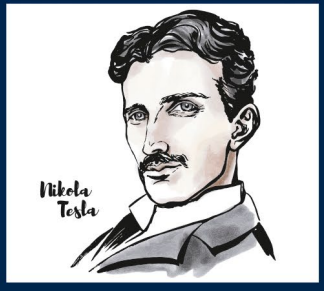
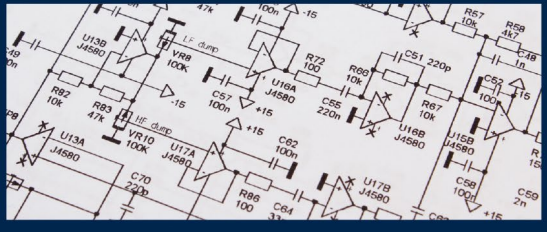
Marika Höwing

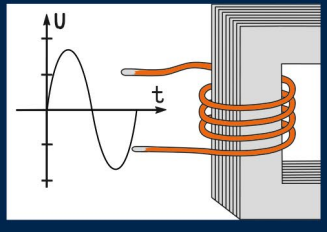
Einführung in die Elektrotechnik

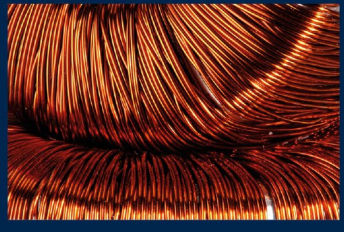
2., durchgesehene Auflage



Ab dem 1. Semester







- Grundlagen verstehen, Wissenslücken schließen
- Physikalisches und mathematisches Grundwissen
- Gleich- und Wechselstromkreise, Elektromagnetismus, Drehstrom, Netzwerk, Schaltungen

Mit Aufgaben und Musterlösungen zu jedem Gebiet

Rheinwerk
Technik

Liebe Leserin, lieber Leser,

Sie haben sich für ein Studium der E-Technik entschieden und die ersten Klausuren stehen an? Dann ist es spätestens jetzt an der Zeit, Formeln zu büffeln und die Grundlagen aufzufrischen. Denn so anspruchsvoll und schwierig das Studium sein kann, so toll ist es auch, wenn es endlich »Klick« macht und sich Zusammenhänge erschließen. Wo vorher nur ein Wust aus unverständlichen Gleichungen und kryptischen Schaltplänen war, tritt die Eleganz der Naturwissenschaften zutage. Komplizierte Rechnungen sind plötzlich gar nicht mehr so schwierig, denn wenn Sie die Grundlagen einmal verstanden haben, wird vieles leichter – und manches sogar ganz offensichtlich.

Für diesen Aha-Effekt zu sorgen, ist Marika Höwings täglich Brot. Sie hat bereits viele angehende Ingenieure und Ingenieurinnen auf dem Weg zum Abschluss begleitet und wird auch Ihnen beim Einstieg in die Elektrotechnik beistehen. In diesem Buch hat sie die zentralen Themengebiete kurz und knackig zusammengefasst und Aufgaben und Lösungen konzipiert, mit denen Sie sich gezielt auf die Prüfungen vorbereiten können.

Abschließend noch ein Wort in eigener Sache: Dieses Werk wurde mit großer Sorgfalt geschrieben, geprüft und produziert. Sollte dennoch einmal etwas nicht so funktionieren, wie Sie es erwarten, freue ich mich, wenn Sie sich mit mir in Verbindung setzen. Ihre Kritik und konstruktiven Anregungen sind jederzeit willkommen. Und nun wünsche ich Ihnen viel Erfolg für die nächste Klausur!

Ihr Dr. Christoph Meister
Lektorat Rheinwerk Technik

christoph.meister@rheinwerk-verlag.de
www.rheinwerk-verlag.de
Rheinwerk Verlag · Rheinwerkallee 4 · 53227 Bonn

Auf einen Blick

1 **Einführung** 13

2 **Elektrische Ladung und Potenzial** 47

3 **Elektrostatik** 81

4 **Gleichstrom** 159

5 **Netzwerkberechnungen** 241

6 **Magnetische Felder** 307

7 **Wechselstromkreise** 383

8 **Filter und Passschaltungen** 447

9 **Drehstrom** 507

Impressum

Dieses E-Book ist ein Verlagsprodukt, an dem viele mitgewirkt haben, insbesondere:

Lektorat Dr. Christoph Meister

Fachgutachten Dr. Dennis Rühmer

Korrektorat Friederike Daenecke, Zülpich

Herstellung E-Book Melanie Zinsler

Covergestaltung Eva Schmücker

Coverbilder Shutterstock: 1110672482 © Marusya Chaika, 118356445 © jps, 382522222 © Bangkokhappiness, 396656569 © ratmaner, 605248844 © Love Silhouette, 608927456 © Sergey Merkulov, 680881819 © Photographee.eu, 710787151 © Nordroden

Satz E-Book Cicero Computer GmbH, Bonn

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

ISBN 978-3-8362-8419-6

2., durchgesehene Auflage 2021

© Rheinwerk Verlag GmbH, Bonn 2021

www.rheinwerk-verlag.de

Inhalt

Materialien zum Buch 11

1 Einführung 13

1.1 Was Sie von diesem Buch erwarten können 13

1.2 Wichtige Erfindungen der Elektrotechnik 14

1.3 Physikalische Größen und Grundbegriffe, mathematische Grundlagen 16

1.3.1 Kleiner Ausflug in die Physik 16

1.3.2 Mathematische Grundregeln 26

1.4 Übungen 38

1.5 Lösungen 39

2 Elektrische Ladung und Potenzial 47

2.1 Das Bohrsche Atommodell 47

2.2 Ladung 50

2.3 Energie, Potenzial und Leistung 52

2.3.1 Potenzial 52

2.3.2 Energie 55

2.3.3 Leistung 56

2.3.4 Wirkungsgrad 57

2.4 Elektrische Spannung 57

2.5 Strom 60

2.6 Strom- und Ladungsdichte 64

2.6.1 Stromdichte 64

2.6.2 Ladungsdichte 69

2.7 Ionen- und Massenstrom 70

2.8 Übungen 73

2.9 Lösungen 75

3 Elektrostatik 81

3.1 Das elektrische Feld (E-Feld) 81

3.2 Kräfte zwischen Ladungen – die Coulombkraft 88

3.3 Ladungsverteilung 90

3.3.1 Berechnung eines Volumenintegrals in kartesischen Koordinaten ... 92

3.3.2 Berechnung eines Volumenintegrals in Zylinderkoordinaten 93

3.3.3 Berechnung eines Volumenintegrals in Kugelkoordinaten 97

3.4 Berechnung von E-Feldern 103

3.4.1 Elektrisches Feld einer Punktladung 103

3.4.2 Elektrisches Feld einer Linienladung 107

3.4.3 Elektrisches Feld einer Flächenladung 109

3.4.4 Elektrisches Feld einer Volumenladung 111

3.4.5 Der Gauß'sche Satz 112

3.5 Elektrische Flussdichte und Verschiebungsflussdichte 125

3.6 Potenzielle Energie, Potenziale und Spannung im elektrischen Feld 126

3.6.1 Äquipotenziallinien 130

3.7 Kapazität 132

3.7.1 Influenz und Polarisation 138

3.8 Übungen 144

3.9 Lösungen 146

4 Gleichstrom 159

4.1 Strom- und Spannungsquellen 159

4.1.1 Galvanisches Element 159

4.1.2 Spannungsquelle 166

4.1.3 Stromquelle 167

4.2 Widerstand und Leitwert 168

4.2.1 Das Ohm'sche Gesetz 169

4.2.2 Spezifischer Leitwert und spezifischer Widerstand 171

4.2.3 Widerstand eines stabförmigen Leiters 178

4.2.4 Einfluss der Temperatur auf den Widerstand 179

4.3 Allgemeine Form des Ohm'schen Gesetzes 181

4.4 Gleichstrom und Wechselstrom 183

4.5 Berechnung eines einfachen Stromkreises 185
4.6 Reihen- und Parallelschaltung 189
4.6.1 Reihenschaltung 189
4.6.2 Parallelschaltung 193
4.6.3 Kirchhoff'sche Regeln 197
4.6.4 Gemischte Widerstandsschaltungen 201
4.7 Ersatzquellen, reale Strom- und Spannungsquellen 205
4.7.1 Parallel- und Reihenschaltung von Spannungs- bzw. Stromquellen 211
4.7.2 Umwandlung von Spannungsquellen in Stromquellen und umgekehrt 214
4.8 Kondensatoren im Gleichstromkreis 216
4.8.1 Aufladung 217
4.8.2 Entladung 223
4.8.3 Reihenschaltung von Kondensatoren 225
4.8.4 Parallelschaltung von Kondensatoren 226
4.9 Übungen 227
4.10 Lösungen 232

5 Netzwerkberechnungen 241

5.1 Zweipole und die Zweipolmethode 243
5.2 Maschen- und Knotenregel in Netzwerken 247
5.3 Zweigstromverfahren 251
5.4 Maschenstromverfahren 256
5.5 Knotenpotenzialverfahren 260
5.6 Das Superpositionsprinzip 269
5.7 Stern-Dreieck-Umwandlung 274
5.7.1 Dreieck-Stern-Umwandlung 277
5.7.2 Stern-Dreieck-Umwandlung 278
5.8 Unendliche Kettennetzwerke 281
5.9 Übungen 284
5.10 Lösungen 288

6 Magnetische Felder 307

6.1 Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters 310

6.2 Magnetisches Feld von Leiterschleifen 313

6.3 Magnetische Grundgrößen 315

6.3.1 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) 316

6.3.2 Durchflutung 317

6.3.3 Magnetische Feldstärke 318

6.3.4 Magnetischer Fluss, magnetische Flussdichte 327

6.4 Lorentzkraft 334

6.5 Induktivität und Induktion 340

6.5.1 Aufbau einer Spule 340

6.5.2 Induktivität 341

6.5.3 Spule im Gleichstromkreis 342

6.5.4 Induktion 346

6.5.5 Energie im Magnetfeld 356

6.6 Magnetischer Kreis 357

6.7 Maxwell-Gleichungen 359

6.7.1 Stationäre Maxwell-Gleichungen 360

6.7.2 Rotation eines Vektorfeldes 362

6.7.3 Materialbehaftete und nichtstationäre Maxwell-Gleichungen 368

6.8 Übungen 371

6.9 Lösungen 374

7 Wechselstromkreise 383

7.1 Charakteristische Größen einer Wechselspannung 383

7.2 Kondensator im Wechselspannungskreis 387

7.3 Spule im Wechselstromkreis 391

7.4 Zeigerdarstellung von Wechselgrößen 394

7.5 Schwingkreise 401

7.5.1 Parallelschwingkreis 401

7.5.2 Zeigerdiagramm für Parallelschwingkreise 406

7.5.3 Reihenschwingkreis 413

7.5.4 Zeigerdiagramm des Reihenschwingkreises 414
7.5.5 Güte eines Schwingkreises 417
7.6 Rechnen mit komplexen Zahlen 420
7.6.1 Rechenregeln 421
7.7 Übungen 426
7.8 Lösungen 431

8 Filter und Passschaltungen 447

8.1 RC-Reihenschaltung und Parallelschaltung 447
8.1.1 RC-Reihenschaltung 447
8.1.2 RC-Hochpass 456
8.1.3 RC-Tiefpass 459
8.1.4 RC-Parallelschaltung 460
8.2 RL-Reihen- und Parallelschaltung 464
8.2.1 RL-Reihenschaltung 464
8.2.2 RL-Hochpass 470
8.2.3 RL-Tiefpass 472
8.2.4 RL-Parallelschaltung 472
8.3 Allgemeine Eigenschaften von Hoch- und Tiefpassschaltungen 474
8.3.1 Bodediagramme 474
8.3.2 Ortskurven 479
8.3.3 Filter höherer Ordnung 483
8.4 Übungen 485
8.5 Lösungen 488

9 Drehstrom 507

9.1 Erzeugung von Wechselspannungen und Drehstrom 507
9.2 Symmetrisch belastete Drehstromsysteme 512
9.2.1 Dreieckschaltung, symmetrisch belastet 514
9.2.2 Sternschaltung, symmetrisch belastet 522
9.2.3 Allgemeine Eigenschaften von Strömen und Spannungen in Drehstromsystemen 525

9.3 Unsymmetrische Belastung 526
9.3.1 Dreieckschaltung, unsymmetrisch belastet 527
9.3.2 Sternschaltung, unsymmetrisch belastet 529
9.4 Übungen 533
9.5 Lösungen 535

Index 547

Materialien zum Buch

Auf der Webseite zu diesem Buch stehen folgende Materialien für Sie zum Download bereit:

- **Beispielgrafiken in Farbe**

Gehen Sie auf *www.rheinwerk-verlag.de/5327*. Klicken Sie auf den Reiter **Materialien**. Sie sehen die herunterladbaren Dateien samt einer Kurzbeschreibung des Dateiinhalts. Klicken Sie auf den Button **Herunterladen**, um den Download zu starten.

Sie können die Grafiken aus dem Buch für eigene Lehrveranstaltungen nutzen und in Prüfungs- und Studienarbeiten verwenden. Eine kommerzielle Nutzung ist ausgeschlossen.

Kapitel 1
Einführung

In diesem Kapitel werden grundlegende physikalische und mathematische Zusammenhänge, die für das Verständnis der Elektrotechnik wesentlich sind, in Erinnerung gerufen. Sie sollen dadurch einen Überblick bekommen, was Sie in der Physik und der Mathematik wiederholen müssen.

