

Fabian Suhrke

Fehler und Effizienz von Lösungsmethoden für Anfangs- und Randwertprobleme aus Flugbahnmodellen

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Copyright © 2009 Diplom.de
ISBN: 9783836628822

Fehler und Effizienz von Lösungsmethoden für Anfangs- und Randwertprobleme aus Flugbahnmodellen

Fabian Suhrke

Fehler und Effizienz von Lösungsmethoden für Anfangs- und Randwertprobleme aus Flugbahnmodellen

Fabian Suhrke

Fehler und Effizienz von Lösungsmethoden für Anfangs- und Randwertprobleme aus Flugbahnmodellen

ISBN: 978-3-8366-2882-2

Herstellung: Diplomica® Verlag GmbH, Hamburg, 2009

Zugl. Fachhochschule Regensburg, Regensburg, Deutschland, Diplomarbeit, 2009

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die Informationen in diesem Werk wurden mit Sorgfalt erarbeitet. Dennoch können Fehler nicht vollständig ausgeschlossen werden und der Verlag, die Autoren oder Übersetzer übernehmen keine juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für evtl. verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen.

© Diplomica Verlag GmbH

<http://www.diplomica.de>, Hamburg 2009

Abstrakt

In dieser Arbeit werden Fehler und Effizienz von Lösungsverfahren für das Flugbahnmodell nach STANAG 4355 analysiert. Für das Anfangswertproblem werden verschiedene ODE-Solver (Klassisches Runge-Kutta, Runge-Kutta Cash-Karp, Runge-Kutta Dormand-Prince, Burlisch Stoer, Semi-implizites Burlisch Stoer, Prädiktor-Korrektor Verfahren) für typische Flugbahnen untersucht. Mit Hilfe einer globalen Fehlerbestimmung mit der Methode der Defektkorrektur und verallgemeinerten Fehlermaßen zeigt sich, dass das Runge-Kutta Dormand-Prince Verfahren fünfter Ordnung am effizientesten arbeitet. Das bisher implementierte Runge-Kutta Cash-Karp Verfahren belegt den zweiten Platz.

Es werden Möglichkeiten zur analytischen Bestimmung der für das zweiseitige Randwertproblem benötigten Startwerte aufgezeigt.

Nach Untersuchung der Minimierungsalgorithmen (Newton, Broyden, Simulated Annealing, Brent) zur Lösung des Randwertproblems konnte festgestellt werden, dass das Broyden-Verfahren dem implementierten Newton-Verfahren überlegen ist.

In this thesis the error and efficiency for methods that solve the trajectory model of STANAG 4355 are analysed. Different ODE-Solver (classical Runge-Kutta, Runge-Kutta Cash-Karp, Runge-Kutta Dormand-Prince, Burlisch Stoer, semi-implicit Burlisch Stoer, Predictor-Corrector method) for the initial value problem are investigated for representative trajectories. Using the defect correction method to determine the global error and mixed measures it is shown that the Runge-Kutta Dormand-Prince method of fifth order works most efficient. On second place is implemented Runge-Kutta Cash-Karp.

Analytical start values for the two-side boundary value problem are analytically determined.

When analyzing the minimization algorithms (Newton, Broyden, Simulated Annealing, Brent) that can solve the boundary value problem it was shown that the Broyden-Method is superior to the implemented Newton-Method.

