

Martin Zeidler

Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit und Anwendungen auf Symmetriefragen

Diplomarbeit

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Copyright © 1997 Diplom.de
ISBN: 9783832408183

Martin Zeidler

Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit und Anwendungen auf Symmetriefragen

Martin Zeidler

Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit und Anwendungen auf Symmetriefragen

**Diplomarbeit
an der Universität zu Köln
November 1997 Abgabe**



Diplomarbeiten Agentur
Dipl. Kfm. Dipl. Hdl. Björn Bedey
Dipl. Wi.-Ing. Martin Haschke
und Guido Meyer GbR

Hermannstal 119 k
22119 Hamburg

agentur@diplom.de
www.diplom.de

ID 818

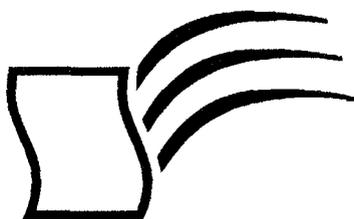
Zeidler, Martin: Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit und Anwendungen auf Symmetriefragen / Martin Zeidler - Hamburg: Diplomarbeiten Agentur, 1998
Zugl.: Köln, Universität, Diplom, 1997

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die Informationen in diesem Werk wurden mit Sorgfalt erarbeitet. Dennoch können Fehler nicht vollständig ausgeschlossen werden, und die Diplomarbeiten Agentur, die Autoren oder Übersetzer übernehmen keine juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für evtl. verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen.

Dipl. Kfm. Dipl. Hdl. Björn Bedey, Dipl. Wi.-Ing. Martin Haschke & Guido Meyer GbR
Diplomarbeiten Agentur, <http://www.diplom.de>, Hamburg
Printed in Germany



Diplomarbeiten Agentur

Wissensquellen gewinnbringend nutzen

Qualität, Praxisrelevanz und Aktualität zeichnen unsere Studien aus. Wir bieten Ihnen im Auftrag unserer Autorinnen und Autoren Wirtschaftsstudien und wissenschaftliche Abschlussarbeiten – Dissertationen, Diplomarbeiten, Magisterarbeiten, Staatsexamensarbeiten und Studienarbeiten zum Kauf. Sie wurden an deutschen Universitäten, Fachhochschulen, Akademien oder vergleichbaren Institutionen der Europäischen Union geschrieben. Der Notendurchschnitt liegt bei 1,5.

Wettbewerbsvorteile verschaffen – Vergleichen Sie den Preis unserer Studien mit den Honoraren externer Berater. Um dieses Wissen selbst zusammenzutragen, müssten Sie viel Zeit und Geld aufbringen.

<http://www.diplom.de> bietet Ihnen unser vollständiges Lieferprogramm mit mehreren tausend Studien im Internet. Neben dem Online-Katalog und der Online-Suchmaschine für Ihre Recherche steht Ihnen auch eine Online-Bestellfunktion zur Verfügung. Inhaltliche Zusammenfassungen und Inhaltsverzeichnisse zu jeder Studie sind im Internet einsehbar.

Individueller Service – Gerne senden wir Ihnen auch unseren Papierkatalog zu. Bitte fordern Sie Ihr individuelles Exemplar bei uns an. Für Fragen, Anregungen und individuelle Anfragen stehen wir Ihnen gerne zur Verfügung. Wir freuen uns auf eine gute Zusammenarbeit

Ihr Team der *Diplomarbeiten Agentur*

Dipl. Kfm. Dipl. Hdl. Björn Bedey –
Dipl. Wi.-Ing. Martin Haschke —
und Guido Meyer GbR —————

Hermannstal 119 k —————
22119 Hamburg —————

Fon: 040 / 655 99 20 —————
Fax: 040 / 655 99 222 —————

agentur@diplom.de —————
www.diplom.de —————

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel 1 Entwicklung der Voraussetzungen für das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit	3
Kapitel 2 Zusammenhang zwischen den Formulierungen des Prinzips	19
Kapitel 3 Globale Beweismethode nach Carleman mittels Integralgleichungen für die semilineare Gleichung $\Delta u = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$	27
Kapitel 4 Lokale Variationsmethode für $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x)\nabla u + V(x)u = 0$	32
Kapitel 5 Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit für die quasilineare Gleichung $-\operatorname{div}(u ^{p-2}\nabla u) + f(x, u) = 0$	63
Kapitel 6 Anwendungen des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit	81
Literaturverzeichnis	88

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit für elliptische Differentialoperatoren L , d.h. mit folgender Eigenschaft für Lösungen u von $Lu = 0$:

Verschwindet u in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ von unendlicher Ordnung oder gilt $u \equiv 0$ auf $\Omega' \subset \Omega$, dann ist $u \equiv 0$ auf ganz Ω .

Im ersten Kapitel werden zunächst die unterschiedlichen Formulierungen der Prinzipien der eindeutigen Fortsetzbarkeit dargelegt. Im Anschluß behandelt dieses Kapitel die Entwicklung der Voraussetzungen an den Operator L , unter denen das Prinzip gilt — angefangen vom klassischen Theorem von Holmgren [Ho] bis hin zum semilinearen Fall von Kurata in [Ku1] und [Ku2] und zum quasilinearen Fall von Ling [Li]. Dabei wird ein Überblick über die unterschiedlich strukturierten Differentialoperatoren geliefert, für die die Gültigkeit des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit gezeigt wurde.

