

35

$$9 \cdot 7 = 63 - 7 = 56$$
$$8 \cdot 8 = 64 - \cancel{8} = 56$$



Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

Kathrin Köhler

## Mathematische Herangehensweisen beim Lösen von Einmaleinsaufgaben

Eine Untersuchung unter  
Berücksichtigung verschiedener  
unterrichtlicher Vorgehensweisen  
und des Leistungsvermögens  
der Kinder

WAXMANN

# Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

herausgegeben von

Aiso Heinze und  
Marcus Schütte

Band 35

## Wissenschaftlicher Beirat

Tommy Dreyfus (Tel Aviv University, Israel)  
Uwe Gellert (Freie Universität Berlin)  
Gabriele Kaiser (Universität Hamburg)  
Christine Knipping (Universität Bremen)  
Konrad Krainer (Universität Klagenfurt, Österreich)  
Götz Krummheuer (Universität Frankfurt)  
Kristina Reiss (Universität München)  
Kurt Reusser (Universität Zürich, Schweiz)  
Heinz Steinbring (Universität Duisburg-Essen)

## Editorial

Der Mathematikunterricht steht vor großen Herausforderungen: Neuere empirische Untersuchungen legen (erneut) Defizite und Unzulänglichkeiten offen, deren Analyse und Behebung einer umfassenden empirischen Erforschung bedürfen. Der Erfolg derartiger Bemühungen hängt in umfassender Weise davon ab, inwieweit hierbei auch mathematikdidaktische Theoriebildung stattfindet. In der Reihe „Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik“ werden dazu empirische Forschungsarbeiten veröffentlicht, die sich durch hohe Standards und internationale Anschlussfähigkeit auszeichnen. Das Spektrum umfasst sowohl grundlagentheoretische Arbeiten, in denen empirisch begründete, theoretische Ansätze zum besseren Verstehen mathematischer Unterrichtsprozesse vorgestellt werden, als auch eher implementative Studien, in denen innovative Ideen zur Gestaltung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse erforscht und deren theoretischen Grundlagen dargelegt werden. Alle Manuskripte müssen vor Aufnahme in die Reihe ein Begutachtungsverfahren positiv durchlaufen. Diese konsequente Begutachtung sichert den hohen Qualitätsstandard der Reihe.

Kathrin Köhler

# Mathematische Herangehensweisen beim Lösen von Einmaleinsaufgaben

Eine Untersuchung unter Berücksichtigung  
verschiedener unterrichtlicher Vorgehensweisen  
und des Leistungsvermögens der Kinder



Waxmann 2019  
Münster · New York

Diese Arbeit wurde im Jahr 2019 von der Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik der Ludwig-Maximilians-Universität München als Dissertation angenommen.

### **Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

### **Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Band 35**

ISSN 1868-1441

Print-ISBN 978-3-8309-4058-6

E-Book-ISBN 978-3-8309-9058-1

© Waxmann Verlag GmbH, 2019

[www.waxmann.com](http://www.waxmann.com)

[info@waxmann.com](mailto:info@waxmann.com)

Umschlaggestaltung: Christian Averbeck, Münster

Titelbild: © Katrin Köhler (Zahlen); © Myst – [www.stock.adobe.com](http://www.stock.adobe.com) (Foto)

Satz: Stoddart Satz- und Layoutservice, Münster

Druck: CPI Books GmbH, Leck

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier,  
säurefrei gemäß ISO 9706



Printed in Germany

Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.  
Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des  
Verlages in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung  
elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

