	Fallstudien	133
3.7.1	Aufgabenstellung	133
3.7.2	Realisierung über die strukturgleiche Schaltung	134
3.7.3	Realisierung mit Multiplexern	135
3.7.4	Realisierung mit ROMs	135
3.7.5	Realisierung mit GALs	136
3.8	Zusammenfassung	140
3.9	Aufgaben	142
4	Analyse kombinatorischer Schaltungen	149
4.1	Funktionsorientierte Analyse	149
4.2	Strukturorientierte Analyse	149
4.3	Dynamische Effekte	152
4.3.1	Funktionshasards	152
4.3.2	Strukturhasards	155
4.4	Zusammenfassung	161
4.5	Aufgaben	162

Teil II	Sequentielle Schaltungen	165
----------------	---------------------------------	------------

5	Funktionsbeschreibung sequentieller Schaltungen	167
5.1	Einleitendes Beispiel	167
5.2	Determinierte Automaten	177
5.2.1	Automatendefinition	178
5.2.2	Automatentypen	180
5.2.3	Automatentabelle, Automatengraph	181

5.2.4	Zustandsüberführungs- und Ausgabegleichungen	186
5.2.5	Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit	190
5.3	Partielle nichtdeterminierte Automaten	193
5.3.1	Zustandsüberführungs- und Ausgabegleichungen	193
5.3.2	Automatengraph	194
5.3.3	Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit	196
5.4	Zusammenfassung	197
5.5	Aufgaben	197
6	Struktursynthese sequentieller Schaltungen	201
6.1	Asynchrone sequentielle Schaltungen, Flip-Flops	201
6.1.1	Elementare sequentielle Strukturen, Flip-Flops	202
6.1.2	Basis-Flip-Flop, RS-Flip-Flop	205
6.1.3	Taktgesteuerte Flip-Flops	209
6.1.4	Umwandlung der Flip-Flop-Arten	223
6.1.5	Zähler, Schieberegister	223
6.2	Synchrone sequentielle Schaltungen	229
6.2.1	Zustandskodierung	230
6.2.2	Ermitteln der Ansteuer-Gleichungen	230
6.2.3	Ermitteln der Ausgabe-Gleichungen	233
6.2.4	Beispiel	233
6.3	Struktursynthese mit programmierbaren Strukturen	234
6.4	Fallstudien	239
6.4.1	BCD-Zähler	239
6.4.2	Frequenzteiler	248
6.4.3	Portalkran-Laufkatze	250
6.4.4	Pumpensteuerung	252
6.5	Zusammenfassung	255
6.6	Aufgaben	255
7	Analyse sequentieller Schaltungen	259
7.1	Konstruktion des Automatengraphen	259
7.2	Stabilität von Zuständen	262
7.3	Dynamische Effekte	266
7.4	Zusammenfassung	267
7.5	Aufgaben	268
8	Entwurf paralleler Automaten	271
8.1	Parallelität	271
8.2	Dekomposition	272

8.2.1	Verfahren	272
8.3	Ausgabezuordnung	279
8.3.1	Ausgabe in komplett einem Teilautomaten	280
8.3.2	Ausgabe in verschiedenen Teilautomaten	280
8.3.3	Ausgabe in ausgewählten Teilautomaten	281
8.4	Komposition	281
8.4.1	Komposition durch Bildung des Erreichbarkeitsgraphen	284
8.4.2	Komposition durch Konjunktion der Zustands-Gleichungen	284
8.4.3	Komposition durch Aufstellen der Transitionstabelle	286
8.4.4	Serielle Komposition	290
8.5	Validierung	291
8.5.1	Formal verifizierbare Eigenschaften	293
8.5.2	Verifikation zeitlicher Abhängigkeiten – Modelchecking	301
8.6	Fallstudien	308
8.6.1	Dekomposition der Pumpensteuerung	308
8.6.2	Serielle Komposition	308
8.6.3	Verkaufsautomat	311
8.6.4	Entwurf synchroner Zähler und Frequenzteiler	317
8.7	Zusammenfassung	323
8.8	Aufgaben	324
A	Interaktive Lernmodule	329
B	Glossar	333
C	Symbole und Abkürzungen	337
	Literaturverzeichnis	341
	Register	349



Vorwort

Die Vorteile der Digitaltechnik sind spätestens mit der breiten Markteinführung der Compact Disk allgemein nachvollziehbar. Begründet in der Aussagenlogik und der darauf aufbauenden Algebra nach George Boole (1815 - 1864) hat diese Technik inzwischen nahezu alle Bereiche des täglichen Lebens erobert.

Die in den Anfängen der Digitaltechnik entwickelten Methoden sind inzwischen weitgehend in computergestützten Werkzeugen (also digital ;-)) integriert und Erfahrungen aus jahrzehntelanger Entwicklung digitaler Systeme füllen die Bibliotheken der Entwurfswerkzeuge. Je komplexer diese Werkzeuge und die mit ihnen lösbaren Probleme werden, um so wichtiger ist ein grundlegendes Verständnis der Prozesse und Algorithmen, die im Hintergrund der Oberflächen dieser Werkzeuge ablaufen. Das Erzeugen einer Schaltung ist damit wesentlich vereinfacht. Die Fehler, die gemacht werden können, liegen heute nicht mehr im Schaltungsaufbau sondern im Entwurf. In der Entwurfsphase muss ein tiefes Verständnis der Abläufe vorhanden sein, die z.B. durch eine unterschiedliche Reihenfolge bestimmter Anweisungen, durch Verwendung von auf den ersten Blick funktionell gleichwertigen Bibliothekselemente u.ä. im Werkzeug ausgelöst werden. Dies ist meist nur durch intensive Variantenvergleiche und werkzeugspezifische Untersuchungen wie z.B. in [Hag95] möglich und wird schließlich zum Erfahrungsschatz des Entwerfers. Der sichere Umgang mit der dahinter stehenden Theorie und die detaillierte Kenntnis von Entwurfsfallen bietet eine gute Voraussetzung für eine kritische Betrachtung der Entwurfswerkzeuge und deren optimale Nutzung.

Dieses Buch widmet sich deshalb den Grundlagen des Entwurfsweges digitaler Systeme unter Verwendung einer einheitlichen Symbolik und erklärt diese durch zahlreiche Beispiele und Fallstudien. Besonderer Wert wird dabei auf die Diskussion von Beweggründen bestimmter Entwurfsentscheidungen gelegt. Die Autoren stützen sich auf eine von Dr. Michael Krapp in den 90er Jahren in [Kra91] beschriebene Entwurfsmethodik und auf eine zehnjährige Lehrerfahrung an der Technischen Universität Ilmenau. Die Skripte zu den Lehrveranstaltungen »Grundlagen der Technischen Informatik«, »Schaltssysteme« sowie »Entwurf und Validierung komplexer digitaler Systeme« und die begleitenden Materialien im Internet dazu bildeten den Grundstock für dieses Buch.

Wir möchten uns an dieser Stelle bei allen Kollegen bedanken, die in diesen Lehrprozess integriert sind und ideenreich diese Lehrveranstaltungen mitgestalten. Jahrelange Erfahrungen der KollegInnen Dr. Elke Hübel, Dr. Volker Zerbe, Dipl.-Ing. Wolfram Kattaneck, Dipl.-Inf. Rolf Peukert und Dipl.-Ing. Issam Saleh waren uns dabei eine wertvolle Hilfe. Die im Rahmen der Lehrveranstaltungen durchgeführ-

ten Praktika lieferten wichtige Anregungen für die Fallstudien. Für deren technische Konzeption und Realisierung danken wir besonders Herrn Dipl.-Ing. Jürgen Schmidt.

Des weiteren möchten wir allen Studenten danken, die sich im Verlaufe ihres Studiums mit interessanten Fragestellungen, Recherchen und Arbeiten an Entwurfswerkzeugen an der Aufbereitung des Stoffgebietes beteiligt haben. Unser besonderer Dank gilt dabei den StudentInnen Gabi Frings, Monika Wuttke und Sven Hellbach, die durch viele kritische Hinweise zum Manuskript zu dessen Verständlichkeit und Korrektheit beigetragen haben.

Unser Dank gilt auch Frau Dr. Isabel Schneider, die als zuständige Lektorin von Pearson Education Deutschland dieses Buchprojekt gefördert und begleitet hat.