1.1 Was Sie von diesem Buch erwarten können

Ein Studium im Bereich der Naturwissenschaften oder der Ingenieurwissenschaften ist mit einer Menge Arbeit und persönlichem Einsatz verknüpft. Neben dem jeweiligen Hauptfach müssen Sie Nebenfächer belegen, die Ihnen möglicherweise nicht so liegen. Nichtsdestotrotz müssen sie besucht und bestanden werden.

Des Weiteren wird im Studium vorausgesetzt, dass gewisse Inhalte der Physik und Mathematik schon in der Schule ausführlich besprochen worden sind und dass die Studierenden sie anwenden können. Das ist aber meist nicht so. Vorkurse, die von den Universitäten angeboten werden, bieten einen guten Überblick über vorausgesetztes Wissen, aber in der Regel reichen sie schon aus Zeitgründen nicht aus, um das Gelernte gut genug zu vertiefen.

Gerade im Bereich der Elektrotechnik zeigen sich diese Probleme sehr deutlich:

- Entweder interessiert Mathematik bzw. Physik Sie eigentlich nicht besonders, es ist aber ein Pflichtfach, und wenn nicht viel Interesse vorhanden ist, fällt das Lernen einfach schwerer.
- Oder es ist sehr interessant, aber Sie können Ihre Aufgaben nicht lösen, da Ihnen die technischen Fertigkeiten, also die Mathematik, einfach fehlen.

Auch hört man häufig Sätze wie: »Strom ist für mich nichts Fassbares, ich kann ihn nicht sehen und mir darunter nichts vorstellen, deshalb verstehe ich die Elektrotechnik nicht.«

Alles Jammern nutzt nichts, und vor allem hilft es nicht weiter. Deshalb gibt es nun dieses Buch. Es erklärt die jeweiligen Gebiete der Elektrotechnik zunächst so, dass man sich darunter wirklich etwas vorstellen kann. Analogien aus dem täglichen Leben

verdeutlichen die Inhalte, und Zusammenhänge werden auf das Wesentliche reduziert. Von den Könnern kann dieser Teil gerne übersprungen werden.

Danach folgt die mathematisch-wissenschaftliche Darstellung, bei der die Herangehensweise wie in der Vorlesung ist, allerdings werden die technischen Schritte zur Lösung eines Problems oder einer Aufgabe erklärt und an Beispielen gezeigt.

Zum guten Schluss haben Sie die Möglichkeit, das Ganze anhand von Aufgaben zu üben und zu vertiefen.

Viel Spaß beim Lernen!

1.2 Wichtige Erfindungen der Elektrotechnik

- **2750 v. Chr.** – Die alten Ägypter nutzen bestimmte Fischarten (z. B. Zitterrochen oder Zitteraale) um elektrische Spannungen zu erzeugen.
- **6.–7. Jh. v. Chr**. – Thales von Milet entdeckt die Elektrostatik.
- **Ca. 250 v. Chr.** – Die Bagdad-Batterie wird genutzt. Es wird vermutet, dass die alten Babylonier schon eine Art von Batterie erfunden haben.
- **1745** – Erfindung des Kondensators. Die sogenannte *kleistsche Flasche* bzw. *Leydener Flasche* wird von Ewald Jürgen Georg von Kleist in Cammin und ein Jahr später von Pieter von Musschenbroek in Leyden unabhängig voneinander erfunden.
- **1752** – Benjamin Franklin erfindet den Blitzableiter.
- **1792** – Luigi Galvani nutzt eine elektrochemischen galvanischen Zelle (Eisen–Kupfer) als Spannungsquelle, um Froschenkelmuskeln anzuspannen.
- **1800** – Alessandro Volta erfindet die erste neuzeitliche Batterie.
- **1820** – André-Marie Ampère entdeckt das Magnetfeld zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern.
- **1826** – Georg Simon Ohm entdeckt das *Ohm'sche Gesetz*, den Zusammenhang zwischen Strom, Spannung und Widerstand.
- **1849** – James B. Francis verbessert mit der *Francis-Wasserturbine* (Spiralturbine) die Wasserturbine, die vielseitig einsetzbar ist.
- **1860** – Philipp Reis erfindet die elektrische Sprachübermittlung, heute als Telefon bezeichnet.
- **1865** – James Clerk Maxwell veröffentlicht die nach ihm benannten *Maxwell-Gleichungen*. Sie stellen den physikalischen Grundpfeiler der Elektrodynamik dar und verknüpfen die Theorie von elektrischen und magnetischen Feldern.

- **1866** – Das erste Telegrafenkabel über den Atlantik wird verlegt.
- **1877** – Thomas Alva Edison erfindet den Phonographen (Schallplattenspieler).
- **1880** – Thomas Alva Edison erhält das Patent auf die Glühlampe.
- **1882** – Lucien Gaulard und John Dixon Gibbs erhalten in London ein Patent für den Transformator.
- **1882** – Das erste Kraftwerk geht in New York ans Netz (Thomas Alva Edison).
- **1883** – Erasmus Kittler begründet an der TU Darmstadt den weltweit ersten Studiengang der Elektrotechnik.
- **1885** – Karoly Zipernowsky, Miksa Deri und Otto Titusz Blathy lassen den Transformator in Budapest patentieren.
- **1885** – Die Energieversorgung mithilfe von Hochspannung wird durch George Westinghouse erstmalig eingesetzt.
- **1886** – Heinrich Hertz weist experimentell die Maxwell-Gleichungen nach.
- **1888** – Nicola Tesla entwickelt die erste Zweiphasen-Synchronmaschine, eine spezielle Drehstrommaschine.
- **1891** – Die erste Drehstrom-Hochspannungsleitung wird zwischen Lauffen am Neckar und Frankfurt am Main in Betrieb genommen.
- **1896** – Alexander Popow führt eine drahtlose Signalübertragung über eine Entfernung von 250 m durch.
- **1897** – Ferdinand Braun erfindet die Kathodenstrahlröhre, nach ihm *Braun'sche Röhre* genannt.
- **1905** – John Ambrose Fleming erfindet die Diode in Röhrentechnologie.
- **1906** – Robert von Lieben und Lee De Forest entwickeln unabhängig voneinander die erste Verstärkerröhre.
- **1935** – Das erste reguläre Fernsehprogramm wird vom Berliner Funkturm ausgestrahlt.
- **1941** – Konrad Zuse stellt den ersten funktionsfähigen Computer, den Z3, fertig.
- **1947** – William B. Shockley, John Bardeen und Walter Brattain erfinden den Transistor.
- **1954** – Das erste Kernkraftwerk zur Stromerzeugung geht in Obninsk bei Moskau in Betrieb.
- **1958** – Jack Kilby entwickelt den ersten integrierten Schaltkreis.
- **1978** – Die Firma Philips erfindet die CD zur Datenspeicherung und **1982** die Audio-CD.
- **1985** – entwickeln Philips und Sony die CD-ROM.

1.3 Physikalische Größen und Grundbegriffe, mathematische Grundlagen

Wenn Sie nach einer Definition für *Elektrotechnik* suchen, werden Sie auf die unterschiedlichsten Formulierungen stoßen:

- die Lehre von der Konstruktion elektrischer Geräte und Maschinen
- die Lehre von der Energiegewinnung und -versorgung mit elektrischer Energie
- ein Zweig der Technik, der sich mit der technischen Anwendung der physikalischen Grundlagen und der Erkenntnisse der Elektrizitätslehre befasst.

Das trifft alles zu, aber ursprünglich ist die Elektrotechnik aus der Physik entstanden, und deshalb spielen physikalische Größen und Grundbegriffe auch in der Elektrotechnik eine wesentliche Rolle.

1.3.1 Kleiner Ausflug in die Physik

Die Physik besteht aus mehreren Teilgebieten. Zu ihnen zählen zum Beispiel Mechanik, Wärmelehre, Elektrizitätslehre und Optik. Auch Wissenschaften wie die Chemie sind ursprünglich aus der Physik entstanden.

Mechanik

In der *Mechanik* geht es hauptsächlich um Kräfte, die auf irgendetwas einwirken und dadurch möglicherweise eine Bewegung verursachen. Die Mechanik wird grob in drei Teile gegliedert:

- die *Kinematik*, die Lehre von Bewegungen
- die *Dynamik*, die Lehre von beschleunigten Bewegungen unter dem Einfluss von Kräften
- die *Statik*, auch als die Lehre vom Gleichgewicht bezeichnet. Sie beschäftigt sich mit dem Einfluss von Kräften auf Körper, wobei die Kräfte aber keine Bewegungsänderung des Körpers hervorrufen.

Kinematik

Wenn sich ein Körper bewegt, hat er eine *Geschwindigkeit*. Das ist das, was wir im Allgemeinen unter Bewegung verstehen. Mit der Geschwindigkeit wird angegeben, in welcher Zeit der Körper eine bestimmte Strecke zurücklegt. Demnach spielen die Größen *Strecke* und *Zeit* in der Mechanik eine zentrale Rolle.

Die Grundeinheit, in der die Länge l einer Strecke angegeben wird, ist das *Meter* (m), und die Grundeinheit der Zeit t ist die *Sekunde* (s). Die Geschwindigkeit v ist ein Maß dafür, wie viele Meter ein Körper in einer Sekunde zurücklegt, also wie viel Strecke pro Zeit. Somit ist die Einheit der Geschwindigkeit $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Um die Einheit einer Größe darzustellen, wird die Größe in eckigen Klammern geschrieben. Das heißt, wenn zum Beispiel die Einheit der Zeit t dargestellt werden soll, können Sie

$$[\,t\,] = \mathrm{s}$$

schreiben. So sparen Sie sich die Arbeit, einen vollständigen Satz zu schreiben: Die Einheit der Zeit t ist s. Naturwissenschaftler sind nämlich in der Regel etwas schreibfaul.

Die Einheitenschreibweise ist sogar genormt und in der *DIN 1313* niedergeschrieben.

Häufig findet man folgende Schreibweise vor: Zeit [s], die Einheit wird also in eckige Klammern gesetzt. Obwohl jedem klar ist, was damit gemeint ist, ist diese Schreibweise laut Norm nicht korrekt.

Die *Beschleunigung a*, also das Maß dafür, wie sehr sich eine Geschwindigkeit innerhalb eines Zeitraums verändert, ist ähnlich aufgebaut. Die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit, schreibt sich also:

$$[\,a\,] = \frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Kinematik

Die beiden Grundeinheiten der Kinematik sind Meter (m) und Sekunde (s). Alle anderen Größen der Kinematik, wie z. B. Geschwindigkeit und Beschleunigung, sind aus diesen Grundeinheiten abgeleitet, das heißt zusammengesetzt.

Dynamik

Bei der *Dynamik* kommt der Begriff der *Kraft* zu dem hinzu, was Sie gerade gelernt haben. Isaac Newton hat 1687 in seinem Werk *Principia Mathematica* den Begriff der Kraft eingeführt und definiert.

Nach Newton ist die Kraft die Ursache für die Bewegungsänderung (genauer Geschwindigkeitsänderung) eines Körpers mit der *Masse m*. Das heißt, damit ein Körper seine Geschwindigkeit ändert, also beschleunigt wird, muss eine Kraft auf ihn ausgeübt werden. Je schwerer der Körper ist, umso größer muss die Kraft sein, damit er

bewegt werden kann. Das können Sie praktisch nachvollziehen, denn je schwerer ein Gegenstand ist, umso mehr Kraft benötigen Sie, um ihn anzuheben.

Die Masse m eines Körpers spielt also bei der Betrachtung der Kraft eine Rolle. Die Grundeinheit der Masse ist das *Kilogramm* (kg).

Newton hat die Kraft F als Masse mal Beschleunigung definiert. Als Formel erhalten Sie dann:

[1.1] $$F = m \cdot a$$

wobei m die Masse und a die Beschleunigung darstellt.

Die Einheit der Kraft setzt sich also zusammen aus kg, m und s^2, und zwar so:

[1.2] $$[F] = [m] \cdot [a] = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Zu Ehren von Isaac Newton wird die Einheit der Kraft als *Newton* (N) bezeichnet. Somit gilt:

[1.3] $$[F] = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}$$

Größe	Kürzel/Symbol	Einheit	Beschreibung
Strecke/Länge	s	m	Meter
Zeit	t	s	Sekunde
Masse	m	kg	Kilogramm

Tabelle 1.1 Die Grundgrößen der Mechanik

Vektorielle Größen

Die Größen Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft haben nicht nur einen *Betrag*, also einen Zahlenwert, sondern noch eine Eigenschaft: Sie haben eine *Richtung*.

Bei der Geschwindigkeit kommt es also nicht nur auf den Zahlenwert an, sondern auch darauf, in welche Richtung sich ein Körper bewegt. Das Gleiche gilt für die Beschleunigung. Gibt man Gas, so beschleunigt ein Auto in Fahrtrichtung, es wird also schneller. Die Beschleunigung gegen die Fahrtrichtung bezeichnet man als Bremsen. Die Geschwindigkeit wird geringer. Also spielt die Richtung eine wesentliche Rolle.

Größen, bei denen es auf die *Richtung* ankommt, werden als *vektorielle Größen* bezeichnet. Ein *Vektor* hat einen *Betrag* und eine Richtung. In einem Koordinatensystem lassen sich Vektoren als Pfeile darstellen. Die Länge des Pfeils gibt den Betrag an.