# Inhalt

|   |           |
|---|-----------|
| Danksagung.....   | 9         |
| Zusammenfassung.....  | 11        |
| Abstract .....  | 13        |
| Einleitung.....   | 15        |
| <b>1. Aktuelles Verständnis von Lehren und Lernen .....</b>   | <b>20</b> |
| 1.1 Konstruktivistische Grundannahmen und konstruktivistisches<br>Lernverständnis.....  | 20        |
| 1.2 Abgrenzung zu einer behavioristischen Auffassung von<br>Lehren und Lernen.....  | 23        |
| 1.3 Auswirkungen des Verständnisses von Lehren und Lernen<br>auf die Rolle der Lehrperson .....   | 26        |
| 1.4 Historischer Abriss und gegenwärtige Aktualität behavioristischer<br>und konstruktivistischer Auffassungen von Lehren und Lernen..... | 29        |
| 1.5 Veränderte Sichtweise auf das Lehren und Lernen<br>im Mathematikunterricht .....  | 31        |
| 1.5.1 Historische Entwicklung zweier miteinander konkurrierender<br>Ansätze des Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht .....         | 32        |
| 1.5.2 Primat des Verstehens im Mathematikunterricht.....  | 34        |
| 1.5.3 Aktuelle Anforderungen und Zielsetzungen des<br>Mathematikunterrichtes.....   | 39        |
| 1.5.4 Aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht .....   | 42        |
| <b>2. Einmaleinssätze und ihre Erarbeitung nach einem aktuellen<br/>Verständnis von Mathematikunterricht .....</b>                        | <b>49</b> |
| 2.1 Fachliche Grundlagen – Multiplikation .....   | 50        |
| 2.1.1 Definition und Rechengesetze.....   | 50        |
| 2.1.2 Beispielgebundene Beweisstrategien zu den Eigenschaften .....   | 53        |
| 2.2 Strategiebegriff und Herangehensweisen zur Lösung von<br>Einmaleinsaufgaben .....   | 60        |
| 2.2.1 Strategiebegriff allgemein.....   | 60        |
| 2.2.2 Herangehensweisen zur Lösung von Einmaleinsaufgaben.....  | 65        |
| 2.2.3 Strategiebegriff – Positionierung.....  | 70        |
| 2.2.4 Exkurs: Strategieverständnis im Zusammenhang mit dem Lösen<br>von Einmaleinsaufgaben in der internationalen Literatur .....         | 72        |
| 2.3 Unterrichtliche Behandlung des kleinen Einmaleins aus<br>mathematikdidaktischer Sicht .....   | 75        |
| 2.3.1 Automatisierung auf Basis von Einsicht.....   | 76        |
| 2.3.2 Arbeitsmittel als Mittel zum Rechnen, als Argumentations-<br>und Beweismittel .....   | 82        |

