

Jürgen Friedrich

Integration banachraumwertiger Funktionen: Bochner- und Birkhoff-Integration

Masterarbeit

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Copyright © 2013 Diplom.de
ISBN: 9783842840430

Jürgen Friedrich

Integration banachraumwertiger Funktionen: Bochner- und Birkhoff-Integration

Friedrich, Jürgen: Integration banachraumwertiger Funktionen: Bochner- und Birkhoff-Integration, Hamburg, Diplomica Verlag GmbH 2014

PDF-eBook-ISBN: 978-3-8428-4043-0

Herstellung: Diplomica Verlag GmbH, Hamburg, 2014

Zugl. FernUniversität in Hagen, Hagen, Deutschland, Masterarbeit, September 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die Informationen in diesem Werk wurden mit Sorgfalt erarbeitet. Dennoch können Fehler nicht vollständig ausgeschlossen werden und die Diplomica Verlag GmbH, die Autoren oder Übersetzer übernehmen keine juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für evtl. verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen.

Alle Rechte vorbehalten

© *Diplom.de*, Imprint der Diplomica Verlag GmbH
Hermannstal 119k, 22119 Hamburg
<http://www.diplom.de>, Hamburg 2014
Printed in Germany

Zusammenfassung

Für banachraumwertige Funktionen, welche auf einem Mengenring mit Prämaß definiert sind, wird eine gründliche einführende Darstellung der Bochner-Integration und der Birkhoff-Integration vorgestellt. Es wird gezeigt, dass es für weite Teile der Theorie nicht erforderlich ist von einer σ -Algebra im Definitionsbereich auszugehen. Die Bochner-Integration ist eine direkte Verallgemeinerung der Lebesgue-Integration für banachraumwertige Funktionen, wohingegen die Birkhoff-Integration als eine konsequent maßtheoretisch fundierte Verallgemeinerung der Einführung der Riemann-Integration über Riemann-Summen für banachraumwertige Funktionen betrachtet werden kann. Die Birkhoff-Integration wird in den drei Varianten endliche-, absolute- und unbedingte Integration beschrieben. Die verschiedenen Integrationsarten werden untereinander und mit der normalen Riemann-Integration verglichen. Der Haupttext wird ergänzt durch sehr umfangreich gehaltene Anlagenkapitel, in denen die themenspezifischen Grundlagen ausführlich zusammengestellt sind. Alle Sätze sind inklusive Beweise notiert, und es wurde Wert darauf gelegt, keine zu großen gedanklichen „Sprünge“ innerhalb der Argumentationsketten der Beweisniederschriften zu machen.

Danksagung

Mein Dank gilt in erster Linie meiner lieben Frau Bianca. Sie hat mir das Masterstudium ermöglicht und war immer verständnisvoll und aufmunternd an meiner Seite. Meinem Betreuer Prof. Dr. M. Felten danke ich dafür, dass ich zum Thema „Integration von banachraumwertigen Funktionen“ eine Masterarbeit schreiben durfte und so meine innere Motivation voll ausschöpfen konnte. Prof. Dr. M. Kersken sei gedankt für den Blick über den „mathematischen Tellerrand“, den ich im vorherigen Studiengang das eine oder andere Mal erhaschen konnte, wie z.B. bei der Einführung summierbarer Familien.

Erklärung des Verfassers

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen benutzt habe. Alle Zitate wurden als solche kenntlich gemacht.

(Jürgen Friedrich)

Inhaltsverzeichnis

1	Generelle Vereinbarungen und Bemerkungen	1
2	Einleitung	2
3	Bochner-Integration	7
3.1	Das abstrakte Bochner-Integral	7
3.2	Der Raum der Bochner-integrierbaren Funktionen	16
4	Birkhoff-Integration	28
4.1	Konvergente Mengenfolgen in Banachräumen	29
4.2	Unbedingte-, absolute- und endliche Birkhoff-Integrierbarkeit	37
5	Grenzwertsätze und Integration auf Teilmengen	47
5.1	Grenzwertsätze der Bochner-Integration	47
5.2	Bochner-Integration auf Teilmengen	56
5.3	Birkhoff-Integration auf einer Menge eines Mengenrings	58
5.4	Ein Grenzwertsatz der Birkhoff-Integration	60
6	Vergleich verschiedener Integrationsarten	65
6.1	Riemann-integrierbare Funktionen sind endlich Birkhoff-integrierbar	65
6.1.1	Beispiel für endlich Birkhoff-integrierbar aber nicht Riemann-integrierbar	66
6.1.2	Beispiel für Riemann-integrierbar aber nicht Bochner-integrierbar	67
6.2	Zusammenhang von Bochner- und Birkhoff-Integration	68
7	Das Birkhoff-Integral für Funktionen über einem Wahrscheinlichkeitsraum	71
8	Zusammenfassung und Ausblick	73
9	Anlagen	75
9.1	Einleitung zu den Anlagen	75
9.2	Vervollständigung von halbmetrischen- und halbnormierten Räumen	77
9.3	Konvergente Reihen und summierbare Familien in abelschen Gruppen	83
9.4	Grundlagen aus der abstrakten Maßtheorie	98
9.5	Rechnen mit Mengen in (normierten) $\mathbb{K}$ -Vektorräumen	109
9.6	Der Mengenring der Figuren im $\mathbb{R}^n$ und das Lebesguesche-Prämaß	117
9.7	Treppenfunktionen und Messbarkeitsbegriffe	120
	Literaturverzeichnis	130
	Symbolverzeichnis	132
	Index	134

