Michael Radtke/Klaus D. Schmidt (Hrsg.)

Handbuch zur Schadenreservierung

2. Auflage

vvw.de

Michael Radtke/Klaus D. Schmidt (Hrsg.)

Handbuch zur Schadenreservierung

Michael Radtke/Klaus D. Schmidt (Hrsg.)

Handbuch zur Schadenreservierung

2. Auflage

vvw.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Leider ist es kaum vermeidbar, dass Buchinhalte aufgrund von Gesetzesänderungen in immer kürzer werdenden Abständen schon bald nach Drucklegung nicht mehr dem neuesten Stand entsprechen.

Beachten Sie bitte daher stets unseren Aktualisierungsservice auf unserer Homepage
unter **www.vvw.de→Service→Ergänzungen/Aktualisierungen**.
Dort halten wir für Sie wichtige und relevante Änderungen und Ergänzungen zum Download bereit.

Druck Druckhaus Nomos Sinzheim

ISBN 978-3-89952-612-7

Vorwort

Die Schadenreservierung hat seit dem Erscheinen der ersten Auflage des Handbuchs vor acht Jahren neue Impulse bekommen, die auf neuen Anforderungen an die aktuarielle Praxis, auf neuen wissenschaftlichen Erkenntnissen und auf dem Austausch zwischen Theorie und Praxis beruhen. Diese Impulse haben zu einer signifikanten Erweiterung des Repertoires an Verfahren geführt. Viele der neuen Verfahren zeichnen sich dadurch aus, dass sie stochastische Zusammenhänge zwischen Teilbeständen berücksichtigen und daher geeignet sind, das Problem der Aggregation zu klären und das Reserverisiko unter Solvency II zu bestimmen.

Die vorliegende zweite Auflage des Handbuchs berücksichtigt diese neuen Entwicklungen. Dabei liegt der Schwerpunkt, wie bei der ersten Auflage, in der Darstellung aktuarieller Verfahren und der ihnen zugrunde liegenden Modelle.

Neben der Erweiterung des Handbuchs um neue Beiträge, für die auch neue Autoren gewonnen werden konnten, wurden die Beiträge der ersten Auflage systematisch durchgesehen und in fast allen Fällen aktualisiert. Insbesondere wird in den Beiträgen zu den univariaten Verfahren neben dem Standardbeispiel auch eine Variante des Beispiels behandelt, die die Auswirkung von Ausreißern in den Daten auf die in diesen Verfahren verwendeten Prädiktoren zukünftiger Zuwächse oder Schadenstände, und damit auf die Bestimmung von Reserven, erkennen lässt.

Die in den letzten Jahren erfolgte Erweiterung des Repertoires an Verfahren hat auch die bereits in der ersten Auflage des Handbuchs herausgearbeitete Bedeutung stochastischer Modelle bestätigt:

- *Abwicklungsmuster* formalisieren die Vorstellung einer Ähnlichkeit der Abwicklung der Schäden aus verschiedenen Anfalljahren durch Annahmen an die erwarteten Zuwächse oder Schadenstände, durch die sich viele Verfahren der Schadenreservierung plausibilisieren lassen.
- *Lineare Modelle* enthalten neben Annahmen an die Erwartungswerte auch Annahmen an die Varianzen und Kovarianzen, durch die sich der erwartete quadratische Prognosefehler bestimmen und auch schätzen lässt.

Während die klassischen univariaten Verfahren auf heuristischen Überlegungen beruhen und erst später durch stochastische Modelle begründet wurden, sind die neuen multivariaten Verfahren aus Verallgemeinerungen derartiger Modelle entstanden.

Eine wichtige Erweiterung stellt auch das in den letzten Jahren entwickelte *Bornhuetter–Ferguson Prinzip* dar. Es bietet einen allgemeinen Rahmen, der es gestattet, viele Verfahren in einheitlicher Form darzustellen, wesentliche Bausteine dieser Verfahren zu identifizieren und aus diesen Bausteinen neue Verfahren zu konstruieren, und es bietet darüber hinaus die Möglichkeit, für einen Bestand von Risiken die Effekte von Abwicklungsdaten, Volumenmaßen und Marktstatistiken auf die in diesen Verfahren verwendeten Prädiktoren zu analysieren.

Unser herzlicher Dank gilt allen Autoren des Handbuchs sowie Elisabeth Löser und Christiane Weber für ihre vielfältige Unterstützung bei der Erstellung des Manuskriptes.

Dortmund und Dresden, Michael Radtke
im Juli 2012 Klaus D. Schmidt

Vorwort zur ersten Auflage

In der Schaden– und Unfallversicherung stellen die Schadenrückstellungen als Rückstellungen für Zahlungsverpflichtungen aus Schäden, die eingetreten, aber noch nicht abgewickelt sind, in der Regel den größten versicherungstechnischen Passivposten in der Bilanz des Versicherers dar. Vor diesem Hintergrund ist die Bestimmung und Bewertung von Schadenrückstellungen, die auch als Schadenreserven bezeichnet werden, bei jedem Schaden– und Unfallversicherer von erheblicher wirtschaftlicher Bedeutung. Die Anwendung aktuariell basierter Verfahren zur Schadenreservierung ist daher unerlässlich.

Im vorliegenden Handbuch werden die wichtigsten Aspekte der aktuariellen Bestimmung und Bewertung von Schadenreserven dargestellt. Dabei werden neben den verfahrenstechnischen Gesichtspunkten auch anwendungsorientierte Problemstellungen behandelt.

Einen wesentlichen Bestandteil des Handbuchs bilden die eigentlichen Verfahren zur Schadenreservierung. In den einzelnen Beiträgen werden neben einer detaillierten Darstellung der Verfahren auch deren Eigenschaften in praktischen Anwendungssituationen anhand von einfachen Beispielen diskutiert.

Die Verfahren zur Schadenreservierung und ihre Eigenschaften können nur auf der Grundlage stochastischer Modelle verstanden werden, die die Erzeugung der Daten beschreiben und Annahmen über das Abwicklungsverhalten ausdrücken. In den Beiträgen über Verfahren werden daher auch stochastische Modelle betrachtet, durch die das betreffende Verfahren begründet werden kann. Daneben gibt es eine Reihe von Beiträgen, in denen ein stochastisches

Modell im Vordergrund steht und ein Verfahren zur Schadenreservierung aus klassischen Prinzipien der Mathematischen Statistik abgeleitet wird.

Während einfache Modelle vorwiegend dem Verständnis und der Begründung eines Verfahrens zur Schadenreservierung dienen, bieten komplexere Modelle die Möglichkeit, über die Konstruktion eines Reserveschätzers hinaus auch Aussagen über den Schätzfehler zu gewinnen oder Quantile der Verteilung des Reserveschätzers zu bestimmen. Dieser Aspekt wird insbesondere unter den aktuellen Entwicklungen im Rahmen der internationalen Rechnungslegung mit der Methodik des Best Estimate und der Verwendung von Sicherheitszuschlägen stark an Bedeutung gewinnen. In diesem Zusammenhang steht auch ein Beitrag über die Monte–Carlo Simulation von Schadenreserven, die es ermöglicht, die Eigenschaften von Reserveschätzern in komplexeren Modellen zu untersuchen.