Nicht zuletzt möchten wir uns bei unseren Familien bedanken, von denen wir während der intensiven Arbeitsphasen verständnisvoll unterstützt wurden.

Noch ein Hinweis an unsere Leserinnen: Die zumeist in der männlichen Form gewählten personenbezogenen Bezeichnungen gelten selbstverständlich für beide Geschlechter. Sie wurden lediglich im Interesse einer einfacheren Lesbarkeit und eines einheitlichen Schreibstils in der vorliegenden Form verwendet.

Mit unseren hoffentlich zahlreichen Leserinnen und Lesern möchten wir gerne in Erfahrungsaustausch treten. Bitte teilen Sie uns Ihre Hinweise, Anregungen und Kritiken über die genannten E-Mail-Adressen mit. Wir werden auf unseren Autoren-Webseiten [WH02a] diesen Kontakt pflegen und die Ergebnisse dort veröffentlichen. Weiterhin möchten wir Sie ermuntern, unsere Applet-Sammlung intensiv zu nutzen und ggf. durch eigene Ideen zu bereichern.

*Ilmenau,
im November 2002*

Heinz-Dietrich Wuttke
dieter.wuttke@tu-ilmenau.de

Karsten Henke
karsten.henke@tu-ilmenau.de

Einleitung

Der Entwurf digitaler Systeme bedient sich einer Reihe klassischer Methoden und Theorien, deren Kenntnis zum Kernwissen der Technischen Informatik und Informationstechnik gezählt werden kann. Diese Methoden sind weitgehend in Werkzeugen implementiert, die in der Entwurfspraxis breite Anwendung finden. Trotzdem oder gerade deswegen ist es erforderlich, diese Methoden in ihrem Wesen zu verstehen. Nur so können Entwurfsentscheidungen sachkundig getroffen werden. Newsgroups, in denen Entwurfingenieure ihr Wissen austauschen, beschäftigen sich immer wieder mit grundlegenden Fragen wie z.B. dem zeitlichen Regime der realisierten Implementierungen und zeigen, dass das Thema von großer praktischer Relevanz ist. Davon soll auch die im **Kapitel 1** gegebene Einführung überzeugen und einige Verwendungstipps zum Buch geben. Im Buch wird eine geschlossene Darstellung des Entwurfsweges, basierend auf einer formalen Beschreibung, anhand zahlreicher Beispiele und Fallstudien vorgenommen. Anliegen ist es, beginnend bei den für den Entwurfsweg relevanten mathematischen Grundlagen ein durchgängiges Instrumentarium an Begriffen, Beschreibungsweisen und Methoden zu vermitteln, das schrittweise eingeführt wird und von den Grundlagen bis zu speziellen Problemen des Entwurfes in allen Kapiteln angewendet wird.

Die für die formale Beschreibung notwendigen mathematischen Grundlagen werden den Kapiteln, die sich mit dem Entwurf digitaler Systeme beschäftigen, in **Kapitel 2** vorangestellt. Um ein Verständnis mathematisch exakter Definitionen beim Leser zu erzeugen, wird eine kurze Einführung in die Aussagen- und Prädikatenlogik gegeben mithilfe derer grundlegende Definitionen der Mengentheorie dargestellt werden. Diese dient als Voraussetzung für das Verständnis von Relationen und Abbildungen, die einen weiteren Schwerpunkt dieses Kapitels bilden. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag begleiten dieses einführende Kapitel.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem Entwurf kombinatorischer Schaltungen. Dabei wird systematisch der Weg von einer funktionellen Beschreibung mittels Boolescher Mengenalgebra und Boolescher Ausdrucksalgebra bis hin zur Struktursynthese verfolgt. Am Anfang werden deshalb zunächst die formalen Grundlagen für eine funktions- und strukturorientierte Beschreibung digitaler Systeme geschaffen. Die Boolesche Mengenalgebra, welche mehr für eine funktionsorientierte Beschreibung geeignet ist, wird der Booleschen Ausdrucksalgebra gegenübergestellt. Es wird gezeigt, wie mithilfe der Wertfunktion eine Darstellungsweise in die andere überführt werden kann und wie partielle Unbestimmtheiten in beiden Algebren notiert werden können. Für ein tiefer gehendes Verständnis dieses komplexen Zusammenhanges steht im Internet ein Lernmodul bereit, welcher Eingaben in beiden Algebren gestattet und die Auswirkungen in der jeweils anderen Alge-

bra korrespondierend berechnet und visualisiert. So können einerseits die Beispiele aus dem Buch nachempfunden, andererseits aber auch eigene Beispiele erprobt werden. Darauf aufbauend werden Regeln für die Umformung unter Beachtung partieller Unbestimmtheiten eingeführt, die für die Behandlung praxisorientierter Beispiele von besonderer Bedeutung sind. Mithilfe verschiedener Minimierungsverfahren, die vorgestellt und miteinander verglichen werden, lassen sich vereinfachte, strukturorientierte Gleichungen herleiten, die sich letztlich in eine digitale Schaltungsstruktur aus gekoppelten Modulen überführen lassen. Diese Überführung in eine Schaltungsstruktur wird – ausgehend von der Realisierung kleinerer Schaltungen mit Standardgattern – anhand verschiedener Realisierungsmöglichkeiten unter Verwendung komplexer kombinatorischer Strukturen und programmierbarer Logik diskutiert. Konkrete Fallbeispiele runden dieses Kapitel ab.

Kapitel 4 widmet sich der Analyse kombinatorischer Schaltungen. Ausgehend von der Schaltungsstruktur wird die Herleitung der Funktion beschrieben. Besonderer Wert wird dabei auf die Analyse dynamischer Probleme gelegt, die bei der praktischen Realisierung digitaler Schaltungen infolge technologiebedingter Signalverzögerungen entstehen können. Möglichkeiten der Vermeidung derartiger unerwünschter Laufzeiteffekte (Hasards) und deren Bedeutung für den Entwurf sicherheitskritischer Systeme werden exemplarisch erörtert. Auch hier erfolgt ein Verweis auf Lernmodule im Internet, mit deren Hilfe der Leser eigene Untersuchungen durchführen kann und so zu weiteren Erfahrungen beim Umgang mit der Problematik gelangt.

Kapitel 5 zeigt in einem einführenden Beispiel die Grenzen der in den vorangegangenen Kapiteln eingeführten Beschreibungsmittel und leitet daraus systematisch die Beschreibung sequentieller Funktionen und Strukturen ab. Grundlage hierfür bildet die Theorie endlicher Automaten. Unterschiede zwischen verschiedenen Automatenmodellen und Darstellungsweisen sowie die schaltungstechnischen Konsequenzen, die sich daraus ergeben, sind dabei von besonderer Bedeutung für das Verständnis der Ausführungen in den folgenden Kapiteln. Es wird zwischen *Moore*- und *Mealy*-Automaten, Zustands- und Automatengraphen aber auch zwischen graphorientierten Zustands- und realisierungsorientierten z -Gleichungen unterschieden. Die Vorteile der Einbeziehung von nichtdeterminierten Eingangs- und z -Variablenbelegungen in die einzelnen Notationsformen werden herausgearbeitet. Anhand von Aufgabenstellungen kann der Leser seinen Wissensstand überprüfen.

Das **6. Kapitel** setzt sich mit der Synthese sequentieller Schaltungen auseinander und baut dabei auf den Kenntnissen zur Synthese kombinatorischer Schaltungen auf. Detaillierte Kenntnisse zeitlicher Randbedingungen, die in diesem Kapitel vermittelt werden, helfen bei der Auswahl geeigneter Flip-Flops und führen zu sicheren Lösungen. Mit der dargestellten Klassifizierung von Flip-Flop-Typen und ihrer automaten-theoretischen Beschreibung sind komplizierte interne Abläufe gut nachvollziehbar. Die praktische Realisierung sequentieller Schaltungen wird anhand von Beispielen sowohl für asynchrone, als auch für synchrone und programmierbare Strukturen gezeigt. Besondere Beachtung gilt den Fallstudien dieses Kapitels,

da hier sehr ausführlich auf Beweggründe eingegangen wird, die zu bestimmten Entwurfsentscheidungen führen. Erfahrungsgemäß ist dieser kreative Prozess der schwierigste, aber bedeutungsvollste, da die weiteren Schritte weitestgehend algorithmisch beschreibbar und damit in entsprechende CAD-Tools implementierbar sind.