Die formale Darstellung einer vektoriellen Größe ist das Formelzeichen mit einem Pfeil: $\vec{a}$

Aber auch andere Kennzeichnungen, wie z. B. Kursivschreibweise, Fettdruck usw. können zur Darstellung einer vektoriellen Größe vereinbart werden. Es muss nur vorher geklärt sein, wie die Darstellung aussieht.

Skalare Größen

Bei *skalaren Größen* ist nur der Wert von Bedeutung, wie z. B. bei der Temperatur, denn die Temperatur hat keine Richtung.

Es gibt aber auch vektorielle Größen, bei denen die Richtung nicht interessiert, weil sie nicht von Belang ist. Ein Beispiel ist die Geschwindigkeit eines Autos, wenn es von einer Blitzanlage fotografiert wird. Auf dem Bußgeldbescheid steht nur »130 km/h statt 100 km/h«. Es geht also nur um den reinen Zahlenwert, den sogenannten *Betrag* der Größe.

Wenn im Folgenden von Beträgen die Rede ist, werde ich die Skalarschreibweise verwenden:

Betrag von $\vec{v} = |\vec{v}|$ oder kurz v

Alle anderen Größen und Einheiten der Mechanik sind sogenannte *abgeleitete Größen*. Sie werden aus den Grundgrößen kg, m und s zusammengesetzt. Ebenso verhält es sich mit deren Einheiten, die auch nur aus einer Zusammensetzung der drei Grundeinheiten bestehen. Die wichtigsten abgeleiteten Größen finden Sie in Tabelle 1.2.

Größe	Kürzel	Einheit			Formel
Fläche	A	m^2	Quadratmeter		
Volumen	V	m^3	Kubikmeter		
Geschwindigkeit (Durchschnitt)	v	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$			$v = \frac{s}{t}$
Beschleunigung (Durchschnitt)	a	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$			$a = \frac{v}{t}$
Dichte	ρ (rho)	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$			$\rho = \frac{m}{V}$

Größe	Kürzel	Einheit			Formel
Kraft	$\vec{F}$	$\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2}$	Newton	N	$\vec{F} = m\vec{a}$
Druck	p	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}$	Pascal	Pa	$p = \frac{F}{A}$
Drehmoment	$\vec{M}$	$\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2}$	Newtonmeter	Nm	$\vec{M} = \vec{F} \times s$
Mechanische Arbeit	W	$\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2}$	Newtonmeter	Nm	$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$
Energie	E	$\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2}$	Joule	J	
Leistung	P	$\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^3}$	Watt	W	$P = \frac{W}{t}$

Tabelle 1.2 Abgeleitete Größen der Mechanik

Energie und Arbeit

Die *Energie* ist eine Größe, die in allen Teilbereichen der Physik vorkommt. Allerdings berechnet jeder Teilbereich sie ein wenig anders, da jeweils andere Größen bei der Bestimmung der Energie eine Rolle spielen. Auch werden Sie ganz unterschiedliche Definitionen der Energie finden.

Da ist einerseits von einer *fundamentalen Größe der Physik* die Rede, dann von einer *Erhaltungsgröße*, da sie sich im Laufe der Zeit nicht verändert, sondern konstant bleibt. Darunter kann sich allerdings niemand etwas vorstellen.

Anschaulichere Definitionen, wie zum Beispiel *Die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten* oder *Die Fähigkeit, etwas zu verändern*, werden als nicht allgemeingültig gewertet.

Also wundern Sie sich nicht darüber, dass Sie eigentlich nicht wissen, was genau Energie ist: Sie sind nicht allein.

Je nachdem, welchen Teilbereich der Physik Sie sich anschauen oder welches physikalische Problem Sie zu lösen haben, treffen Sie auf verschiedene Arten von Energie, zum Beispiel:

- potenzielle Energie
- kinetische Energie
- Rotationsenergie
- thermische Energie
- elektrische Energie

- chemische Energie
- ...

Diese Energieformen haben, abgesehen von der Einheit, eines gemeinsam: Sie erfüllen den ersten Hauptsatz der Thermodynamik.

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Die Energie bleibt erhalten, sie geht nicht verloren, sondern wird in andere Energieformen umgewandelt.

Dass Energie nicht verloren geht, mögen Sie vielleicht bezweifeln, da Sie vor Augen haben, dass Sie in ein System immer mehr Energie hineinstecken müssen, als Sie herausholen. Aber die »Verluste«, die Sie feststellen, werden meist in *thermische Energie* (Wärmeenergie) umgewandelt – und die ist ja auch eine Energie.

Schauen Sie sich im folgenden Abschnitt das klassische Beispiel für Energieumwandlung an.

Beispiel zur Umwandlung von potenzieller Energie in kinetische Energie

Das Standardbeispiel hierfür ist eine Kiste, die zuerst auf dem Erdboden liegt und dann auf eine bestimmte Höhe transportiert wird.

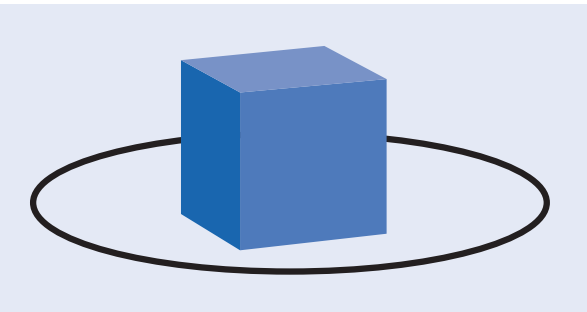


Abbildung 1.1 Auf dem Erdboden besitzt die Kiste keine Energie. Sie steht einfach nur auf dem Boden und ist unbewegt.

Nun wird diese Kiste angehoben. Es wird also »Arbeit an dieser Kiste verrichtet«, wie Sie unschwer in Abbildung 1.2 erkennen können. Beim Anheben muss die Schwerkraft $\vec{F} = m\vec{g}$ überwunden werden. $\vec{g}$ steht für die Erdbeschleunigung.

Das heißt, die Arbeit wird größer, je schwerer die Kiste ist.

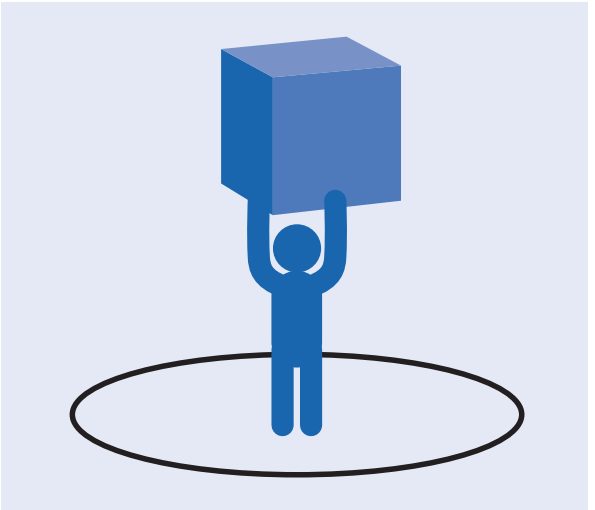


Abbildung 1.2 Die Kiste besitzt nun potenzielle Energie.

Die Formel für die mechanische Arbeit, Arbeit = Kraft mal Weg,

[1.4] $$W = Fs = mgs$$

enthält auch noch die Strecke s. In unserem Fall ist dies die Höhe h, auf die die Kiste in Abbildung 1.2 gebracht wird. Genau diese Arbeit, die in das Anheben dieser Kiste gesteckt wurde, ist die in der Kiste gespeicherte *potenzielle Energie*.

[1.5] $$E_{\text{pot}} = mgh$$

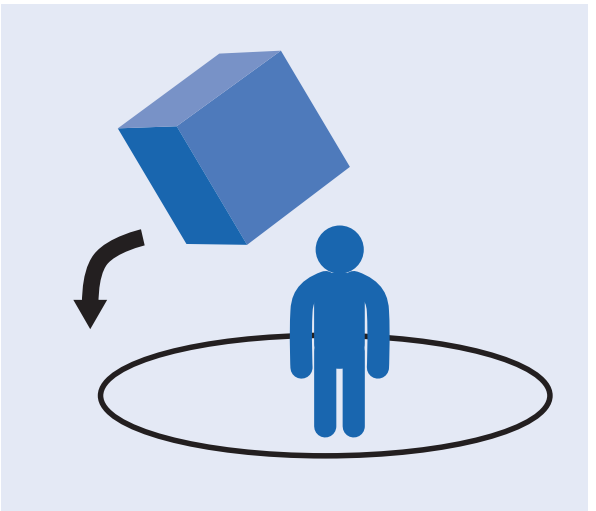


Abbildung 1.3 Potenzielle Energie wird in kinetische Energie umgewandelt.

Wird die Kiste losgelassen, wird sie aufgrund der Schwerkraft fallen. Sie wird mit $\vec{g}$ in Richtung Erdmittelpunkt beschleunigt (siehe Abbildung 1.3).

Die potenzielle Energie wandelt sich nun in *kinetische Energie* (Bewegungsenergie) um. Die Größe der Bewegungsenergie ist an der Geschwindigkeit der Kiste zu erkennen. Je mehr Energie vorhanden ist, desto schneller wird der Fall. Die höchste Geschwindigkeit hat die Kiste direkt vor dem Aufprall. Zu diesem Zeitpunkt ist die gesamte potenzielle Energie in kinetische Energie übergegangen, denn die Kiste ist jetzt wieder auf dem Boden, wie am Anfang.

Thermodynamik

Bei der *Thermodynamik* kommt zur Dynamik noch die *Temperatur T* dazu. Jeder von Ihnen hat eine Vorstellung davon, was Temperatur ist, jedoch verbinden die meisten Temperatur immer mit Wärme oder Kälte. Das ist streng physikalisch nicht korrekt.

Unsere hier in Deutschland gebräuchliche Temperaturskala mit der Einheit *Grad Celsius* (°C) wurde an zwei Werten festgemacht: 0 °C ist der Gefrierpunkt von Wasser und 100 °C der Siedepunkt von Wasser. Diese Einteilung wurde von dem Schweden Anders Celsius vorgenommen, nach dem auch die Einheit benannt wurde.

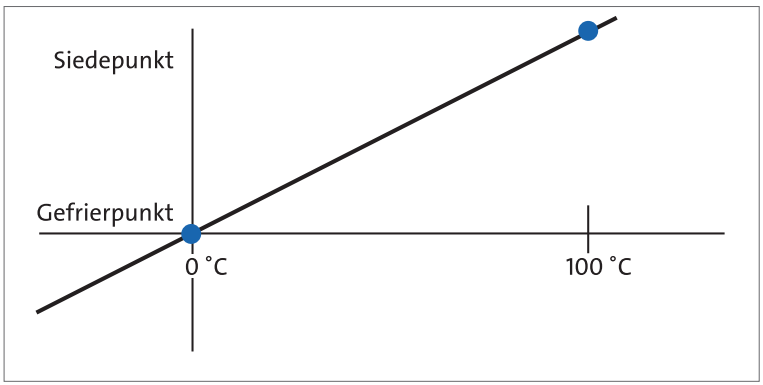


Abbildung 1.4 Fixpunkte der Celsiusskala

Diese beiden Punkte wurden durch eine Gerade miteinander verbunden (siehe Abbildung 1.4), und der Abstand zwischen 0 °C und 100 °C wurde in 100 Teile geteilt. Ein Teil entspricht dann 1 °C.

Um Abhilfe zu schaffen, wird eine unabhängige Größe benötigt.

Es wurde daher die *thermodynamische Temperaturskala* entwickelt, die als Fixpunkt den sogenannten *Trippelpunkt* von Wasser hat. Der Trippelpunkt ist der Punkt, an

dem Wasser alle drei Aggregatzustände gleichzeitig hat: fest, flüssig und gasförmig. Er liegt bei 0,01 °C und bei einem Druck von 6 mbar. Wird nun der Druck verändert, verlässt man den Trippelpunkt. Wenn der Druck sinkt, herrscht nur noch der gasförmige Zustand vor, also gibt es dann keinen Trippelpunkt.

Von diesem Punkt aus wurde das *Kelvin* (K) definiert, und zwar als der 273,16. Teil des Trippelpunktes von Wasser. 0 K entspricht dementsprechend einer Temperatur von –273,15 °C.

Gleichzeitig liegt bei 0 K aber auch der Punkt, bei dem alle Atome und Moleküle keinerlei Bewegungsenergie besitzen, also absoluter Stillstand herrscht. Oberhalb von 0 K nimmt die Bewegungsenergie der Teilchen mit jedem Bruchteil eines Kelvins weiter zu. Dieser Punkt hat den Namen *absoluter Nullpunkt* und ist praktisch nicht erreichbar. Der Abstand von einem Kelvin zum nächsten entspricht dem Abstand der Celsiusskala. Temperaturunterschiede können sowohl in Kelvin als auch in Grad Celsius angegeben werden, es kommt der gleiche Zahlenwert heraus. Denn der Unterschied zwischen 273,16 K und 274,16 K ist genauso groß wie der Unterschied zwischen 0 °C und 1 °C.

Einheit der Temperatur

0 K entspricht –273,15 °C.

273,15 K entspricht 0 °C.

Die Grundeinheit der Temperatur T ist das Kelvin (K).

Jetzt ist auch der Bogen zu dem Begriff *Wärme* gespannt: Wärme ist nur das Kurzwort für Wärmeenergie oder auch thermische Energie. Die Wärmeenergie wird durch die Bewegungsenergie in einem System bestimmt.