1 Generelle Vereinbarungen und Bemerkungen

- In dieser Arbeit hat jede **Definition** und jeder **mathematische Satz** eine eindeutige sprachliche Bezeichnung. Im **Index** sind diese Bezeichnungen aufgelistet. Innerhalb des Dokuments wird ein behandelter Satz dadurch **referenziert**, dass man dessen Bezeichnung und dessen Seitenzahl in Klammern, in dieser Schriftform(Seitenzahl), angibt.
- Alle für diese Arbeit notwendigen **themenspezifischen Grundlagen** sind ausführlich in den **Anlagen** zusammengefasst. Die einzelnen Unterkapitel der Anlagen, insbesondere deren Relevanz im Bezug zum Haupttext der Masterarbeit, werden in der „**Einleitung zu den Anlagen**“ kurz vorgestellt. Um die Lesbarkeit der Arbeit zu verbessern, sind wichtige Definitionen des Anhangs im Haupttext an entsprechenden Stellen wiederholt.
- Im **Symbolverzeichnis** sind viele der in dieser Arbeit verwendeten Symbole aufgelistet und erklärt.
- Wenn R eine zweistellige Relation ist, dann sei $a, b R H$ eine Abkürzung für $a R H \wedge b R H$. Ein Beispiel ist: $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ bedeutet $\emptyset \neq A \subseteq X \wedge \emptyset \neq B \subseteq X$.
- Folgendes Beispiel sei exemplarisch für ähnliche Fälle erklärt:
Sei I eine Indexmenge:

$$\exists g \in G \forall \varepsilon > 0 \exists \text{endliches } I_0 \subseteq I \forall \text{endlichen } I_0 \subseteq J \subseteq I \left(\|g - \sum_{i \in J} g_i\| < \varepsilon \right).$$

Mit $\forall \text{endlichen } I_0 \subseteq J \subseteq I$ ist folgendes gemeint:

Da I bereit außerhalb des Ausdrucks eine Bedeutung als Indexmenge besitzt und I_0 durch den vorherigen Existenzquantor gebunden ist, bezieht sich das Wort **endlichen** auf das einzige hier im Kontext neue Symbol J . Auf diese Weise lässt sich die Darstellung oft wesentlich vereinfachen.

- Seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion und $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$ und $y \in Y$, dann soll gelten:
 - $f(M) := \{f(x) \mid x \in M\}$.
 - $f^{-1}(N) := \{x \in X \mid f(x) \in N\}$.
 - $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$
- Sei X eine Menge und G eine Gruppe und $f : X \rightarrow G$ eine Funktion und $M \subseteq X$, dann gilt:
 - $\mathcal{T}_f := \bigcup_{g \in f(X) \setminus \{0_G\}} f^{-1}(g)$ heißt der Träger von f .
 - $f_M : X \rightarrow G; x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in M \\ 0_G, & \text{falls } x \notin M \end{cases}$ heißt die Reduzierung von f auf M .
- Sei X eine Menge und V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, dann sei:

$\text{Abb}(X, V) := \{f : X \rightarrow V \mid f \text{ ist eine Abbildung}\}$ der $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Abbildungen von X in V bzgl. der punktweise definierten Addition und der punktweise definierten Multiplikation mit einem Skalar.
- Es sollen hier folgende Rechenregeln für ∞ gelten:
 - $+\infty + (+\infty) = +\infty, -\infty + (-\infty) = -\infty, \forall x \in \mathbb{R} (x + (+\infty) = +\infty \wedge x + (-\infty) = -\infty)$.
 - $\forall x \in \mathbb{R} (x > 0 \Rightarrow x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \wedge x < 0 \Rightarrow x \cdot (\pm\infty) = (\mp\infty))$.
 - $0 \cdot (\pm\infty) = 0, \frac{1}{\pm\infty} = 0, \frac{1}{0} = +\infty$.
 - $\forall x \in \mathbb{R} (-\infty < x < +\infty)$.
 - $\sup \emptyset := -\infty$.
- Sei $\emptyset \neq X$ eine Menge und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus X . Je nach Kontext wird $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow X; n \mapsto x_n$ oder/und als eine Teilmenge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ interpretiert.

2 Einleitung

Die Integrationstheorie ist ein zentraler Eckpfeiler der Analysis und aller auf dieser aufbauenden mathematischen Teildisziplinen. Nach Einführung des Riemann-Integrals im 19. Jahrhundert durch **B. Riemann** erfuhr die Analysis eine rasante Weiterentwicklung. Gerade der Ausbau der Funktionentheorie ist ohne einen klar definierten Integral-Begriff nicht ohne weiteres denkbar. Viele Beweise würden ohne Integrale unnötig lang und kompliziert. Einer Bemerkung im Kurs Funktionentheorie I der Fern-Universität Hagen zur Folge existiert bis heute kein gänzlich integralfreier Beweis für den Entwicklungssatz von Laurent. Trotz dieser Erfolge stellte sich das Riemann-Integral als nicht ausreichend für die moderne Fortentwicklung der Mathematik heraus. In der Riemannschen Integrationstheorie sind die Anforderungen an eine Funktionenfolge, deren Grenzfunktion integrierbar sein soll, relativ hoch. **H. Lebesgue** konnte Anfang des 20. Jahrhunderts mit der Entwicklung des Lebesgue-Integrals viele Nachteile des Riemann-Integrals beseitigen. Mit dem **Satz von der monotonen Konvergenz**(49) und dem **Satz von der majorisierten Konvergenz**(51) stehen nun „mächtige“ Werkzeuge zur Verfügung, um die Integrierbarkeit der Grenzfunktion einer Funktionenfolge zu untersuchen. Des Weiteren ist der Raum aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen bzgl. einer bestimmten Integralnorm ein vollständiger halbnormierter Raum. Dieser ist ein wichtiger „Basisraum“ in der Funktionalanalysis. Ein zusätzlicher zentraler Pluspunkt des Lebesgue-Integrals ist dessen verallgemeinerte Anwendbarkeit auf beliebige Maßräume im Definitionsbereich einer Funktion.