Kapitel 7 gibt einen kurzen Überblick über die Analyse sequentieller Schaltungen. Dabei wird auf Beschreibungsmethoden und Erkenntnisse aus Kapitel 4 zurückgegriffen. Es wird gezeigt, wie aus einer sequentiellen Struktur mithilfe der Schnittmethode Automatengraphen erzeugt werden können, die das Verhalten der Schaltung detailliert beschreiben. Eine Analyse dieser detaillierten Verhaltensbeschreibung zeigt, dass eine Reihe von instabilen Zuständen auftreten können, die sich jedoch nicht immer auf den Ausgang der Schaltung auswirken. In diesem Fall kann man eine Abstraktion des Automatengraphen vornehmen, der das an der Schnittstelle gezeigte Verhalten vollständig beschreibt.

Die Realisierung paralleler Automaten ist von hoher praktischer Relevanz, da auf diese Weise komplexe Systeme beherrschbar werden. Die in diesem abschließenden **8. Kapitel** diskutierten Methoden sollen dem Leser einen Überblick zu den in parallelen Systemen auftretenden Problemen und deren Erkennung bzw. Vermeidung geben. Analysemethoden, mit deren Hilfe bestimmte Eigenschaften paralleler Systeme überprüft werden können, sind ebenfalls Gegenstand dieses Kapitels. Von besonderer Bedeutung sind dabei Synchronisations- und Blockierungssituationen, die sich systematisch mithilfe von Modelcheckern ermitteln lassen. Weitere Beschreibungs- und Verifikationsmethoden werden ebenfalls kurz vorgestellt und sollen Anregungen für weitergehende Literaturstudien geben.

Die im Internet zur Verfügung stehenden Lernmodule werden im **Anhang** kurz vorgestellt und laden den Leser zu eigenen Experimenten ein.

Als Orientierungshilfe ist ein umfangreiches **Stichwort- und Symbolverzeichnis** sowie ein Glossar zu den wichtigsten Begriffen im Anhang enthalten.

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel findet der Leser eine Zusammenfassung von Definitionen und formalen Hilfsmitteln, die für das Verständnis der im Weiteren benutzten Symbolik vorausgesetzt werden. Der in den Grundlagen der Mengenlehre und Aussagenlogik erfahrene Leser kann dieses Kapitel überspringen und im Bedarfsfall auf einzelne Erläuterungen anhand des Stichwortverzeichnisses zurückgreifen.

2.1 Aussagen und Prädikate

2.1.1 Aussagen

Wir bedienen uns bei der Definition von formalen Sachverhalten zur Erläuterung des Entwurfsweges digitaler Systeme häufig der Aussagen- und Prädikatenlogik sowie der Mengenlehre. Hier folgt nun eine kurze Zusammenfassung und Erklärung entsprechender Definitionen:

Eine **Aussage** ist ein Satz zur Beschreibung eines Sachverhaltes, dessen Wahrheitsgehalt unabhängig von Zeit und Ort eindeutig den Werten »*wahr*« oder »*falsch*« zugeordnet werden kann.

»7 ist durch 3 teilbar«

ist z. B. eine Aussage mit dem Wahrheitswert »*falsch*«, während die Aussage

»Montag ist ein Wochentag«

eindeutig als »*wahr*« bestimmt werden kann. Zur Ermittlung des Wahrheitswertes müssen wir überprüfen (können), ob die in der Aussage formulierte Eigenschaft (»*ist durch 3 teilbar*«, »*ist Dienstag*«) auf das Subjekt (»7«, »Montag«) zeit- und ortsunabhängig zutrifft.

»Morgen ist Dienstag«

ist dementsprechend *keine Aussage*, da der Wahrheitsgehalt nur zeitabhängig bestimmt werden kann.

Aussagen und/oder deren Bestandteile können auch durch Symbole ersetzt werden und bilden so die Grundlage formaler Definitionen und Beschreibungen. Nachfolgend wird diese Symbolik schrittweise eingeführt und allgemein definiert.

<i>Aussagenvariable</i>	<i>Def. (2.1)</i>
$A, B, \dots$ sind Symbole für Aussagen.	

<i>Elementare Aussagen</i>	<i>Def. (2.2)</i>
beschreiben jeweils eine Eigenschaft (Prädikat) $p, q, \dots$ eines Individuums $x_0, x_1, \dots$ aus einem bestimmten Individuenbereich $\{x_0, x_1, \dots\}$. z.B.: x_0 hat die Eigenschaft p .	

<i>Aussagenlogische Ausdrücke</i>	<i>Def. (2.3)</i>
sind syntaktisch folgendermaßen induktiv definiert:	
1. Wahrheitswerte w und f sind Ausdrücke, 2. Aussagenvariablen $A, B, \dots$ sind Ausdrücke, 3. wenn A und B Ausdrücke sind, so sind auch $\overline{A}$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ und $(A \leftrightarrow B)$ Ausdrücke, 4. andere Zeichenketten sind keine aussagenlogischen Ausdrücke.	

<i>Zusammengesetzte Aussagen</i>	<i>Def. (2.4)</i>
werden mithilfe aussagenlogischer Ausdrücke gebildet.	

Den Wahrheitswert aussagenlogischer Ausdrücke ermittelt man, indem man schrittweise die Symbole der elementaren Aussagen durch ihre Wahrheitswerte ersetzt und die verbleibenden Werte gemäß Tabelle 2.1 unter Beachtung der Klammerung iterativ zu einem neuen Wert verknüpft.

Zur Vereinfachung der Schreibweise aussagenlogischer Ausdrücke können Klammern dort weggelassen werden, wo folgende Prioritätsskala eindeutig die Reihenfolge der Verknüpfung regelt:



- Negation ($\neg$)
- Konjunktion ($\wedge$)
- Disjunktion ($\vee$)
- alle weiteren

Tabelle 2.1 Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen

		Negation		Konjunktion	Disjunktion	Implikation	Äquivalenz
		A nicht $\overline{A}$	B nicht $\overline{B}$	A und B $A \wedge B$	A oder B $A \vee B$	wenn A, dann B $A \rightarrow B$	A genau dann, wenn B $A \leftrightarrow B$
A	B						
f	f	w	w	f	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w	f
w	f	f	w	f	w	f	f
w	w	f	f	w	w	w	w

So kann beispielsweise $((A \vee B) \wedge C) \vee (C \wedge D)$ auch als $(A \vee B) \wedge C \vee C \wedge D$ geschrieben werden, da die Konjunktion ($\wedge$) eine höhere Priorität besitzt als die Disjunktion ($\vee$).

Bild 2.1 zeigt am Beispiel des Ausdrucks $A \vee B \wedge C$ die Gefahren, die bei falscher Anwendung der Prioritätenregel entstehen können.

Bild 2.1 Prioritätenregel am Beispiel $A \vee (B \wedge C)$

Beispiel	richtige Anwendung der Prioritätenregel $A \vee (B \wedge C)$	falsche Anwendung der Prioritätenregel $(A \vee B) \wedge C$
$A = w$ $B = w$ $C = w$	$w \vee (w \wedge w) = w \vee w = w$	$(w \vee w) \wedge w = w \wedge w = w$
$A = w$ $B = w$ $C = f$	$w \vee (w \wedge f) = w \vee f = w$	$(w \vee w) \wedge f = w \wedge f = f$

Wir verzichten an dieser Stelle auf eine exakte Definition einer Algebra für die Aussagenlogik, da diese analog der in den Abschnitten 3.1 und 3.2 diskutierten Algebren vorgenommen werden kann und führen weitere Umformungsregeln intuitiv ein. Wie man durch Ermittlung der Wahrheitswerte leicht überprüfen kann, gelten folgende, bei der vergleichenden Betrachtung aussagenlogischer Ausdrücke nützliche *Äquivalenzen*:

$$A \rightarrow B \quad \text{ist äquivalent mit} \quad \overline{A} \vee B \quad (2.1)$$

$$A \leftrightarrow B \quad \text{ist äquivalent mit} \quad (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) \quad (2.2)$$

$$\overline{A \wedge B} \quad \text{ist äquivalent mit} \quad \overline{A} \vee \overline{B} \quad (2.3)$$

$$\overline{A \vee B} \quad \text{ist äquivalent mit} \quad \overline{A} \wedge \overline{B} \quad (2.4)$$

Am Ende der Ausführungen zum Thema »Aussagen« möchten wir noch auf drei spezielle Formen aussagenlogischer Ausdrücke hinweisen, die dem interessierten Leser im Zusammenhang mit den Grundlagen der Künstlichen Intelligenz wieder begegnen werden [Kna93].