Bei –273,15 °C oder 0 K gibt es keine Wärmeenergie. Steigt die Temperatur, so nimmt die Wärmeenergie, also die Bewegung von Teilchen, zu. Der Begriff *Kälte* ist nur in der Umgangssprache sinnvoll und hat in der Physik keinen Platz.

Elektrizitätslehre

Da sich der Rest des Buches mit diesem Thema beschäftigt, sei hier nur gesagt, dass die Grundeinheit für dieses Gebiet das *Ampere* (A) ist. Es ist die Einheit der Grundgröße *Stromstärke*, die mit I abgekürzt wird. Und auch hier werden alle anderen elektrischen Größen mithilfe von kg, m, s und A abgeleitet.

Optik

Die *Optik* ist die Lehre vom Licht. Die Grundgröße der Optik ist die *Lichtstärke* I_v, die in *Candela* (cd) angegeben wird. Da sich Licht meistens in Räumen ausbreitet, werden in der Optik natürlich auch geometrische Größen wie Flächen, Volumen und Winkel benötigt. Mithilfe dieser Größen leitet man andere optische Größen ab, z. B. *Lichtstrom*, *Beleuchtungsstärke* und *Leuchtdichte*.

Den Zusammenhang von Optik und Elektrotechnik finden Sie in den *Maxwellgleichungen*. Sie beschreiben unter anderem das Verhalten von elektromagnetischen Wellen. Da Licht auch als elektromagnetische Welle angesehen werden kann, haben die beiden Gebiete hier ihren Berührungspunkt.

Chemie

In der Chemie kommt zu den bisher bekannten Größen noch die *Stoffmenge n* hinzu. Die Stoffmenge gibt an, wie viele Teilchen sich in einer bestimmten Masse von einem Stoff befinden.

Es geht zum Beispiel um folgende Fragestellung: Wie viele Wassermoleküle befinden sich in einem Kilogramm Wasser?

Sie können sich vorstellen, dass das nicht wenige sind: ungefähr $3{,}3456 \cdot 10^{25}$ Moleküle. Das kann man berechnen; damit sollten wir uns aber nicht weiter beschäftigen.

Diese Zahl wollen bzw. können wir uns kaum vorstellen. Daher wurde die Größe *Stoffmenge* mit der Einheit *Mol* eingeführt. Das Kürzel für Mol ist mol.

1 mol entspricht einer Teilchenmenge von ungefähr $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Teilchen.

$6{,}022 \cdot 10^{23}$ Teilchen ist die sogenannte *Avogadrokonstante*. Sie gibt das Verhältnis von der Anzahl der Teilchen zur Stoffmenge an. Somit enthält ein Mol immer $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Teilchen.

Wenn wir nun angeben wollen, wie viele Wassermoleküle sich in einem Liter Wasser befinden, kommen wir mithilfe von einfachstem Dreisatz auf 55,56 mol. Denn $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Moleküle entsprechen 1 mol, und $3{,}3456 \cdot 10^{25}$ Moleküle entsprechen $\frac{3{,}3456 \cdot 10^{25} \cdot 1\ \text{mol}}{6{,}022 \cdot 10^{23}} = 56{,}56\ \text{mol}$.

Grundeinheiten des SI-Systems

Abschließend finden Sie eine Übersicht über die Grundeinheiten des SI-Systems.

Grundeinheiten des SI-Systems

Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Strecke	s	Meter	m
Temperatur	T	Kelvin	K
Stromstärke	I	Ampere	A
Lichtstärke	I_v	Candela	cd
Stoffmenge	n	Mol	mol

Das *Système International d'Unités* (SI) wurde 1960 von der Generalkonferenz Maß und Gewicht festgelegt. Dazu gehören auch folgende mathematische Kürzel:

Tera	T	$\cdot 10^{12}$
Giga	G	$\cdot 10^{9}$
Mega	M	$\cdot 10^{6}$
kilo	k	$\cdot 10^{3}$
hekto	h	$\cdot 10^{2}$
Deka	D	$\cdot 10^{1}$
dezi	d	$\cdot 10^{-1}$
centi	c	$\cdot 10^{-2}$
milli	m	$\cdot 10^{-3}$
mikro	µ	$\cdot 10^{-6}$
nano	n	$\cdot 10^{-9}$
piko	p	$\cdot 10^{-12}$
femto	f	$\cdot 10^{-15}$
atto	a	$\cdot 10^{-18}$

1.3.2 Mathematische Grundregeln

Die folgenden Rechenarten kennen Sie bestimmt noch aus der Schule. Falls sie aber in Vergessenheit geraten sein sollten, werden sie hier noch einmal in Erinnerung gerufen. Dabei lege ich keinen besonderen Wert auf den strikten Formalismus der Mathematik. Der ist zwar in der Mathematik gut und notwendig, aber erstens soll dies kein Mathebuch werden und zweitens sollen Sie sich nur daran erinnern, wie man etwas berechnet.

Eine vernünftige Formelsammlung und Tabellen erleichtern das Leben ungemein, denn Sie müssen nicht alles neu erfinden: Ihr Problem hat irgendwann schon jemand gelöst. Sie müssen nur wissen, wo es steht.

Differenzialrechnung

Die *Differenzialrechnung* beschreibt *Veränderungen*. Dabei kann es sich um Veränderungen in den Naturwissenschaften, in der Wirtschaft usw. handeln. Diese Veränderungen können in der Regel als Funktion dargestellt werden.

Die *Ableitung* einer Funktion gibt an, nach welcher Vorschrift sich diese Funktion verändert. Dabei wird betrachtet, wie sehr sich *infinitesimal kleine* (unendlich kleine) Veränderungen der Variablen auf die Funktion auswirken. Mathematisch ausgedrückt, heißt das: Die Ableitung f' ist die Funktion, die die Steigung, also die Änderungsrate, einer Funktion f angibt. Schauen Sie sich die folgenden Beispiele zur Veranschaulichung an.

Beispiele für die Berechnung einer Ableitung

$f(x) = 1$ ist eine Waagerechte auf der Höhe 1, sie verändert sich nicht (siehe Abbildung 1.5).

$f'(x) = 0$

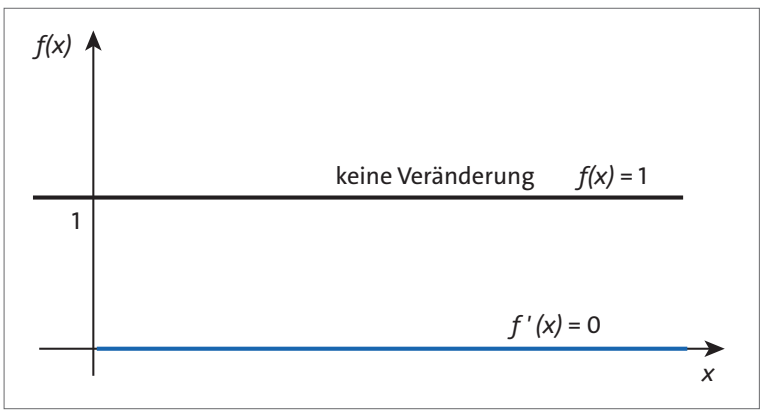


Abbildung 1.5 $f(x) = 1$ (schwarz) und die zugehörige Ableitung $f'(x)$ (blau)

$f(x) = 2x$ ist eine Gerade, die gleichmäßig ansteigt (siehe Abbildung 1.6).

$f'(x) = 2$

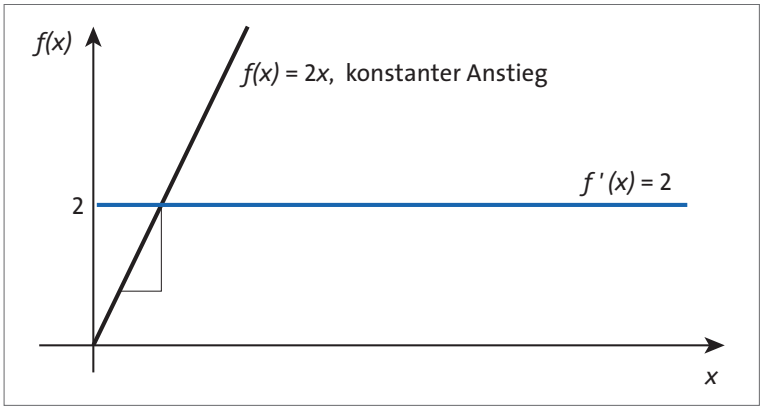


Abbildung 1.6 $f(x) = 2x$ (schwarz) und die zugehörige Ableitung $f'(x)$ (blau)

$f(x) = x^2$ beschreibt zum Beispiel den Weg eines Autos, das konstant beschleunigt. x ist die Zeit und $f(x)$ ist die zurückgelegte Strecke. Das Auto wird immer schneller, legt also in gleichen Zeitabständen eine immer größer werdende Strecke zurück.

$f'(x) = 2x$ ist die Steigungsfunktion von f und entspricht der Beschleunigung (siehe Abbildung 1.7).

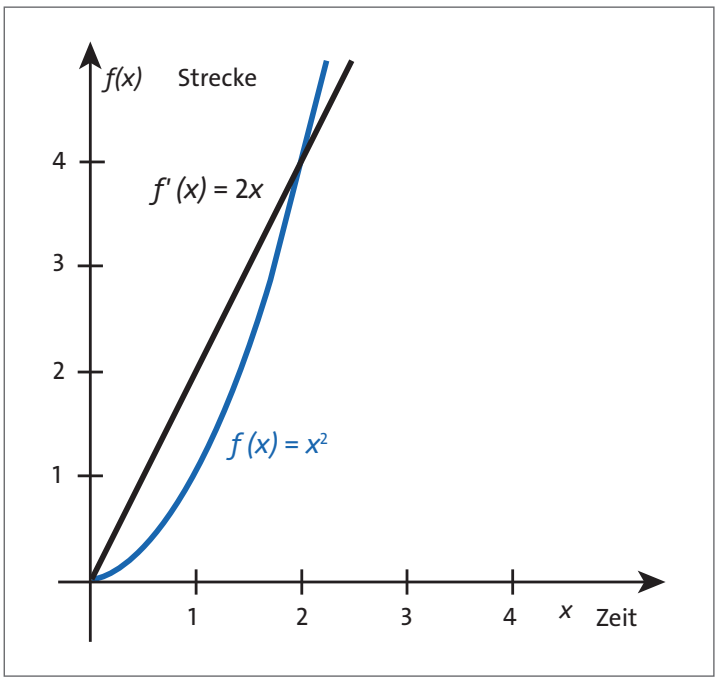


Abbildung 1.7 $f(x) = x^2$ (dunkelblau) und die zugehörige Ableitung $f'(x)$ (schwarz)

Rechenregel für Ableitungen

1. Wenn $f(x)$ folgende Form hat:

   $f(x) = ax^n$

   dann ist:

   $f'(x) = nax^{n-1}$, a ist eine Konstante (Zahl) [1.6]

   Konstanten als einzelne Zahlen fallen weg.

   Sonderfall: $n = 0$: $ax^0 = a$, da $x^0 = 1$ ist.

   $f(x) = a = ax^0 \Longrightarrow f'(x) = 0 \cdot ax^{-1} = 0$

2. **Summenregel**

   $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ [1.7]

3. **Produktregel**

   $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ [1.8]

4. **Quotientenregel**

   $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$ [1.9]

5. **Kettenregel**

   $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ [1.10]

Wenn Sie Ableitungen von speziellen Funktionen suchen, z. B. von trigonometrischen Funktionen oder dem Logarithmus, dann schauen Sie in ein Tabellenbuch. Dort sind Ableitungen von fast allen Funktionen zu finden.

Beispiele für die Anwendung der Regeln 1) und 2)

a) $f(x) = 7x^3 - 5x^2 + 3x + 1 + \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}$ ist in der Potenzschreibweise x^{-1} und fällt somit auch unter die Rechenregel 1).

Nach [1.7] werden die Summanden einzeln differenziert und dann wieder aufsummiert.

$$f'(x) = 3 \cdot 7x^2 - 2 \cdot 5x + 3 + 0 + (-1)x^{-2} = 21x^2 - 10x + 3 - \frac{1}{x^2}$$

b) $f(x) = \frac{3}{x^5} + \sqrt[4]{x^3}$

$\sqrt[4]{x^3}$ kann ebenfalls als Potenz geschrieben werden: $x^{\frac{3}{4}}$.

Also wird aus $f(x) = \frac{3}{x^5} + \sqrt[4]{x^3}$ eine Funktion, bei der die Anwendung der Potenzregel offensichtlicher ist:

$f(x) = 3x^{-5} + x^{\frac{3}{4}}$

$f'(x) = -15x^{-4} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = -\frac{15}{x^4} + \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Beispiel für die Anwendung der Produktregel

$f(x) = x^2, g(x) = \sin x$

$f(x)g(x) = x^2 \sin x$

$f'(x) = 2x$ und $g'(x) = \cos x$, die Ableitungen von cos und sin usw. finden Sie in einer Formelsammlung.