In den praxisorientierten Beiträgen werden sparten– und rückversicherungsspezifische Aspekte sowie Fragen der Bilanzierung und Rechnungslegung sowie des aktuariellen Controllings behandelt.

Das vorliegende Handbuch erhebt nicht den Anspruch einer umfassenden und vollständigen Darstellung aller Aspekte der Schadenreservierung. Der Leser soll vielmehr mit dem Handbuch die Möglichkeit erhalten, sich einen Überblick über die wesentlichen aktuariellen Verfahren zur Schadenreservierung zu verschaffen und dabei sowohl die zugrunde liegenden stochastischen Modelle wie auch die praxisrelevanten Aspekte der Schadenreservierung zu verstehen.

Mit der Schadenreservierung als einem der wichtigsten Teilgebiete der Schadenversicherungsmathematik richtet sich das vorliegende Handbuch gleichermaßen an Aktuare in der Praxis und an Studierende und Lehrende an Hochschulen.

Unser herzlicher Dank gilt allen Autoren für die Bereitschaft, ihre Kompetenz durch die Mitwirkung an diesem Handbuch weiterzugeben und auf diese Weise eine Darstellung unterschiedlichster theoretischer und praktischer Aspekte der Schadenreservierung zu ermöglichen.

Auf dem Weg von den einzelnen Beiträgen zu einer druckfertigen Fassung des Handbuchs haben wir wertvolle Unterstützung erhalten:

- Kathrin Kloberdanz hat das gesamte Manuskript sorgfältig durchgesehen und die numerischen Beispiele nachgerechnet.
- Christiane Weber hat die Graphiken gestaltet und die Verwendung von LaTeX unterstützt.
- Mathias Zocher hat die mathematischen Darstellungen überprüft.

Auch ihnen gilt unser herzlicher Dank.

Dortmund und Dresden, Michael Radtke
im Mai 2004 Klaus D. Schmidt

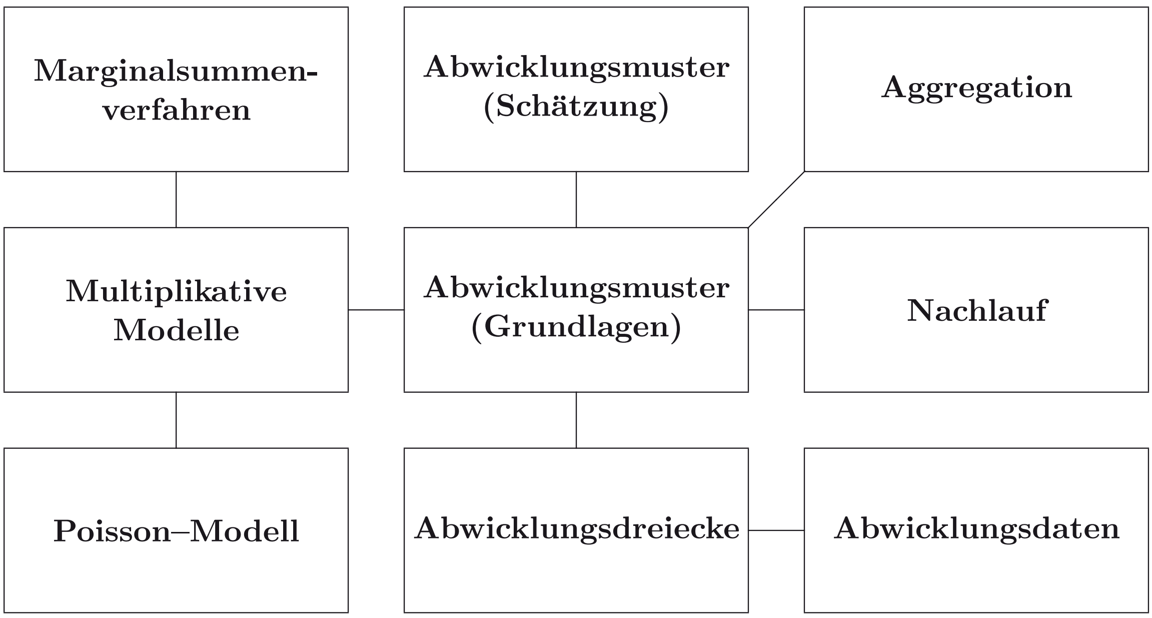
Lesehinweise

Die einzelnen Beiträge des Handbuchs sind weitgehend eigenständig. Dennoch gibt es zahlreiche Querverbindungen zwischen den Beiträgen, und diese Querverbindungen können durch die Stichworte am Ende der Beiträge und durch das Sachverzeichnis erschlossen werden.

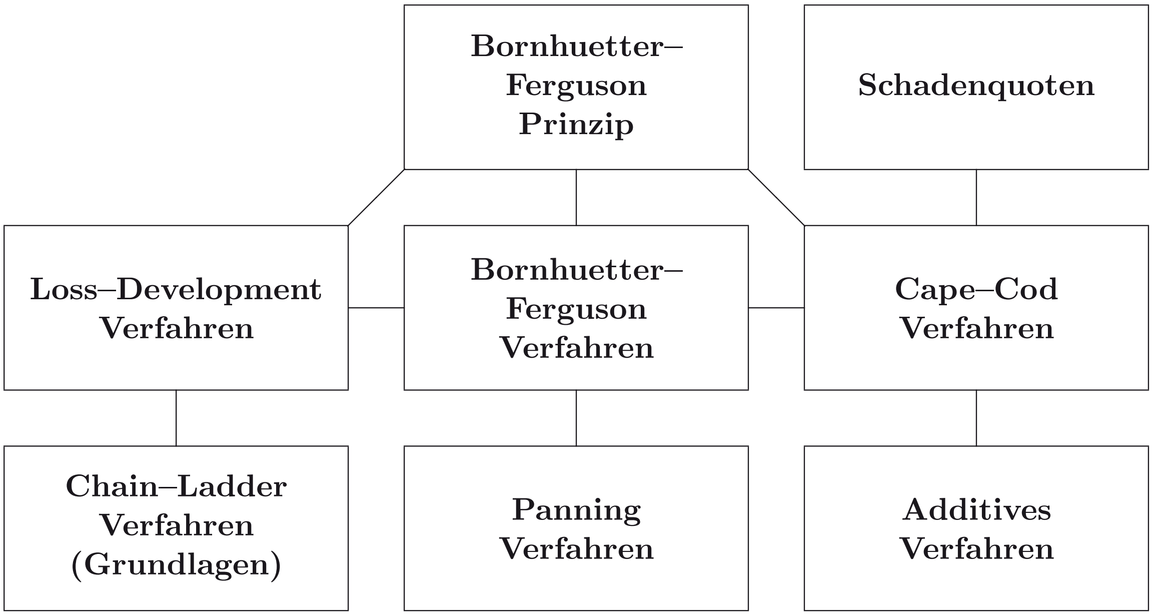
Neben dem selektiven Studium einzelner Beiträge bietet das Handbuch auch die Möglichkeit, sich bestimmte Aspekte der Schadenreservierung systematisch zu erarbeiten.