Im Zuge der Beschreibung von realen Problemen durch mathematische Modelle sind im 20. Jahrhundert immer mehr neue mathematische Teildisziplinen entstanden bzw. wurden axiomatisch begründet, wie z.B. die Zeitreihenanalyse und deren wahrscheinlichkeitstheoretischen Fundierung durch Stochastische Prozesse. Dabei stellte sich die Lebesguesche Integrationstheorie als äußerst nützlich heraus. Für manche Fragestellungen war das Lebesgue-Integral jedoch immer noch nicht allgemein genug, denn manche Funktionen besaßen einen Banachraum als Wertebereich. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurden viele verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt, wie man für vektorraumwertige Funktionen Integrale definieren kann. In dieser Arbeit sollen die **Bochner-Integration** und die **Birkhoff-Integration** für banachraumwertige Funktionen vorgestellt werden.

Die Bochner-Integration ist eine direkte Verallgemeinerung der Lebesgue-Integration und erbt damit fast alle Eigenschaften der Lebesgue-Integration, die sich nicht direkt auf die Ordnungsstruktur der Reellen Zahlen beziehen.

Die Birkhoff-Integration ist ein Weg die Grundidee der Riemann-Integration, nämlich das Bilden von „Riemann-Summen“ über Partitionen, auf banachraumwertige Funktionen, die auf einem beliebigen **σ -endlichen Maßraum** definiert sind, zu übertragen. Die Birkhoff-Integrierbarkeit tritt in den drei unterschiedlichen Ausprägungen **endliche-, absolute- und unbedingte Integrierbarkeit** auf. Der Unterschied liegt darin, ob man **endliche oder abzählbare Partitionen** des Definitionsbereichs einer Funktion betrachtet und wenn man abzählbare Partitionen betrachtet, ob dabei die **unbedingte- oder die absolute Konvergenz** der „Riemann-Summen“ verlangt wird.

Außerdem erläutern wir den Zusammenhang zwischen einem **verallgemeinerten Riemann-Integral**, dem Bochner-Integral und dem Birkhoff-Integral. Wie so oft, wenn man die Sphäre der Endlichdimensionalität verlässt, treten dabei neue „Phänomene“ auf. Zuvor äquivalente Eigenschaften müssen im Allgemeinen nicht mehr äquivalent sein, und Schlussfolgerungen können ihre Gültigkeit verlieren. So ist eine reellwertige Riemann-integrierbare Funktion immer auch Lebesgue-integrierbar, aber eine verallgemeinert Riemann-integrierbare Funktion muss nicht Bochner-integrierbar sein. Jedoch wird gezeigt, dass eine verallgemeinert- Riemann-integrierbare Funktion stets endlich Birkhoff-integrierbar ist. Allgemein gilt, wenn für zwei der hier betrachtet Integrationsarten für eine Funktion beide Integrale existieren, so sind die beiden Integralwerte identisch. Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Integrierbarkeiten ist folgende:

verallg. Riemann-int.	$\Rightarrow$	endlich Birkhoff-int.	$\Rightarrow$	absolut Birkhoff-int.	$\Rightarrow$	unbedingt Birkhoff-int.
				$\uparrow$		
				Bochner-int.		

Für σ -endliche σ -Algebren ergibt sich dadurch eine gänzlich neue Perspektive bei der Betrachtung des Integrals von Bochner-integrierbaren Funktionen.

Die Bochner-Integration ist eine der am häufigsten verwendeten vektorwertigen Integrationsarten. Dies ist sicherlich auch den besonders schönen Eigenschaften des Bochner-Integrals geschuldet. Das Birkhoff-Integral wurde, fast zur selben Zeit wie das Bochner-Integral, in den dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts entwickelt. Es führte aber lange Zeit nur ein Nischendasein in der Wahrnehmung der mathematischen Öffentlichkeit. Seit ca. 20 Jahren wird das Birkhoff-Integral wieder verstärkt untersucht. Doch eine systematische und ausführliche Darstellung der Birkhoff-Integration ist mir nicht bekannt. Die Paper, die dieses Integral behandeln, bieten keine systematische Einführung. Lediglich das Original-Paper [2] von Birkhoff beschreibt einen systematischen Zugang. Allerdings sind die dort geführten Beweise mehr oder weniger skizzenhaft.

Bei den meisten Abhandlungen über diese beiden Integrationsarten stellt man fest, dass von einer σ -Algebra mit Maß im Definitionsbereich der Funktionen ausgegangen wird. Dies erweckt den Eindruck, als wäre das eine notwendige Voraussetzung. In dieser Arbeit soll unter Anderem gezeigt werden, dass dem nicht so ist und oft eine **Mengenringstruktur mit Prämaß** ausreichend ist. Die Vorteile für diese Art des Zugangs sind:

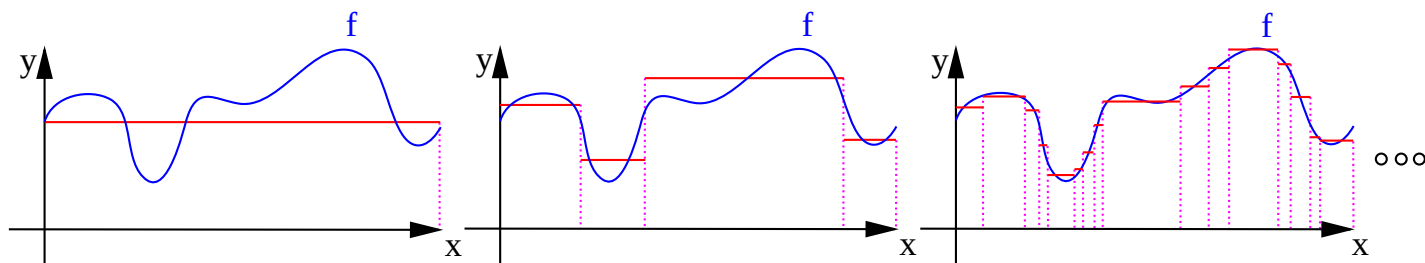
- Man erhält einen anschaulicheren Zugang zur Integration, siehe z.B. Mengenring der Figuren im $\mathbb{R}^n$.
- Wenn σ -Algebren nur dort eingesetzt werden, wo sie wirklich benötigt werden, lernen wir gerade die Vorteile einer σ -Algebra gegenüber einem Mengenring kennen.

Zielsetzungen dieser Masterarbeit

- Gründliche einführende Darstellung der Bochner- und Birkhoff-Integration mit ausführlichen und übersichtlichen Beweisen, die sich themenspezifisch nur auf die in den Anlagen bereitgestellten Definitionen und Sätze beziehen.
- Die Integrationstheorien sollen mit möglichst wenig Maßtheorie zugänglich sein, so dass wenn möglich als „Basistruktur“ im Definitionsbereich einer Funktion lediglich ein Mengenring mit Prämaß vorausgesetzt wird.
- Auch an den Banachraum, in den die Funktionen abbilden, sollen keine weiteren Anforderungen gestellt werden.
- Es soll keinerlei andere Integrationsart vorausgesetzt werden. Also insbesondere soll die Bochner-Integration nicht auf die Lebesgue-Integration zurückgeführt werden, sondern die Letztere nur als ein Spezialfall der Ersteren angesehen werden.
- Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Integrationsarten untereinander sollen aufgezeigt werden.

Es folgt nun eine anschauliche Gegenüberstellung der beiden Integrationsarten. Sei dazu $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Das Bochner-Integral



Der Flächeninhalt zwischen der blauen Funktion f und der x -Achse entspricht der anschaulichen Interpretation des Integrals dieser Funktion f . Die roten Funktionen bezeichnet man als Treppenfunktionen. Die Integrale der Treppenfunktionen sind relativ einfach zu bestimmen, nämlich als die Summe der Teilrechteckflächen unter den Treppenfunktionen. Wie man an der Grafik erkennen kann, nähert sich die Treppenfunktionsfläche und damit das Treppenfunktionsintegral dem Flächeninhalt unter der Funktion f und damit dem Integral von f an.

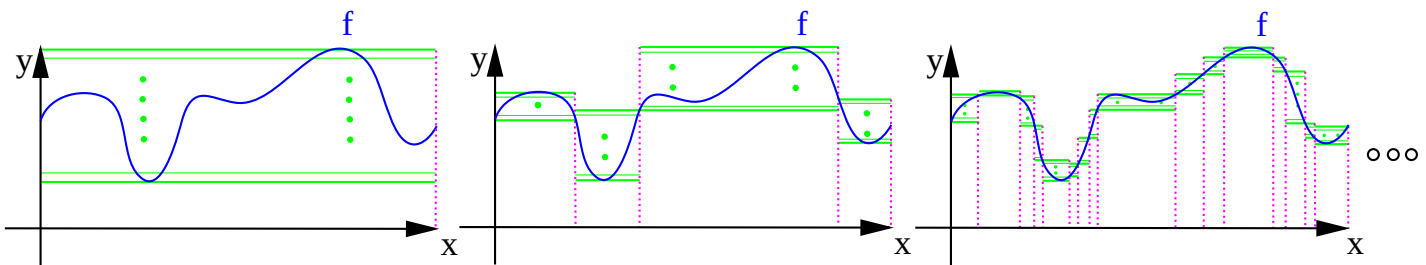
Man kann sich nun ganz allgemein fragen, wie muss eine Funktion f beschaffen sein, damit man ein Integral von f als konvergente Folge von Treppenfunktionsintegralen sinnvoll definieren kann?

Es wird sich zeigen, dass dafür zwei Anforderungen hinreichend sind:

- Die Funktion f ist punktwiser Grenzwert von einer Folge von Treppenfunktionen. Dabei darf es sogar eine Ausnahmenmenge geben auf der die Treppenfunktionsfolge nicht gegen f konvergieren muss, eine sogenannte Nullmenge.
- Damit es aber auch eine Treppenfunktionsfolge gibt, deren zugehörige Treppenfunktionsintegralfolge konvergiert, bedarf es einer weiteren Anforderung.

Die Menge aller Treppenfunktionen bildet bzgl. der punktwise definierten Addition und Multiplikation mit einem Skalar ein Vektorraum. Des Weiteren kann man für jede Treppenfunktion die abbildungstheoretische Verknüpfung dieser Treppenfunktion mit der Norm des Banachraums betrachten. Diese Verknüpfungen sind Treppenfunktionen nach $\mathbb{R}_0^+$. Die Integrale dieser „normierten Treppenfunktionen“ definieren gerade eine Halbnorm auf dem ursprünglichen Treppenfunktionsraum. Wenn nun für eine Treppenfunktionsfolge zusätzlich zu dem ersten Punkt noch weiter gilt, dass diese bzgl. der Halbnorm eine Cauchy-Folge darstellt, so konvergiert auch die zugehörige Treppenfunktionsintegralfolge. Weiter gilt, dass für alle Treppenfunktionsfolgen, die fast überall punktwise gegen f konvergieren und zudem Cauchy-Folgen darstellen, der Grenzwert der zugehörigen Treppenfunktionsintegralfolgen immer derselbe ist. Dieser Grenzwert ist dann das Bochner-Integral von f .