Inhalt

Erklärung zur Selbständigkeit	2
Abstrakt	3
1 Einleitung	8
1.1 Flugbahnberechnungen für Risikoanalysen	8
1.2 Zielsetzungen und Herausforderungen	8
1.3 Gliederung der Arbeit	9
2 Grundlagen	12
2.1 Ballistik	12
2.2 Koordinatensysteme	12
2.2.1 Erdfestes Koordinatensystem	12
2.2.2 Geozentrisches Koordinatensystem	13
2.2.3 Projektilfestes Koordinatensystem	14
2.3 Kräfte des STANAG 4355 – Modells	15
2.3.1 Hilfsgröße I: Aerodynamische Koeffizienten	15
2.3.2 Hilfsgröße II: Lieske Vektor	17
2.3.3 Schwerkraft	19
2.3.4 Corioliskraft	20
2.3.5 Magnus-Kraft	24
2.3.6 Auftriebskraft	25
2.3.7 Luftwiderstand	26
2.3.8 Drallstabilisierung	27
2.4 Allgemeines zu Flugbahnen	28
2.4.1 Einhüllende einer Flugbahnschar	28
2.4.2 Flugzeitenbetrachtung	28
2.5 Notwendige Definitionen über Differentialgleichungen	29
3 Differentialgleichungssystem des Flugbahnmodells nach STANAG 4355	31
3.1 Differentialgleichungssystem nach STANAG 4355	31
3.2 Anfangswerte	32
3.3 Zweiseitiges Randwertproblem	33
3.4 Randwertproblem mit festen Grenzen - Zeittransformation	34
3.5 Shooting-Methode zur Auffindung einer Lösung für ein zweiseitiges Randwertproblem	35
4 Verfahren und Kennzahlen zur Bestimmung der Effizienz von ODE-Solvern	38

4.1	Kennzahlen numerischer ODE-Solver	38
4.1.1	Rechenzeit (computing time)	38
4.1.2	Speicherplatz (array storage)	38
4.2	Genauigkeit (accuracy , precision)	39
4.3	Verlässlichkeit (reliability)	39
4.4	Robustheit (robustness)	39
4.5	Definition des lokalen Diskretisierungsfehlers	40
4.6	Verschiedene Verfahren zur Bestimmung des globalen Fehlers	43
4.6.1	Summation des lokalen Fehlers	44
4.6.2	Klassische Methode nach Isaacson und Keller für Einschrittverfahren	45
4.6.3	Schätzung des globalen Fehlers durch Variation des lokalen Fehlers	47
4.6.4	Schätzung des globalen Fehlers durch Variation der Schrittweite	50
4.6.5	Defektkorrektur	51
4.7	Zusammenfassung der Schätzverfahren zur Bestimmung des globalen Fehlers	57
5	Analyse der ODE-Solver	58
5.1	ODE-Solver nach Numerical Recipes	58
5.1.1	Klassisches Runge Kutta Verfahren vierter Ordnung	58
5.1.2	Adaptives Runge Kutta Verfahren fünfter Ordnung mit Cash-Karp Parametern	58
5.1.3	Adaptives Runge Kutta Verfahren fünfter Ordnung mit Dormand Prince Parametern	59
5.1.4	Adaptives Runge Kutta Verfahren achter Ordnung mit Dormand Prince Parametern	59
5.1.5	Burlisch Stoer Verfahren mit modifizierter Mittelpunkt Methode vierter Ordnung	59
5.1.6	Semi-implizites Extrapolationsverfahren nach Burlisch Stoer	59
5.1.7	Adaptives Prädiktor-Korrektor Verfahren mit Schrittweitenkontrolle	59
5.2	Numerische Experimente für einige ODE-Solver	60
5.2.1	Rechenzeit vs. Lokaler Fehler	61
5.2.2	Globaler Fehler vs. Lokaler Fehler	63
5.2.3	Rechenzeit vs. Globaler Fehler	66
5.3	Entwicklung eines Verfahrens zum Vergleich der konkurrierenden Ziele Rechenzeit und Genauigkeit	67
5.4	Darstellung der globalen Fehlerkurven	70
5.4.1	Globaler Fehler vs. Zeit	70
5.4.2	Darstellung der Schrittweitensteuerung	72
5.4.3	Polarkoordinatendarstellung des globalen Fehlers	73
5.4.4	Dreidimensionaler Plot des globalen Ortsfehlers	74