Im Hinblick auf die aktuarielle Praxis sind viele Beiträge an Verfahren der Schadenreservierung orientiert. Dennoch besteht eine enge Beziehung zwischen Verfahren, stochastischen Modellen und allgemeinen statistischen Prinzipien der Prognose: Viele Verfahren können durch die Annahme begründet werden, dass ein Abwicklungsmuster vorliegt, und bei einigen Verfahren besitzen die Prädiktoren sogar eine Optimalitätseigenschaft, da sie mit den Gauss–Markov Prädiktoren in einem geeigneten linearen Modell übereinstimmen.

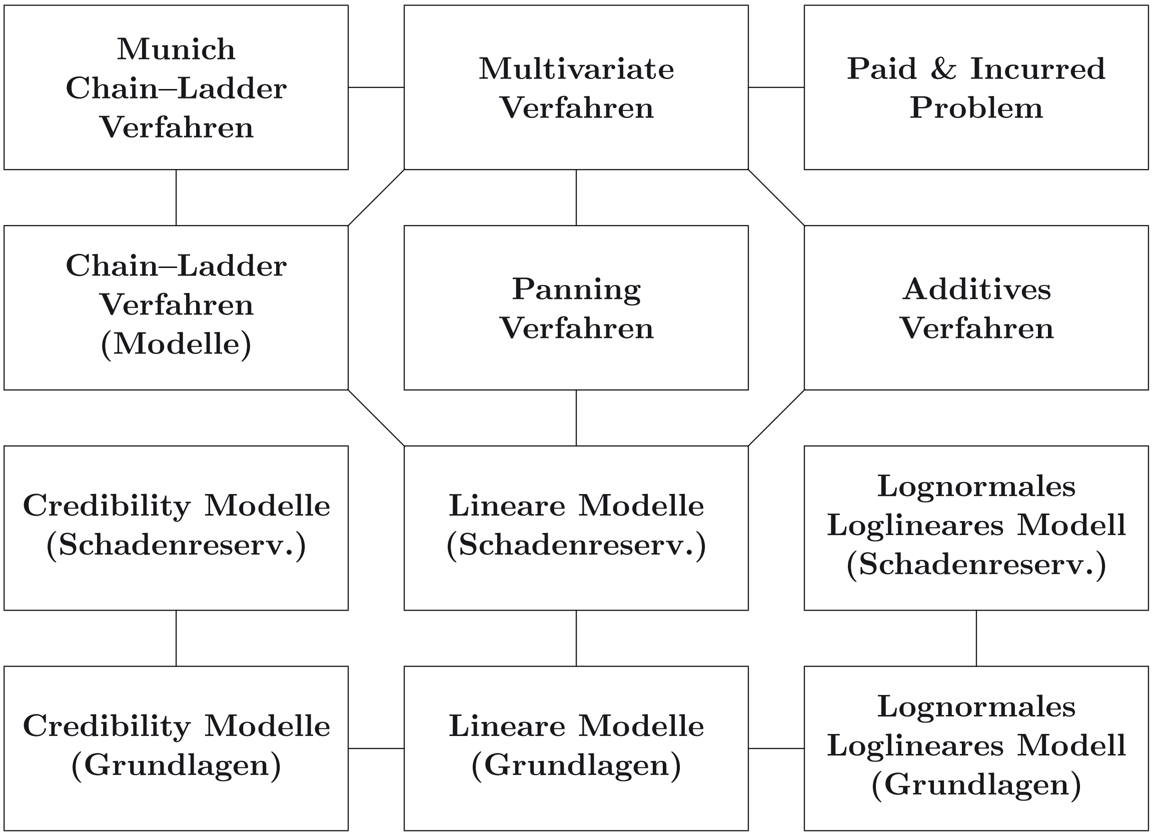
Als Grundlage für einen systematischen Zugang zu Verfahren und Modellen der Schadenreservierung und für die verwendete Notation sind insbesondere die Beiträge *Abwicklungsdaten* und *Abwicklungsdreiecke* sowie *Abwicklungsmuster* (*Grundlagen*) und *Abwicklungsmuster* (*Schätzung*) geeignet:



Eine größere Gruppe von Beiträgen behandelt die wichtigsten Verfahren der Schadenreservierung, die unter dem *Bornhuetter–Ferguson Prinzip* zusammengefasst und variiert werden können:



Einige dieser Verfahren können auch durch ein lineares Modell begründet und auf den multivariaten Fall erweitert werden:



Natürlich gibt es viele andere Möglichkeiten, sich die Vielfalt der Verfahren und Modelle der Schadenreservierung zu erschließen. Hier bieten auch die weniger formalen Beiträge allgemeiner Natur einen günstigen Ausgangspunkt.

Die in der Schadenreservierung verwendeten Begriffe und Bezeichnungen sind keineswegs einheitlich. Wir haben uns mit den Autoren darum bemüht, weitgehend einheitliche Begriffe und Bezeichnungen zu verwenden, um die vielen Querverbindungen zwischen den einzelnen Beiträgen deutlich werden zu lassen. Eine Orientierungshilfe bietet hier das Sachverzeichnis.

Wir haben uns auch darum bemüht, die wesentlichen Inhalte der Beiträge so wenig wie möglich mit Formalismen zu belasten. Beispielsweise wird bei einer Formel der Art

$$a \;=\; b/c$$

die Bedingung $c \neq 0$ stillschweigend vorausgesetzt und nicht ausdrücklich angegeben. Diese Bemerkung ist nicht ganz banal, denn viele Verfahren der Schadenreservierung verwenden Divisionen und sind daher nicht durchführbar, wenn die vorliegenden Daten auf eine Division durch Null führen.

Viele Beiträge enthalten numerische Beispiele. Da heutzutage die Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogrammes geläufiger ist als die eines Taschenrechners, haben wir uns, abweichend von der ersten Auflage des Handbuchs, dafür entschieden, die ohne Rundung von Zwischenergebnissen berechneten Werte in gerundeter Form anzugeben; daher kann es vorkommen, dass beispielsweise die Summe gerundeter Werte nicht mit der gerundeten Summe übereinstimmt.

Berechnungen zu einigen Verfahren können auch mit Hilfe des *Dresden Loss Reserving Tools*

`http://www.math.tu-dresden.de/sto/schmidt/lossreserving/`

durchgeführt werden.

Für weiterführende Literaturhinweise verweisen wir auf *A Bibliography on Loss Reserving*:

`http://www.math.tu-dresden.de/sto/schmidt/dsvm/reserve.pdf`

Diese Bibliographie wird in unregelmäßigen Abständen ergänzt.

Inhaltsverzeichnis

Abwicklungsdaten

Von Michael Radtke

Für die Anwendung aktuarieller Reservierungsverfahren ist das Vorliegen einer validen und umfassenden Datenbasis eine grundlegende Voraussetzung und stellt damit einen zentralen Erfolgsfaktor dar. Die Erstellung einer fundierten Datenbasis nimmt daher in der Regel auch einen nicht unerheblichen Teil des Aufwandes bei einer Abwicklungsanalyse in Anspruch.