|       |  |            |
|-------|--|------------|
| 2.4   | Argumente für eine verständnisbasierte Erarbeitung<br>des kleinen Einmaleins.....  | 89         |
| 2.4.1 | Aktuelles Lehr- und Lernverständnis sowie das aktuelle<br>Verständnis eines zeitgemäßen Mathematikunterrichtes .....                     | 89         |
| 2.4.2 | Positive Auswirkungen auf den Lern- und Wissensprozess<br>bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins.....                                | 91         |
| 2.4.3 | Alternative Wege der Erarbeitung nicht zwangsläufig zielführend.....   | 97         |
| 2.4.4 | Positive Auswirkungen auf leistungsschwache Schülerinnen<br>und Schüler.....   | 103        |
| 2.4.5 | Propädeutische Funktion für das weitere algebraische bzw.<br>zukünftige Lernen im Mathematikunterricht .....                             | 110        |
| 2.4.6 | Zusammenfassung.....   | 116        |
| 2.5   | Alternative Vorgehensweisen bei der Erarbeitung –<br>ein Blick in die Historie und auf einzelne Bundesländer .....                       | 119        |
| 2.5.1 | Ein kurzer historischer Abriss unterrichtlicher Vorgehensweisen<br>bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins.....                       | 120        |
| 2.5.2 | Erarbeitung des Einmaleins in Lehr-, Bildungs- und<br>Rahmenplänen in Deutschland .....  | 127        |
| 2.6   | Zusammenfassung und Desiderat.....   | 135        |
| 3.    | <b>Strategieentwicklung und Strategieverwendung .....</b>  | <b>138</b> |
| 3.1   | Von der Strategie beim Erlernen des Einmaleins zur<br>Automatisierung: Entwicklungsmodelle .....   | 138        |
| 3.2   | Empirische Ergebnisse zur Strategieverwendung und<br>zum Faktenabruf.....  | 145        |
| 3.2.1 | Nationale und internationale Studien sowie ihre<br>Forschungsergebnisse.....   | 147        |
| 3.2.2 | Methodische Schwierigkeiten bei der Kategorisierung<br>der verschiedenen Herangehensweisen beim Lösen von<br>Einmaleinsaufgaben .....    | 171        |
| 3.3   | Strategiekompetenz und Einflussfaktoren auf die Strategiewahl.....   | 176        |
| 3.3.1 | Flexibilität und Adaptivität – Begriffsklärung.....  | 176        |
| 3.3.2 | Forschungsergebnisse zur Flexibilität und Adaptivität<br>im Bereich der Multiplikation – Positionierung.....                             | 183        |
| 3.3.3 | Das Individuum und der Unterricht als Einflussfaktoren<br>der Strategiewahl .....  | 192        |
| 3.3.4 | Modell zur Kompetenz der Strategiewahl beim Einmaleins.....  | 205        |
| 3.4   | Zusammenfassung und Desiderat.....   | 209        |
| 4.    | <b>Explorative Vorstudie – Fragebogenstudie zur Klassifizierung<br/>von Lehrkräften bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins .....</b> | <b>212</b> |
| 4.1   | Forschungsfragen der Vorstudie.....  | 213        |
| 4.2   | Design der Vorstudie .....   | 214        |
| 4.2.1 | Stichprobe .....   | 214        |
| 4.2.2 | Fragebogenkonstruktion und Durchführung.....   | 217        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 4.2.3     | Kodierung und statistische Methoden .....   | 224        |
| 4.3       | Forschungsergebnisse und Interpretation der Cluster .....   | 231        |
| 4.4       | Zusammenfassende Diskussion .....   | 240        |
| <b>5.</b> | <b>Hauptstudie – Herangehensweisen beim Lösen<br/>von Einmaleinsaufgaben .....</b>  | <b>243</b> |
| 5.1       | Forschungsfragen .....  | 244        |
| 5.2       | Studiendesign .....   | 246        |
| 5.2.1     | Ablaufplan der Vor- und Hauptstudie .....   | 246        |
| 5.2.2     | Auswahlprozess der teilnehmenden Lehrkräfte auf Basis<br>der Vorstudie .....  | 248        |
| 5.2.3     | Erhebungsinstrumente für die Gewinnung einer geschichteten<br>Zufallsstichprobe .....   | 250        |
| 5.2.4     | Stichprobe der Haupterhebung .....  | 255        |
| 5.3       | Erhebungsinstrumente der Haupterhebung .....  | 262        |
| 5.3.1     | Reaktionszeittestung .....  | 263        |
| 5.3.2     | Strategieinterview .....  | 266        |
| 5.4       | Kodierung und statistische Methoden der Haupterhebung .....   | 274        |
| <b>6.</b> | <b>Ergebnisse der Hauptstudie .....</b>   | <b>282</b> |
| 6.1       | Ergebnisse der Reaktionszeittestung .....   | 282        |
| 6.1.1     | Methode zur Ermittlung einer individuellen Schwelle bzw.<br>zur Ermittlung der Anzahl korrekter Abrufe aus dem Gedächtnis ..... | 287        |
| 6.1.2     | Erfolgsquote, Lösungszeiten und Anzahl schneller Faktenabrufe .....   | 292        |
| 6.2       | Ergebnisse des Strategieinterviews .....  | 302        |
| 6.2.1     | Vielfalt an Herangehensweisen und die Häufigkeit des Einsatzes .....  | 302        |
| 6.2.2     | Fehlerquoten und Fehlertypen je Herangehensweise .....  | 313        |
| 6.2.3     | Strategierepertoire .....   | 318        |
| 6.3.4     | Kompetenz der Strategiewahl – Flexibilität, Adaptivität und<br>Transferierbarkeit .....   | 327        |
| <b>7.</b> | <b>Diskussion und Ausblick .....</b>  | <b>343</b> |
| 7.1       | Reaktionszeittestung .....  | 343        |
| 7.1.1     | Individuelle Schwellen zur Ermittlung von Faktenabrufen .....   | 344        |
| 7.1.2     | Anzahl korrekter Faktenabrufe aus dem Gedächtnis .....  | 346        |
| 7.1.3     | Allgemeine Lösungsraten und Lösungszeiten korrekt<br>gelöster Aufgaben je Aufgabentyp .....                                     | 349        |
| 7.1.4     | Grenzen der Reaktionszeittestung und Forschungsperspektiven .....   | 352        |
| 7.2       | Strategieinterview .....  | 353        |
| 7.2.1     | Erkenntnisse bezogen auf die Gesamtstichprobe .....   | 354        |
| 7.2.2     | Einflussfaktor Individuum .....   | 359        |
| 7.2.3     | Einflussfaktor Unterricht .....   | 363        |
| 7.2.4     | Interaktion der Faktoren Individuum und Unterricht .....  | 367        |
| 7.2.5     | Grenzen des Strategieinterviews und Forschungsperspektiven .....  | 368        |
| 7.3       | Fazit und Konsequenzen .....  | 369        |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Literatur</b> .....                              | 374 |
| <b>Tabellenverzeichnis</b> .....                    | 393 |
| <b>Abbildungsverzeichnis</b> .....                  | 396 |
| <b>Anhang</b> .....                                 | 399 |
| A.    Ergänzendes zur Konzeption der Studie.....    | 399 |
| A.1   Übersichtsbogen Reaktionszeittestung.....     | 399 |
| A.2   Leitfaden .....                               | 400 |
| B.    Ergänzende Teststatistik .....                | 404 |
| B.1   Deskriptive Kennwerte und Teststatistik ..... | 404 |
| B.2   Post-hoc-Tests .....                          | 405 |