Das Birkhoff-Integral



Man kann das Integral von f aber auch ganz anders approximieren. Für eine Partition Π des Definitionsbereichs von f , bestehend aus Intervallen, bildet man für jede Menge $M \in \Pi$ folgende Menge $\mu(M) f(M) := \{ \mu(M) \cdot f(x) \mid x \in M \}$, wobei $\mu(M)$ gerade die Länge des Intervalls M ist. Im Anschluss bildet man noch folgende Menge:

$$\sum_{M \in \Pi} \mu(M) f(M) := \left\{ \sum_{M \in \Pi} w_M \mid \forall M \in \Pi (w_M \in \mu(M) f(M)) \right\}.$$

Diese Menge besteht so zu sagen aus allen „Riemann-Summen“ der Funktion f über der Partition Π . Die Grafik suggeriert, dass der Integralwert von f ein Element von $\sum_{M \in \Pi} \mu(M) f(M)$ sein muss. Diese Menge bildet also eine Menge von „Integralwertkandidaten“ für die Funktion f . Weiter ist zu erkennen, dass die Mengen der Integralwertkandidaten sich von links nach rechts zunehmend verengt. Außerdem ist eine Menge von Integralwertkandidaten eine Teilmenge einer beliebigen weiter links stehenden Menge von Integralwertkandidaten. Der Integralwert von f wird also für eine entsprechende Partitionsfolge $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das einzige Element der nachstehenden Menge sein:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sum_{M \in \Pi_n} \mu(M) f(M).$$

Aus der obigen Grafik geht auch hervor, dass wenn man für jedes $n \in \mathbb{N}$ zum konvexen- und dann zum topologischen Abschluss von $\sum_{M \in \Pi_n} \mu(M) f(M)$ übergeht, der Integralwert von f immer noch das einzige Element in folgender Menge ist:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\text{konv} \left(\sum_{M \in \Pi_n} \mu(M) f(M) \right)}.$$

Für nicht notwendig stetige Funktionen, die in einen allgemeinen Banachraum abbilden, erzeugen wir grundsätzlich den konvexen- und dann den topologischen Abschluss von $\sum_{M \in \Pi} \mu(M) f(M)$, um auf die Existenz eines Integralwerts im Durchschnitt schließen zu können, siehe Durchschnittssätze der Birkhoff-Integration.

3 Bochner-Integration:

Einführung in die Bochner-Integration inklusive den grundlegenden Eigenschaften des Integrals.

3.1 Das abstrakte Bochner-Integral:

Das Bochner-Integral wird für **Treppenfunktionen** definiert, und es werden die wichtigsten Eigenschaften dieses Integrals bewiesen. Anschließend erklären wir auf dem Raum aller Treppenfunktionen eine **Integral-Halbnorm**. Dieser halbnormierte $\mathbb{K}$ -Vektorraum wird unter Benutzung der **Vervollständigung eines halbnormierten Raums**(81) zum **abstrakten Bochnerraum** vervollständigt. Für die Elemente des abstrakten Bochnerraums definieren wir dann ein abstraktes Bochner-Integral und zeigen außerdem die für später relevanten Eigenschaften dieses Integrals.

3.2 Der Raum der Bochner-integrierbaren Funktionen:

Hier wird das eigentliche Bochner-Integral für banachraumwertige Funktionen definiert. Wir werden im **Fundamentalmonomorphismus der Bochner-Integration**(23) die lineare und injektive Abbildung $\mathfrak{L}\mathfrak{b}$ zwischen einem Quotientenraum des abstrakten Bochnerraums und einem Quotientenraum des Vektorraums aller Abbildungen konstruieren und mit deren Hilfe das Bochner-Integral auf Abbildungen übertragen. Durch die Anwendung der Abbildung $\mathfrak{L}\mathfrak{b}$ leiten wir in den nachfolgenden beiden Sätzen die grundlegenden Eigenschaften des Bochner-Integrals her.

4 Birkhoff-Integration:

Einführung in die Birkhoff-Integration inklusive den grundlegenden Eigenschaften des Integrals.

4.1 Konvergente Mengenfolgen in Banachräumen:

Unter Verwendung der Anlagenkapitel „**Konvergente Reihen und summierbare Familien**“ und „**Rechnen mit Mengen in $\mathbb{K}$ -Vektorräumen**“ definieren wir konvergente Mengenfolgen in Banachräumen und führen in das Rechnen mit konvergenten Mengenfolgen ein. Dieses Kapitel ist eine technische Vorbereitung für die unbedingte- und die absolute Birkhoff-Integration. Das **Verfeinerungstheorem für unbedingt konvergente Mengenfolgen**(34) wird durch seine Anwendung im **Inklusionssatz für Integralbereiche I**(39) für die Definition des unbedingten bzw. absoluten Birkhoff-Integrals benötigt.

4.2 Unbedingte-, absolute- und endliche Birkhoff-Integrierbarkeit:

In diesem Kapitel wird das Birkhoff-Integral in seinen drei Ausprägungen -unbedingt, absolut und endlich- beschrieben. Dabei werden die Theorien der unbedingten Birkhoff-Integrierbarkeit und der endlichen Birkhoff-Integrierbarkeit parallel entwickelt. In Bemerkungen erläutern wir, wie die entsprechenden Aussagen für die absolute Birkhoff-Integrierbarkeit aus denen der unbedingten Birkhoff-Integrierbarkeit zu gewinnen sind.