Die Anwendung der Produktregel führt dann zu:

$(f(x)g(x))' = 2x \sin x + x^2 \cos x$

Beispiel für die Anwendung der Quotientenregel

$f(x) = 3x^2, g(x) = 2x + 1$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2}{2x+1}$

$f'(x) = 6x$ und $g'(x) = 2$

Die Anwendung der Quotientenregel führt dann zu:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{6x(2x+1) - 3x^2 \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{12x^2 + 6x - 6x^2}{(2x+1)^2} = \frac{6x^2 + 6x}{(2x+1)^2}$$

Beispiel für die Anwendung der Kettenregel

$f(g(x)) = (2x+1)^2$

Hierbei handelt es sich um eine sogenannte *verkettete Funktion*. Die Funktion g ist die Funktion in den Klammern $g(x) = 2x + 1$. Die Funktion f macht nichts anderes, als $g(x)$ zu quadrieren. Also kann man sagen:

$f(g(x)) = (g(x))^2$

Die Ableitung von f ist dann: $2g(x)$ nach der Potenzregel und

$(f(g(x)))' = 2(2x + 1) \cdot 2 = 4(2x + 1)$

Ein häufig verwendeter Merksatz für die Kettenregel lautet: *innere Ableitung mal äußere Ableitung*.

Integralrechnung

Die *Integralrechnung* ist die »Gegenrechenart« zur Differenzialrechnung. Das heißt, integriert man die Ableitung einer Funktion, so erhält man eine Funktion, die entweder der Ursprungsfunktion entspricht oder sich nur um eine Konstante, meist C genannt, von der Ursprungsfunktion unterscheidet. Diese Ursprungsfunktion wird auch als Stammfunktion F bezeichnet.

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C \qquad [1.11]$$

Die Integralrechnung wird häufig dazu benutzt, Flächeninhalte oder auch Volumen zu berechnen. Sie bietet sich bei Flächen und Volumen an, die keine geraden oder kreisförmigen Randflächen besitzen, wie z. B. in Abbildung 1.8.

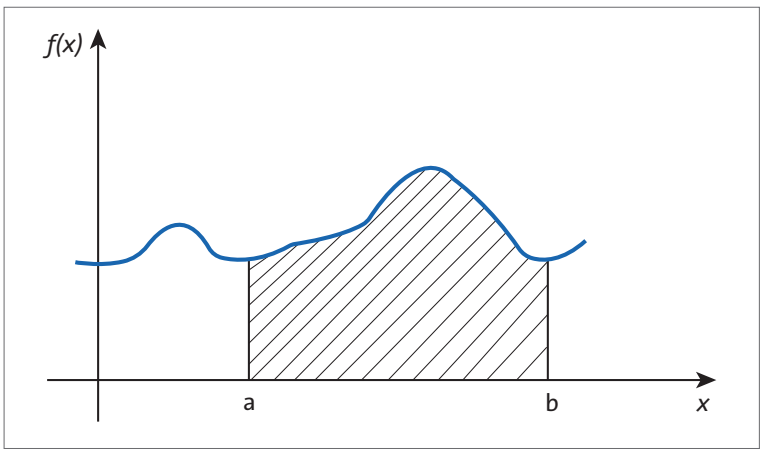


Abbildung 1.8 Fläche unterhalb einer Funktion, begrenzt von a und b

Die Idee, die hinter dieser Rechenart steckt, wird in Abbildung 1.9 deutlich.

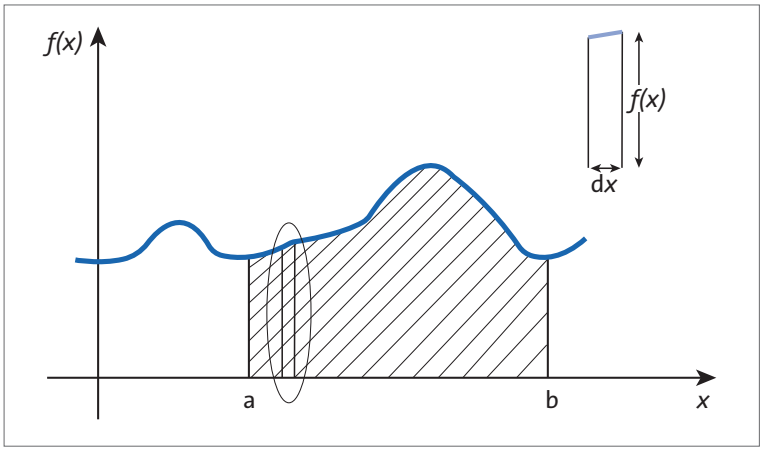


Abbildung 1.9 Definition eines infinitesimal kleinen Flächenelements

Die Fläche wird in unendlich kleine Teilstücke $f(x) \cdot \mathrm{d}x$ geteilt. Diese Teilstücke werden dann zur Gesamtfläche aufsummiert.

Hierbei muss es sich nicht immer nur um geometrische Formen handeln. Denken Sie zum Beispiel an ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, beispielsweise so wie in Abbildung 1.10.

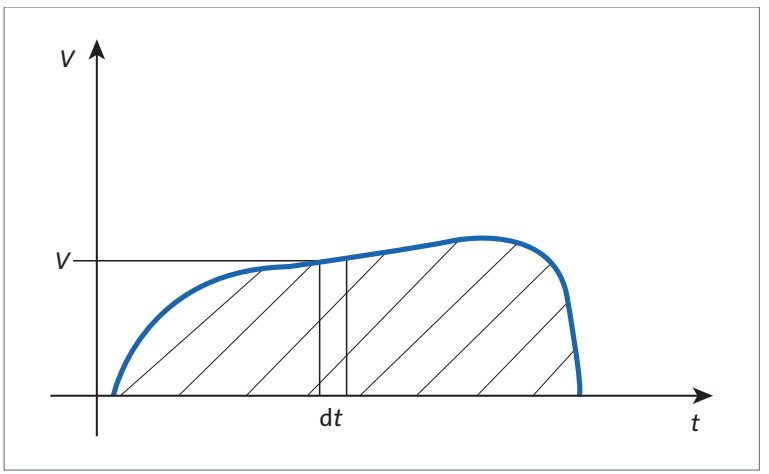


Abbildung 1.10 Die Fläche unterhalb der Geschwindigkeitskurve im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm entspricht der zurückgelegten Strecke.

Die Fläche unterhalb der Kurve setzt sich aus der Summe von unendlich vielen $v \cdot \mathrm{d}t$ zusammen. $v \cdot \mathrm{d}t$ ist aber nichts anderes als die in der Zeit $\mathrm{d}t$ zurückgelegte Strecke.

Also berechnen Sie mit dem Integral die Strecke, die bei der sich verändernden Geschwindigkeit v in der Zeit t zurückgelegt wird.

Rechenregeln für die Integralrechnung

1. **Potenzregel**

$$f(x) = x^n \Longrightarrow F(x) = \int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad [1.12]$$

2. **Konstanten können vor das Integral gezogen werden.**

$$\int a f(x) \mathrm{d}x = a \int f(x) \mathrm{d}x \qquad [1.13]$$

für eine Konstante a

3. **Summenregel**

$$\int f(x) + g(x)\, \mathrm{d}x = \int f(x) \mathrm{d}x + \int g(x) \mathrm{d}x \qquad [1.14]$$

4. **Partielle Integration**

$$\int f(x) g'(x) \mathrm{d}x = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \mathrm{d}x \qquad [1.15]$$

5. **Substitutionsregel**

$$g(x) = y \qquad \int f(y) \mathrm{d}y = \int f\big(g(x)\big) g'(x) \mathrm{d}x \qquad [1.16]$$

Beispiel zur Anwendung der Regeln 1) und 2)

$$f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 5x$$

$$F(x) = \int (3x^3 + 3x^2 + 5x)\, \mathrm{d}x = \cdots$$

nun werden die Regeln 1) und 2) konsequent angewendet.

$$\cdots = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}3x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

$$= \frac{3}{4}x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

An diesem Beispiel sehen Sie, dass $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$ ist.

Rechnen Sie es einmal durch!

$$\left(\frac{3}{4}x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2\right)' = 3x^3 + 3x^2 + 5x$$

Aber Sie können auch noch etwas anderes erkennen.

$f(x)$ ist auch die Ableitung von

$$\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3$$

oder

$$\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 5$$

denn Konstanten werden beim Ableiten zu 0. Deshalb gilt die Form:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Beispiel zur Anwendung der partiellen Integration

Lösen Sie folgendes Integral:

$$\int 2x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Die passende Formel lautet:

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Sie bestimmen, was f und g‘ sein sollen, z. B.: $f(x) = 2x$, $g'(x) = \cos x$

Dann ist $f'(x) = 2$ und $g(x) = \sin x$.

Nun wird die partielle Integration angewendet:

$$\int 2x \cos x \, \mathrm{d}x = 2x \sin x - \int 2 \sin x \, \mathrm{d}x$$

Jetzt ist zwar immer noch ein Integral vorhanden, aber es ist um einiges leichter zu lösen als das ursprüngliche:

$$2x \sin x - \int 2 \sin x \, \mathrm{d}x = 2x \sin x - 2\int \sin x \, \mathrm{d}x = 2x \sin x + 2 \cos x$$

Beispiel zur Anwendung der Substitutionsregel

$h(x) = (3x^2 + 4)^6 6x$

Es soll das Integral $\int (3x^2 + 4)^6 6x \mathrm{d}x$ gelöst werden.

Hier ist nun Fantasie erforderlich:

$$\int f(y)\mathrm{d}y = \int f\big(g(x)\big)g'(x)\mathrm{d}x$$

Wenn Sie sich die Struktur der Funktion h anschauen und mit der rechten Seite der Substitutionsregel vergleichen, dann können Sie die Funktion g mit $(3x^2 + 4)$ identifizieren.

Die Funktion f ist dann $(\quad)^6$.

Somit wird aus $f\big(g(x)\big)$ dann $(3x^2 + 4)^6$. Nun fehlt noch $g'(x)$.

$g'(x) = 6x$ und auch diese Komponente ist in h enthalten. Die Struktur der rechten Seite ist also gegeben, und jetzt können Sie $y = (3x^2 + 4)$ setzen.

Aus $\int (3x^2 + 4)^6 6x \mathrm{d}x$ wird nun $\int y^6 \mathrm{d}y$, also ein Integral, das sehr einfach zu lösen ist:

$$\int y^6 \mathrm{d}y = \frac{1}{7} y^7$$

Dann können Sie für y wieder die ursprüngliche Funktion einsetzen:

$$\int (3x^2 + 4)^6 6x \mathrm{d}x = \frac{1}{7}(3x^2 + 4)^7$$

Ob Sie richtig gerechnet haben, können Sie immer überprüfen, indem Sie die Funktion ableiten. Es muss dann wieder die zu integrierende Funktion als Ergebnis herauskommen:

$$\left(\frac{1}{7}(3x^2 + 4)^7\right)' = \frac{7}{7}(3x^2 + 4)^6 6x = (3x^2 + 4)^6 6x$$

Für Ungeübte gehört die Anwendung der Substitutionsregel zur hohen Kunst der Mathematik, und ich würde lügen, wenn ich behaupten würde, dass das einfach ist. Daher gibt es Tabellen, in denen man die gängigen Substitutionen nachlesen kann.

Flächenberechnung mithilfe der Integralrechnung

Die praktische Anwendung der Integralrechnung ist, wie anfangs schon erwähnt, die Flächenberechnung. Die zentrale Frage lautet: Wie groß ist die Fläche, die die Funktion mit der x-Achse einschließt?

Hierzu werden die Flächenbegrenzungen, also die Schnittpunkte mit der x-Achse, als Integralgrenzen eingesetzt:

$$\int_a^b f(x) = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \qquad [1.17]$$

Die Gleichung aus [1.17] trägt den großen Namen *Hauptsatz der Integralrechnung*.

Da Flächeninhalte positive Werte sind, wird bei Flächen, die sich unterhalb der x-Achse befinden, der Betrag der Fläche als Flächeninhalt angegeben. Schauen Sie sich dazu Abbildung 1.11 an, die dies verdeutlicht.

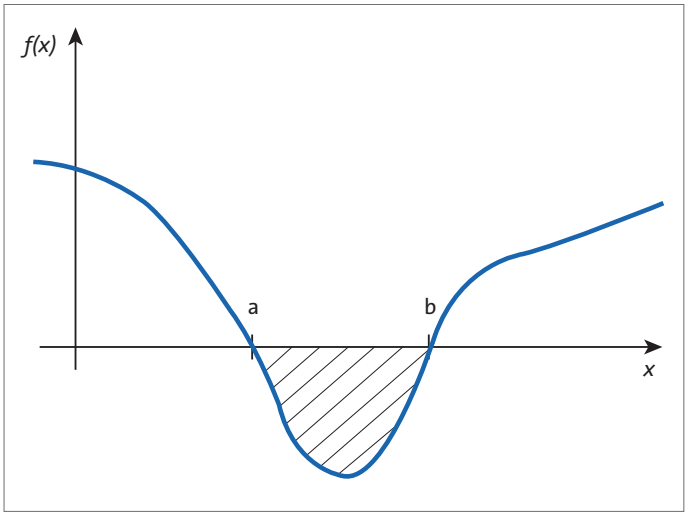


Abbildung 1.11 Die Fläche befindet sich hier z. B. unterhalb der x-Achse.

Beispiel zur Flächenberechnung mithilfe der Integralrechnung

Wie groß ist die Fläche, die die Funktion $f(x) = 3x^2 - 3$ mit der x-Achse einschließt?

Die Nullstellen, also die Schnittpunkte mit der x-Achse, sind $x = -1$ und $x = 1$ (siehe Abbildung 1.12).

