

Stefan Kolling

Anwendung der nichtlinearen
Bruchmechanik nach der Methode der
finiten Elemente am Beispiel der
Restlebensdaueranalyse einer stählernen
Eisenbahnbrücke aus genieteten
Vollwandträgern

Diplomarbeit

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Copyright © 1996 Diplom.de
ISBN: 9783832432270

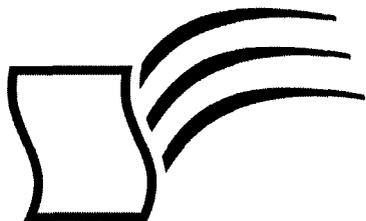
Stefan Kolling

Anwendung der nichtlinearen Bruchmechanik nach der Methode der finiten Elemente am Beispiel der Restlebensdaueranalyse einer stählernen Eisenbahnbrücke aus genieteten Vollwandträgern

Stefan Kolling

Anwendung der nichtlinearen Bruchmechanik nach der Methode der finiten Elemente am Beispiel der Restlebensdaueranalyse einer stählernen Eisenbahnbrücke aus genieteten Vollwandträgern

Diplomarbeit
an der Hochschule für Technik und Wirtschaft des Saarlandes (FH)
April 1996 Abgabe



Diplom.de

Diplomica GmbH _____
Hermannstal 119k _____
22119 Hamburg _____

Fon: 040 / 655 99 20 _____
Fax: 040 / 655 99 222 _____

agentur@diplom.de _____
www.diplom.de _____

ID 3227

Kolling, Stefan: Anwendung der nichtlinearen Bruchmechanik nach der Methode der finiten Elemente am Beispiel der Restlebensdaueranalyse einer stählernen Eisenbahnbrücke aus genieteten Vollwandträgern / Stefan Kolling - Hamburg: Diplomatica GmbH, 2001
Zugl.: Saarbrücken, Fachhochschule für Wirtschaft und Technik, Diplom, 1996

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die Informationen in diesem Werk wurden mit Sorgfalt erarbeitet. Dennoch können Fehler nicht vollständig ausgeschlossen werden, und die Diplomarbeiten Agentur, die Autoren oder Übersetzer übernehmen keine juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für evtl. verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen.

Diplomatica GmbH
<http://www.diplom.de>, Hamburg 2001
Printed in Germany



Wissensquellen gewinnbringend nutzen

Qualität, Praxisrelevanz und Aktualität zeichnen unsere Studien aus. Wir bieten Ihnen im Auftrag unserer Autorinnen und Autoren Wirtschaftsstudien und wissenschaftliche Abschlussarbeiten – Dissertationen, Diplomarbeiten, Magisterarbeiten, Staatsexamensarbeiten und Studienarbeiten zum Kauf. Sie wurden an deutschen Universitäten, Fachhochschulen, Akademien oder vergleichbaren Institutionen der Europäischen Union geschrieben. Der Notendurchschnitt liegt bei 1,5.

Wettbewerbsvorteile verschaffen – Vergleichen Sie den Preis unserer Studien mit den Honoraren externer Berater. Um dieses Wissen selbst zusammenzutragen, müssten Sie viel Zeit und Geld aufbringen.

<http://www.diplom.de> bietet Ihnen unser vollständiges Lieferprogramm mit mehreren tausend Studien im Internet. Neben dem Online-Katalog und der Online-Suchmaschine für Ihre Recherche steht Ihnen auch eine Online-Bestellfunktion zur Verfügung. Inhaltliche Zusammenfassungen und Inhaltsverzeichnisse zu jeder Studie sind im Internet einsehbar.

Individueller Service – Gerne senden wir Ihnen auch unseren Papierkatalog zu. Bitte fordern Sie Ihr individuelles Exemplar bei uns an. Für Fragen, Anregungen und individuelle Anfragen stehen wir Ihnen gerne zur Verfügung. Wir freuen uns auf eine gute Zusammenarbeit.

Ihr Team der Diplomarbeiten Agentur

Diplomica GmbH _____

Hermannstal 119k _____

22119 Hamburg _____

Fon: 040 / 655 99 20 _____

Fax: 040 / 655 99 222 _____

agentur@diplom.de _____

www.diplom.de _____

Vorwort

Allgemeines

Viele der heute in Betrieb befindlichen Brückenkonstruktionen wurden vor 50 bis 100 Jahren oder sogar noch früher erstellt. Diese Brücken auf ihre weitere Nutzung hin zu untersuchen, insbesondere dann, wenn tragende Elemente mit Rissen behaftet sind, ist Gegenstand zahlreicher Forschungsprojekte. Diese Arbeit soll zum einen einen Überblick über die im Stahlhochbau neuen Theorien zur Behandlung rißbehafteter Bauteile geben, und zum anderen anhand eines Anwendungsbeispiels die praktische Handhabung der bruchmechanischen Gesetze bezüglich der häufig verwendeten Baustähle St 37 (S235) und St 52 (S355) zeigen, wobei sowohl das Konzept der Spannungsintensität der linear- elastischen Bruchmechanik, als auch das J- Integralkonzept der nichtlinearen Bruchmechanik zum Einsatz kommt.