Kontradiktion

Def. (2.5)

ist ein aussagenlogischer Ausdruck, welcher nach Zuweisung beliebiger Werte zu Aussagevariablen *immer* den Wert f hat.

Beispiele:

- $A \wedge \overline{A}$
- $A \wedge f$
- $(A \rightarrow B) \wedge (A \wedge \overline{B})$

Tautologie

Def. (2.6)

ist ein aussagenlogischer Ausdruck, welcher nach beliebiger Wertzuweisung zu Aussagevariablen *immer* den Wert w hat.

Beispiele:

- $A \vee \overline{A}$
- $A \vee w$
- $(A \rightarrow B) \vee A$

HORN-Klauseln

Def. (2.7)

sind aussagenlogische Ausdrücke der Form:

- $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ »Regel«
- $w \rightarrow B$ »Fakt«

Sie bilden die Grundlage für Wissensbasen der Künstlichen Intelligenz.

2.1.2 Prädikate

Prädikate sind uns bereits als Bestandteile von Aussagen bekannt, können aber unter bestimmten Bedingungen auch zur Definition einer eigenständigen Algebra genutzt werden.

Prädikat	Def. (2.8)
ist der Teil einer Aussage, der eine klassifizierende Eigenschaft beinhaltet. Prädikate können ebenfalls durch Symbole dargestellt werden.	

Analog der Vorgehensweise bei der Beschreibung der Aussagenlogik werden wir die **Prädikatenlogik** auch nur intuitiv diskutieren und so weit einführen, wie sie für das Verständnis der weiteren Ausführungen notwendig ist. Der interessierte Leser sei für weitere Ausführungen zu diesem Thema auf [Kna93] verwiesen. Wir benötigen prädikatenlogische Ausdrücke für die Definition formaler Regeln im Entwurfsweg digitaler Systeme. Mithilfe prädikatenlogischer Ausdrücke lassen sich *abhängige Aussagen* formulieren, deren Wahrheitswert erst ermittelt werden kann, wenn diese Abhängigkeit beseitigt ist. Abhängigkeit in diesem Zusammenhang bedeutet, dass das Subjekt (das »Individuum«) der Aussage durch eine Variable (das »Individuensymbol«) ersetzt wurde und somit der Wahrheitswert der Aussage vom Wert der Variablen abhängig ist. Ersetzt man z.B. die Zahl »7« im einführenden Beispiel durch eine Variable x , so lautet die abhängige Aussage:

» x ist durch 3 teilbar«.

Ersetzt man das Prädikat durch ein Symbol, z.B. » p «, so kann man obige abhängige Aussage verkürzt als » $p(x)$ «¹ schreiben. Legt man den Wert der Variablen x als die Zahl »7« fest, erhält man wieder die ursprüngliche Aussage mit dem Wahrheitswert »falsch«; setzt man für x hingegen die Zahl »6« ein, erhält die so entstandene Aussage den Wahrheitswert »wahr«. Von Interesse ist hier neben dem Prädikat auch die Menge möglicher Werte (der »Individuenbereich«), die die Variable annehmen kann.

Abhängige Aussagen	Def. (2.9)
bestehen aus Individuensymbolen und Prädikaten. Der Wahrheitswert abhängiger Aussagen (z.B. $p(x), q(y), \dots$) kann erst bestimmt werden, wenn die Individuensymbole (z.B. $x, y, \dots$) durch konkrete Individuen eines Individuenbereiches ersetzt werden.	

Tabelle 2.2 enthält einige Beispiele für derartige abhängige Aussagen.

Abhängige Aussagen sind eine Form prädikatenlogischer Ausdrücke. Darüber hinaus können prädikatenlogische Ausdrücke durch Einbeziehung von Quantoren (auch als *einstellige Junktoren* bezeichnet) und Termen gebildet werden.

Quantoren haben einen durch Klammern () eingegrenzten Wirkungsbereich und legen in diesem fest, ob ein entsprechendes Prädikat p **für alle** Individuen x (All-

¹ Sprich: »Es gilt p von x «, was so viel bedeutet wie » x hat Eigenschaft p «

Tabelle 2.2 Beispiele für abhängige Aussagen

	abhängige Aussage	Individuenbereich von x, y
$p(x)$	x ist durch 3 teilbar	natürliche Zahlen
$q(y)$	y ist ein Wochentag	alle Wochentage
$r(x, y)$	x ist Student in y	$x \dots$ alle Einwohner Thüringens $y = \{Ilmenau, Jena, Weimar\}$

quantor $\forall$) gelten soll oder ob mindestens ein Individuum x im Wirkungsbereich **existieren** (Existenzquantor $\exists$) soll, für das das Prädikat p gilt. Ersteres würde symbolisch durch $\forall x(p(x))$ und Letzteres durch $\exists x(p(x))$ ausgedrückt.

Zum besseren Verständnis der Sprechweise derartiger Ausdrücke folgen hier einige weitere Beispiele:

- (a)

$\exists x(r(x))$
- es existiert (mindestens) ein Element im Individuenbereich von x , für das gilt, das Prädikat r ist für x wahr (für $r(x)$ spricht: » r von x «).
- (b)

$\forall y(s(y))$
- für alle Elemente des Individuenbereiches von y gilt, die Aussage $s(y)$ ist wahr;
- (c)

$\overline{\forall x(r(x))}$
- es gilt nicht, dass für alle Elemente aus dem Individuenbereich von x $r(x)$ nicht wahr ist – gleicher Sachverhalt wie unter (a);
- (d)

$\overline{\exists y(s(y))}$
- es gibt kein y , für das $s(y)$ nicht wahr ist – gleicher Sachverhalt wie unter (b);
- (e)

$\forall y\exists x(t(x, y))$
- für alle Elemente des Individuenbereiches von y existiert (mindestens) ein Element aus dem Individuenbereich von x , für welches gilt, dass $t(x, y)$ wahr ist;
- (f)

$\exists y\forall x(r(x) \rightarrow s(y))$
- es existiert (mindestens) ein Element im Individuenbereich von y , für das gilt, dass für alle Elemente des Individuenbereiches von x die Implikation $r(x) \rightarrow s(y)$ (spricht: »aus $r(x)$ folgt $s(y)$ «) wahr ist.

Die in diesen prädikatenlogischen Ausdrücken verwendeten Operatoren entsprechen denen der Aussagenlogik. In allen gezeigten Beispielen für prädikatenlogische Ausdrücke kommen die Individuensymbole x und y *gebunden* vor, da sie im Wirkungsbereich des *Allquantors* $\forall$ bzw. des *Existenzquantors* $\exists$ stehen. Prädikatenlogische Ausdrücke, in denen *nur* gebundene Individuensymbole vorkommen, stellen Aussagen dar. Schließt der Wirkungsbereich der Quantoren nicht alle Variablen vollständig ein, z.B.

$$\forall y \exists x (t(x, y)) \wedge p(y),$$

so sind die außerhalb des Wirkungsbereiches liegenden Variablen *frei* und der prädikatenlogische Ausdruck ist eine abhängige Aussage.

Prädikate können auch n -stellig sein und über n -stelligen Funktionen definiert werden. Nachfolgende Definitionen beschreiben diesen Sachverhalt ausgehend von einer Termdefinition rekursiv. Damit schließt der kurze Überblick zu Aussagen und Prädikaten, die grundlegend für das Verständnis und die Lesbarkeit nachfolgender Definitionen sind.

Term	Def. (2.10)
Es gilt:	
1. Die Wahrheitswerte w und f und alle Individuensymbole $x, \dots$ sind Terme;	
2. wenn g ein n -stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \dots, t_n$ Terme sind, so ist auch $g(t_1, \dots, t_n)$ ein Term;	
3. andere Terme existieren nicht.	