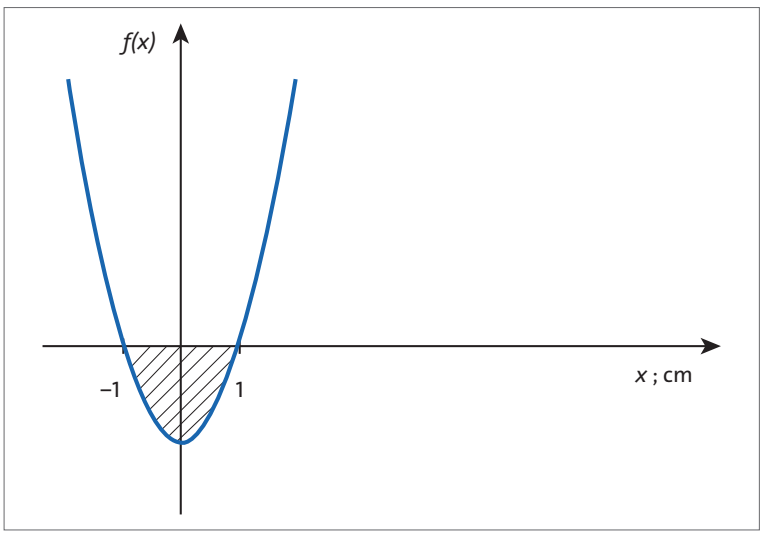


Abbildung 1.12 $f(x) = 3x^2 - 3$

Also lautet das Integral:

$$\int_{-1}^{1} 3x^2 - 3 = \frac{3}{3}x^3 - 3x\Big|_{-1}^{1} = x^3 - 3x|_{-1}^{1}$$
$$= 1^3 - 3 \cdot 1 - \big((-1)^3 - 3 \cdot (-1)\big) = 1 - 3 - (-1 + 3)$$
$$= -4$$

Eine Fläche kann aber nicht negativ sein. Das Minuszeichen besagt hier, dass die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, und der Flächeninhalt ist 4 Flächeneinheiten. Je nachdem, welche Einheiten für die x- und y-Achse gewählt wurden, sieht die Flächeneinheit anders aus, hier sind es cm^2.

Um zu vermeiden, dass sich Flächeninhalte gegeneinander aufheben, weil ein Teil oberhalb der x-Achse und ein anderer unterhalb der x-Achse liegt, teilt man eine Fläche in mehrere Teilflächen auf.

Man integriert von Nullstelle zu Nullstelle zu Nullstelle, und die negativen Anteile werden in Betragsstriche gesetzt, wie zum Beispiel beim Sinus, den Sie in Abbildung 1.13 sehen.

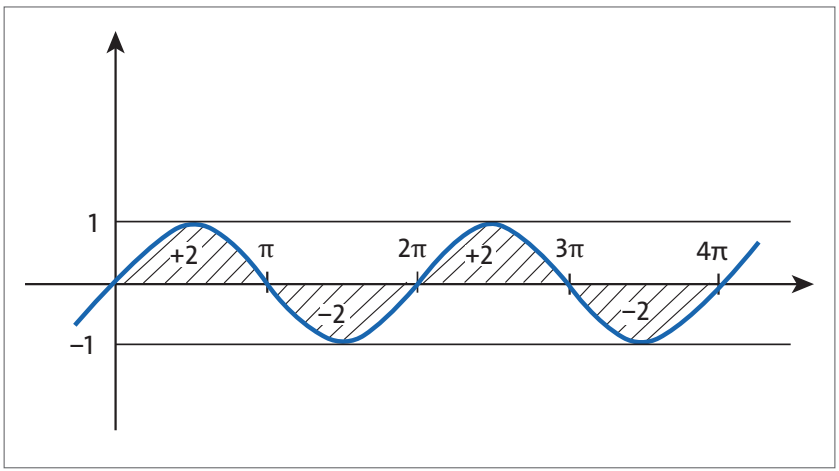


Abbildung 1.13 Flächen einer Sinusfunktion

$$\int_0^{4\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x \, dx + \left| \int_{3\pi}^{4\pi} \sin x \, dx \right|$$

1.4 Übungen

Aufgabe 1

Geben Sie folgende Daten in SI-Basiseinheiten an, und benutzen Sie dabei, falls nötig, Zehnerpotenzen.

a) 17 mm

b) 600 nm

c) 2 h 10 min 8 s

d) 60 $\frac{\text{dm}}{\text{min}}$

e) 750 MN

f) 2 km^2

g) 300 cm^3

h) 20 °C

i) 320 kW

j) 0,025 kWh

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die unten aufgeführten Energieformeln alle die Einheit Joule $\left(\text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right)$ besitzen.

$E = mgh$	g = Erdbeschleunigung, m = Masse
$E = \frac{m}{2}v^2$	v = Geschwindigkeit, m = Masse
$E = p \cdot V$	p = Druck, V = Volumen
$E = \frac{m}{2}a^2t^2$	a = Beschleunigung, t = Zeit, m = Masse

b) In den folgenden Energieformeln tauchen unbekannte Größen und Konstanten auf.

Finden Sie die Einheiten dieser Größen, und geben Sie diese in SI-Einheiten an.

Elektrische Energie gesucht: U Spannung	$E = UIt$	I = Stromstärke t = Zeit
Spannenergie gesucht: D Federkonstante	$E = \frac{1}{2}Ds^2$	s = Strecke
Im Kondensator gespeicherte Energie gesucht: C Kapazität	$E = \frac{1}{2}Q^2C$	Q = Ladung, $[Q]$ = As
Magnetische Energie gesucht: L Induktivität	$E = \frac{1}{2}L\,I^2$	I = Stromstärke

Aufgabe 3

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

a) $h(x) = \frac{x}{1-x}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

c) $h(x) = x^2 \cos x$

d) $h(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$

g) $h(x) = (7x-1)^4 x^{-2}$

Aufgabe 4

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) i) $\int_0^4 x^2 + 2x \, dx$

ii) Berechnen Sie die Fläche, die i) mit der x-Achse innerhalb der Grenzen 0 und 4 einschließt.

b) $\int_1^2 5 - \frac{2}{x^2} \, dx$

c) $\int_0^3 \sqrt{x} \, dx$

d) $\int_0^3 \sqrt{2x+3} \, dx$

e) $\int_0^3 6x\sqrt{x^2+3} \, dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x-\pi) \, dx$

Berechnen Sie die Fläche, die der Graph der Funktion $f(x) = x^2 - x - 2$ mit der x-Achse einschließt.

1.5 Lösungen

Lösung 1

a) $17 \text{ mm} = 0{,}017 \text{ m} = 17 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

b) $600 \text{ nm} = 600 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

c) $2 \text{ h } 10 \text{ min } 8 \text{ s} = 7200 \text{ s} + 600 \text{ s} + 8 \text{ s} = 7808 \text{ s}$

d) $60 \frac{\text{dm}}{\text{min}} = \frac{6 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 0{,}1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

e) $750\ \mathrm{MN} = 750 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{kgm}}{s^2}$

f) $2\ \mathrm{km}^2 = 2 \cdot (10^3\ \mathrm{m})^2 = 2 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^2$

g) $300\ \mathrm{cm}^3 = 300 \cdot (10^{-2}\ \mathrm{m})^3 = 300 \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^3$

h) $20\ °\mathrm{C} = 273{,}16\ \mathrm{K} + 20\ \mathrm{K} = 293{,}16\ \mathrm{K}$

i) $320\ \mathrm{kW} = 320 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 320 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^3}$

j) $0{,}025\ \mathrm{kWh} = 25\ \mathrm{W} \cdot 3600\ \mathrm{s} = 90000\ \mathrm{Ws} = \frac{90000\ \mathrm{Nms}}{\mathrm{s}}$
$= 90000 \frac{\mathrm{kgm}^2\mathrm{s}}{\mathrm{s}^3} = 90000 \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2}$

Lösung 2

a) Energieformeln

$$[mgh] \rightarrow \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{m} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{J}$$

$$\left[\frac{\mathrm{m}}{2}\mathrm{v}^2\right] \rightarrow \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{J}$$

$$[pV] \rightarrow \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\mathrm{m}^3 = \frac{\mathrm{kgmm}^3}{\mathrm{s}^2\mathrm{m}^2} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{J}$$

$$\left[\frac{\mathrm{m}}{2}a^2t^2\right] \rightarrow \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}\mathrm{s}^2 = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{J}$$

b) Einheiten umrechnen

$$E = UIt \Leftrightarrow U = \frac{E}{It}$$

$$\left[\frac{E}{It}\right] \rightarrow \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{As}^2\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kgm}^3}{\mathrm{As}^3}$$

$$E = \frac{1}{2}Ds^2 \Leftrightarrow D = \frac{2E}{s^2}$$

$$\left[\frac{2E}{s^2}\right] \rightarrow \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$$

$$E = \frac{1}{2}CQ^2 \Leftrightarrow C = \frac{2E}{Q^2}$$

$$\left[\frac{2E}{Q^2}\right] \rightarrow \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2\mathrm{A}^2\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^4}$$

$$E = \frac{1}{2} L I^2 \Leftrightarrow L = \frac{2E}{I^2}$$

$$\left[\frac{2E}{I^2}\right] \rightarrow \frac{\mathrm{kgm^2}}{\mathrm{s^2 A^2}} = \frac{\mathrm{kgm^2}}{\mathrm{A^2 s^2}}$$

Lösung 3

a) Quotientenregel

$$h(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$f(x) = x, \quad f'(x) = 1 \text{ und } g(x) = 1 - x, \; g'(x) = -1$$

$$h'(x) = \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

b) Kettenregel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\,(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = -x\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$$

c) Produktregel

$$h(x) = x^2 \cos x$$

$$f(x) = x^2, \;\; f'(x) = 2x \;\text{ und } g(x) = \cos x\,, \; g'(x) = -\sin x$$

$$h'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$$

d) Quotientenregel

$$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f(x) = \sin x\,, f'(x) = \cos x \text{ und } g(x) = \cos x\,, \; g'(x) = -\sin x$$

$$h'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

e) Kettenregel

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 1 = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

f) Kettenregel

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{1}{3}\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

g) Produktregel

$$h(x) = (7x-1)^4 x^{-2}$$

$$f(x) = (7x-1)^4, \qquad f'(x) = 21(7x-1)^3$$

$$g(x) = x^{-2}, \qquad g'(x) = -2x^{-3}$$

$$h'(x) = 21(7x-1)^3 x^{-2} - 2x^{-3}(7x-1)^4$$

Lösung 4

a) i)

$$\int_0^4 x^2 + 2x \, dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2\Big|_0^4 = \frac{1}{3}x^3 + x^2\Big|_0^4 = \frac{1}{3}4^3 + 4^2 - 0 = \frac{112}{3}$$

ii) Frage: Gibt es innerhalb des Intervalls [0,4] Schnittpunkte mit der x-Achse, also Nullstellen, sodass ein Teil der Fläche negativ wird?

Nullstellen: $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$

Die Nullstellen liegen außerhalb des Intervalls, also entspricht die Fläche dem Integral aus i). Der Inhalt beträgt $\frac{112}{3}$ Flächeneinheiten.

b)

$$\int_1^2 5 - \frac{2}{x^2} \, dx$$

$$= \int_1^2 5 - 2x^{-2} \, dx = 5x - (-1) \cdot 2x^{-1}\Big|_1^2 = 10 + 1 - (5+2) = 4$$

c)

$$\int_0^3 \sqrt{x} dx = \int_0^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{2}{3}3^{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{2}{3}\sqrt{3 \cdot 9} = 2\sqrt{3}$$

d)

$$\int_0^3 \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (2x+3)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

Hier sehen Sie eine verkettete Funktion $g(x) = 2x + 3$ und f, die eine Wurzelfunktion ist. Also muss hier die Substitutionsregel angewendet werden:

$$\int f(y)\mathrm{d}y = \int f\big(g(x)\big)g'(x)\mathrm{d}x$$

$g(x) = 2x + 3,\ g'(x) = 2$

Die 2 ist in dem Integral aber nicht zu finden, also stimmt die Struktur nicht – noch nicht: Die 2 ist ein konstanter Faktor und Faktoren kann man unter dem Integral stehen lassen oder davorziehen.

Aus

$$\int_0^3 (2x+3)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

machen Sie:

$$\frac{1}{2}\int_0^3 2(2x+3)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

Sie haben jetzt durch 2 geteilt und dann mit 2 multipliziert, also nichts verändert.

$$\frac{1}{2}\int_0^3 2(2x+3)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \cdots$$

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{2}\int y^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$$

$$\ldots = \frac{1}{3}\,(2x+3)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{27}{3} - \frac{\sqrt{27}}{3} = 9 - \sqrt{3}$$

e)

$$\int_0^3 6x\sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x = \int_0^3 3\cdot 2x\sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x = 3\int_0^3 2x\sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x = \cdots$$

$g(x) = x^2 + 3, g'(x) = 2x$

Nebenrechnung:

$$3\int y^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y = 2y^{\frac{3}{2}}$$

$$\ldots = 2(x^2+3)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = 42\sqrt{3}$$

f) Kettenregel

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x-\pi)\,\mathrm{d}x = \cdots$$

$$g(x) = 2x - \pi,\ g'(x) = 2$$

$$\ldots = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin(2x-\pi)\,\mathrm{d}x = \cdots$$

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{2}\int \sin y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(-\cos y)$$

$$\ldots = \frac{1}{2}(-\cos(2x-\pi))\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{3}{4}$$

g) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Nullstellen:

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \vee x = 0$$

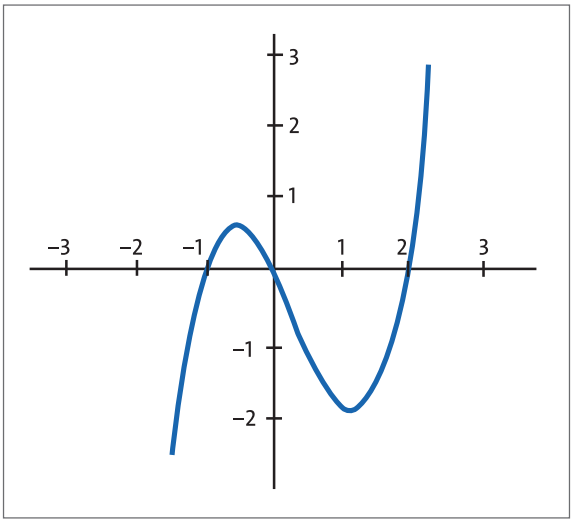


Abbildung 1.14 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Die Funktion muss also teilweise auch unterhalb der x-Achse verlaufen (siehe Abbildung 1.14), daher werden die Flächen einzeln ausgerechnet. Von der negativen Fläche wird der Betrag als Flächeninhalt hinzugerechnet.