Zum Aufbau dieser Arbeit

Aus oben genanntem Grunde wurde die vorliegende Arbeit in zwei Teile gegliedert. Der erste Teil (Kap. I bis IV) vermittelt die mathematischen und physikalischen Grundlagen zur Behandlung von Bauteilen mit Rissen, wobei sehr großer Wert auf eine ausführliche Literaturzusammenstellung gelegt wurde. Kap. I führt über die Anwendung der Vektoranalysis zu der Behandlung von Linienintegralen und den Integralsätzen von Gauß und Stokes für die Ebene, deren Anwendung sich bei der energetischen Betrachtung einer kollinearen Rißausbreitung findet. Eine Zusammenfassung der Stochastik beendet dieses Kapitel. In Kap. II werden die für die Bruchmechanik wichtigsten Werkstoffeigenschaften des Stahls erklärt, wobei besonders auf die versetzungstheoretischen Ansätze eingegangen wird. Eine weitere Grundlage zur Beschreibung bruchmechanischer Vorgänge liefert die technische Mechanik in Kap. III, in der die im Stahlhochbau wichtige Fließspannungshypothese nach Huber, von Mises und Hencky ausführlich und anschaulich hergeleitet wird. Das Kap. IV beendet den ersten Teil dieser Arbeit und faßt die wichtigsten Erkenntnisse der Bruchmechanik im Hinblick auf die Anwendung im Bauingenieurwesen zusammen.

Im zweiten Teil (Kap. V) wird anhand einer zweigleisigen, stählernen Eisenbahnbrücke aus genieteten Vollwandträgern die im ersten Teil der Arbeit dargelegte Theorie am Beispiel der Restlebensdaueranalyse praktisch angewendet.

Aufgrund der über 160 grafischen Darstellungen wurde ein ausführliches Abbildungsverzeichnis am Ende dieser Arbeit eingefügt.

Danksagung

An dieser Stelle sei ein Wort des Dankes an das Labor für computerunterstützte Anwendung an der Hochschule für Technik und Wirtschaft des Saarlandes, Prof. Dr. rer. nat. Harald Wern, Fachbereich Elektrotechnik; des Institutes für neue Materialien der Universität des Saarlandes, Dr. rer. nat. Wolf- Rüdiger Thiele, Fachbereich Werkstoffwissenschaften; sowie des Institutes für Werkstoffmechanik der Technischen Hochschule Darmstadt, Prof. Dr.- Ing. Timm Seeger, Fachbereich Bauingenieurwesen gesprochen, die für Fragen und Diskussionen immer offen waren und so zum Gelingen dieser Arbeit beitrugen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dipl.- Ing. Bernd Peters am Lehrstuhl für technische Mechanik der Universität Kaiserslautern, der durch seine große Hilfe im Bereich der FE- Anwendung erheblich zum erfolgreichen Abschluß dieser Arbeit beitrug.

Dank auch an Herrn Prof. Dr.- Ing. Ingbert Mangerig für die Idee und die intensive Betreuung dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| I. MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN | 1 |
| 1.1 VEKTORANALYSIS..... | 1 |
| 1.1.2 Vektorielle Darstellung einer Funktion..... | 1 |
| 1.1.3 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter..... | 2 |
| 1.1.4 Feldtheorie..... | 4 |
| 1.1.4.1 Das skalare Feld und sein Gradient..... | 4 |
| 1.1.4.2 Das Vektorfeld, seine Rotation und Divergenz..... | 5 |
| 1.1.5 Das Bogendifferential..... | 7 |
| 1.1.6 Linien- oder Kurvenintegrale..... | 8 |
| 1.1.7 Die Integralsätze von Gauß und Stokes für die Ebene..... | 10 |
| 1.2 STOCHASTIK..... | 12 |
| 1.2.1 Theoretische Zusammenhänge einer Wahrscheinlichkeitsverteilung..... | 12 |
| 1.2.2 Die Gauß'sche Normalverteilung..... | 14 |
| 1.2.3 Die Extremwert Typ III- Verteilung..... | 16 |
| 1.3 VERZEICHNIS ZITIERTER LITERATUR..... | 18 |
| | |
| II. WERKSTOFFMECHANISCHE GRUNDLAGEN | 19 |
| 2.1 DIE FESTKÖRPER - EIGENSCHAFTEN DES STAHLS..... | 19 |
| 2.1.1 Versetzungstheorie..... | 19 |
| 2.1.2 Ermittlung der Versetzungsdichte..... | 21 |
| 2.1.3 Das Modell der Frank- Read- Quelle..... | 22 |
| 2.2 DAS FESTIGKEITSVERHALTEN VON STAHL..... | 23 |
| 2.2.1 Das Spannungs - Dehnungs - Diagramm..... | 23 |
| 2.2.2 Gleitlinien beim Zugversuch..... | 24 |
| 2.2.3 Cotrell- Wolken..... | 25 |
| 2.2.4 Die Hall- Petch- Beziehung..... | 25 |
| 2.3 DAS BRUCHVERHALTEN VON STAHL..... | 26 |
| 2.4 ZUSAMMENFASSUNG DER STAHLPRÜFUNGEN..... | 27 |
| 2.5 VERZEICHNIS ZITIERTER LITERATUR..... | 28 |
| | |
| III. GRUNDLAGEN AUS DER TECHNISCHEN MECHANIK | 29 |
| 3.1 SPANNUNGEN UND DEHNUNGEN..... | 29 |
| 3.1.1 Der Begriff der Spannung..... | 29 |
| 3.1.2 Der Spannungstensor..... | 29 |
| Das Symmetrieverhalten des Spannungstensors..... | 31 |
| 3.1.3 Der ebene Spannungszustand (ESZ)..... | 32 |
| 3.1.4 Der ebene Verzerrungszustand (EVZ)..... | 32 |
| 3.2 FLIEßSPANNUNGSHYPOTHESE NACH HUBER, v. MISES UND HENCKEY..... | 34 |
| 3.2.1 Die zweite Invariante des Spannungsdeviators..... | 34 |
| 3.2.2 Die Oktaederschubspannung..... | 37 |
| 3.2.3 Die elastische Gestaltänderungsenergie..... | 37 |
| 3.3 MEHRACHSIGKEIT..... | 38 |
| 3.4 VERZEICHNIS ZITIERTER LITERATUR..... | 39 |