Elementar Ausdruck	Def. (2.11)
Es gilt:	
1. Wenn p ein n -stelliges Prädikatensymbol und $t_1, \dots, t_n$ Terme sind, so ist auch $p(t_1, \dots, t_n)$ ein elementarer Ausdruck;	
2. wenn t_1 und t_2 Terme sind, so ist auch $t_1 = t_2$ ein elementarer Ausdruck.	

Prädikatenlogischer Ausdruck	Def. (2.12)
Es gilt:	
1. Jeder Elementarausdruck ist Ausdruck;	
2. sind A und B Ausdrücke, so sind auch $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ und $A \leftrightarrow B$ Ausdrücke;	
3. wenn $A(x)$ Ausdruck und x ein in $A(x)$ vorkommendes Individuensymbol ist, wobei in $A(x)$ keine Symbolfolge der Art $\forall x$ oder $\exists x$ vorkommt, so sind auch $\forall x A(x)$ oder $\exists x A(x)$ Ausdrücke;	
4. nur die nach (1) bis (3) gebildeten Zeichenreihen sind prädikatenlogische Ausdrücke.	

2.2 Mengen, Relationen, Abbildungen

Die in Abschnitt 2.1 eingeführten Aussagen über Individuen eines bestimmten Individuenbereiches, die sich durch eine gemeinsame Eigenschaft p von anderen Individuen des gleichen Individuenbereiches unterscheiden, unterteilen den Individuenbereich in zwei Teile: einen Teil, für den die Eigenschaft zutrifft (*»gilt«, »wahr«* ist) und einen, für den sie nicht zutrifft.

2.2.1 Mengen

Im Sinne der intuitiven **Mengenlehre** bezeichnet man die Individuen als *»Elemente«*, den Individuenbereich als *»Grundmenge M «*, den Teil des Individuenbereiches, für den die Aussage wahr ist, als die durch diese Aussage definierte *»Menge B «* und den anderen Teil als *»Komplementmenge $\overline{B}$ «*.

An dieser Stelle wird deutlich, dass Aussagenlogik und Mengenlehre zwei unterschiedliche Sichtweisen zur Definition von Sachverhalten darstellen. Während in der Aussagenlogik die Ermittlung des Wahrheitswertes der Aussagen das Ziel der definierten Operationen ist, sind die Operationen der Mengenlehre auf die Zugehörigkeit von Elementen zu Ergebnismengen gerichtet. Wir werden auf diesen Zusammenhang in Kapitel 3 bei der Einführung der Booleschen Mengen- und Ausdrucksalgebra zurückkommen. Hier sollen zunächst die grundlegenden Definitionen der Mengenlehre zusammengestellt werden. Für eine möglichst kompakte Darstellungsweise bedienen wir uns dabei der im vorigen Abschnitt eingeführten Schreibweise für Aussagen und Prädikate. Für die Definition von Mengen gibt es unterschiedliche Schreibweisen.

Menge	Def. (2.13)
Eine Menge lässt sich definieren unter Verwendung von:	
entweder Aussagen: $\forall b(b \in B \leftrightarrow p_B(b))$	spricht: Für alle b gilt: b ist Element der Menge B genau dann, wenn $p_B(b)$ gilt (d.h. die Aussage »Für b gilt $p_B(b)$ « ist wahr).
oder Prädikaten: $B = \{b p_B(b)\}$	spricht: B ist die Menge aller b mit der Eigenschaft $p_B(b)$.
oder Aufzählungen: $B = \{b_0, b_1, \dots, b_{m-1}\}$	spricht: B ist die Menge der m Elemente b_0 bis b_{m-1} .

Nachfolgende Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe und Beziehungen der Mengenlehre werden wir im Verlauf der weiteren Erklärungen voraussetzen. Der in dieser Thematik ungeübte Leser sollte daher um das Verständnis der zugehörigen Aufgaben bemüht sein und sich die formalen Definitionen anhand einfacher Beispiele verdeutlichen. Zum tieferen Verständnis ist es dabei immer nützlich, auch Gegenbeispiele zu finden, die die formulierten Eigenschaften nicht besitzen. Auf diese Weise kann man sich beispielsweise verdeutlichen, dass zu einem Mengenprodukt (2.23) alle geordneten Paare von Elementen gehören, deren erste Komponente aus der links vom Operationszeichen stehenden Menge stammen und deren zweite Komponente Element der rechts neben dem Operationszeichen stehenden Menge sein müssen. Alle anderen bildbaren Paare, in denen beispielsweise nur Elemente aus einer der beiden Mengen vorkommen oder die in ihrer Reihenfolge vertauscht sind, gehören nicht zum Kreuzprodukt.

$$\text{Mengenmächtigkeit} \quad |B| = m \leftrightarrow B \text{ enthält } m \text{ Elemente} \quad (2.5)$$

$$\text{die leere Menge} \quad \emptyset; \quad |\emptyset| = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{Teilmenge} \quad (B \subseteq C) \leftrightarrow (\forall b(b \in B \rightarrow b \in C) \vee (B = \emptyset)) \quad (2.7)$$

$$\text{echte Teilmenge} \quad (B \subset C) \leftrightarrow (\exists b(\overline{b \in B} \wedge b \in C) \wedge \forall b(b \in B \rightarrow b \in C)) \quad (2.8)$$

$$\text{Potenzmenge} \quad \mathcal{P}(B) = \{C \mid C \subseteq B\} \quad (2.9)$$

$$\text{Mengengleichheit} \quad (B = C) \leftrightarrow (\forall b(b \in B \leftrightarrow b \in C)) \quad (2.10)$$

$$\text{Mengenvereinigung} \quad B \cup C = \{b \mid b \in B \vee b \in C\} \quad (2.11)$$

$$\text{allgemein} \quad \bigcup_{i=1}^m B_i = \bigcup_{i=1}^{m-1} B_i \cup B_m \quad (2.12)$$

$$\text{Mengenschnitt} \quad B \cap C = \{b \mid b \in B \wedge b \in C\} \quad (2.13)$$

$$\text{allgemein} \quad \bigcap_{i=1}^m B_i = \bigcap_{i=1}^{m-1} B_i \cap B_m \quad (2.14)$$

$$\text{Mengendifferenz} \quad C \setminus B = \{b \mid b \in C \wedge \overline{b \in B}\} \quad (2.15)$$

$$\text{Komplement} \quad \overline{B} = M \setminus B \quad (2.16)$$

Komplement der Menge B bzgl. der Grundmenge M

$$\text{disjunkte Mengen} \quad B \text{ disjunkt } C \leftrightarrow \overline{\exists b(b \in B \wedge b \in C)} \quad \text{bzw.} \quad B \cap C = \emptyset \quad (2.17)$$

$$\text{Partition} \quad \text{Für } \Pi(B) \subset \mathcal{P}(B) \text{ gilt:} \quad (2.18)$$

$$1. \quad \emptyset \notin \Pi(B) \quad (2.19)$$

$$2. \quad \forall C_1, C_2 \in \Pi(B) \left(C_1 \neq C_2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 = \emptyset \right) \quad (2.20)$$