Bei der Entwicklung eines Datenkonzepts und der anschließenden Erstellung eines Datenhaushalts sind zahlreiche Aspekte zu berücksichtigen, insbesondere
– die Datenorganisation,
– die Datendefinition und
– die Datenaufbereitung,
die in diesem Beitrag behandelt werden.

Datenorganisation

Die Zielsetzung aktuarieller Reservierungsverfahren ist die Modellierung und die Prognose der Schadenabwicklung in der zeitlichen Dimension. Die zugrunde liegenden Daten sollten also die zeitliche Dimension im Sinne von Prozessdaten angemessen abbilden. Die Schadenabwicklung selbst wird dabei als ein stochastischer Prozess der betrachteten Zielgrößen verstanden.

Die bei einer Abwicklungsanalyse wichtigen zeitlichen Dimensionen der Zielgrößen sind
– das *Anfalljahr* (bzw. das *Zeichnungsjahr*),
– das *Abwicklungsjahr* und
– das *Kalenderjahr* (bzw. das *Geschäftsjahr*).
In einer Abwicklungsanalyse können diese zeitlichen Dimensionen in einem *Abwicklungsdreieck* gut dargestellt werden:

Beispiel. Wir bezeichnen mit $S_{i,k}$ die Summe aller Zahlungen für Schäden aus dem relativen Anfalljahr i, die spätestens im relativen Abwicklungsjahr k, und damit spätestens im relativen Kalenderjahr $i+k$, erfolgen. Wir erhalten das folgende Abwicklungsdreieck für Schadenstände:

Anfall–	**Abwicklungsjahr**								
jahr	0	1	$\dots$	k	$\dots$	$n-i$	$\dots$	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	$\dots$	$S_{0,k}$	$\dots$	$S_{0,n-i}$	$\dots$	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$\dots$	$S_{1,k}$	$\dots$	$S_{1,n-i}$	$\dots$	$S_{1,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	$\dots$	$S_{i,k}$	$\dots$	$S_{i,n-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	$\dots$	$S_{n-k,k}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,0}$								

Zu beachten ist, dass auf jeder der Diagonalen die Summe der Indizes der Schadenstände konstant ist. Das bedeutet, dass alle Schadenstände einer Diagonalen demselben Kalenderjahr angehören.

In der Praxis liegen die Abwicklungsdaten allerdings nicht immer in dieser strukturierten Form vor, sondern stehen oft als sequentielle aggregierte Datensätze oder als Einzeldatensätze aus einem operativen System zur Verfügung.

Beispiel. In diesem Beispiel wird für drei Verträge die Abwicklung in den ersten Abwicklungsjahren dargestellt. Für alle Größen wird die jährliche Veränderung angegeben. Für den ersten Vertrag wird zum Beispiel für das Anfalljahr 2000 im Jahr 2000 eine Schadenzahlung von 2934 geleistet und eine Reserve von 2176 gestellt; im Jahr 2001 wird für diesen Vertrag eine weitere Schadenzahlung von 1882 geleistet und die Reserve um 1754 reduziert.

VN Nr.	**Pol. Nr.**	**Sp.**	**Deck.**	**Anf.-jahr**	**Abw.-jahr**	**verdiente Prämie**	**Kosten**	**Schaden-zahlung**	**Schaden-reserve**	**Abr.-status**
10001	4001	F	3	2000	2000	4592	−1453	−2934	−2176	1
10001	4001	F	3	2000	2001	0	2	−1882	1754	1
10001	4001	F	3	2000	2002	0	0	0	0	1
10001	4001	F	3	2001	2001	4983	−1770	−117	−2232	1
10001	4001	F	3	2001	2002	0	3	−1169	1556	1
10002	4002	F	3	2000	2000	403	−123	−13	−156	1
10002	4002	F	3	2000	2001	−1	0	−45	−232	1
10002	4002	F	3	2000	2002	0	0	0	0	1
10002	4002	F	3	2001	2001	405	−123	−16	−71	1
10002	4002	F	3	2001	2002	0	0	0	71	1
10002	4003	F	3	2000	2000	2244	−1116	−251	−987	1
10002	4003	F	3	2000	2001	−34	0	−791	953	1
10002	4003	F	3	2000	2002	0	0	0	0	1
10002	4003	F	3	2001	2001	2359	−1209	−250	−837	1
10002	4003	F	3	2001	2002	0	0	0	0	1

Hier sind einzelne Schadensätze, die unterjährig gezahlt und gebucht wurden, bereits zu einem Stichtag am Ende des Abwicklungsjahres auf Vertragsebene aggregiert.

Bei der Validierung von Abwicklungsdaten ist der Zugriff auf Vertrags– und Schadensätze hilfreich. Der Einfluss von Großschäden auf die Abwicklung kann differenziert untersucht werden. Ebenso lassen sich die Effekte von Rückversicherung nur auf dieser Ebene umfassend analysieren, das heißt, es können Brutto– und Netto–Abwicklungsdreiecke erzeugt werden; dies gilt insbesondere für die *nichtproportionale Rückversicherung*.

Datendefinition

Im Rahmen von Abwicklungsanalysen kann eine Reihe von Zielgrößen in ihrer zeitlichen Entwicklung erfasst und mittels aktuarieller Verfahren untersucht werden.

Basisgrößen, die bei jeder Analyse betrachtet werden, sind
- die *Schadenzahlung*,
- die *Schadenreserve* (kurz: *Reserve*) und
- der resultierende *Schadenaufwand* (kurz: *Aufwand*).

Zusätzlich werden in der Regel auch *Prämien* und *Kosten* mit untersucht. Nur so lässt sich eine betriebswirtschaftliche Bewertung vornehmen.

Die eindeutige Definition dieser Zielgrößen ist von entscheidender Bedeutung. So müssen die Ertrags– und Aufwandsgrößen in ihrer zeitlichen Dimension und in ihrem Status eindeutig abgegrenzt und bestimmt sein. Zum Beispiel ist zu klären,
- ob es sich bei der Prämie um die gebuchte, die verrechnete oder die verdiente Prämie handelt,
- ob die Schadenzahlungen auch Regresse und Revenues beinhalten oder
- ob bei *Einzelfallreserven* unter gewissen Umständen *Pauschalansätze* zum Einsatz kommen.

Hier gibt es eine ganze Reihe weiterer Aspekte, die in konkreten Anwendungssituationen zu berücksichtigen sind.

Umfangreichere und detailliertere Analysen betrachten zusätzlich auch die *Schadenzahl* und *Schadendurchschnittsgrößen*. Hierzu benötigt man neben der Schadenzahl auch die Anzahl der Risiken bzw. der Verträge oder allgemeiner ein *Volumenmaß* wie zum Beispiel die Versicherungssumme oder in der *Haftpflicht* die Deckungssumme bzw. die Wagnismenge.

Beispiel. In der *Krankenhaushaftpflicht* würde dies bedeuten, dass neben der Prämieninformation auch die Anzahl der Betten und die Anzahl der Schäden zur Verfügung steht und im Rahmen einer Analyse die Abwicklung des Schadenaufwands pro Krankenhausbett und Schadenfall geschätzt werden kann.