| | |
|--|-----------|
| IV. BRUCHMECHANIK | 40 |
| 4.1 BRUCHKRITERIEN RIßFREIER BAUTEILE UNTER STATISCHER BEANSPRUCHUNG | 42 |
| 4.1.1 Bruchsicherheit der DIN 18000 Ausgabe 3 / 81 | 42 |
| 4.1.2 Bruchsicherheit der DIN 18000 Ausgabe 11 / 90 | 43 |
| 4.1.3 Nennspannungen und plastisches Verhalten | 44 |
| 4.2 BRUCHKRITERIEN RIBBEHAFTETER BAUTEILE | 46 |
| 4.2.1 Theoretische Bruchfestigkeit | 46 |
| 4.2.2 Rißmodelle | 48 |
| 4.3 DIE LINEAR- ELASTISCHE BRUCHMECHANIK | 49 |
| 4.3.1 Rißöffnungsarten | 49 |
| 4.3.2 Das Konzept der Spannungsintensität | 50 |
| 4.3.3 LEBM und Kleinbereichsfließen | 53 |
| 4.4 FLIEßBRUCHMECHANIK | 55 |
| 4.4.1 Das J- Integral- Konzept | 55 |
| 4.4.2 Numerische Lösung des J- Integrals | 58 |
| 4.4.2 Eigenschaften des J- Integrals | 59 |
| 4.4.3 Die Rißwiderstandskurve der Fließbruchmechanik | 60 |
| 4.5 RESTLEBENSDAUERANALYSE | 64 |
| 4.5.1 Tragwerksanalyse der zu betrachtenden Konstruktion | 65 |
| 4.5.2 Bestimmung der „vitalen“ Elemente der Konstruktion | 65 |
| 4.5.3 Bruchmechanische Nachweise | 66 |
| 4.5.4 Tragsicherheitsnachweis | 67 |
| 4.5.5 Bewertung des Ermüdungsverhaltens | 68 |
| 4.5.6 Aussage über Restlebensdauer | 69 |
| 4.5.7 Planung der Inspektionsintervalle | 70 |
| 4.5.8 Mathematische Korrelation am Beispiel des Griffith- Modells | 71 |
| 4.6 BRUCHMECHANISCHE KENNWERTE | 72 |
| 4.6.1 Paris- Parameter | 72 |
| 4.6.2 Bruchzähigkeit | 74 |
| 4.6.3 Spannungsintensitätsfaktoren | 75 |
| 4.7 VERZEICHNIS ZITIERTER LITERATUR | 79 |
| | |
| V. ANWENDUNGSBEISPIEL | 81 |
| 5.1 PROBLEMSTELLUNG | 81 |
| 5.2 VERKEHRSSITUATION UND BELASTUNG | 82 |
| 5.2.1 Verkehrslasten | 82 |
| Lastbild UIC 71 | 83 |
| Querverteilung | 84 |
| 5.2.2 Schwingfaktoren | 85 |
| 5.2.3 Ständige Lasten | 86 |
| 5.2.4 Zusatzlasten | 90 |
| Anfahr- und Bremslasten | 90 |
| Windlast | 92 |
| Seitenstoß | 94 |
| 5.3 SCHWEIß- UND WALZPROFILE DER KONSTRUKTION | 95 |
| 5.3.1 Hauptträger | 95 |
| 5.3.2 Querträger | 97 |
| 5.3.3 Längsträger | 98 |
| 5.3.4 Windverbandsdiagonalen | 98 |
| 5.3.5 Tabellarische Zusammenfassung | 99 |