$$3. \quad \bigcup_{C_i \in \Pi(B)} C_i = B \quad (2.21)$$

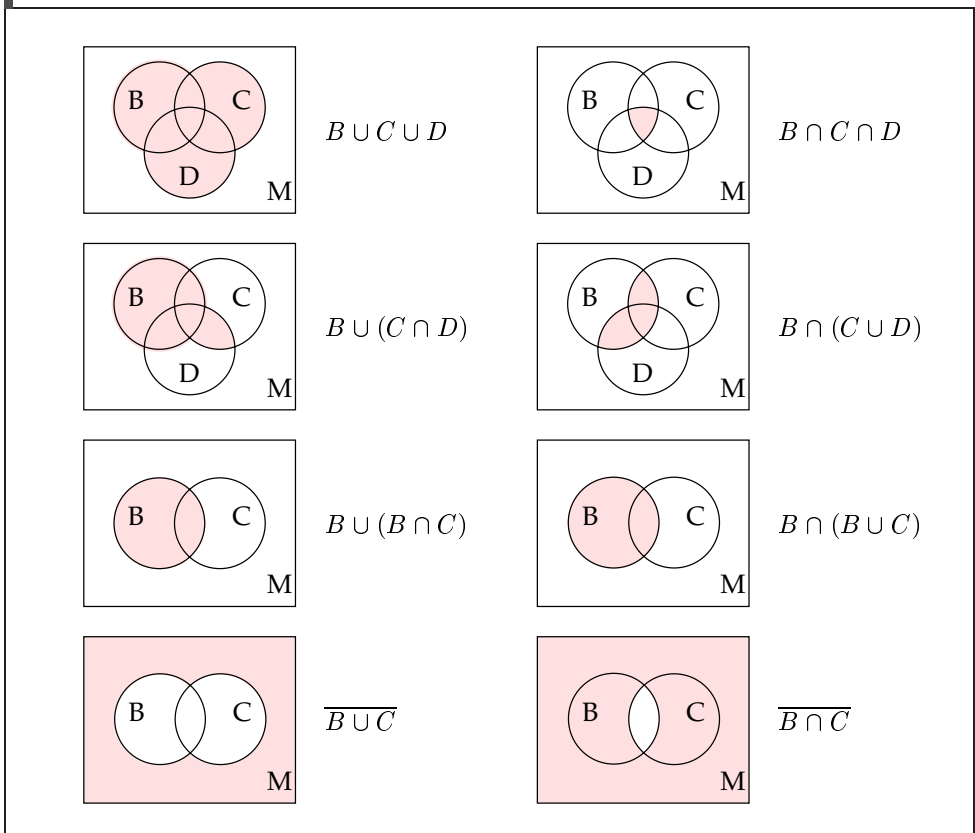
$$n\text{-Tupel} \quad L = [l_{n-1}, l_{n-2}, \dots, l_0] \quad (\text{geordnete Menge}) \quad (2.22)$$

$$\text{Mengenprodukt} \quad B \times C = \{[b, c] \mid b \in B \wedge c \in C\} \quad (2.23)$$

$$(\text{Kreuzprodukt}) \quad B \times C \quad (\text{sprich: »}B \text{ kreuz } C\text{«})$$

$$\text{Mengenpotenz} \quad B^m = B^{m-1} \times B \quad \text{mit:} \quad B^1 = B \quad (2.24)$$

In Bild 2.2 sind einige Beispiele zu Mengenoperationen in der Darstellung als **Mengendiagramm** (in der Literatur auch als VENN-Diagramme bezeichnet) angegeben. Die Ergebnismenge ist jeweils grau hinterlegt.

Bild 2.2 Mengenoperationen, dargestellt durch VENN-Diagramme

Geordnete Mengen bilden den Ausgangspunkt einer weiteren Kategorie formaler Beschreibungsmöglichkeiten, mit denen Beziehungen zwischen Elementen der gleichen Menge ausgedrückt werden können.

2.2.2 Relationen

Elemente *einer* Menge können in einer Beziehung (Relation) zueinander stehen, anhand derer sie geordnet werden können. So kann man z.B. mithilfe der »größergleich-Relation« ($\geq$) für beliebige endliche Mengen von natürlichen Zahlen eine Reihenfolge (»Ordnung«) der Zahlen innerhalb der Mengen festlegen. Da bei dieser Relation jeweils zwei Elemente betrachtet werden, spricht man von zweistelligen Relationen. Dementsprechend gibt es natürlich auch drei-, vier- und allgemein n -stellige Relationen. Ein Beispiel für eine dreistellige Relation im Bereich der natürlichen Zahlen wäre die Relation $sum(a, b, c)$ mit der Interpretation $a + b = c$. Ihr würden alle 3-Tupel angehören, die als drittes Element die Summe der beiden ersten Elemente enthalten.

<i>n</i> -stellige Relationen	Def. (2.14)
$\mathcal{R} \subseteq B^n, \quad \forall t(t \in \mathcal{R} \leftrightarrow t \in B^n \wedge r(t))$	

Relationen können in **Präfix**-Notation, bei der das Relationssymbol (z.B. »sum«) vor den Elementen steht, oder in **Infix**-Notation, bei der Relationssymbole zwischen den Elementen stehen (z.B. $a \geq b$), dargestellt werden.

Für unsere weiteren Betrachtungen sind nur zweistellige Relationen und bestimmte Eigenschaften dieser Relationen von Interesse. Die Eigenschaften bestimmen in ihrem Zusammenwirken die Art der Ordnung, die durch die Relation erzeugbar ist. Bevor wir darauf eingehen, sollen die Eigenschaften zunächst definiert werden.

Für $r \in \mathcal{R}$ mit $\mathcal{R} \subseteq B^2$; $b, c, d \in B$ gilt ²:

Reflexivität

$$\forall b(b \ r \ b)$$

(2.25)

Irreflexivität

$$\forall b \overline{(b \ r \ b)}$$

(2.26)

Transitivität

$$\forall b, c, d(b \ r \ c \wedge c \ r \ d \rightarrow b \ r \ d)$$

(2.27)

Symmetrie

$$\forall b, c(b \ r \ c \rightarrow c \ r \ b)$$

(2.28)

Antisymmetrie

$$\forall b, c(b \ r \ c \wedge c \ r \ b \rightarrow b = c)$$

(2.29)

Asymmetrie

$$\forall b, c(b \ r \ c \rightarrow \overline{c \ r \ b})$$

(2.30)

Linearität

$$\forall b, c(b \ r \ c \vee c \ r \ b)$$

(2.31)

Konnexität

$$\forall b, c(b \ r \ c \vee b = c \vee c \ r \ b)$$

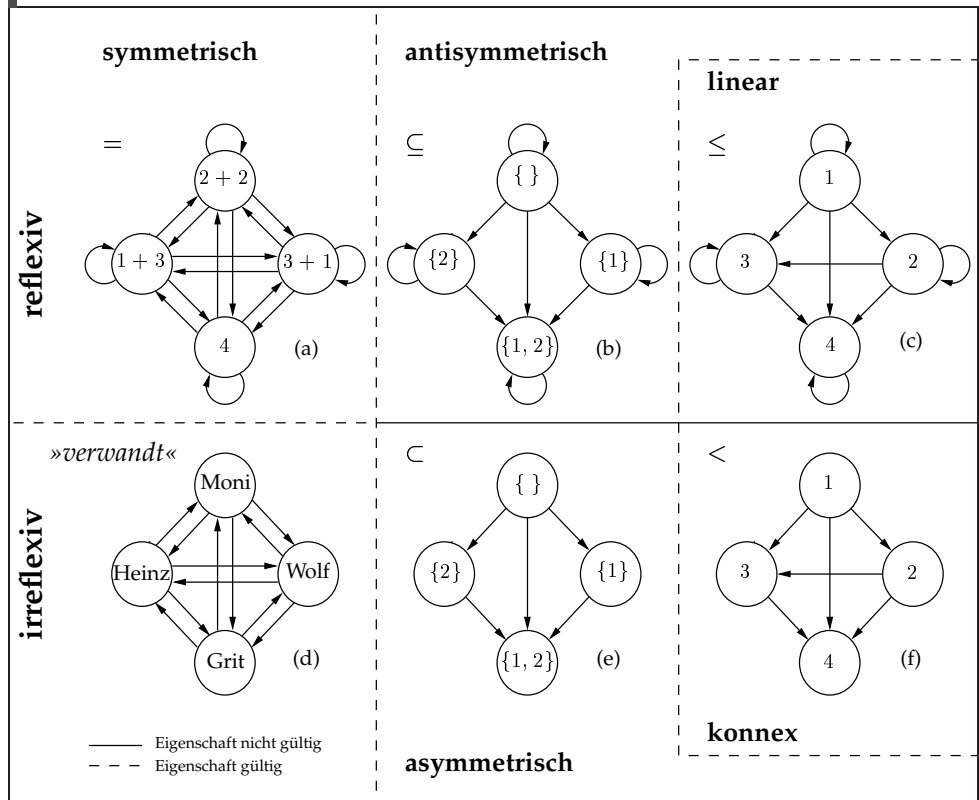
(2.32)

Zum besseren Verständnis können die Eigenschaften zusätzlich grafisch in so genannten **Relationsgraphen** dargestellt werden. Kreise (»Knoten«) in diesem Graphen repräsentieren unterschiedliche Elemente, Pfeile (»gerichtete Kanten«) zeigen an, dass der jeweilige Knoten mit dem anderen in der betrachteten Relation steht. Die Eigenschaften spiegeln sich in den jeweils möglichen Kanten wider. Anhand der Beispielrelationen kann sich der Leser gewiss recht schnell von der Gültigkeit

² Infixnotation: $b \ r \ c$ sprich »b ist in Relation r zu c«

und Zweckmäßigkeit dieser Darstellung überzeugen. Bild 2.3 fasst die Eigenschaften *transitiver* Relationen anhand von Beispielen zusammen:

Bild 2.3 Relationsgraphen transitiver Relationen



Der Wirkungsbereich der Eigenschaften erstreckt sich jeweils über die gestrichelten Linien hinaus in waagerechter (z.B. reflexiv von links nach rechts) bzw. senkrechter (z.B. symmetrisch von oben nach unten) Richtung bis zur nächsten durchgezogenen Linie. So hat z.B. die Relation »<« die Eigenschaften *transitiv*, *irreflexiv*, *asymmetrisch* und *konnex*. Eine zweistellige Relation heißt *Halbordnungsrelation*, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Eine Halbordnungsrelation heißt *Ordnungsrelation*, wenn sie linear ist.

