Jörg Krämer

Delaunay-Triangulierungen in zwei und drei Dimensionen

Diplomarbeit

Diplom.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de/ abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlages. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Copyright © 1995 Diplomica Verlag GmbH
ISBN: 9783832466466

http://www.diplom.de/e-book/222033/delaunay-triangulierungen-in-zwei-und-drei-dimensionen

Jörg Krämer

Delaunay-Triangulierungen in zwei und drei Dimensionen

Diplom.de

Jörg Krämer

Delaunay-Triangulierungen in zwei und drei Dimensionen

Diplomarbeit
an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Fachbereich Informatik 17
Wilhelm-Schickard-Institut Graphische Systeme (WSI-GRIS)
November 1995 Abgabe

Diplom.de

Diplomica GmbH
Hermannstal 119k
22119 Hamburg

Fon: 040 / 655 99 20
Fax: 040 / 655 99 222

agentur@diplom.de
www.diplom.de

ID 6646
Krämer, Jörg: Delaunay-Triangulierungen in zwei und drei Dimensionen
Hamburg: Diplomica GmbH, 2003
Zugl.: Tübingen, Universität, Diplomarbeit, 1995

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die Informationen in diesem Werk wurden mit Sorgfalt erarbeitet. Dennoch können Fehler nicht vollständig ausgeschlossen werden, und die Diplomarbeiten Agentur, die Autoren oder Übersetzer übernehmen keine juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für evtl. verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen.

Diplomica GmbH
http://www.diplom.de, Hamburg 2003
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **6**

1.1 Definitionen 6

1.1.1 Graph 6

1.1.2 Simplex, Facette und Kugel 6

1.1.3 Polygon, Polygonnetz und Polyeder 7

1.1.4 Konvexe Hülle 8

1.1.5 Triangulierung 9

1.1.6 Voronoi-Diagramm 10

1.1.7 Delaunay-Triangulierung 12

1.1.8 Delaunay-Triangulierung im $\mathbb{R}^2$ 13

1.1.9 Delaunay-Tetraedrisierung im $\mathbb{R}^3$ 13

1.1.10 Zusammenhang mit konvexen Polyedern 14

1.2 Berechnung der Umkugel 15

1.2.1 Umkugel-Kriterium 15

1.2.2 Berechnung der Umkugel 16

1.3 Numerische Probleme 17

2 Die Algorithmen **19**

2.1 Der Flipping-Algorithmus 20

2.2 Der Plane-Sweep-Algorithmus 23

2.3 Der Einfüge-Algorithmus 30

2.3.1 Der randomisierte inkrementelle Algorithmus 34

2.3.2 Strukturen zum Lokalisieren für den Einfüge-Algorithmus . . 35

2.3.3 Der Einfüge-Algorithmus im $\mathbb{R}^3$ 41

2.4 Algorithmen mit Suchstrukturen 44

2.4.1 Das reguläre Gitter 44

2.4.2 Die spärliche Matrix 45

2.4.3 Die Berechnung des Startdreiecks 45

2.4.4 Die Berechnung des dritten Punktes 46

2.4.5 Die Shelling-Methode 49

2.4.6 Der Algorithmus im $\mathbb{R}^3$ 51

2.5 Der Divide-and-Conquer-Algorithmus 56

2.6 Der Delaunay-Wall-Algorithmus 58

2.7 Vergleich der Algorithmen 63

3 Datenstrukturen und Klassen **74**
3.1 Polygonale Netze 74
3.2 Tetraedrisierungen 77

4 Visualisierung **81**
4.1 Die Schichten-Methode 81
4.2 Die Ebenenmethode 82
4.3 Die Strahlmethode 83
4.4 Die Picking-Methode 84
4.5 Die Explosionsmethode 84
4.6 Das Visualisierungsprogramm showTetra 85

5 Anwendungen **87**
5.1 Netzgenerierung 87
5.1.1 Bedingte Delaunay-Triangulierung 87
5.1.2 Delaunay-Triangulierung von Polygonen 89
5.1.3 Algorithmus zum Verfeinern von Netzen 90
5.2 Die Methode der Finite Elemente 91
5.3 Modellierung und Visualisierung von Flächen 91
5.4 Stereolithographie 92