| | |
|--|-----|
| 5.4 EDV- BERECHNUNG DES TRAGWERKS | 100 |
| 5.4.1 Stabwerkmodellierung..... | 100 |
| Numerierung der Knoten | 101 |
| Numerierung der Stäbe | 101 |
| Numerierung der Querschnitte | 101 |
| 5.4.2 Belastung | 102 |
| Lastfall 1: Ständige Lasten..... | 102 |
| Lastfall 2: UIC 71 | 103 |
| Lastfall 3: Anfahren und Bremsen..... | 104 |
| Lastfall 4: Seitenstoß | 104 |
| Lastfall 5: Wind..... | 105 |
| 5.4.3 Schnittgrößen..... | 106 |
| Lastfall 1: Ständige Lasten..... | 106 |
| Lastfall 2: UIC 71 | 108 |
| Lastfall 3: Anfahren und Bremsen..... | 109 |
| Lastfall 4: Seitenstoß | 110 |
| Lastfall 5: Wind..... | 111 |
| 5.4.4 Verformungen | 112 |
| Lastfall 1: Ständige Lasten..... | 112 |
| Lastfall 2: UIC 71 | 112 |
| 5.5 SPANNUNGEN..... | 113 |
| 5.5.1 Zwischenquerträger..... | 113 |
| 5.5.2 Längsträger | 114 |
| 5.5.3 Querträger..... | 115 |
| 5.5.4 Hauptträger | 117 |
| 5.5.5 Windverband..... | 119 |
| 5.6 BETRIEBSFESTIGKEITSNACHWEIS..... | 120 |
| 5.6.1 Längsträger..... | 120 |
| 5.6.2 Querträger..... | 121 |
| 5.6.3 Hauptträger | 121 |
| 5.6.4 Tabellarische Zusammenfassung | 121 |
| 5.7 BRUCHMECHANISCHE NACHWEISE | 122 |
| 5.7.1 Längsträger | 122 |
| 5.7.1.1 Bruchmechanisches Modell und Kennwerte | 122 |
| 5.7.1.2 Berechnung nach linear- elastischer Bruchmechanik..... | 123 |
| Ermittlung der kritischen Rißlänge | 123 |
| Direkte Analytische Bestimmung der kritischen Rißlänge..... | 126 |
| Programmlisting..... | 127 |
| Ermittlung des zyklischen Spannungsintensitätsfaktors | 129 |
| Ermittlung der Restlebensdauer..... | 130 |
| Vergleichsrechnung zu Kap. 5.7.1.3 | 132 |
| 5.7.1.3 Berechnung nach Hensen | 133 |
| 5.7.1.4 Hinweise zur Inspektion..... | 134 |
| 5.7.2 Querträger..... | 135 |
| 5.7.2.1 Bruchmechanisches Modell und Kennwerte | 135 |
| 5.7.2.2 Berechnung nach linear- elastischer Bruchmechanik..... | 136 |
| Ermittlung der kritischen Rißlänge | 137 |
| Direkte Analytische Bestimmung der kritischen Rißlänge..... | 138 |
| Programmlisting..... | 138 |
| Ermittlung des zyklischen Spannungsintensitätsfaktors | 140 |
| Ermittlung der Restlebensdauer..... | 141 |
| Vergleichsrechnung zu Kap. 5.7.2.3 | 143 |
| 5.7.2.3 Berechnung nach Hensen | 144 |
| 5.7.2.4 Hinweise zur Inspektion..... | 145 |

| | |
|--|------------|
| 5.7.3 Hauptträger | 146 |
| 5.7.3.1 Bruchmechanisches Modell und Kennwerte | 146 |
| 5.7.3.2 Berechnung nach linear- elastischer Bruchmechanik..... | 147 |
| Ermittlung der kritischen Rißlänge | 148 |
| Ermittlung des zyklischen Spannungsintensitätsfaktors | 149 |
| Ermittlung der Restlebensdauer | 150 |
| Vergleichsrechnung zu Kap. 5.7.3.3 | 152 |
| 5.7.3.3 Berechnung nach Hensen | 153 |
| 5.7.3.4 FEM- Berechnung..... | 154 |
| Wahl der Elemente..... | 154 |
| Idealisierung des Spannungs- Dehnungs- Diagramms..... | 154 |
| Netzgenerierung | 155 |
| Ermittlung der kritischen Rißlänge | 156 |
| Ausgleichsrechnung | 157 |
| Ermittlung des zyklischen Spannungsintensitätsfaktors | 159 |
| Ausgleichsrechnung | 159 |
| Ermittlung der Restlebensdauer | 160 |
| Vergleichsrechnung zu Kap. 5.7.3.3 | 162 |
| 5.7.3.5 Hinweise zur Inspektion | 163 |
| 5.8 ZUSAMMENFASSUNG..... | 164 |
| 5.9 VERZEICHNIS ZITIERTER LITERATUR | 165 |
| | |
| ABBILDUNGSVERZEICHNIS | 166 |
| | |
| VERZEICHNIS DER VERWENDETEN EDV | 170 |

I. Mathematische Grundlagen

Während die analytische, klassische Mechanik die mechanischen Vorgänge in der Natur beschreibt und mathematisch formuliert, versucht die ingenieurmäßige Mechanik in der Regel keine exakten Theorien zu geben, sondern technische Probleme in ein mechanisches Modell zu übertragen (welches brauchbare, möglichst wirklichkeitsnahe Ergebnisse liefert), und dieses dann in die Sprache der Mathematik zu übersetzen. In beiden Fällen gibt die Mathematik dem Ingenieur ein Hilfsmittel in die Hand, mit dem er sein Modell beschreiben kann. In der Bruchmechanik kommen neben der traditionellen Analysis und der linearen Algebra hauptsächlich die Vektoranalysis und die mathematische Statistik zum Einsatz. Diese Hilfsmittel sollen im I. Kapitel dieser Diplomarbeit ausführlich besprochen werden, da sie die Grundlage für die weitere Behandlung rißmechanischer Analysen bilden. Im Kap. IV „Bruchmechanik“ wird daher nicht näher auf die rein mathematische Betrachtungsweise eingegangen, sondern ingenieurmäßige Formulierungen gebraucht.

