Naturwissenschaft

Martin Zeidler

Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit und Anwendungen auf Symmetriefragen

Diplomarbeit

Diplom.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de/ abrufbar.

ISBN: 9783832408183

https://www.diplom.de/document/216723

Martin Zeidler

Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit und Anwendungen auf Symmetriefragen

Diplom.de

Martin Zeidler

Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit und Anwendungen auf Symmetriefragen

Diplomarbeit
an der Universität zu Köln
November 1997 Abgabe

Diplomarbeiten Agentur
Dipl. Kfm. Dipl. Hdl. Björn Bedey
Dipl. Wi.-Ing. Martin Haschke
und Guido Meyer GbR

Hermannstal 119 k
22119 Hamburg

agentur@diplom.de
www.diplom.de

ID 818
Zeidler, Martin: Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit und Anwendungen auf Symmetriefragen / Martin Zeidler - Hamburg: Diplomarbeiten Agentur, 1998
Zugl.: Köln, Universität, Diplom, 1997

Dipl. Kfm. Dipl. Hdl. Björn Bedey, Dipl. Wi.-Ing. Martin Haschke & Guido Meyer GbR
Diplomarbeiten Agentur, http://www.diplom.de, Hamburg
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit für elliptische Differentialoperatoren L, d.h. mit folgender Eigenschaft für Lösungen u von $Lu = 0$:
Verschwindet u in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ von unendlicher Ordnung oder gilt $u \equiv 0$ auf $\Omega' \subset \Omega$, dann ist $u \equiv 0$ auf ganz Ω.

Im ersten Kapitel werden zunächst die unterschiedlichen Formulierungen der Prinzipien der eindeutigen Fortsetzbarkeit dargelegt. Im Anschluß behandelt dieses Kapitel die Entwicklung der Voraussetzungen an den Operator L, unter denen das Prinzip gilt — angefangen vom klassischen Theorem von Holmgren [Ho] bis hin zum semilinearen Fall von Kurata in [Ku1] und [Ku2] und zum quasilinearen Fall von Ling [Li]. Dabei wird ein Überblick über die unterschiedlich strukturierten Differentialoperatoren geliefert, für die die Gültigkeit des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit gezeigt wurde.

Im zweiten Kapitel wird der Zusammenhang zwischen den Formulierungen 1 und 2 des Prinzips (siehe Kapitel 1) allgemein erläutert. Im Theorem 2.3 wird er anhand des Operators L aus

$$Lu = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + V(x)u = 0$$

erklärt.

Im dritten Kapitel wird die herkömmliche Beweismethode nach der Idee von Carleman (siehe [C1] und [C2]) mittels Integralungleichungen dargelegt. Diese wird anhand der semilinearen Differentialgleichung

$$\Delta u = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

präsentiert, wobei f einer Lipschitzbedingung genügen muß. Eine Schlüsselrolle in dem Beweis spielen Integralungleichungen, wie sie in Lemma 3.1 vorkommen. Der Beweis dieser Ungleichungen erfolgt ziemlich umständlich unter Ausnutzung von Kugelfunktionen (siehe z.B. [He]).

Eine elegantere Beweismethode von Garofalo und Lin ([GL1] und [GL2]), die Ideen aus der Geometrie und der Variationsrechnung benutzt, ist Inhalt des vierten Kapitels. Dort wird das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit für semilineare Differentialgleichungen bewiesen. Der Beweis beruht auf einer sogenannten Verdopplungsbedingung

$$\int_{B_{2R}} u^2 dx \leq C \int_{B_R} u^2 dx \quad ,$$

die in Theorem 4.2 formuliert wird.

Im fünften Kapitel wird die gleiche Beweisidee ausgenutzt, um das Prinzip für den quasilinearen Differentialoperator L aus

$$Lu = \operatorname{div}(|u|^{p-2}\nabla u) - f(x,u) = 0$$

zu beweisen.

Die Aussage von Kapitel 3 ist globaler Natur, wogegen die Aussagen aus Kapitel 4 und 5 lokalen Charakter haben.

Im sechsten Kapitel wird das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit angewendet, um unter gewissen Voraussetzungen die Symmetrie von Minimierern des Funktionals

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} f(x,u)dx$$

zu beweisen.

Die Konstanten, die in den Rechnungen auftreten, werden generell mit C bezeichnet. Dabei kann dieses C sich von Rechenschritt zu Rechenschritt ändern, ohne daß dies explizit erwähnt wird, wenn die Struktur von C unverändert bleibt.

Für die fachliche Betreuung dieser Arbeit möchte ich den Herren Prof. Dr. B. Kawohl und Dr. A. Wagner danken. Mein Dank gilt auch folgenden Herren, die mir umfangreiche Literatur zugesandt haben: Kazuya Hayasida, Carlos E. Kenig, Kazuhiro Kurata, Guozhen Lu, Olli Martio, Jean-Claude Saut, Christopher D. Sogge, Thomas H. Wolff.

Kapitel 1. Entwicklung der Voraussetzungen für das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit den verschiedenen Versionen des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit und ihrer Entwicklung. Dabei werden die Prinzipien für unterschiedlich geartete Differentialoperatoren L und unter verschiedenen Voraussetzungen formuliert.

Für elliptische partielle Differentialoperatoren L unterscheidet man drei Versionen des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit. Um diese zu formulieren, benötigt man vorher folgende

Definition 1.1. Eine Funktion $u \in L^2_{loc}$ verschwindet von unendlicher Ordnung in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{R^k} \int\limits_{|x-x_0|<R} u^2 dx \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad R \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

bzw. unter Verwendung der Landau-Symbole (siehe [E], Kapitel A)

$$\int\limits_{|x-x_0|<R} u^2 dx = O(R^k) \quad . \tag{1.2}$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Dann erhält man folgende Formulierungen des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit:

Formulierung 1: Der Operator L der Ordnung $m \geq 2$ genügt dem starken Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit, wenn für eine Lösung $u \in H^m_{loc}(\Omega)$ von $Lu = 0$ gilt:
u verschwindet von unendlicher Ordnung in einem Punkt
$x_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u \equiv 0$ in Ω.

Formulierung 2: Der Operator L der Ordnung $m \geq 2$ genügt dem Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit, wenn für eine Lösung $u \in H^m_{loc}(\Omega)$ von $Lu = 0$ gilt:
$u \equiv 0$ in $\Omega' \subset \Omega$, Ω' offen $\Rightarrow u \equiv 0$ in Ω.

Formulierung 3: Der Operator L der Ordnung $m \geq 2$ genügt dem schwachen Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit, wenn für eine Lösung $u \in H^m_{loc}(\Omega)$ von $Lu = 0$ gilt:
$\operatorname{supp} u \subset K$, $K \subset \Omega$, K kompakt $\Rightarrow u \equiv 0$ in Ω.

Um die Gültigkeit dieser Prinzipien der eindeutigen Fortsetzbarkeit zu erhalten, muß man natürlich gewisse Voraussetzungen an den Operator L stellen. Es ist von großem Interesse, diese möglichst schwach und allgemein zu halten.