Einleitung

Das Voronoi-Diagramm und sein Dual, die Delaunay-Triangulierung, haben in vielen Gebieten der Naturwissenschaft und der Technik Anwendung gefunden, wie z.B. in der Kristallographie, in der Geographie und in der Metallurgie. Nachdem am Anfang dieses Jahrhunderts der russische Mathematiker Georges Voronoi [Vor07], [Vor08] Veröffentlichungen über die nach ihm benannte Struktur schrieb, verwendete in den 30er Jahren der Kristallograph Delaunay [Del32], [Del34] diese Struktur für die Simulation von Kristallwachstum sowie zur Beschreibung und Untersuchung von Kristallstrukturen. Diese Strukturen entstehen im wesentlichen durch gleichmäßiges Wachstum von Regionen, das bei regulär im Raum angeordneten Punkten beginnt und bei Berühren zweier Regionen beendet wird. Die entstehenden Regionen sind mit den Regionen des dreidimensionalen Voronoi-Diagramms der Startpunktmenge identisch. Je nach Anordnung der Startpunkte können unterschiedliche Formen von Kristalle entstehen. In den 30er Jahren benutzten die Metallurgisten Wigner und Seitz Voronoi-Diagramme, um Eigenschaften komplexer Strukturen von Legierungen zu beschreiben. Dabei spielen vor allem Kräfte zwischen benachbarten Atomen und die räumliche Anordnung der Atome bei der Qualitätsberechnung eine große Rolle. Erstes geographisches Interesse an Voronoi-Diagrammen geht zurück auf den Klimatologen Thiessen. Dieser benutzte die Struktur des Voronoi-Diagramms, um Schätzungen von Niederschlagsmengen zu verbessern. Weitere geographische Anwendungen finden sich in der Kartographie und in der Stadtplanung. In [Aur91] kann man mehr über die Geschichte des Voronoi-Diagramms erfahren. Außerdem finden sich dort weitere Anwendungsbeispiele.

Heute sind das Voronoi-Diagramm und die Delaunay-Triangulierung grundlegende Strukturen in der algorithmischen Geometrie (Computational Geometry) [PS85], [O'R93]. Eine naheliegende geometrische Anwendung des Voronoi-Diagramms besteht im Post-Office-Problem d.h. im Beantworten von Anfragen der Form, welcher Punkt einer Punktmenge in der Ebene oder im Raum zu einem vorgegebenen Punkt der nächste ist. Bei vielen Anfragen lohnt es sich, das Voronoi-Diagramm für die Bestimmung der nächsten 'Postämter' zu benutzen.
Die geometrische Struktur des Voronoi-Diagramms kann schnell konstruiert werden ($O(n \log n)$ Zeit im $\mathbb{R}^2$) und enthält alle wichtigen Informationen über Nachbarschaften (O(n) Speicherplatzbedarf im $\mathbb{R}^2$), aus denen sich in linearer Zeit wichtige Probleme der algorithmischen Geometrie berechnen lassen. Zu diesen zählen u.a. der euklidische minimale Spannbaum (EMST), der größte leere Kreis bzw. die größte leere Kugel und die zwei nächsten Nachbarpunkte [SH75]. Eine Näherungslösung für

ein NP-vollständiges, graphentheoretisches Problem, das Problems des Handlungsreisenden, kann mit Hilfe der zweidimensionalen Delaunay-Triangulierung bzw. des EMST gewonnen werden. Das Problem des Handlungsreisenden besteht aus dem Bestimmen einer optimalen Rundtour durch n vorgegebene Punkte (Städte), ohne einen Punkt zweimal zu besuchen.
In der Computer-Graphik eignet sich die Delaunay-Triangulierung besonders gut für die Visualisierung und Modellierung von geometrischen Objekten, wie z.B. Freiformflächen. Eine wichtige Eigenschaft der Delaunay-Triangulierung, daß die Winkel unter allen möglichen Triangulierungen optimal sind (vgl. Lemma 1.55), rechtfertigt die Verwendung der Delaunay-Triangulierung bei der Netzgenerierung. Zur Visualisierung werden geometrische Objekte durch Dreiecksnetze approximiert, die dann mittels Hardware-Unterstützung schnell schattiert und dargestellt werden können. Weitere Anwendungen zwei- und dreidimensionaler Delaunay-Triangulierungen finden sich in der Stereolithographie und in der Methode der Finiten Elemente.
Wegen der Dualität zwischen Voronoi-Diagramm und Delaunay-Triangulierung kann in einer zur Größe der Struktur proportionalen Zeit aus der einen die jeweils duale Struktur berechnet werden. Im wesentlichen existieren zur Berechnung der Delaunay-Triangulierung einfachere Algorithmen als zur Berechnung des Voronoi-Diagramms. Aus diesem Grund empfiehlt es sich zur Berechnung des Voronoi-Diagramms, zunächst die Delaunay-Triangulierung und anschließend das Voronoi-Diagramm zu bestimmen.