1.1 Vektoranalysis

1.1.1 Parameterdarstellung einer Funktion

In der Bruchmechanik kommen des öfteren Bewegungsabläufe zum tragen. Bei der mathematischen Beschreibung eines solchen ist es oft zweckmäßig, die augenblickliche Lage des dabei betrachteten Massenpunktes durch kartesische Koordinaten $(x; y)$ auszudrücken, die wiederum selbst Funktionen der Zeit sind (Bild 1.1):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \{t_1 \leq t \leq t_2\} \quad \text{Gl (1.1)}$$

Die Darstellung von Funktionen dieser Art, die mit einer Hilfsvariablen (hier t) als Parameter beschrieben werden, wird als **Parameterdarstellung einer Funktion** bezeichnet. Bei bruchmechanischer Betrachtung kommt für den Parameter t die Zeit oder ein Winkel in Betracht.

Man sieht: Bei der Parameterdarstellung einer Funktion beschreibt jeder Wert des Parameters t im Intervall $\{t_1 \leq t \leq t_2\}$ genau einen Kurvenpunkt. Die Darstellung aller so beschriebenen Punkte ergibt einen Funktionsgraphen, der die Forderungen der Parametergleichung Gl. (1.1) erfüllt.

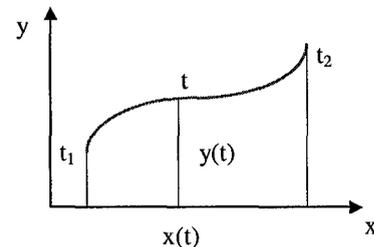


Bild 1.1: Parameterdarstellung einer Funktion

1.1.2 Vektorielle Darstellung einer Funktion

Man betrachte hierzu eine beliebige in Parameterdarstellung gegebene ebene Funktion Γ wie in Bild 1.2 dargestellt. Die Parameterdarstellung laute:

$$\Gamma: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad \{t_1 \leq t \leq t_2\} \quad \text{Gl (1.2)}$$

Der zum Parameter t gehörige Kurvenpunkt $P = (x(t); y(t))$ ist dann eindeutig durch seinen Ortsvektor $r(P)$ bestimmt:

$$r(P) = x(t)e_x + y(t)e_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Beim Durchlaufen aller Intervallwerte von t bewegt sich der Punkt P entlang der Kurve Γ von P_1 nach P_2 . Die Kurve selbst kann somit auch durch den parameterabhängigen Ortsvektor

$$r(t) = x(t)e_x + y(t)e_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \{t_1 \leq t \leq t_2\} \quad \text{Gl (1.3)}$$

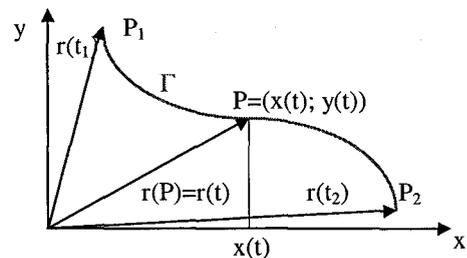


Bild 1.2: Vektorielle Darstellung einer Kurve

beschrieben werden. In gleicher Weise läßt sich bei der Erweiterung von ebenen Kurven zu räumlichen Kurven durch Ortsvektoren im \mathcal{R}^3 verfahren.

Anmerkung: e_x und e_y seien die Einheitsvektoren in Richtung der jeweiligen Koordinatenachse.

1.1.3 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter

Auf einer ebenen Kurve mit der vektoriellen Darstellung

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

betrachte man zwei benachbarte Punkte P und Q (Bild 1.3). Ihre Ortsvektoren $\mathbf{r}(t)$ bzw. $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ unterscheiden sich durch den Differenzvektor (Schnenvektor)

$$\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t + \Delta t) - x(t) \\ y(t + \Delta t) - y(t) \end{pmatrix}$$

Dividiert man diesen Vektor durch den Skalar $\Delta t \neq 0$, so ergibt sich der in der gleichen Richtung liegende Vektor

$$\frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

Die Grenzlage dieses Vektors für $\Delta t \rightarrow 0$ stellt - falls sie existiert - die per Definition aus der Analysis bekannte Ableitung dar:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad \text{Gl (1.4)}$$

Zerlegung des Vektors $\mathbf{r}(t)$ nach den zwei Einheitsvektoren \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y ergibt:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y$$

Die Definition Gl. (1.4) liefert dann als Grenzwert

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{e}_y \quad \text{Gl (1.5a)}$$

und allgemein

$$\frac{d^n \mathbf{r}(t)}{dt^n} = \frac{d^n x(t)}{dt^n}\mathbf{e}_x + \frac{d^n y(t)}{dt^n}\mathbf{e}_y \quad \text{Gl (1.5b)}$$

Satz 1.1:

Der Tangentenvektor entsteht durch komponentenweises differenzieren des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$ und wird in Anlehnung an die Differentialrechnung als dessen 1. Ableitung bezeichnet. Er legt die Richtung der Tangente im Kurvenpunkt $P = (x(t); y(t))$ fest:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}(t)\mathbf{e}_x + \dot{y}(t)\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad \text{Gl (1.5c)}$$

Die Vektorfunktion $\mathbf{r}(t)$ ist differenzierbar, wenn ihre Vektorkoordinaten $x(t)$ und $y(t)$ differenzierbare Funktionen¹ ihres Parameters t sind.