Die zu lösende Aufgabe wird somit zu:

$$\int_{-1}^{0} x^3 - x^2 - 2x \, \mathrm{d}x + \left| \int_{0}^{2} x^3 - x^2 - 2x \, \mathrm{d}x \right|$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \Big|_{-1}^{0} + \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \Big|_{0}^{2} \right|$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) + \left| \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 8 - 4 - 0 \right|$$

$$= \frac{5}{12} + \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{37}{12}$$

Kapitel 2
Elektrische Ladung und Potenzial

In diesem Kapitel werden grundlegende Begriffe allgemeinverständlich erklärt. Bei Potenzial, Spannung, Energie und Leistung wird bewusst auf komplizierte mathematische Erklärungen verzichtet. Diese werden in Kapitel 3 behandelt.

Was ist eigentlich Ladung? Den Begriff *Ladung* kennen Sie aus dem täglichen Leben: Man belädt ein Auto oder man ist geladen, wenn man wütend ist. Mit dem physikalischen Begriff der Ladung bzw. mit der elektrischen Ladung hat das aber nicht besonders viel zu tun. Der Begriff der Ladung muss also hergeleitet werden.

Dazu gehen wir in die Chemie und schauen uns ein Atom etwas genauer an, denn dort finden wir die kleinsten Ladungen, die wir kennen.

2.1 Das Bohrsche Atommodell

Das *Bohrsche Atommodell* ist eine sehr grobe Vereinfachung des Aufbaus eines Atoms. Heute weiß man, dass das Ganze viel komplizierter ist, aber für unsere Zwecke ist dieses Modell völlig ausreichend. Nach Niels Bohr (1855–1962, Nobelpreis 1922) bestehen alle Elemente aus einem Kern und einer Hülle. Die Gesamtheit von Kern und Hülle nennt man *Atom* (siehe Abbildung 2.1).

Im *Kern* befinden sich *Teilchen*: Die sogenannten *Protonen*, die für Sie noch interessant werden, und die *Neutronen*, die im Zusammenhang mit der Elektrotechnik uninteressant sind.

Die Hülle beherbergt *Elektronen*, für Sie die zweite Art von interessanten Teilchen. Die Anzahl von Protonen und Elektronen in einem Element ist immer gleich.

Alle Elemente, die wir kennen, sind in einem System zusammengefasst, dem *Periodensystem*. Sie erinnern sich vielleicht noch an den Chemieraum in Ihrer Schule, an dessen Wand eine große Tabelle hing, die so ähnlich aussah wie Abbildung 2.2.

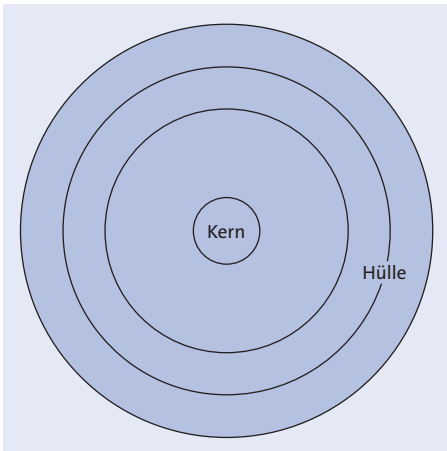


Abbildung 2.1 Aufbau eines Atoms

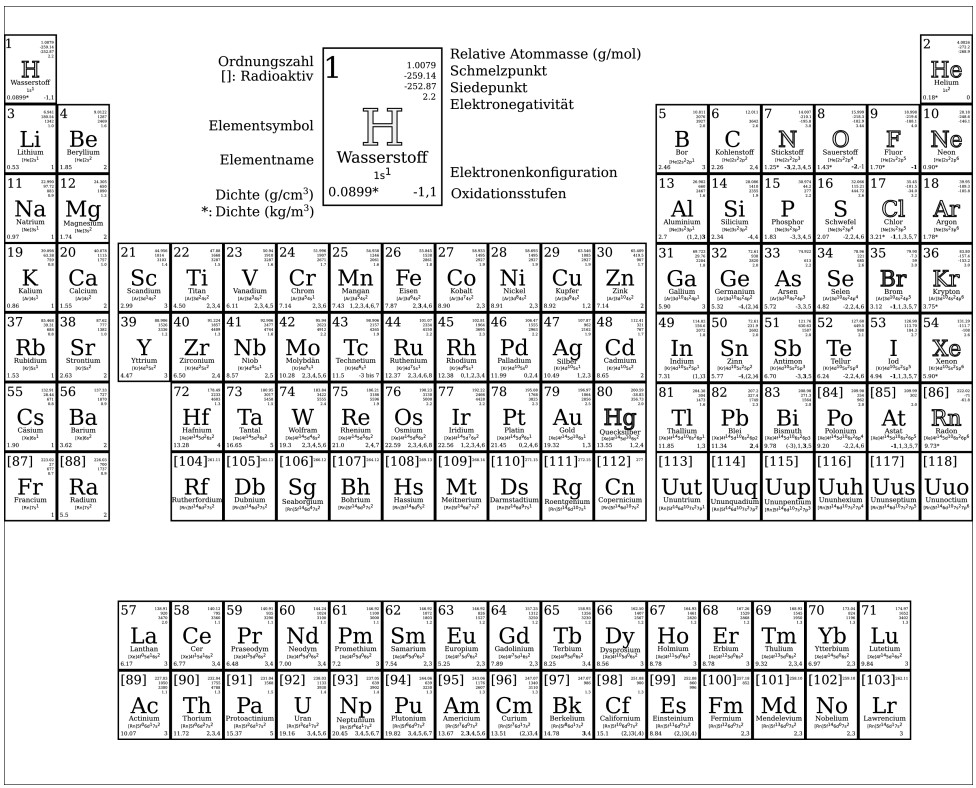


Abbildung 2.2 Das Periodensystem (Quelle: www.grund-wissen.de)

Im Periodensystem sind die Elemente nach der Anzahl ihrer Protonen (Ordnungszahl) geordnet, und zwar von 1 bis derzeit 118.

In der Hülle herrscht eine bestimmte Art von Ordnung: Die Elektronen bewegen sich auf bestimmten Bahnen und folgen festen Regeln. Diese Bahnen werden in der Chemie *Schalen* genannt und sie werden mit *K, L, M, N, O, P* bezeichnet, wobei *K* die innerste und *P* die äußerste Schale ist.

Die Schalen werden bei fast allen Elementen von innen nach außen aufgefüllt. Stellen Sie sich vor, dass sich die Elektronen auf Kreisbahnen um den Kern bewegen (siehe Abbildung 2.3). Auf der innersten Bahn befinden sich maximal 2 Elektronen, auf der zweiten Bahn maximal 8 Elektronen, auf der dritten maximal 18 Elektronen (siehe Tabelle 2.1). Die Verteilung folgt der Formel $2n^2$, wobei n die Nummer der Bahn darstellt.

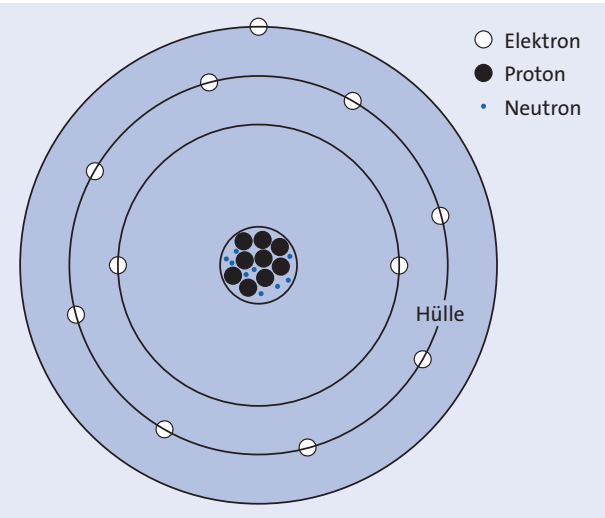


Abbildung 2.3 Elektronenverteilung am Beispiel eines Natriumatoms

An einem Beispiel wird dies deutlicher: Das Element Fluor verfügt über 9 Elektronen. Es ist nicht möglich, dass auf der *K*-Schale 1 Elektron ist, auf der *L*-Schale 6 Elektronen und auf der *M*-Schale 2 Elektronen. Stattdessen befinden sich von den insgesamt 9 Elektronen 2 auf der *K*-Schale und 7 auf der *L*-Schale. Die Elektronen sind also immer zum Kern hin orientiert, d.h. die Schalen werden von innen her (beginnend bei K) aufgefüllt und der Überschuss fällt entsprechend auf die nächste Schale Dieses System wird bis zum 20. Element, Calcium, konsequent eingehalten. Die dann folgenden Übergangsmetalle haben eine Sonderstellung, die später für den Begriff der *Leitfähigkeit* wesentlich ist.

Ordnungszahl	Name	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*
11	Natrium (Na)	2	8	1			
13	Aluminium (Al)	2	8	3			
14	Silizium (Si)	2	8	4			
17	Chlor (Cl)	2	8	7			
29	Kupfer (Cu)	2	8	18	1		
47	Silber (Ag)	2	8	18	18	1	
79	Gold (Au)	2	8	18	32	18	1

Tabelle 2.1 Elektronenverteilung einiger Elemente

Verbinden sich mindestens zwei Elemente, so entstehen neue Stoffe. Aus einer Verbindung von Sauerstoff mit Wasserstoff entsteht Wasser und aus Natrium und Chlor entsteht Kochsalz.

2.2 Ladung

Wenn Sie einem Proton ein Elektron gegenüberstellen, werden Sie feststellen, dass sich beide anziehen. Zwischen ihnen herrscht also eine *Anziehungskraft*.

Stehen sich entweder zwei Protonen oder zwei Elektronen gegenüber, so erkennen Sie, dass sie sich abstoßen. Hier herrscht also eine *Abstoßungskraft*.

Die Kraft zwischen Ladungen wird als *Coulombkraft* bezeichnet. Dazu erfahren Sie mehr in Kapitel 3, »Elektrostatik«.

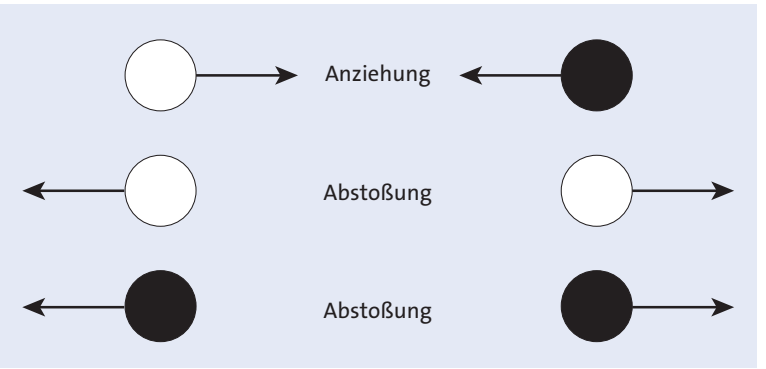


Abbildung 2.4 Kräfte zwischen Ladungen

Es gibt also zwei Sorten von Teilchen: Gleiche Teilchen stoßen sich ab und ungleiche Teilchen ziehen sich an. Schematisch finden Sie dies in Abbildung 2.4 dargestellt.

Die Teilchen werden als *positiv* und *negativ* bezeichnet. Als positiv (+) gelten die Protonen, während die Elektronen als negativ (–) bezeichnet werden. Interpretieren Sie aber nicht zu viel in diese Begriffe: Die Wahl, welches Teilchen als positiv und welches als negativ bezeichnet wird, war, als diese Bezeichnung damals festgelegt wurde, zufällig.

Merke

Man bezeichnet Teilchen als Ladung oder als geladen, wenn sie die folgenden Eigenschaften haben:

- Sie existieren als Einzelteilchen und es gibt zwei Sorten.
- Zwischen gleichen Teilchen herrscht eine *Abstoßungskraft*.
- Zwischen ungleichen Teilchen herrscht eine *Anziehungskraft*.

Natürlich gibt es auch noch andere Stoffe, die sich anziehen oder abstoßen, z. B. Massen oder Magnete, aber dies sind keine Ladungen in unserem Sinne, denn:

- Massen ziehen sich immer nur an. Es gibt keine Abstoßung und auch keine zwei Sorten.
- Magnete haben zwei Pole. Bringt man bei zwei Magneten die Süd- oder die Nordpole zusammen, so stoßen sie sich ab. Dreht man nun einen der Magnete um, so ziehen sie sich an. Hier haben wir also nur ein Teilchen mit beiden Eigenschaften, je nachdem wie herum man es dreht. Ein geladenes Teilchen hat aber nur eine Eigenschaft: entweder + oder –.