Zusätzlich werden oft auch *relative Größen* in ihrer Abwicklung betrachtet. Geläufig sind *Normierungen*
– an der Prämie,
– am geschätzten Endschadenaufwand oder
– an der Schadenzahlung.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über mögliche relative Größen:

	Prämie P	**Endschadenaufwand** E	**Schadenzahlung** Z
Schadenzahlung Z	Zahlungsquote Z/P	Zahlungsanteil Z/E	
Schadenaufwand A	Aufwandsquote A/P	Aufwandsanteil A/E	Aufwands-/Zahlungsverhältnis A/Z
Schadenreserve R	Reservequote R/P	Reserveanteil R/E	Reserve-/Zahlungsverhältnis R/Z

Für alle diese relativen Größen kann wiederum ein Abwicklungsdreieck erstellt werden.

Für einige dieser relativen Größen kann zusätzlich eine Ableitung aus den aggregierten Basisgrößen vorgenommen werden: Bildet man zum Beispiel die Zahlungsanteile aus den über alle beobachtbaren Anfalljahre aggregierten Zahlungen und Endschadenaufwänden, so erhält man ein empirisches *Abwicklungsmuster* für Schadenzahlungen, das in Form einer *Abwicklungskurve* dargestellt werden kann.

Das Reserve/Zahlungsverhältnis wird häufig auch für die Kalenderjahre insgesamt über alle Anfalljahre ausgewiesen.

Datenaufbereitung

Eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendung aktuarieller Analyseverfahren ist die *Homogenität* der zugrunde liegenden Basisdaten. Im Rahmen der Datenaufbereitung muss diese über eine angemessene *Segmentierung* sichergestellt werden. Dabei werden über eine bestandsmäßige Abgrenzung der Schadendaten Segmente so gebildet, dass die Annahme einer einheitlichen Abwicklung der einzelnen Schäden gerechtfertigt erscheint. Übliche Segmentierungskriterien sind Sparten, Untersparten, Geschäftseinheiten, Regionen und Vertriebswege, und in der Rückversicherung zusätzlich Vertragsformen. Eine zu starke Segmentierung führt jedoch bei geringen Segmentgrößen zu einem sehr volatilen Abwicklungsverhalten mit entsprechenden Problemen bei der Anwendung der aktuariellen Schätzverfahren und zu sehr großen Konfidenzintervallen in stochastischen Modellen.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Datenaufbereitung ist die Datenvalidierung. Liegen die Abwicklungsdaten auf Einzelsatzbasis vor, können einzelne *Großschäden* bzw. Schäden mit einer nicht üblichen Abwicklung identifiziert und separat behandelt werden. Es kann jeweils entschieden werden, ob und wie sie in die anschließende aktuarielle Analyse integriert werden; beispielsweise können Kupierungen für einzelne Großschäden vorgenommen werden. Auch lässt sich, falls vorhanden, mit Hilfe von Größenklassenstatistiken vergleichbarer Segmente oder des Marktes ein Abgleich des Großschadenpotentials vornehmen. Ein unreflektiertes Entfernen der Großschäden stellt dagegen kein sinnvolles Vorgehen dar.

Schließlich stellt der Abgleich der individuellen Abwicklungsdaten und der Ergebnisse der aktuariellen Analyse mit allgemein verfügbaren Marktdaten auch im Sinne eines *Benchmarking* einen weiteren qualitätssichernden Schritt dar.

Hinweise

Stichworte: Abwicklungsdreiecke, Abwicklungsmuster (Grundlagen), Aggregation, Rückversicherung, Volumenmaße.

Abwicklungsdreiecke

Von Klaus D. Schmidt

In diesem Beitrag nehmen wir an, dass die *Geschäftsjahre* mit den *Kalenderjahren* übereinstimmen; wir sprechen daher kurz von *Jahren*.

Jeder Schaden hat eine Geschichte:
- Der Schaden entsteht in einem *Anfalljahr*.
- Der Schaden wird dem Versicherer gemeldet.
- Der Versicherer leistet erste Zahlungen und bildet für eventuell erforderliche weitere Zahlungen eine *Einzelfallreserve*.
- Der Schaden wird abschließend reguliert.

Die Regulierung eines einzelnen Schadens, und damit erst recht die Regulierung aller Schäden aus einem Anfalljahr, kann sich über mehrere *Abwicklungsjahre* erstrecken.

Die im Laufe der Abwicklung der Schäden eines Bestandes anfallenden *Abwicklungsdaten* können inhaltlich und formal unter verschiedenen Gesichtspunkten strukturiert werden. Im Hinblick auf die Bestimmung von Schadenreserven erweist es sich als vorteilhaft, die Abwicklungsdaten nach Anfalljahren und Abwicklungsjahren in der Form von *Abwicklungsdreiecken* darzustellen.

Ein Abwicklungsdreieck kann beispielsweise für jedes Anfalljahr und jedes Abwicklungsjahr
- die *Schadenzahl*, also die Zahl der gemeldeten Schäden,
- die *Schadenzahlung* oder
- den *Schadenaufwand*, also die Schadenzahlung zuzüglich der Einzelfallreserven,

darstellen.

Unter Umständen können mehrere Abwicklungsdreiecke erforderlich sein, um die Komplexität der Abwicklungsdaten in ausreichender Form darstellen zu können.

Zur Vereinfachung interpretieren wir die Daten eines Abwicklungsdreiecks in diesem Beitrag stets als Schadenzahlungen.

Beispiel. Die folgende Tabelle enthält die für Schäden aus den Anfalljahren 1995 bis 2000 in den einzelnen Abwicklungsjahren bis zum Ende des Jahres 2000 geleisteten Zahlungen:

Anfall–	**Abwicklungsjahr**					
jahr	1995	1996	1997	1998	1999	2000
1995	1001	854	568	565	347	148
1996		1113	990	671	648	422
1997			1265	1168	800	744
1998				1490	1383	1007
1999					1725	1536
2000						1889

Für Schäden aus dem Anfalljahr 1998 wurden also noch im selben Jahr 1490 und in den folgenden Abwicklungsjahren 1383 bzw. 1007 gezahlt.

Die Darstellung der Abwicklungsdaten wird etwas aussagekräftiger, wenn man zu einem *Abwicklungsdreieck* übergeht, in dem die Abwicklungsjahre nicht als Kalenderjahre, sondern als Verzögerungen in Bezug auf die Anfalljahre und damit als *relative Abwicklungsjahre* notiert werden:

Beispiel. Durch den Übergang zu relativen Abwicklungsjahren erhält man das folgende Abwicklungsdreieck:

Anfall–	**Abwicklungsjahr**					
jahr	0	1	2	3	4	5
1995	1001	854	568	565	347	148
1996	1113	990	671	648	422	
1997	1265	1168	800	744		
1998	1490	1383	1007			
1999	1725	1536				
2000	1889					

Die im Jahr 2000 für die Anfalljahre 1995 bis 2000 geleisteten Zahlungen sind jetzt auf der Hauptdiagonalen dargestellt.