2.2.3 Abbildungen

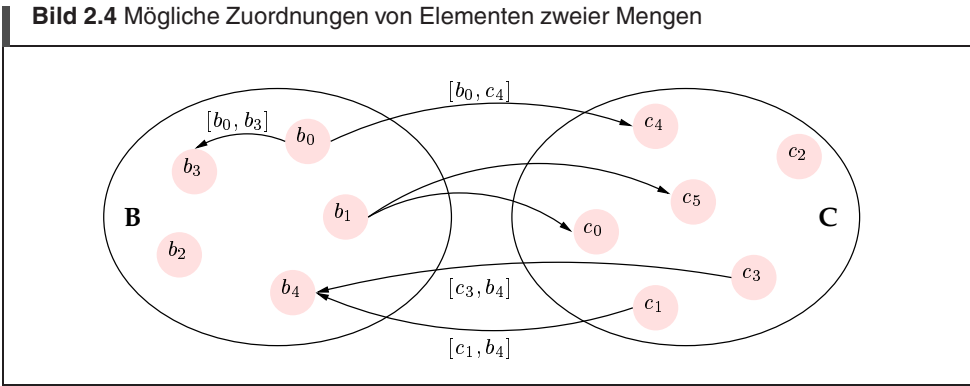
Abbildungen beschreiben die Zuordnung von Elementen nach bestimmten Regeln. Man unterscheidet die Abbildungsarten u.a. danach, ob die Elemente zu unterschiedlichen Mengen gehören, ob alle Elemente genutzt werden, ob jedes Element genau einem anderen Element zugeordnet ist usw. Wir wollen hier einen

Überblick über die wesentlichen, für das Verständnis der im Buch verwendeten Formalismen notwendigen Abbildungsarten geben.

Abbildung $\mathcal{A}$	Def. (2.15)
$\mathcal{A} = \left\{ [b, c] \mid [b, c] \in B \times C \wedge p_A([b, c]) \right\}$	

Allen gemeinsam ist, dass ein oder mehrere Elemente der einen Menge (*Vorbereich*) einem oder mehreren Elementen der anderen Menge (*Nachbereich*) zugeordnet werden. Vor- und Nachbereich müssen dabei nicht unbedingt unterschiedliche Mengen sein. Ergebnis einer Abbildung ist im einfachsten Fall eine Menge von (geordneten) Paaren, deren erste Komponente dem Vorbereich und deren zweite Komponente dem Nachbereich angehört. Somit lassen sich Abbildungen als Teilmengen des kartesischen Mengenproduktes (Kreuzprodukt) von Vor- und Nachbereich der Abbildung definieren, die eine bestimmte gemeinsame Eigenschaft (*Prädikat*) besitzen.

Bild 2.4 zeigt anhand zweier Mengen, welche Elemente (zweistellige) Abbildungen prinzipiell enthalten könnten.



Die nachfolgenden Definitionen schränken diese Möglichkeiten durch die Spezifikation entsprechender Eigenschaften ein und beschreiben damit spezielle Abbildungen. Eine solche einschränkende Eigenschaft könnte z.B. sein, dass jedem Element der Menge B *genau* ein Element der Menge C zugeordnet sein muss. Einzig zulässiges Paar aus Bild 2.4 wäre dann $[b_0, c_4]$, alle anderen eingezeichneten Zuordnungen verletzen diese Eigenschaft. Die weiteren Elemente dieser Abbildung müssten als Paare gebildet werden, die die übrigen Elemente von B ($b_1 \cdots b_4$) als erste Komponente enthalten. Notieren wir diesen Sachverhalt mithilfe der im vorigen Abschnitt kennen gelernten Schreibweise, ist die Überlegenheit einer formalen Notationsweise gegenüber der verbalen Beschreibung offensichtlich. Mit

$b \in B$, $c \in C$, $d \in C$ und $c \neq d$ ist die oben beschriebene Abbildung $\mathcal{A}$ definiert durch³:

$$\mathcal{A} = \left\{ [b, c] \mid [b, c] \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\exists d([b, d] \in \mathcal{A})} \right\}$$

Im Folgenden werden spezielle Abbildungen formal definiert und – soweit möglich – grafisch veranschaulicht.

$$\text{Vorbereich } (V) \quad V(\mathcal{A}) = \left\{ b \mid \exists c([b, c] \in \mathcal{A}) \right\} \quad (2.33)$$

$$\text{Nachbereich } (N) \quad N(\mathcal{A}) = \left\{ c \mid \exists b([b, c] \in \mathcal{A}) \right\} \quad (2.34)$$

$$\text{partielle Abbildung} \quad \mathcal{A} \text{ ist partiell} \leftrightarrow \exists b(b \in B \wedge \overline{b \in V(\mathcal{A})}) \quad (2.35)$$

Funktion ($\mathcal{F}$) eindeutige Abbildung, d.h. es gilt zusätzlich zu (2.15):

$$\mathcal{F} = \left\{ [b, c] \mid \overline{\exists d(c \neq d \wedge [b, d] \in \mathcal{F})} \right\} \quad (2.36)$$

weitere Schreibweisen:

$$\mathcal{F} : B \Rightarrow C \quad \text{bzw.} \quad (2.37)$$

$$c = \mathcal{F}(b) \quad \text{mit } b \in B \text{ und } c \in C \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \text{Boolesche Funktion} \quad & \text{Funktion nach (2.36)} \\ & \text{mit dem Nachbereich } N = \{0, 1\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\text{Operation } (\mathcal{O}) \quad \text{Funktion nach (2.36) mit } V = B^n \text{ und } N = B \quad (2.40)$$

$$\mathcal{O} = \left\{ [b, c] \mid b \in B^n \wedge c \in B \wedge n > 1 \right\} \quad (2.41)$$

weitere Schreibweisen:

$$\mathcal{O} : B^n \Rightarrow B \quad \text{bzw.} \quad (2.42)$$

$$b = \mathcal{O}[b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0] \quad (2.43)$$

³ Zur Erinnerung hier noch einmal die Sprechweise: $\mathcal{A}$ ist die Menge aller geordneten Paare $[b, c]$ mit der Eigenschaft: »wenn $[b, c]$ Element der Abbildung $\mathcal{A}$ ist, so stimmt es nicht, dass ein weiteres Element d aus C existiert, mit dem ein Paar $[b, d]$ gebildet werden kann, das Element der Abbildung $\mathcal{A}$ ist«.

Kodierung ($\mathcal{K}$) eindeutige Funktion nach (2.36),
d.h. es gilt zusätzlich:

$$\mathcal{K} = \left\{ [b, c] \mid \overline{\exists d (b \neq d \wedge [d, c] \in \mathcal{K})} \right\} \quad (2.44)$$

weitere Schreibweisen:

$$\mathcal{K} : B \Leftrightarrow C \quad \text{bzw.} \quad (2.45)$$

$$c = \mathcal{K}(b) \quad (2.46)$$

$$\textit{Dekodierung} \ (\mathcal{D}) \quad b = \mathcal{K}^{-1}(c) \quad (2.47)$$

$$\textit{Transformation} \ (\mathcal{T}) \quad \text{Kodierung nach (2.44) mit } V = N = B \quad (2.48)$$

weitere Schreibweisen:

$$\mathcal{T} : B \Leftrightarrow B \quad (2.49)$$

2.3 Zusammenfassung

Der kurze Ausflug in die Welt der Aussagen- und Prädikatenlogik sowie der Mengen und Relationen liefert uns die Ausdrucksmittel, mit denen wir in den nächsten Kapiteln den Entwurfsweg digitaler Systeme in kompakter und exakter Weise beschreiben können. Wir sind dadurch in der Lage, auch Sachverhalte, die verbal nicht oder nur schwer exakt zu beschreiben sind, in zweifelsfreier Weise sehr präzise zu formulieren.