5.4.5	Fehleranteile	75
5.4.6	Weitere Features der Plots	76
5.5	Erkenntnisse über den globalen Fehler der Trajektorie	76
6	Optimierungsmöglichkeiten der Minimierungsalgorithmen	78
6.1	Guessed Values	78
6.1.1	Analytische Berechnung des Abschusswinkels für ein Flugbahnmodell im Vakuum bei flacher Erde	78
6.1.2	Performanceteigerung durch vorgeschaltete Flugbahnmodelle: Quadratisches Luftwiderstandsmodell für gestreckte Flugbahnen	80
6.2	Performancetest für verschiedene Minimierungsverfahren	82
6.2.1	Newtonverfahren	82
6.2.2	Simulated Annealing	82
6.2.3	Broyden	82
6.2.4	Brent	83
6.2.5	Brent und Newton	83
6.2.6	Vergleich der Verfahren	83
6.2.7	Zusammenfassung der Ergebnisse	85
7	Zusammenfassung und Ausblick	86
7.1	Zusammenfassung	86
7.2	Ausblick	88
8	Abbildungsverzeichnis	89
9	Tabellenverzeichnis	91
10	Literatur	92
11	Appendix A: Numerische Experimente und numerische Verfahren	95
11.1	Performancetest für vorgeschaltete Flugbahnmodelle	96
11.2	Herleitung der klassischen Methode zu Abschätzung des globalen Fehlers für ODE-Solver	100
11.3	Anwendung des Schätzers des globalen Fehlers durch Variation der Schrittweite auf Testprobleme	102
11.4	Anwendung der Defektkorrektur auf Testprobleme	105
11.5	Das Programm ODEINT mit Runge-Kutta Quality Control und einem Runge-Kutta 4. Ordnung	109
11.5.1	Allgemeines zu ODEINT	109
11.5.2	Einbettungsstrategie für Runge Kutta Familien	110
11.5.3	Lokale Extrapolation zur Schätzung des lokalen Fehlers	110
11.5.4	Runge-Kutta Quality Control	112

11.5.5	Die Routinen RK4 und DERIVS	114
12	Appendix B: Physikalische Modelle	115
12.1	Herleitung der Approximation für die Schwerkraft	115
12.2	Erklärung der Form des Luftwiderstandes	118
12.3	Analyse der Flugbahndauer für ein lineares Luftwiderstandsmodell	119
12.4	Erklärung der Auftriebskraft für Projektile	120
13	Appendix C: Analytische Flugbahnmodelle	122
13.1	Flugbahn(en) im Vakuum unter allgemeinen Bedingungen	122
13.2	Berechnung eines gestreckten Flugbahnmodelles mit quadratischem Luftwiderstand	123

1 Einleitung

In diesem Kapitel wird das Projekt „Fuze Safety Quantitative Risk Analysis“ und die Hintergründe für diese Diplomarbeit kurz vorgestellt (Abschnitt 1.1). Die Zielsetzung für die Arbeit werden in Abschnitt 1.2 gegeben und Herausforderungen angedeutet. Eine Übersicht über die restlichen Kapitel der Diplomarbeit vor dem Hintergrund der Fragestellung gibt Abschnitt 1.3.

1.1 Flugbahnberechnungen für Risikoanalysen

Das Fraunhofer-Institut für Kurzzeitdynamik (Ernst-Mach-Institut, kurz: EMI) untersucht unter dem Projektnamen „Fuze Safety Quantitative Risk Analysis“ (FSQRA) die Gefährdung von Personen in Überflugsszenarien mit Artillerie- und Mörsergeschossen [2].

Das Modell der Risikoanalyse basiert auf einer repräsentativen Flugbahn des Geschosses und viele tausende Flugbahnen von repräsentativen Fragmenten, die bei einem Schadensereignis durch Detonation des Geschosses entstehen.

Der mathematische Aufwand zur Berechnung der Flugbahnen, wird dabei durch das zugrundeliegende physikalische Modell bestimmt und reicht von trivial integrierbarer Gleichungen bis zu gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

In dieser Arbeit wurde ein von der NATO standardisiertes modifiziertes Punkt-Masse-Modell verwendet (engl. modified point mass model, MPMM). Das »NATO STANDARDIZATION AGREEMENT (STANAG) 4355« schreibt 5 Freiheitsgrade (Degrees of Freedom, DoF) für dieses MPMM vor [3].

1.2 Zielsetzungen und Herausforderungen

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist es eine bedienzeitsparende numerische Lösung der Differentialgleichungen auf Basis des Flugbahnmodells nach STANAG 4355 bereitzustellen, wobei die dabei auftretende Fehler bekannt und unter Kontrolle sein sollen.