Das Abwicklungsdreieck lässt erkennen, ob die geleisteten Zahlungen einen *Trend* in den Anfalljahren oder ein *Abwicklungsmuster* in den Abwicklungsjahren aufweisen. Aus dem Trend und dem Abwicklungsmuster ergeben sich erste Hinweise auf die Höhe der zukünftigen Zahlungen und damit auf die erforderliche *Schadenreserve*.

Es liegt nun nahe, und ist im Hinblick auf die mathematische Behandlung des Problems der Bestimmung von Schadenreserven von Vorteil, die Anfalljahre in der gleichen Weise wie die Abwicklungsjahre und damit als *relative Anfalljahre* zu notieren:

Beispiel. Durch den Übergang zu relativen Anfalljahren erhält man das folgende Abwicklungsdreieck:

Anfall–	**Abwicklungsjahr**					
jahr	0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	
2	1265	1168	800	744		
3	1490	1383	1007			
4	1725	1536				
5	1889					

Dieses Abwicklungsdreieck enthält die Zahlungen in den relativen Abwicklungsjahren für die relativen Anfalljahre.

Das letzte Abwicklungsdreieck bildet die Grundlage für alle weiteren Betrachtungen.

Abwicklungsdreiecke von Zufallsvariablen

Wir betrachten $n+1$ Anfalljahre und nehmen an, dass jeder Schaden entweder im Anfalljahr selbst oder in einem der folgenden n Kalenderjahre abschließend reguliert wird. Wir bezeichnen n als *Abwicklungsdauer*.

Wir betrachten ferner eine Familie $\{Z_{i,k}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}}$ von Zufallsvariablen und interpretieren $Z_{i,k}$ als Zahlung im (relativen) Abwicklungsjahr k für Schäden aus dem (relativen) Anfalljahr i; die Zahlung $Z_{i,k}$ wird damit im (*relativen*) *Kalenderjahr* $i+k$ geleistet. Wir bezeichnen die Zufallsvariablen $Z_{i,k}$ auch als *Zuwächse* und nehmen an, dass die Zuwächse für $i+k \leq n$ beobachtbar (aber noch nicht beobachtet) und für $i+k \geq n+1$ nicht beobachtbar sind.

Die Zuwächse werden in einem *Abwicklungsquadrat für Zuwächse* dargestellt:

Anfall–	**Abwicklungsjahr**								
jahr	0	1	$\dots$	k	$\dots$	$n-i$	$\dots$	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	$\dots$	$Z_{0,k}$	$\dots$	$Z_{0,n-i}$	$\dots$	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	$\dots$	$Z_{1,k}$	$\dots$	$Z_{1,n-i}$	$\dots$	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	$\dots$	$Z_{i,k}$	$\dots$	$Z_{i,n-i}$	$\dots$	$Z_{i,n-1}$	$Z_{i,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	$\dots$	$Z_{n-k,k}$	$\dots$	$Z_{n-k,n-i}$	$\dots$	$Z_{n-k,n-1}$	$Z_{n-k,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$	$\dots$	$Z_{n-1,k}$	$\dots$	$Z_{n-1,n-i}$	$\dots$	$Z_{n-1,n-1}$	$Z_{n-1,n}$
n	$Z_{n,0}$	$Z_{n,1}$	$\dots$	$Z_{n,k}$	$\dots$	$Z_{n,n-i}$	$\dots$	$Z_{n,n-1}$	$Z_{n,n}$

Die beobachtbaren Zuwächse bilden ein *Abwicklungsdreieck für Zuwächse*:

Anfall–jahr	**Abwicklungsjahr** 0	1	...	k	...	$n-i$	...	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	...	$Z_{0,k}$	...	$Z_{0,n-i}$	...	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	...	$Z_{1,k}$	...	$Z_{1,n-i}$	...	$Z_{1,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	...	$Z_{i,k}$	...	$Z_{i,n-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	...	$Z_{n-k,k}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$							
n	$Z_{n,0}$								

Wir bezeichnen n auch als *aktuelles Kalenderjahr*.

Beispiel. Das Abwicklungsdreieck

Anfall–jahr	**Abwicklungsjahr** 0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	
2	1265	1168	800	744		
3	1490	1383	1007			
4	1725	1536				
5	1889					

ist eine Realisation des Abwicklungsdreiecks für Zuwächse mit $n = 5$.

Neben den Zuwächsen $Z_{i,k}$ betrachten wir auch die *Schadenstände*

$$S_{i,k} \quad := \quad \sum_{l=0}^{k} Z_{i,l}$$

Für die Zuwächse gilt dann

$$Z_{i,k} \quad = \quad \begin{cases} S_{i,0} & \text{falls } k = 0 \\ S_{i,k} - S_{i,k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir interpretieren $S_{i,k}$ als Summe aller Zahlungen in den Abwicklungsjahren $l \in \{0, 1, \dots, k\}$ für Schäden aus dem Anfalljahr i; diese Zahlungen werden also in den Kalenderjahren $p \in \{i, i+1, \dots, i+k\}$ geleistet. Entsprechend unserer Annahme über die Zuwächse sind auch die Schadenstände $S_{i,k}$ für $i + k \leq n$ beobachtbar und für $i + k \geq n + 1$ nicht beobachtbar.

Die Schadenstände werden in einem *Abwicklungsquadrat für Schadenstände* dargestellt:

Anfall–jahr	**Abwicklungsjahr** 0	1	…	k	…	$n-i$	…	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	…	$S_{0,k}$	…	$S_{0,n-i}$	…	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	…	$S_{1,k}$	…	$S_{1,n-i}$	…	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	…	$S_{i,k}$	…	$S_{i,n-i}$	…	$S_{i,n-1}$	$S_{i,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	…	$S_{n-k,k}$	…	$S_{n-k,n-i}$	…	$S_{n-k,n-1}$	$S_{n-k,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$	…	$S_{n-1,k}$	…	$S_{n-1,n-i}$	…	$S_{n-1,n-1}$	$S_{n-1,n}$
n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	…	$S_{n,k}$	…	$S_{n,n-i}$	…	$S_{n,n-1}$	$S_{n,n}$

Die beobachtbaren Schadenstände bilden ein *Abwicklungsdreieck für Schadenstände*:

Anfall–jahr	**Abwicklungsjahr** 0	1	…	k	…	$n-i$	…	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	…	$S_{0,k}$	…	$S_{0,n-i}$	…	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	…	$S_{1,k}$	…	$S_{1,n-i}$	…	$S_{1,n-1}$	
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮			
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	…	$S_{i,k}$	…	$S_{i,n-i}$			
⋮	⋮	⋮		⋮					
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	…	$S_{n-k,k}$					
⋮	⋮	⋮							
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,0}$								

Wir bezeichnen

$$S_{i,n-i}$$

als *aktuellen Schadenstand* und

$$S_{i,n}$$

als *Endschadenstand* des Anfalljahres i.

Beispiel. Das Abwicklungsdreieck

Anfall–jahr	**Abwicklungsjahr** 0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	3261				
5	1889					

ist eine Realisation des Abwicklungsdreiecks für Schadenstände mit $n = 5$.