## Danksagung

Ein großer Dank gilt allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben – diese Arbeit begleitet, unterstützt und inspiriert haben.

Besonderer Dank gilt meiner Doktormutter Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, die diese Arbeit mit stets wertvollen Anregungen und konstruktiver Kritik von Anfang an begleitet und mir zu jeder Zeit mit Rat und Tat zur Seite gestanden hat. Besonders danken möchte ich ebenfalls Prof. Dr. Christiane Benz für die Begutachtung meiner Arbeit sowie Prof. Dr. Peter Pickl für die Übernahme des Vorsitzes in der Promotionskommission.

Ein großer Dank geht auch an die Kolleginnen und Kollegen des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität in München, die nicht nur meine Arbeit durch den fachlichen Austausch bereichert haben, sondern die Zeit am Lehrstuhl zu einer unvergesslichen Zeit gemacht haben. Ein besonderes Dankeschön gilt dabei insbesondere Kathrin, Kati, Bine, Ulli, Sarah und Daniel sowie meiner Bürokollegin Lisa für die grenzenlose Unterstützung über all die Jahre – in jeglicher Hinsicht und jeder Lebensfrage. Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei Prof. Dr. Stefan Ufer, der bei Fragen jeder Art immer ein offenes Ohr hatte und unterstützend zur Seite stand.

Allen Schulleitern, Lehrkräften, Schülerinnen und Schülern, die mit ihrem Interesse an meinem Forschungsprojekt entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, gilt ein besonderes Dankeschön. Ebenfalls danken möchte ich allen studentischen Hilfskräften für ihre Bereitschaft und ihr entgegengebrachtes großes Engagement, das erst die Umsetzung meiner Studie ermöglicht hat.

Nicht zuletzt danke ich allen, die mir während der letzten Jahre immer wieder aufs Neue den Rücken frei gehalten haben, mich in meinem Vorhaben unterstützt und bestärkt haben – insbesondere meiner lieben Familie!