Dafür ist es notwendig alle auftretenden physikalischen Kräfte und der daraus abgeleiteten Anfangs- und zweiseitige Randwertprobleme hinreichend zu untersuchen, um so einen Eindruck für die Komplexität des Problems zu bekommen und um nachfolgende numerische Zusammenhänge zu verstehen.

Um die Genauigkeit der Flugbahn des Projektils zu beschreiben, müssen Kennzahlen eingeführt werden, um die numerischen Abweichungen zur exakten Lösung messen zu können. Hierbei ist es notwendig die verschiedenen Fehlerschätzungen für Anfangswertprobleme zu studieren, um damit die verschiedenen ODE-Solver aus der Numerical Recipes Bibliothek [4] bezüglich ihrer Genauigkeit zu vergleichen. In ähnlicher Weise muss eine Minimierungsaufgabe numerisch gelöst werden.

Zusammenfassend stellt sich die Frage, welche Fehlermaße auf welche Weise für die einzelnen numerischen Verfahren zur Lösung von Anfangs- und Randwertprobleme berechnet werden können, wie aussagekräftig sie sind und ob es möglich ist eine einzige Kennzahl zu konstruieren, die alle Verfahren vergleichbar macht.

Eine Herausforderung der Diplomarbeit ist es den globalen Fehler für Differentialgleichungsverfahren zu beschreiben, da hierbei erst a posteriori die Schwächen des Schätzverfahrens sichtbar werden. Des weiteren ist die Implementierung der gewünschten Visualisierung in C++ mit dem Graphik-Tool TeeChart herausfordernd.

Um das Potential analytischer Lösungen abschätzen zu können wird versucht werden, die auftretenden physikalischen Kräfte analytisch zu untersuchen und z.B. aus der Differentialgleichung zu entkoppeln. Aber da selbst die Lösung einfacher analytischer Flugbahnmodelle schwierig ist, wie ein analytisch berechnetes quadratisches Luftwiderstandsmodell zeigt, werden diese Untersuchungen nur unterstützende Funktion haben können.

1.3 Gliederung der Arbeit

Im nächsten Kapitel 2 werden die notwendigen Grundlagen zur Bestimmung der Anfangs- und Randwertprobleme nach STANAG 4355 erklärt. Dabei wird auf die einzelnen physikalischen Kräfte eingegangen, die auf das Projektil wirken. Weiterhin werden die relevanten Begriffe und Definitionen von Differentialgleichungen erläutert.

In Kapitel 3 kann dann mit den vorher eingeführten Größen das Differentialgleichungssystem des Flugbahnmodells nach STANAG 4355 definiert und in eine numerisch effiziente Form für ODE-Solver gebracht werden.

Das darauffolgende Kapitel 4 beschäftigt sich mit Verfahren zur Bestimmung des Fehlers und der Effizienz numerischer Lösungsverfahren von

Differentialgleichungen, insbesondere Rechenzeit, lokaler (Diskretisierungs-) Fehler, globaler Fehler und Methoden zur Bestimmung des globalen Fehlers.

Dies ist notwendig, damit die Vielzahl von ODE-Solver miteinander verglichen werden können.

Die Anwendung eines dieser vorgestellten Verfahren, der Defektkorrektur, wird im Kapitel 5 diskutiert. In diesem Abschnitt werden auch die verwendeten ODE-Solver vorgestellt. Mithilfe der Kennzahlen in Kapitel 4 kann letztendlich das effizienteste ODE-Verfahren für das dreidimensionale Flugbahnmodell bestimmt werden.

In Kapitel 6 werden die benötigten Startwerte des zweiseitigen Randwertproblems analytisch bestimmt und die effizienteste Minimierungsmethode ermittelt.

Abschliessend werden in der Zusammenfassung die numerischen Ergebnisse zusammengetragen und zukünftige mögliche Verbesserungen der numerischen Rechenmethoden aufgezeigt. In Abbildung 1.1 ist die Struktur der Diplomarbeit zusammengefasst.