Reserven

Die über alle nicht beobachtbaren Zuwächse gebildete Summe

$$R := \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=n-l+1}^{n} Z_{j,l} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=n-j+1}^{n} Z_{j,l}$$

wird als (erforderliche) *Gesamtreserve* bezeichnet. Die Gesamtreserve kann nach Anfalljahren oder nach Kalenderjahren aufgeteilt werden:

– Für $i \in \{1,\ldots,n\}$ bezeichnen wir die Summe

$$R_i := \sum_{l=n-i+1}^{n} Z_{i,l}$$

als *Anfalljahrreserve* für das Anfalljahr i.

– Für $c \in \{n+1,\ldots,2n\}$ bezeichnen wir die Summe

$$R_{(c)} := \sum_{l=c-n}^{n} Z_{c-l,l}$$

als *Kalenderjahrreserve* für das Kalenderjahr c.

Es gilt

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{c=n+1}^{2n} R_{(c)}$$

Da die Reserven nicht beobachtbar sind, müssen für sie *Prädiktoren* bestimmt werden.

Jede Reserve ist eine Summe von nicht beobachtbaren Zuwächsen. Daher können Prädiktoren für alle Reserven auf systematische Weise dadurch gewonnen werden, dass man zunächst für jeden nicht beobachtbaren Zuwachs $Z_{i,k}$ eine beobachtbare Zufallsvariable

$$\widehat{Z}_{i,k}$$

konstruiert, die als Prädiktor des Zuwachses verstanden wird, und sodann die Summen

$$\widehat{R} := \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=n-l+1}^{n} \widehat{Z}_{j,l}$$

$$\widehat{R}_i := \sum_{l=n-i+1}^{n} \widehat{Z}_{i,l}$$

$$\widehat{R}_{(c)} := \sum_{l=c-n}^{n} \widehat{Z}_{c-l,l}$$

als Prädiktoren der entsprechenden Reserven verwendet.

Prädiktoren für die nicht beobachtbaren Zuwächse können insbesondere dadurch gewonnen werden, dass man zunächst für jeden nicht beobachtbaren Schadenstand $S_{i,k}$ eine beobachtbare Zufallsvariable

$$\widehat{S}_{i,k}$$

konstruiert, die als Prädiktor des Schadenstandes verstanden wird, und sodann die Differenz

$$\widehat{Z}_{i,k} \quad := \quad \begin{cases} \widehat{S}_{i,n-i+1} - S_{i,n-i} & \text{falls } k = n-i+1 \\ \widehat{S}_{i,k} - \widehat{S}_{i,k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

als Prädiktor des nicht beobachtbaren Zuwachses $Z_{i,k}$ verwendet. Außerdem erhält man mit

$$\widehat{R}_i \quad := \quad \widehat{S}_{i,n} - S_{i,n-i}$$

die Prädiktoren der Anfalljahrreserven bereits aus den Prädiktoren der Endschadenstände; andererseits können Prädiktoren der Endschadenstände mit

$$\widehat{S}_{i,n} \quad := \quad S_{i,n-i} + \sum_{l=n-i+1}^{n} \widehat{Z}_{i,l}$$

aus Prädiktoren der nicht beobachtbaren Zuwächse gewonnen werden.

Schätzer und Prädiktoren

Die beobachtbaren Zufallsvariablen, die zur Prognose von nicht beobachtbaren Zuwächsen oder Schadenständen verwendet werden, werden je nach Betrachtungsweise als Schätzer oder als Prädiktoren bezeichnet.

Allgemein ist ein *Schätzer* eine beobachtbare Zufallsvariable, die als Ersatz für einen unbekannten Parameter der Verteilung einer Zufallsvariablen dient; dagegen ist ein *Prädiktor* eine beobachtbare Zufallsvariable, die als Ersatz für eine nicht beobachtbare Zufallsvariable dient.

Eine beobachtbare Zufallsvariable $\widehat{Z}_{i,k}$ kann daher gleichzeitig als Schätzer für den *erwarteten zukünftigen Zuwachs* $E[Z_{i,k}]$ oder als Prädiktor für den Zuwachs $Z_{i,k}$ mit $i+k \geq n+1$ aufgefasst werden.

Ebenso kann eine beobachtbare Zufallsvariable $\widehat{S}_{i,k}$ gleichzeitig als Schätzer für den *erwarteten zukünftigen Schadenstand* $E[S_{i,k}]$ oder als Prädiktor für den Schadenstand $S_{i,k}$ mit $i+k \geq n+1$ aufgefasst werden. Insbesondere ist jeder Schätzer für den *erwarteten Endschadenstand* $E[S_{i,n}]$ gleichzeitig ein Prädiktor für den Endschadenstand $S_{i,n}$.

Schätzfehler und Prognosefehler

Neben der Schätzung eines unbekannten Parameters ist grundsätzlich auch die Genauigkeit der Schätzung von Interesse. Dabei wird die Qualität eines Schätzers meistens durch den *erwarteten quadratischen Schätzfehler* gemessen.

Analog ist neben der Prognose einer nicht beobachtbaren Zufallsvariablen auch die Genauigkeit der Prognose von Interesse. Dabei wird die Qualität eines Prädiktors meistens durch den *erwarteten quadratischen Prognosefehler* gemessen.

Der erwartete quadratische Schätzfehler bzw. der erwartete quadratische Prognosefehler muss im Allgemeinen ebenfalls geschätzt werden.

Hinweise

Stichworte: Abwicklungsdaten, Abwicklungsmuster (Grundlagen).

Abwicklungsmuster (Grundlagen)

Von Klaus D. Schmidt

Die meisten Modelle und Verfahren der Schadenreservierung beruhen auf der Vorstellung, dass jeder Schaden entweder im Anfalljahr selbst oder in einem der folgenden n Kalenderjahre abschließend reguliert wird und dass außerdem die Abwicklung der Schäden eines Anfalljahres über die Abwicklungsjahre hinweg nach einem für alle Anfalljahre identischen *Abwicklungsmuster* erfolgt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Abwicklungsmuster zu definieren, aber alle beruhen auf dem Prinzip der näherungsweisen Proportionalität der Anfalljahre. Wir betrachten in diesem Beitrag zunächst die äquivalenten Abwicklungsmuster für Anteile, Quoten und Faktoren und sodann das Abwicklungsmuster nach Panning und das von bekannten Volumenmaßen der Anfalljahre abhängige Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse.

Abwicklungsmuster für Anteile

Wir betrachten das Abwicklungsquadrat für Zuwächse:

Anfall–	**Abwicklungsjahr**								
jahr	0	1	$\dots$	k	$\dots$	$n-i$	$\dots$	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	$\dots$	$Z_{0,k}$	$\dots$	$Z_{0,n-i}$	$\dots$	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	$\dots$	$Z_{1,k}$	$\dots$	$Z_{1,n-i}$	$\dots$	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	$\dots$	$Z_{i,k}$	$\dots$	$Z_{i,n-i}$	$\dots$	$Z_{i,n-1}$	$Z_{i,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	$\dots$	$Z_{n-k,k}$	$\dots$	$Z_{n-k,n-i}$	$\dots$	$Z_{n-k,n-1}$	$Z_{n-k,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$	$\dots$	$Z_{n-1,k}$	$\dots$	$Z_{n-1,n-i}$	$\dots$	$Z_{n-1,n-1}$	$Z_{n-1,n}$
n	$Z_{n,0}$	$Z_{n,1}$	$\dots$	$Z_{n,k}$	$\dots$	$Z_{n,n-i}$	$\dots$	$Z_{n,n-1}$	$Z_{n,n}$

Für $i,k \in \{0,1,\dots,n\}$ sei

$$S_{i,k} \quad := \quad \sum_{l=0}^{k} Z_{i,l}$$

der Schadenstand aus Anfalljahr i in Abwicklungsjahr k.