Höhere Ableitungen des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$ lassen sich gemäß Gl. (1.5b) durch entsprechendes differenzieren der Vektorkomponenten bilden. Die Ableitungsregeln aus der Differentialrechnung gelten auch für die Differentia-

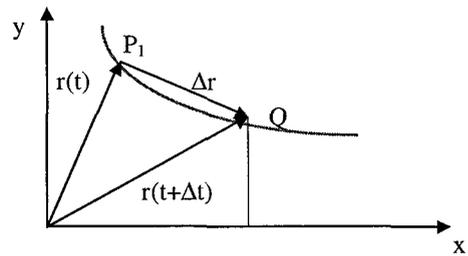


Bild 1.3: Zum Begriff des Tangentenvektors einer Kurve

¹ Auf die Differenzierbarkeit von Funktionen wird an dieser Stelle nicht eingegangen, es wird auf Mathematikvorlesungen des Grundstudiums verwiesen.

tion der Vektorkomponenten. Für Summen, respektive Produkte von Vektoren seien im folgenden die Ableitungsregeln wiedergegeben:

$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ und $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ seien differenzierbare Vektorfunktionen und $\varphi = \varphi(t)$ eine differenzierbare skalare Funktion des Parameters t . Dann gelten die folgenden Ableitungsregeln:

Summenregel

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}} \quad \text{Gl (1.6)}$$

Produktregel

für ein Skalarprodukt:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}} \quad \text{Gl (1.7)}$$

für ein Vektorprodukt:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}} \quad \text{Gl (1.8)}$$

für ein Produkt aus einer Skalaren- und einer Vektorfunktion:

$$\frac{d}{dt}(\varphi \cdot \mathbf{a}) = \dot{\varphi} \cdot \mathbf{a} + \varphi \cdot \dot{\mathbf{a}} \quad \text{Gl (1.9)}$$

/ entnommen aus [1.1] Kap. 1.2 /

Vorweg noch einen Hinweis zur Anwendung. In der Versetzungstheorie kann man die Abbleitgeschwindigkeit der Versetzung durch differenzieren des Weges nach der Zeit bestimmen. Man erhält also einen Geschwindigkeitsvektor durch Differentiation respektive einen Beschleunigungsvektor durch zweimalige Differentiation. Diese seien an dieser Stelle allgemein ausgedrückt:

Geschwindigkeitsvektor:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{e}_x + \dot{y}(t) \mathbf{e}_y + \dot{z}(t) \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad \text{Gl (1.10)}$$

Beschleunigungsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}(t) \mathbf{e}_x + \ddot{y}(t) \mathbf{e}_y + \ddot{z}(t) \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \quad \text{Gl (1.11)}$$

1.1.4 Feldtheorie

In diesem Unterkapitel werden die Bezeichnungen Gradient, Rotation und Divergenz eingeführt. Die Notwendigkeit dessen erklärt sich in der Herleitung der Integralsätze weiter unten, deren Anwendung man im Energiegleichgewicht beim Reißfortschritt (Kap. IV „Bruchmechanik“) findet.

1.1.4.1 Das skalare Feld und sein Gradient.

An dieser Stelle wird der in den Unterkapiteln 1.1.1 bis 1.1.3 verwendete \mathcal{R}^2 verlassen und der Betrachtungsbe-
reich auf den \mathcal{R}^3 erweitert.

Hat irgendeine physikalische Größe in jedem Punkt des Raumes oder eines Teilbereiches eines Raumes einen wohldefinierten Wert, so wird damit ein Feld dieser Größe erklärt. Ist die gegebene Größe ein Skalar (Temperatur, Druck ...), so heißt das Feld **skalares Feld**. Man schreibt symbolisch:

$$\phi = \phi(P) = \phi(x; y) \quad \text{für ein ebenes Skalarfeld} \quad \text{Gl (1.12a)}$$

$$\phi = \phi(P) = \phi(x; y; z) \quad \text{für ein räumliches Skalarfeld} \quad \text{Gl (1.12b)}$$

oder in Polarkoordinaten:

$$\phi = \phi(r; \varphi) \quad \text{Gl (1.12c)}$$

Satz 1.2: Unter dem **Gradient** eines skalaren Feldes versteht man das nach der folgenden Regel konstruierte Vektorfeld: In jedem Punkt hat der Vektor die Richtung der Normalen zu der entsprechenden **Niveaufläche** (siehe auch Bild 1.4) und ist dem Betrage nach gleich der Ableitung der Funktion $\phi = \phi(P)$ in Richtung dieser Normalen.