Eine wesentliche Größe, durch die Anziehungs- bzw. Abstoßungskräfte zwischen Ladungen bestimmt werden, sind die Ladungen selbst. Ein einzelnes Elektron bzw. Proton ist die kleinste Ladung, daher herrscht zwischen ihnen die kleinste Anziehungskraft. Aber die Anzahl der Ladungen oder auch deren Zusammensetzung spielt hier eine wesentliche Rolle. Dazu lesen Sie mehr in Kapitel 3. Hier müssen Sie ein wenig aufpassen, denn der Begriff Ladung ist zweifach besetzt: einmal als Bezeichnung für ein Teilchen wie im Merkkasten beschrieben, zum anderen gibt er an, wie »stark« Teilchen geladen sind:

Ein Teilchen ist eine Ladung und dieses Teilchen besitzt eine Ladung.

Elektronen und Protonen wird die sogenannte *Elementarladung* zugeordnet, sie »besitzen« die kleinste Ladung, die wir kennen, und sie gibt an, wie »stark« Elektronen bzw. Protonen geladen sind.

Ladung eines Elektrons: $1e^- = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As (Amperesekunde)

Ladung eines Protons: $1e = \quad 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As (Amperesekunde)

Zu Ehren von Charles Augustin de Coulomb (Physiker, 1736–1806) bekommt die Einheit der Ladung ihren Namen:

1 As = 1 C (Coulomb)

Das Formelzeichen der Ladung ist Q.

Zusammenfassung: Ladung

Formelzeichen	Q
Einheit	As oder C
Elementarladung	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As

2.3 Energie, Potenzial und Leistung

2.3.1 Potenzial

Setzt man ein geladenes Teilchen an einem bestimmten Ort fest, so übt dieses Teilchen auf andere Ladungen, die in seinen Wirkungskreis kommen, eine Kraft aus. Das Kraftfeld, das von dieser Ladung gebildet wird, nennt man *elektrisches Feld*.

Das Feld wird durch sogenannte *Feldlinien* dargestellt. Bei punktförmigen Ladungen befindet sich das Kraftfeld kugelförmig abstrahlend um diese Ladung herum. Je weiter man sich von der Ladung entfernt, desto schwächer wird die Kraftwirkung.

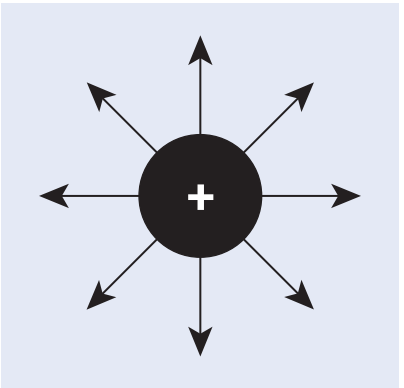


Abbildung 2.5 Elektrisches Feld eines Protons (zweidimensionale Darstellung)

Kräfte können als Vektoren dargestellt werden, und ein Kraftfeld, wie z. B. das elektrische Feld, ist ein sogenanntes *Vektorfeld*.

Bei positiven Ladungen laufen die Feldlinien von der Ladung weg (siehe Abbildung 2.5) und bei negativen Ladungen zur Ladung hin (siehe Abbildung 2.6).

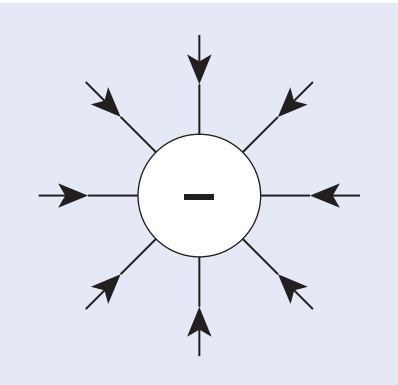


Abbildung 2.6 Elektrisches Feld eines Elektrons (zweidimensionale Darstellung)

Abbildung 2.7 zeigt ein Feld, das sich zwischen zwei Teilchen bildet.

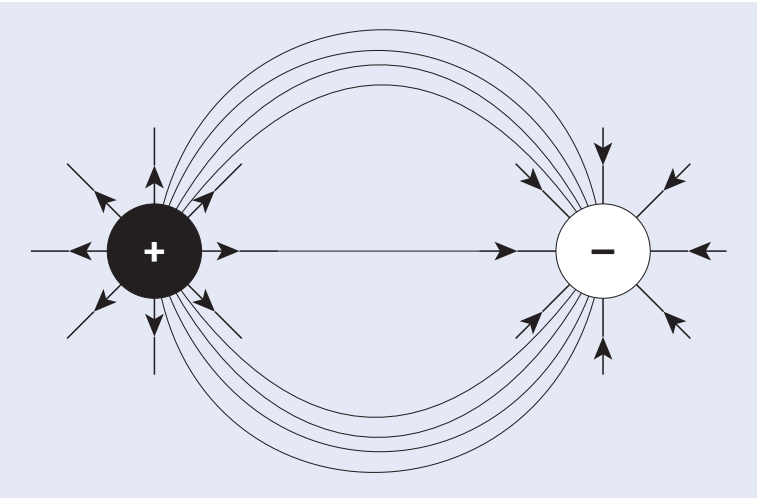


Abbildung 2.7 Das Feld zwischen einem Elektron und einem Proton

Angenommen, die festgesetzte Ladung ist positiv, dann werden negative Teilchen von ihr angezogen und positive Teilchen abgestoßen (siehe Abbildung 2.8).

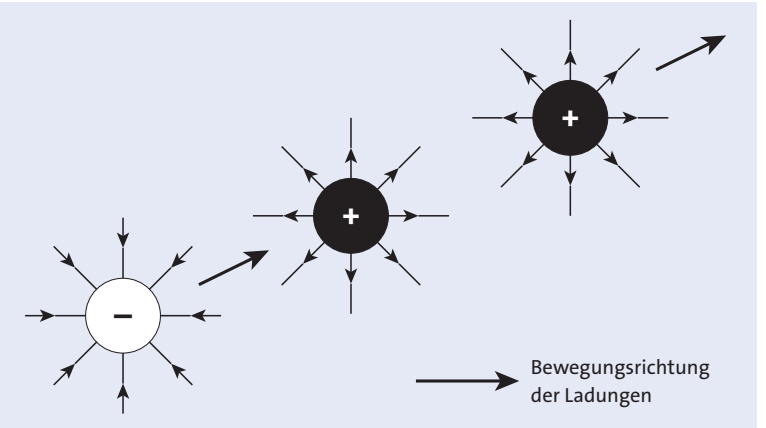


Abbildung 2.8 Bewegungen im Kraftfeld einer Ladung

Die Wirkung dieses Feldes wird verstärkt, wenn Sie statt einer Ladung zwei Ladungen festsetzen. Die *Feldstärke* verhält sich also proportional zur Anzahl der Ladungen und somit auch zur »Größe« der Ladung.

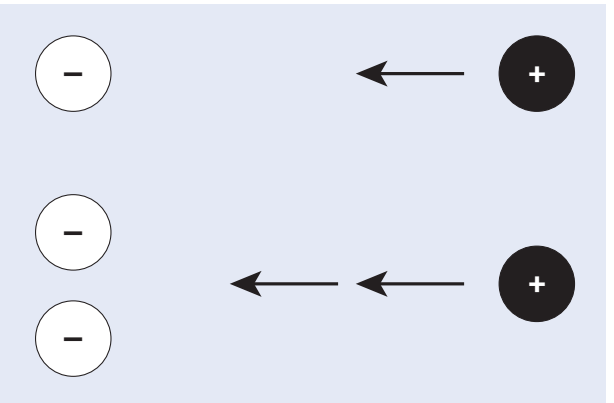


Abbildung 2.9 Kräfte zwischen Ladungen

Die Stärke des Feldes hängt demzufolge auch von der Anzahl der Ladungen ab. Je mehr Ladungen sich an einem Ort befinden, desto größer ist die Feldstärke und desto größer ist die Kraft auf Ladungen, die sich in diesem Feld befinden. Im Endeffekt bewirkt dies, dass sich die freien Ladungen bei größerer Feldstärke schneller zur festen Ladung hinbewegen bzw. von ihr abgestoßen werden, je nach Ladungsart. Die Wirkung, die Sie beobachten können, ist somit die Beschleunigung der Ladungen (siehe Abbildung 2.9).

Die mögliche (potenzielle) Wirkung, die von Ladungen ausgeht, hängt also von der Anzahl der Elementarladungen (also Elektronen und Protonen) an einem Ort (Quelle) bzw. der Größe der Ladung ab sowie von der Entfernung der Quelle, denn je weiter die Quelle entfernt ist, desto kleiner ist die Beschleunigung. Die Größe *Feldstärke durch Abstand der ins Feld tretenden Ladung von der Quelle* wird als *Potenzial* bezeichnet. Das Potenzial an einem Ort ist groß, wenn die Quellladung groß ist und/oder wenn der Abstand des Ortes von der Quelle klein ist.

Das Potenzial bekommt das Formelzeichen U oder φ; in der amerikanischen Literatur, aber auch in einigen Physikbüchern sehen Sie stattdessen V. Die Einheit, in der das Potenzial angegeben wird, ist das *Volt* (V).

2.3.2 Energie

Schauen Sie sich das Verhalten von Ladungen noch mal unter dem Energieaspekt an. Tritt eine Ladung in ein elektrisches Feld ein, so wird sie beschleunigt und besitzt eine gewisse Bewegungsenergie. Diese Bewegungsenergie fällt aber nicht vom Himmel, sondern sie entsteht durch Umwandlung aus potenzieller Energie (siehe Abschnitt 2.4, »Elektrische Spannung«).

Wo steckt in diesem System nun die potenzielle Energie?

Da die Ladung nur beschleunigt wird, wenn sie in den Wirkungskreis einer anderen Ladung gerät, muss die potenzielle Energie etwas mit dem aufgebauten Kraftfeld zu tun haben (siehe Abbildung 2.10).

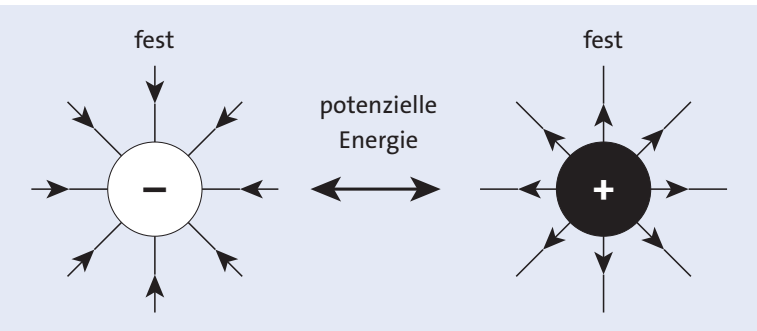


Abbildung 2.10 Potenzielle Energie zwischen Ladungen

Aber auch die beschleunigte Ladung spielt eine Rolle: Je größer die Ladung dieses Teilchens ist, desto besser lässt es sich anziehen. Besitzt es keine Ladung, so wird das Kraftfeld keinerlei Wirkung auf dieses Teilchen haben (siehe Abbildung 2.11).

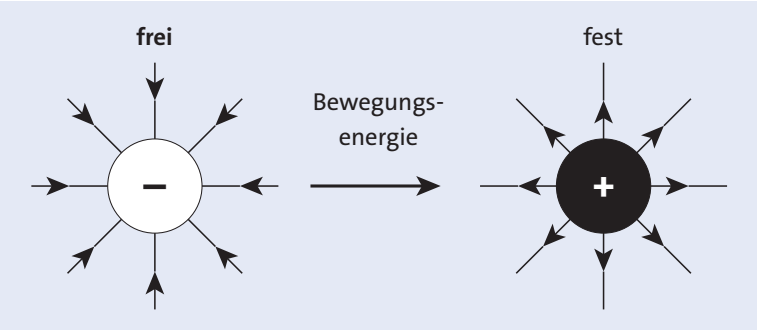


Abbildung 2.11 Bewegungsenergie zwischen Ladungen

Die potenzielle Energie setzt sich somit aus *Potenzial mal Ladung* zusammen:

[2.1] $$E_{\text{pot}} = \varphi \cdot Q$$

Sie hat die Einheit: $1\ \text{J} = 1\ \text{V} \cdot 1\ \text{As}$

2.3.3 Leistung

Leistung ist definiert als *Arbeit pro Zeit*. Diese Definition findet man auch im normalen Leben wieder: Man hat eine gute (große) Leistung erbracht, wenn man seine Arbeit schnell erledigt; dauert es sehr lange, um das gleiche Ergebnis zu erreichen, war die Leistung eher schlecht (klein).

Das Formelzeichen für die Leistung ist *P*, abgeleitet von *Power*.

Da potenzielle Energie gespeicherte Arbeit ist (siehe Abschnitt 2.4, »Elektrische Spannung«), können Sie Arbeit und Energie gleichsetzen.

Es gilt somit:

[2.2] $$P = \frac{E_{\text{pot}}}{t} = \frac{U \cdot Q}{t}$$

Ein Blick auf die Einheiten liefert:

$$1\ \frac{\text{V} \cdot \text{As}}{\text{s}} = 1\ \text{V} \cdot 1\ \text{A}$$

Als abgeleitete Größe bekommt die Leistung die Einheit *Watt*, nach James Watt, abgekürzt mit W:

$$1\ \text{W} = 1\ \text{V} \cdot 1\ \text{A}$$