Beim Abwicklungsmuster für Anteile werden die erwarteten Zuwächse mit den erwarteten Endschadenständen verglichen:

Abwicklungsmuster für Anteile: *Es gibt Parameter* $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ *mit* $\sum_{l=0}^{n} \vartheta_l = 1$ *derart, dass für alle* $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *und für alle* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$
$$\frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]} = \vartheta_k$$
gilt.

Beim Abwicklungsmuster für Anteile hängt also der *Abwicklungsanteil* ϑ_k des erwarteten Zuwachses $E[Z_{i,k}]$ am erwarteten Endschadenstand $E[S_{i,n}]$ nur vom Abwicklungsjahr k, nicht aber vom Anfalljahr i ab.

Abwicklungsmuster für Quoten

Wir betrachten das Abwicklungsquadrat für Schadenstände:

Anfall–	**Abwicklungsjahr**								
jahr	0	1	...	k	...	$n-i$	...	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	...	$S_{0,k}$	...	$S_{0,n-i}$	...	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	...	$S_{1,k}$	...	$S_{1,n-i}$	...	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$	...	$S_{i,n-i}$	...	$S_{i,n-1}$	$S_{i,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	...	$S_{n-k,k}$	...	$S_{n-k,n-i}$	...	$S_{n-k,n-1}$	$S_{n-k,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$	...	$S_{n-1,k}$	...	$S_{n-1,n-i}$	...	$S_{n-1,n-1}$	$S_{n-1,n}$
n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	...	$S_{n,k}$	...	$S_{n,n-i}$	...	$S_{n,n-1}$	$S_{n,n}$

Beim Abwicklungsmuster für Quoten werden die erwarteten Schadenstände mit den erwarteten Endschadenständen verglichen:

Abwicklungsmuster für Quoten: *Es gibt Parameter* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *mit* $\gamma_n = 1$ *derart, dass für alle* $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *und für alle* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$
$$\frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]} = \gamma_k$$
gilt.

Beim Abwicklungsmuster für Quoten hängt also die *Abwicklungsquote* γ_k des erwarteten Schadenstandes $E[S_{i,k}]$ am erwarteten Endschadenstand $E[S_{i,n}]$ nur vom Abwicklungsjahr k, nicht aber vom Anfalljahr i ab.

Abwicklungsmuster für Faktoren

Beim Abwicklungsmuster für Faktoren werden die aufeinander folgenden erwarteten Schadenstände miteinander verglichen:

> **Abwicklungsmuster für Faktoren:** *Es gibt Parameter* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *derart, dass für alle* $k \in \{1, \dots, n\}$ *und für alle* $i \in \{0, 1, \dots, n\}$
>
> $$\frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]} \;=\; \varphi_k$$
>
> *gilt.*

Beim Abwicklungsmuster für Faktoren hängt also der *Abwicklungsfaktor* φ_k als Verhältnis zwischen den erwarteten Schadenständen $E[S_{i,k}]$ und $E[S_{i,k-1}]$ nur vom Abwicklungsjahr k, nicht aber vom Anfalljahr i ab.

Vergleich

Der folgende Satz zeigt, dass die Abwicklungsmuster für Anteile, Quoten und Faktoren gleichwertig sind:

Satz.

(1) *Sei* $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ *ein Abwicklungsmuster für Anteile und für alle* $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ *sei*

$$\gamma_k \;:=\; \sum_{l=0}^{k} \vartheta_l$$

Dann ist $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ *ein Abwicklungsmuster für Quoten.*

(2) *Sei* $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ *ein Abwicklungsmuster für Quoten und für alle* $k \in \{1, \dots, n\}$ *sei*

$$\varphi_k \;:=\; \gamma_k / \gamma_{k-1}$$

Dann ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *ein Abwicklungsmuster für Faktoren.*

(3) *Sei* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *ein Abwicklungsmuster für Faktoren und für alle* $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ *sei*

$$\gamma_k \;:=\; \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\varphi_l}$$

Dann ist $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ *ein Abwicklungsmuster für Quoten.*

(4) *Sei* $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ *ein Abwicklungsmuster für Quoten und für alle* $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ *sei*

$$\vartheta_k \;:=\; \begin{cases} \gamma_0 & \text{falls } k = 0 \\ \gamma_k - \gamma_{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ *ein Abwicklungsmuster für Anteile.*

Als Folgerung erhält man auch Beziehungen zwischen Abwicklungsmustern für Anteile und Abwicklungsmustern für Faktoren:

Folgerung.
(1) *Sei* $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ *ein Abwicklungsmuster für Anteile und für alle* $k \in \{1, \dots, n\}$ *sei*

$$\varphi_k := \frac{\sum_{l=0}^{k} \vartheta_l}{\sum_{l=0}^{k-1} \vartheta_l}$$

Dann ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *ein Abwicklungsmuster für Faktoren.*

(2) *Sei* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *ein Abwicklungsmuster für Faktoren und für alle* $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ *sei*

$$\vartheta_k := \begin{cases} \displaystyle\prod_{l=1}^{n} \frac{1}{\varphi_l} & \textit{falls } k = 0 \\ \displaystyle\prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\varphi_l} - \prod_{l=k}^{n} \frac{1}{\varphi_l} & \textit{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ *ein Abwicklungsmuster für Anteile.*

Mit der Annahme, dass eines, und damit jedes, der Abwicklungsmuster für Anteile, Quoten oder Faktoren vorliegt, wird eine Annahme an die gemeinsame Verteilung aller Zuwächse oder Schadenstände getroffen; es wird also angenommen, dass ein stochastisches Modell vorliegt. In allen drei Fällen ist das stochastische Modell besonders einfach, da es nur Annahmen über Beziehungen zwischen Erwartungswerten enthält.

Beispiel. Die drei Zeilen der folgenden Tabelle enthalten
– ein Abwicklungsmuster für Anteile bzw.
– ein Abwicklungsmuster für Quoten bzw.
– ein Abwicklungsmuster für Faktoren.

Jedes dieser Abwicklungsmuster bestimmt die beiden anderen Abwicklungsmuster. Außerdem ist zu beachten, dass aufgrund der Definitionen die Abwicklungsquote für das letzte Abwicklungsjahr gleich 1 ist und für das Abwicklungsjahr 0 kein Abwicklungsfaktor definiert ist.

	Abwicklungsjahr k			
	0	1	2	3
ϑ_k	0,400	0,240	0,160	0,200
γ_k	0,400	0,640	0,800	1
φ_k		1,600	1,250	1,250

In Anwendungen sind die Abwicklungsmuster nicht bekannt und müssen geschätzt werden.