Für die unbedingte bzw. absolute Birkhoff-Integrierbarkeit benötigen wir bestimmte **abzählbare Partitionen** des Definitionsbereichs, wohingegen man in der endlichen Birkhoff-Integrierbarkeit ausschließlich bestimmte **endliche Partitionen** heranzieht. Wenn für eine abzählbare Partition jede formale mögliche „**Riemann-Summe**“ einer Funktion f auch existiert, d.h. unbedingt bzw. absolut konvergent ist, dann nennt man f **unbedingt bzw. absolut konvergent bzgl. dieser Partition**. Für endliche Partitionen ist eine entsprechende Begriffsbildung nicht notwendig, da endliche Summen immer existieren. Bildet man den topologischen Abschluss vom konvexen Abschluss von der Menge aller „Riemann-Summen“ einer Funktion f für eine entsprechende Partition, dann nennt man diese neu entstandene Menge den **Integralbereich** von f unter dieser Partition. Gibt es eine Folge von Partitionen, so dass die zugehörige Folge der **Durchmesser** der Integralbereiche gegen 0 konvergiert, dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element im Durchschnitt all dieser Integralbereiche, siehe **Durchschnittssatz für unbedingt Birkhoff-integrierbare Funktionen**(40) und **Durchschnittssatz für endlich Birkhoff-integrierbare Funktionen**(41). Dieses eindeutige Element wird das unbedingte- bzw. absolute- bzw. endliche Birkhoff-Integral genannt.

In den darauf folgenden Sätzen führen wir die grundlegenden Eigenschaften der Birkhoff-Integrale vor und stellen zudem die Beziehungen zwischen den drei verschiedenen Birkhoff-Integrierbarkeiten dar.

5 Grenzwertsätze und Integration auf Teilmengen:

Dieses Kapitel beinhaltet wichtige Aussagen über das Verhalten von **Funktionenfolgen** bzgl. der Bochner-Integration bzw. der Birkhoff-Integration. Des Weiteren diskutieren wir auch die **Integration über Teilmengen**.

5.1 Grenzwertsätze der Bochner-Integration:

Wir behandeln hier unter Anderem den zentralen Grenzwertsatz der Bochner-Integration, nämlich den Satz von der majorisierten Konvergenz(51). Darüber hinaus machen wir in diesem Kapitel das erste mal Gebrauch von einer σ -Algebra und zwar in der Charakterisierung der Bochner-Integrabilität auf einer σ -Algebra(52) und in dem Satz Bochner-integrable Funktionen als Grenzwert abzähl. Treppenfunktionen(54), welcher später beim Vergleich von Bochner-Integration und Birkhoff-Integration im Satz Bochner-integrable Funktionen sind absolut Birkhoff-integrabel I(68) verwendet wird.

5.2 Bochner-Integration auf Teilmengen:

Wir erklären das Bochner-Integral für Teilmengen und beweisen einen Satz über die σ -Additivität des Bochner-Integrals(56). Dieser Satz wird später beim Vergleich von Bochner-Integration und Birkhoff-Integration im Beweis des Satzes Bochner-integrable Funktionen sind absolut Birkhoff-integrabel II(70) angewendet.

5.3 Birkhoff-Integration auf einer Menge eines Mengengerings:

Hier definieren wir die verschiedenen Birkhoff-Integrale für bestimmte Teilmengen und thematisieren einen kleinen Fehler im Paper [2], welcher Auswirkungen auf den Beweis des Satzes Bochner-integrable Funktionen sind absolut Birkhoff-integrabel II(70) hat.

5.4 Ein Grenzwertsatz der Birkhoff-Integration:

In diesem Kapitel wird eine leichte Verallgemeinerung eines Grenzwertsatzes aus [23] für die unbedingte Birkhoff-Integration bewiesen. Auf den entsprechende Satz für die endliche Birkhoff-Integration gehen wir ebenfalls ein und behandeln damit einen Satz, welcher in den verwendeten Papern gar nicht angesprochen wird.

6 Vergleich verschiedener Integrationsarten:

Dieses Kapitel dient dem Vergleich zwischen der Bochner-Integration, der Birkhoff-Integration und einer mittels Riemann-Summen definierten **Riemann-Integration**.

6.1 Riemann-integrable Funktionen sind endlich Birkhoff-integrabel:

Wir geben hier eine Definition für die Riemann-Integrabilität mittels Riemann-Summen und zeigen, dass Riemann-integrable Funktionen stets endlich Birkhoff-integrabel sind. Die beiden folgenden Beispiele illustrieren, dass die Klasse der endlich Birkhoff-integrablen Funktionen im Allgemeinen echt größer als die der Riemann-integrablen ist, und es Riemann-integrable Funktionen gibt, also insbesondere auch Birkhoff-integrable Funktionen, die nicht Bochner-integrabel sind, siehe

6.1.1 Beispiel für endlich Birkhoff-integrabel aber nicht Riemann-integrabel,

6.1.2 Beispiel für Riemann-integrabel aber nicht Bochner-integrabel.

6.2 Zusammenhang von Bochner- und Birkhoff-Integration:

Ein zentrales Ergebnis dieser Arbeit, der Satz Bochner-integrable Funktionen sind absolut Birkhoff-integrabel II(70), wird in diesem Kapitel bewiesen. Dieser Beweis ist letzten Endes in den aufgelisteten Papern nicht enthalten. Man beachte, dass auch hier wieder eine σ -Algebra vorausgesetzt wird.