Im zweiten Kapitel wird der Zusammenhang zwischen den Formulierungen 1 und 2 des Prinzips (siehe Kapitel 1) allgemein erläutert. Im Theorem 2.3 wird er anhand des Operators L aus

$$Lu = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + V(x)u = 0$$

erklärt.

Im dritten Kapitel wird die herkömmliche Beweismethode nach der Idee von Carleman (siehe [C1] und [C2]) mittels Integralungleichungen dargelegt. Diese wird anhand der semilinearen Differentialgleichung

$$\Delta u = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

präsentiert, wobei f einer Lipschitzbedingung genügen muß. Eine Schlüsselrolle in dem Beweis spielen Integralungleichungen, wie sie in Lemma 3.1 vorkommen. Der Beweis dieser Ungleichungen erfolgt ziemlich umständlich unter Ausnutzung von Kugelfunktionen (siehe z.B. [He]).

Eine elegantere Beweismethode von Garofalo und Lin ([GL1] und [GL2]), die Ideen aus der Geometrie und der Variationsrechnung benutzt, ist Inhalt des vierten Kapitels. Dort wird das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit für semilineare Differentialgleichungen bewiesen. Der Beweis beruht auf einer sogenannten Verdopplungsbedingung

$$\int_{B_{2R}} u^2 dx \leq C \int_{B_R} u^2 dx \quad ,$$

die in Theorem 4.2 formuliert wird.

Im fünften Kapitel wird die gleiche Beweisidee ausgenutzt, um das Prinzip für den quasilinearen Differentialoperator L aus

$$Lu = \operatorname{div}(|u|^{p-2}\nabla u) - f(x, u) = 0$$

zu beweisen.

Die Aussage von Kapitel 3 ist globaler Natur, wogegen die Aussagen aus Kapitel 4 und 5 lokalen Charakter haben.

Im sechsten Kapitel wird das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit angewendet, um unter gewissen Voraussetzungen die Symmetrie von Minimierern des Funktionals

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} f(x, u) dx$$

zu beweisen.

Die Konstanten, die in den Rechnungen auftreten, werden generell mit C bezeichnet. Dabei kann dieses C sich von Rechenschritt zu Rechenschritt ändern, ohne daß dies explizit erwähnt wird, wenn die Struktur von C unverändert bleibt.

Für die fachliche Betreuung dieser Arbeit möchte ich den Herren Prof. Dr. B. Kawohl und Dr. A. Wagner danken. Mein Dank gilt auch folgenden Herren, die mir umfangreiche Literatur zugesandt haben: Kazuya Hayasida, Carlos E. Kenig, Kazuhiro Kurata, Guozhen Lu, Olli Martio, Jean-Claude Saut, Christopher D. Sogge, Thomas H. Wolff.

Kapitel 1. Entwicklung der Voraussetzungen für das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit den verschiedenen Versionen des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit und ihrer Entwicklung. Dabei werden die Prinzipien für unterschiedlich geartete Differentialoperatoren L und unter verschiedenen Voraussetzungen formuliert.

Für elliptische partielle Differentialoperatoren L unterscheidet man drei Versionen des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit. Um diese zu formulieren, benötigt man vorher folgende

Definition 1.1. Eine Funktion $u \in L^2_{loc}$ verschwindet von unendlicher Ordnung in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{R^k} \int_{|x-x_0|<R} u^2 dx \longrightarrow 0 \text{ für } R \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

bzw. unter Verwendung der Landau-Symbole (siehe [E], Kapitel A)

$$\int_{|x-x_0|<R} u^2 dx = O(R^k) \quad (1.2)$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Dann erhält man folgende Formulierungen des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit:

Formulierung 1: Der Operator L der Ordnung $m \geq 2$ genügt dem starken Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit, wenn für eine Lösung $u \in H^m_{loc}(\Omega)$ von $Lu = 0$ gilt:

u verschwindet von unendlicher Ordnung in einem Punkt
 $x_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u \equiv 0$ in Ω .

Formulierung 2: Der Operator L der Ordnung $m \geq 2$ genügt dem Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit, wenn für eine Lösung $u \in H^m_{loc}(\Omega)$ von $Lu = 0$ gilt:

$u \equiv 0$ in $\Omega' \subset \Omega$, Ω' offen $\Rightarrow u \equiv 0$ in Ω .

Formulierung 3: Der Operator L der Ordnung $m \geq 2$ genügt dem schwachen Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit, wenn für eine Lösung $u \in H^m_{loc}(\Omega)$ von $Lu = 0$ gilt:

$\text{supp } u \subset K$, $K \subset \Omega$, K kompakt $\Rightarrow u \equiv 0$ in Ω .

Um die Gültigkeit dieser Prinzipien der eindeutigen Fortsetzbarkeit zu erhalten, muß man natürlich gewisse Voraussetzungen an den Operator L stellen. Es ist von großem Interesse, diese möglichst schwach und allgemein zu halten.