Erkenntnisse aus der Prädikaten- und Aussagenlogik werden wir bei der Einführung der Booleschen Ausdrucksalgebra in Kapitel 3 und für alle weiteren Definitionen benötigen. Wir werden damit in der Lage sein, digitale Schaltungen aus Bausteinen zusammenzusetzen, die logische Grundoperationen realisieren und die Ausdrucksstruktur in der Schaltung wiederfinden.

Auf der Mengenlehre bauen wir auf, wenn wir die Funktionalität digitaler Systeme beschreiben. Wir drücken damit z.B. in Kapitel 5 aus, ob ein von uns realisierter Automat vollständig beschrieben ist, d.h. in allen möglichen Situationen definiert weiterarbeitet.

Die nachfolgenden Aufgaben sollen noch einmal die wichtigsten Begriffe vertiefen und exemplarisch deren Anwendbarkeit belegen.

2.4 Aufgaben

Aufgabe 2.1

Gegeben sei die Menge $B = \{1, 2, 3, 5\}$.

- (a) Gesucht werden die Relationsgraphen für folgende Relationen $r \in R_i$ mit $R_i \subseteq B^2$ und $i \in \{=, <, >, \leq, \geq\}$.

Aufgabe 2.2

Auf der Grundmenge $P(M)$ mit $M = \{a, b\}$ seien die Relationen $\gg\subset\ll$, $\gg\supset\ll$ und $\gg\subseteq\ll$ explizit definiert.

- (a) Gesucht ist jeweils der dazugehörige Relationsgraph.
 (b) Untersuche diese Relationen auf »Symmetrie«, »Transitivität«, »Asymmetrie«, »Antisymmetrie« sowie »Reflexivität«.

Aufgabe 2.3

Folgende prädikatenlogische Ausdrücke definieren zusammen eine kombinatorische Funktion mit $x = [x_3, x_2, x_1, x_0]$ und $y = [y_1, y_0]$:

$$\forall i(X_i \in X^A \Leftrightarrow \exists j, k(X_i(x_j) = 1 \wedge X_i(x_k) = 1 \wedge j \neq k))$$

$$\forall i(X_i \in X^B \Leftrightarrow \exists j, k(X_i(x_j) = 0 \wedge X_i(x_k) = 0 \wedge j \neq k))$$

$$\forall i(\lambda_0(X_i) = 1 \Leftrightarrow X_i \in X^A \cap X^B)$$

$$\forall i(\lambda_1(X_i) = 0 \Leftrightarrow X_i \in X^A \setminus X^B)$$

Gesucht ist die Wertetabelle.

Aufgabe 2.4

Gegeben sind folgende echte Teilmengen ($X^k \subset X$) von Eingangsbelegungen $X_i \in X^k$ mit $|X| = 16$, $k \in \{1, 2, 3\}$ und $i \in \{0, 1, 2, \dots, 15\}$:

$$X^1 = \{X_0, X_1, X_2, X_5, X_{11}\}$$

$$X^2 = \{X_0, X_1, X_4, X_5, X_6, X_8, X_{15}\}$$

$$X^3 = \{X_0, X_2, X_3, X_4, X_5, X_9, X_{10}, X_{15}\}$$

- (a) Gesucht sind: das Mengendiagramm – einschließlich Grundmenge X ,
 (b) eine Wertetabelle für y_0 , y_1 und y_2 , wobei gilt:

$$\forall i (X_i \in X^1 \cap X^2 \Leftrightarrow \lambda_0(X_i) = 1)$$

$$\forall i (X_i \in X^2 \cup X^3 \Leftrightarrow \lambda_1(X_i) = 1)$$

$$\forall i (X_i \in X^1 \cap X^2 \Leftrightarrow \lambda_0(X_i) = 1)$$

Aufgabe 2.5

Geben Sie Vorbereich und Nachbereich der Operationen der Booleschen Mengenalgebra an!

Aufgabe 2.6

Entscheiden Sie, ob folgende Zeichenketten schaltalgebraische Ausdrücke sind:

(a) $(x_2 x_1 \vee (x_2 \rightarrow (x_3 \wedge x_2)))$

(b) $x_2 \rightarrow (x_3 \wedge \vee x_1)$

(c) $x_1 \overline{x_0} \vee x_2 x_0$

(d) $x_3 \overline{x_2} \overline{\vee} x_1 \wedge x_0$

Veranschaulichen Sie die Struktur der gefundenen Ausdrücke durch Mengendiagramme!

Aufgabe 2.7

Markieren Sie in der folgenden Wertetabelle die Elemente X_3 , $X_3(x_1)$, $\lambda(X_5)$, $\lambda_1(X_1)$, Y_3 , $Y_3(y_0)$.

i	x_2	x_1	x_0	y_1	y_0
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	1	1
7	1	1	1	1	1

Aufgabe 2.8

Herr Graf teilt seinem Butler mit:

(a) Zu jeder Mahlzeit müssen Sie Eiscreme reichen, wenn Sie kein Brot reichen.

(b) Wenn Sie Brot und Eiscreme zur gleichen Mahlzeit servieren, darf es dazu keine sauren Gurken geben.

- (c) Wenn saure Gurken gereicht werden oder Brot nicht serviert wird, darf es keine Eiscreme geben.

Wie sieht der Speiseplan »verständlich« aus?

Aufgabe 2.9

Ein völlig verwirrter Autohausbesitzer erklärt einem Kunden:

- (a) Der Golf ist nicht grün und der Passat ist nicht weiß.
- (b) Der Passat ist rot und Aussage (d) ist richtig.
- (c) Der Audi ist grün oder der Golf ist rot.
- (d) Der Audi ist rot oder Aussage (a) ist falsch.
- (e) Der Audi ist weiß oder der Golf ist grün.

Welche Farben haben die drei Autos?

(Bemerkung: Nur eine der Aussagen (a) bis (e) ist wahr.)

Aufgabe 2.10

Es ist zu beweisen, dass die Aussagen

- (a) $(A \vee \overline{AB})$ und
- (b) $(AB)(\overline{A \vee B})$

Tautologien bzw. Kontradiktionen sind!

Hinweis: Für den Nachweis sind die Beziehungen aus Tabelle 2.1 und (2.1) bis (2.4) zu verwenden.

Aufgabe 2.11

Aus folgenden Angaben sind die Einzelmengen A, B, C zu ermitteln:

- (a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- (b) $B \cup C = \{1, 2, 4, 6, 8\}$
- (c) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
- (d) $A \cap B = \{2\}$
- (e) $B \cap C = \{2, 4, 8\}$
- (f) $A \cap C = \{2\}$

Teil I

Kombinatorische Schaltungen

Die in **Kapitel 2** eingeführten Begriffe und mathematischen Methoden bilden die Grundlage für einen systematischen Entwurf digitaler Systeme sowie deren Analyse. In **Kapitel 3** wird der Entwurfsweg kombinatorischer digitaler Schaltungen detailliert dargestellt. Die einzelnen Entwurfsschritte werden formal eingeführt und anhand zahlreicher Beispiele erläutert. Dabei wird sowohl der funktionelle als auch der strukturelle Aspekt des Entwurfsweges diskutiert. **Kapitel 4** beschreibt darauf aufbauend den Analyseweg von einer gegebenen kombinatorischen Schaltung zu einer funktions- oder strukturorientierten Beschreibung. Diese bildet den Ausgangspunkt für weitergehende Untersuchungen zum zeitlichen Verhalten kombinatorischer Schaltungen. Auch hier unterstützen zahlreiche Beispiele das Verständnis der Darlegungen. Beide Kapitel schließen mit einer Zusammenstellung von Übungsaufgaben.