7 Das Birkhoff-Integral für Funktionen über einem Wahrscheinlichkeitsraum:

Für banachraumwertige Funktionen, die über einem Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind, führen wir die Begriffe **Erwartungswert** und **Varianz** mit Hilfe des unbedingten Birkhoff-Integrals ein und zeigen auch einen grundlegenden Zusammenhang zwischen diesen beiden Begriffen.

8 Zusammenfassung und Ausblick:

Neben den wichtigsten Ergebnissen dieser Masterarbeit sowie einem kurzen zusammenfassenden Vergleich der behandelten Integrationen wird ein kleiner Ausblick auf weitere Integrationsarten gegeben. Wir stellen das **Pettis-Integral** kurz vor und setzen es in Relation zu den anderen Integralen, dabei wird auch das **McShane-Integral** erwähnt.

9 Anlagen:

In den Anlagen werden die im Haupttext verwendeten themenspezifischen Grundlagen ausführlich und einheitlich eingeführt. Eine Übersicht über die Kapitel der Anlagen geben wir in der „**Einleitung zu den Anlagen**“ auf der Seite 75.

3 Bochner-Integration

Die Bochner-Integration wurde von **S. Bochner** 1933 in „Fundamenta Mathematicae“ unter dem Titel „Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind“ eingeführt, siehe [4]. Sie stellt eine direkte Verallgemeinerung der Lebesgue-Integration dar und „erbt“ die meisten Eigenschaften, welche die Lebesgue-Integration gegenüber der Riemann-Integration besonders auszeichnet, wie z.B. die Vollständigkeit des halbnormierten Vektorraums der Bochner-integrierbaren Funktionen oder den **Satz von der majorisierten Konvergenz**(51).

Bochner setzt bei seinem Zugang jedoch die Lebesgue'sche Integrationstheorie voraus, in dem er eine banachraumwertige Funktion f als Bochner-integrierbar bezeichnet, wenn diese μ -messbar ist und die reellwertige Funktion $\|f\|$ Lebesgue-integrierbar ist. Die Gleichwertigkeit mit dem hier vorgestellten Zugang ist hauptsächlich Teil des **Satzes Charakterisierung der Bochner-Integrierbarkeit auf einer σ -Algebra**(52). In [5] wird die Bochner-Integration unabhängig von der Lebesgue-Integration eingeführt. Die Lebesgue-Integration erscheint nun nur noch als Spezialfall der Bochner-Integration. Zudem wird im Definitionsraum keine σ -Algebrastruktur mehr vorausgesetzt, sondern lediglich eine Halbmenge-Ringstruktur. In dieser Masterarbeit soll jedoch durchgängig mindestens von einer Mengenringstruktur im Definitionsbereich der Funktionen ausgegangen werden, da diese von ihren Eigenschaften her einfacher zu handhaben ist als eine Halbmenge-Ringstruktur. Wegen des in den Anlagen bereitgestellten konstruktiven **Fortsetzungssatzes für Inhalte auf Halbmenge-Ringen**(103) ist dies jedoch kein nennenswerter Nachteil.

Heutzutage wird bei der Einführung der Bochner-Integration meist mit einer σ -Algebrastruktur im Definitionsbereich begonnen, ohne dass dies für weite Teile der Theorie von Nöten wäre, siehe z.B. in [17]. Es gibt zwar auch einen universellen Satz über die Fortsetzung von Inhalten auf Mengenringen zu vollständigen Maßen auf einer σ -Algebra mit Hilfe von äußeren Maßen, dieser ist aber alles andere als konstruktiv und im „nicht σ -endlichen Falle“ noch nicht einmal notwendig eindeutig. Bei der Einführung einer Integrationstheorie auf Mengenringen kann immer sofort als **anschauliches Beispiel** der in den Anlagen bereitgestellte **Mengenring der Figuren im $\mathbb{R}^n$** verwendet werden. Bei einer auf σ -Algebren basierenden Integrationstheorie muss zuvor ein größerer maßtheoretischer Aufwand betrieben werden, worunter eben auch die Anschaulichkeit leidet. σ -Algebren sollen also nur dann verwendet werden, wenn deren reichere Struktur wirklich benötigt wird, wie z.B. bei der Verwendung des in den Anlagen behandelten **Messbarkeitstheorems**(127).

Die Motivation mich mit diesem Zugang der Bochner-Integration zu beschäftigen liegt darin begründet, dass ich bei meinen Studien über lineare Operatoren im Hilbertraum im Anhang von [30] eine recht knappe aber inspirierende Einführung in die Lebesgue'sche Integrationstheorie auf Mengenringen vorfand. Dabei erkannte ich, dass recht selten davon Gebrauch gemacht wird, dass die dort untersuchten Funktionen $\mathbb{R}$ -wertig sind. Also wollte ich eine entsprechende Integrationstheorie für banachraumwertige Funktion finden und stieß so auf die Bochner-Integration. Anfänglich fand ich nur Darstellungen die auf σ -Algebren basierten, so dass ich schließlich anfang, die dargebotenen Beweise „zu Fuß“ daraufhin zu untersuchen, ob σ -Algebren wirklich notwendig sind.

Diese Einführung in die Bochner-Integration orientiert sich an [5], [17], [19], [29] und [30]. Die Basisstruktur im Definitionsbereich der Funktionen ist jedoch ein Mengenring mit endlichem Prämaß.

3.1 Das abstrakte Bochner-Integral

Die für dieses Kapitel notwendigen Kenntnisse sind in den Anlagenkapitel „**Grundlagen aus der abstrakten Maßtheorie**“ und „**Treppenfunktionen und Messbarkeitsbegriffe**“ und „**Vervollständigung von halbmétrischen- und halbnormierten Räumen**“ ausführlich zusammengestellt.