Die symbolische Schreibweise lautet:

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{für ein räumliches Skalarfeld} \quad \text{Gl (1.13a)}$$

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{für ein ebenes Skalarfeld} \quad \text{Gl (1.13b)}$$

oder in Polarkoordinaten:

$$\text{grad } \phi(r; \varphi) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad \text{Gl (1.13c)}$$

Als Niveauflächen bezeichnet man solche Flächen, die die Bedingung erfüllen, daß in allen Punkten einer solchen Fläche die Funktion $\phi = \phi(P)$ ein und denselben konstanten Wert hat: $\phi = \phi(P) = c = \text{const}$ (Bild 1.4).

Rechenregeln für Gradienten ([1.1] Kap.4.1):

ϕ und ψ seien skalare Felder, $c = \text{const}$

- (1) $\text{grad } c = 0$
- (2) $\text{grad } (c\phi) = c \text{ grad } (\phi)$
- (3) $\text{grad } (\phi + \psi) = \text{grad } \phi + \text{grad } \psi$
- (4) $\text{grad } (\phi + c) = \text{grad } (\phi)$
- (5) $\text{grad } (\phi \cdot \psi) = \phi(\text{grad } \psi) + \psi(\text{grad } \phi)$

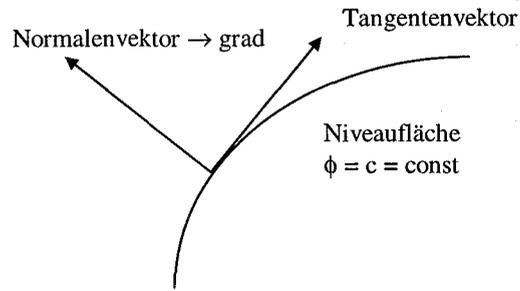


Bild 1.4: Zur Definition des Gradienten eines skalaren Feldes

Die somit anschauliche Einführung des Gradienten wird an dieser Stelle dem rein mathematischen Beweis vorgezogen. Es sei auf [1.2] Kap 120 verwiesen, wo dieser Zusammenhang ausführlich hergeleitet und bewiesen wird.

1.1.4.2 Das Vektorfeld, seine Rotation und Divergenz.

Wenn die in 1.1.4.1 vorgegebene physikalische Größe kein Skalar, sondern ein Vektor (Rißausbreitgeschwindigkeit, Kraft ...) ist, so spricht man von einem **Vektorfeld**.

Man betrachte ein beliebiges räumliches Vektorfeld $F(P) = F(x; y; z)$. In jedem Punkt des Raumes, in dem das Feld vorgegeben ist, hat der Vektor $F(P)$ eine festgelegte Größe und Richtung. Unter einer Feldlinie versteht man nun solche Kurven, deren Tangente in jedem Punkt die Richtung des Vektors $F(P)$ hat. Die Differentialgleichung der Feldlinien läßt sich daher in der Form

$$\frac{dx}{dF_x} = \frac{dy}{dF_y} = \frac{dz}{dF_z} \quad \text{Gl (1.14)}$$

schreiben (siehe z. B. [1.3] oder [1.4]), wobei die Komponenten F_x , F_y und F_z bestimmte Funktionen von x , y und z sind. Diese Differentialgleichung kann man als eine Art „Vektor - Röhre“ auffassen, da alle Feldlinien durch eine bestimmte Fläche S verlaufen (Bild 1.5).

Faßt man analog hydromechanischer Betrachtungen die Feldlinien in einem gewissen Bereich V als Vektorfluß durch die Fläche S auf, so kann man schreiben:

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV = \iint_{(S)} F_n dS$$

Das rechtsstehende Flächenintegral gibt den Vektorfluß an. Der Integrand in dem Volumenintegral heißt **Divergenz** des Vektorfeldes. Man schreibt symbolisch:

$$\text{div } F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{Gl (1.15)}$$

Gl. (1.15) gibt somit ein skalares Feld an.

Satz 1.3: Das Volumenintegral der Divergenz ist gleich dem Vektorfluß durch die Oberfläche des Bereiches S .

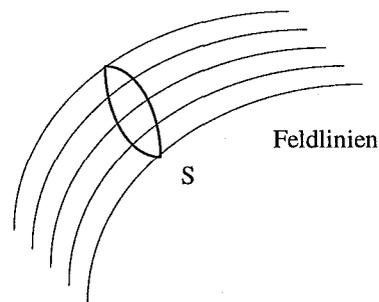


Bild 1.5: Zum Begriff der Vektorröhre

Für ein Vektorfeld schreibt man in Polarkoordinaten $\mathbf{F} = F(r; \varphi) = F_r(r; \varphi) \cdot \mathbf{e}_r + F_\varphi(r; \varphi) \cdot \mathbf{e}_\varphi$ und für seinen Gradienten:

$$\text{grad } \phi(r; \varphi) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi \quad \text{Gl (1.16)}$$

Die Definition Gl. (1.15) hängt von der Wahl der Koordinatenachsen x , y und z ab. In [1.2] Kap. 121 wird durch die Anwendung des Mittelwertsatzes und der Stokes'schen Formel (siehe weiter unten im Text) folgender Zusammenhang gezeigt:

$$\int_1 \int_S (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS$$

Dabei bildet ein Vektor, dessen Komponenten gleich dem in dem Doppelintegral stehenden Differenzen sind, ein neues Vektorfeld. Dieser Vektor wird als **Rotation** des Feldes F bezeichnet und symbolisch $\text{rot } F$ oder $\text{curl } F$ geschrieben. Die Richtungscosinus verschwinden in einem kartesischen Koordinatensystem und man kann schreiben:

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{Gl (1.17a)}$$

oder in Polarkoordinaten, wobei hier nur eine Komponente senkrecht zur x , y -Ebene (z -Richtung) existiert:

$$[\text{rot } F]_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \quad \text{Gl (1.17 b)}$$

Abschließend seien noch die Rechenregeln für Divergenzen und Rotationen angegeben:

| Rechenregeln für Divergenzen ([1.1] Kap.5.1.1): | Rechenregeln für Rotationen ([1.1] Kap.5.2.1): |
|---|--|
| A und B seien Vektorfelder, ϕ sei ein Skalarfeld, a sei ein konstanter Vektor und $c = \text{const}$ | A und B seien Vektorfelder, ϕ sei ein Skalarfeld, a sei ein konstanter Vektor und $c = \text{const}$ |
| (1) $\text{div } \mathbf{a} = 0$ | (1) $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ |
| (2) $\text{div}(\phi \cdot \mathbf{A}) = (\text{grad } \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\text{div } \mathbf{A})$ | (2) $\text{rot}(\phi \cdot \mathbf{A}) = (\text{grad } \phi) \times \mathbf{A} + \phi(\text{rot } \mathbf{A})$ |
| (3) $\text{div}(c \cdot \mathbf{A}) = c(\text{div } \mathbf{A})$ | (3) $\text{rot}(c \cdot \mathbf{A}) = c(\text{rot } \mathbf{A})$ |
| (4) $\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{B}$ | (4) $\text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B}$ |
| (5) $\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{a}) = \text{div } \mathbf{A}$ | (5) $\text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{a}) = \text{rot } \mathbf{A}$ |

1.1.5 Das Bogendifferential

Bevor das Kernstück dieses Kapitels, der Abschnitt 1.1.6 „Linien- oder Kurvenintegrale“ besprochen wird, muß dafür noch eine wichtige Beziehung hergeleitet werden, das Bogendifferential.

Zuvor betrachte man hierfür eine ebene Kurve, die der Funktionsgleichung $y = f(x)$ genüge. Für diese Kurve soll nun die Bogenlänge bestimmt werden. Bild 1.6 zeigt einen Ausschnitt aus dieser Kurve im Intervall $[a, b]$, wobei dabei ein infinitesimal kleines Kurvenstück betrachtet werden soll, welches durch die Randpunkte P und Q begrenzt sei.

Man trage als erstes die Tangente im Punkt P auf, so schneidet diese die Ordinate von Q in einem Punkt mit der gleichen Abszisse wie Q, also $x + dx$. Man ziehe nun eine waagerechte Linie vom Punkt P nach rechts ab (gestrichelte Linie), so schneidet auch diese die Ordinate von Q. Man erhält so ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten dx und dy . Die Hypotenuse sei mit ds bezeichnet. Anwendung des Satzes von Pythagoras ergibt:

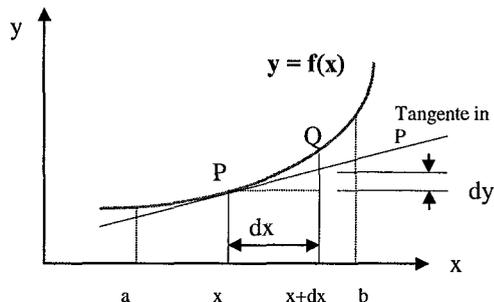


Bild 1.6: Zur Bestimmung der Bogenlänge eines Kurvenstückes

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left[1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2} \right] \cdot (dx)^2$$

$$= \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \cdot (dx)^2 = [1 + (y')^2] \cdot (dx)^2 \Leftrightarrow ds = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx \quad \text{Gl (1.18)}$$

Dieses Linienelement ds wird als **Bogendifferential** bezeichnet. Die Integration aller Bogendifferentiale von a nach b liefert die Bogenlänge S der Kurve $y = f(x)$ im Intervall $[a, b]$:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx \quad \text{Gl (1.19)}$$

Um diesen Begriff nun in die Vektoranalysis zu übertragen, nehme man einfach an, daß sich die Kurve $y = f(x)$ durch einen parameterabhängigen Ortsvektor

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \{t_1 \leq t \leq t_2\} \quad \text{Gl (1.20)}$$

beschreiben läßt.

Bild 1.7 liefert die schon weiter oben im Text hergeleiteten Beziehungen zwischen einer in Parameterdarstellung angegebenen Kurve und ihrem Ortsvektor: Die Tangentensteigung $y'(P)$ der Kurve ist äquivalent der Steigung der Tangentenvektors Gl. (1.5c) in diesem Punkt. Man schreibe:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

und wende Satz 1.1 an: $\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow dx = \dot{x} \cdot dt$. Nun kann man das Bogendifferential $ds = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx$ der Funktion $y = f(x)$ in die Parameterform überführen:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2} \cdot \dot{x} \cdot dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt$$