In dieser Diplomarbeit werden eine Reihe von Algorithmen zur Berechnung der Delaunay-Triangulierung mit oder ohne Beschleunigungsstrukturen auf die Eignung für die Computer-Graphik und Netzgenerierung im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ untersucht und miteinander verglichen. Im ersten Kapitel der Arbeit werden die Eigenschaften von Voronoi-Diagrammen und Delaunay-Triangulierungen zusammengestellt. Sie bilden die Grundlage für die im zweiten Kapitel vorgestellten Algorithmen zur Berechnung von zwei- und dreidimensionalen Delaunay-Triangulierungen. Am Ende des zweiten Kapitels befinden sich die ermittelten Laufzeiten der Algorithmen in Form von Tabellen und Graphiken. Das nächste Kapitel gibt einen Überblick über die verwendeten Datenstrukturen und deren Realisierung in Klassen. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der Visualisierung von dreidimensionalen Triangulierungen. Dort werden einfache Methoden vorgestellt, wie z.B. das Auseinanderziehen der Tetraeder oder das Entfernen einzelner Tetraedern, die die Visualisierung erheblich erleichern. Im letzten Kapitel sind einige Algorithmen für die Netzgenerierung zusammengestellt, die auf den in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmen aufbauen. Diese Algorithmen berechnen die bedingte Delaunay-Triangulierung (CDT), die Delaunay-Triangulierung von Polygonen (PDT) und verfeinerte Netze bzw. Triangulierungen durch Einfügen von Punkten. Anschließend wird erklärt, welche Bedeutung die Netzgenerierung für die Stereolithographie, die Modellierung und Visualisierung von Freiformflächen und die Methode der Finiten Elemente besitzt.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Definitionen

Die folgenden Definitionen und Eigenschaften wurden weitgehend aus [For92], [Ede87], [PS85] und [O'R93] entnommen.

1.1.1 Graph

Definition 1.1 (Graph)
Ein Graph ist ein Paar (P, E), wobei P eine nichtleere Menge von n verschiedenen Knoten $p_0, \ldots, p_{n-1}$ und E eine Menge ungeordneter Mengen $\{p_i p_j\}, 0 \leq i, j \leq n-1, i \neq j$ ist. Die Elemente von P heißen Knoten, die Elemente von E Kanten. Der Einfachheit halber wird eine Kante $\{p_i, p_j\}$ mit $\overline{p_i p_j}$ bezeichnet. Kanten sind nicht orientiert. Die Kanten $p_i p_j$ und $p_j p_i$ sind identisch. Halbkanten sind Kanten mit Richtungsangabe; eine Kante $p_i p_j$ besteht aus den zwei Halbkanten $\overrightarrow{p_i p_j}$ und $\overrightarrow{p_j p_i}$. Ist $p_i p_j \in E$, so heißen die Knoten p_i und p_j benachbart. Zwei Kanten heißen benachbart oder inzident, falls sie einen gemeinsamen Knoten besitzen.

Definition 1.2 (Geometrischer Graph)
Ein geometrischer Graph G ist ein Paar (P,E), wobei P eine nicht-leere endliche Menge von Punkten $P = \{p_0, \ldots, p_{n-1}\} \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$.

1.1.2 Simplex, Facette und Kugel

Definition 1.3 (m-Simplex)
Eine konvexe Kombination von $m+1$ affin unabhängigen Punkten $p_0, p_1, \ldots, p_m \in P, m \leq d$ heißt m-Simplex. Die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_m$ werden die Punkte des Simplex $\Delta(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ genannt.

Beispiel 1.4 *Ein 2-Simplex im $\mathbb{R}^2$ ist ein Dreieck und ein 3-Simplex im $\mathbb{R}^3$ ein Tetraeder.*

Definition 1.5 (k-Facette)
Gegeben sei die obige Punktmenge P und $t = \Delta(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ ein m-Simplex. Dann heißt eine konvexe Kombination von $k+1$ Punkten von t, $(k < m)$ eine k-Facette.