Ein eleganter Zugang zur Bochner-Integration wird in [17] beschrieben, den wir hier in leicht modifizierter Form und damit letztlich noch ein wenig konsequenter präsentieren. Wir benutzen explizit die **abstrakte Vervollständigung** eines halbnormierten Raums mit Hilfe von Cauchy-Folgen, siehe Anlagen. Dadurch tritt der Prozess der Vervollständigung nicht nur „beiläufig“ beim Konstruieren der Bochner-integrierbaren Funktionen in Erscheinung. Auf dem $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Treppenfunktionen führen wir zunächst die Bochner-Integration ein. Mit diesem Integralbegriff wird anschließend eine Halbnorm auf dem Treppenfunktionsraum definiert. Dieser halbnormierte Vektorraum wird nun unter Zuhilfenahme des erwähnten abstrakten Vervollständigungsverfahrens vervollständigt. Danach definieren wir auf diesem vollständigen halbnormierten Raum das **abstrakte Bochner-Integral**.

Zuerst wollen wir die grundlegenden Begriffe bereitstellen. Eine **Mengenringstruktur** R auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:

$$R \neq \emptyset \text{ und } \forall A, B \in R \left(A \cup B \in R \wedge A \setminus B \in R \right).$$

Eine Abbildung $\mu : R \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf dem Mengenring R , wenn μ die nachstehenden Bedingungen erfüllt:

$$\mu(\emptyset) = 0 \text{ und}$$

$$(M_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq R \text{ sind paarweise disjunkt} \wedge \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j \in R \Rightarrow \mu \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(M_j).$$

Gilt zudem noch $\forall M \in R (\mu(M) < \infty)$, so nennt man μ ein **endliches Prämaß** auf R . Jeder Mengenring R mit einem darauf definierten Prämaß μ besitzt nach dem Satz **Mengenring der endlich messbaren Mengen**(101) einen „Untermengenring“ R_μ , so dass $\mu|_{R_\mu}$ ein endliches Prämaß darstellt. Ein Prämaß μ heißt **σ -endlich**, wenn gilt:

$$\exists (M_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq R \left(X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \wedge \forall i \in \mathbb{N} (\mu(M_i) < \infty) \right).$$

Ein besonders anschauliches und zugleich auch wichtiges Beispiel ist der **σ -endliche Mengenring der Figuren** im $\mathbb{R}^n$, welcher aus allen beliebigen endlichen Vereinigungen von beschränkten Intervallen des $\mathbb{R}^n$ besteht. Das darauf definierte **Lebesguesche Prämaß** ist endlich und entspricht gerade dem elementargeometrischen Inhalt, siehe Anlagenkapitel „**Der Mengenring der Figuren im $\mathbb{R}^n$ und das Lebesguesche-Prämaß**“. Nach Bemerkung 9.14 auf Seite 99 ist das Lebesguesche Prämaß auf dem Mengenring der Figuren **σ -endlich**.

Eine Abbildung $f : X \rightarrow V$ von einem Mengenring (X, R) in einen $\mathbb{K}$ -Vektorraum V nennt man **R -Treppenfunktion**, wenn

$$f(X) \text{ endlich ist und zudem noch gilt } \forall b \in f(X) \setminus \{0_V\} \left(f^{-1}(b) \in R \right).$$

Die Menge aller R -Treppenfunktionen von X nach V bezeichnet man mit $\text{Trep}(X, R, V)$. Diese ist nach dem Satz über den **Treppenfunktionsvektorraum**(125) bezüglich der punktweise definierten Addition und der punktweise definierten Multiplikation mit einem Skalar ein Untervektorraum von $\text{Abb}(X, V)$. Um mit Treppenfunktionen bequem „rechnen“ zu können, geben wir nun folgende Definition:

Definition 3.1 (Disjunkte Darstellungen einer Treppenfunktion)

Sei (X, R) ein Mengenring und V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $M_1, \dots, M_n \in R$ und $v_1, \dots, v_n \in V$:

- $f := \sum_{i=1}^n v_i \chi_{M_i}$ heißt disjunkte Darstellung der Treppenfunktion f $:\Leftrightarrow$
 $M_1, \dots, M_n$ sind paarweise disjunkt.
- $f := \sum_{i=1}^n v_i \chi_{M_i}$ heißt normalisierte disjunkte Darstellung der Treppenfunktion f $:\Leftrightarrow$
 $M_1, \dots, M_n$ sind paarweise disjunkt $\wedge 0_V \notin \{v_1, \dots, v_n\}$.

Bemerkung 3.1 (Folgerungen)

- $\forall f \in \text{Trep}(X, R, V) \setminus \{\mathcal{O} : X \rightarrow V; x \mapsto 0_V\} \left(\sum_{b \in f(X) \setminus \{0_V\}} b \chi_{f^{-1}(b)} \text{ ist eine norm. disj. Darstel. von } f \right).$
- $\sum_{i=1}^m v_i \chi_{M_i}$ ist eine disj. Darstel. von $\mathcal{O} : X \rightarrow V; x \mapsto 0_V \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \left(v_i = 0_V \vee M_i = \emptyset \right).$
- $0_V \chi_\emptyset$ ist eine disjunkte Darstellung von $\mathcal{O}$.
Für $V = \{0_V\}$ ist $\mathcal{O}$ die einzige Treppenfunktion.
Für $V \neq \{0_V\}$ gilt $\exists v_0 \in V (v_0 \neq 0_V)$. Damit ist $v_0 \chi_\emptyset$ eine normalisierte disjunkte Darstel. von $\mathcal{O}$.