## Zusammenfassung

Es gibt nicht die *eine* Erarbeitung des kleinen Einmaleins, vielmehr können mehrere verschiedene Wege der unterrichtlichen Behandlung unterschieden werden. In der Mathematikdidaktik herrscht derzeit allerdings weitgehend Konsens hinsichtlich einer Erarbeitung, die dem zeitgemäßen Verständnis von Lehren und Lernen im Mathematikunterricht entspricht: Eine verständnisbasierte Erarbeitung, die vorzieht, mithilfe bereits bekannter Einmaleinssätze und basierend auf Einsicht in operative Beziehungen noch unbekannte Einmaleinssätze zu erschließen (z.B. KRAUTHAUSEN & SCHERER, 2007; PADBERG & BENZ, 2011; WITTMANN & MÜLLER, 1990). Die Wirksamkeit dieser verständnisbasierten Erarbeitung ist bislang allerdings nur in vereinzelten nationalen sowie internationalen Studien analysiert worden (GASTEIGER & PALUKA-GRAHM, 2013; WOODWARD, 2006; KROESBERGEN, VAN LUIT & MAAS, 2004). Von den aktuellen didaktischen Empfehlungen bzw. Vorgaben abweichend, lassen ältere fachdidaktische Publikationen alternative Zugänge zum Einmaleins erkennen, die einen großen Fokus auf das reine *Einschleifen* von Einmaleinsreihen legen (z.B. JUNKER & SCZYRBA, 1964; KOLLER, 1958). Hinweisen aus der Unterrichtspraxis zufolge finden diese alternativen Vorgehensweisen, die man als *eher traditionell* bezeichnen kann, allerdings nach wie vor Anwendung. Inwiefern Lehrkräfte bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins aktuelle Vorgaben umsetzen oder tatsächlich auf alternative Vorgehensweisen zurückgreifen, ist bisher in Deutschland kaum untersucht worden.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist somit, verschiedene Herangehensweisen von Kindern bei Aufgaben des kleinen Einmaleins im 3. Schuljahr zu erfassen. Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf Erkenntnissen, ob und inwiefern sich unterschiedliche unterrichtliche Vorgehensweisen auf die Strategieverwendung von Kindern auswirken. Die Untersuchung der Strategieverwendung erfolgt zusätzlich auch unter Berücksichtigung eines weiteren möglichen Einflussfaktors, der individuellen Leistungsfähigkeit eines Kindes.

Anhand einer der Hauptstudie vorgeschalteten Vorstudie konnten verschiedene unterrichtliche Vorgehensweisen bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins ermittelt werden. Neben einer verständnisbasierten Erarbeitung, die durch das Entdecken und Anwenden von Rechenstrategien gekennzeichnet ist und den Vorgaben des zum Zeitpunkt der Untersuchung gültigen Lehrplans entspricht, konnte als alternative Vorgehensweise eine Erarbeitung identifiziert werden, die sich durch eine eher traditionelle Erarbeitungsweise auszeichnet. Diese legt den Fokus des unterrichtlichen Vorgehens weniger auf die Strategieerarbeitung bzw. -thematisierung als auf die Automatisierung von Einmaleinsaufgaben. Die Hauptstudie sah basierend auf den Ergebnissen der Vorstudie demnach zusätzlich die Prüfung der Wirksamkeit zweier grundsätzlich gegensätzlicher unterrichtlicher Vorgehensweisen vor – einer verständnisbasierten und der bereits angesprochenen eher traditionellen Erarbeitung des kleinen Einmaleins. Neben der separaten Betrachtung der Einflussfaktoren Unter-

richt und Individuum wurde der kindliche Lernerfolg in den verschiedenen Lehrkraft-Gruppen auch unter dem Einfluss des individuellen Leistungsvermögens untersucht.

Die verschiedenen Herangehensweisen an Aufgaben des kleinen Einmaleins wurden anhand einer empirischen Studie basierend auf zwei entwickelten Testinstrumenten evaluiert – eine Reaktionszeittestung wurde insbesondere eingesetzt, um Aussagen zum Faktenabruf aus dem Gedächtnis tätigen zu können, ein Strategieinterview, um Erkenntnisse hinsichtlich des Einsatzes von verschiedenen Herangehensweisen an Einmaleinsaufgaben zu gewinnen.

Die statistischen Daten der Auswertung weisen darauf hin, dass Kinder verschiedenen Leistungsvermögens sich hinsichtlich der Strategieverwendung unterscheiden: Je leistungsstärker die Kinder sind, desto erfolgreicher wird der Strategieeinsatz bzw. die Strategiewahl bewältigt. Eine verständnisbasierte Erarbeitung des kleinen Einmaleins beeinflusst darüber hinaus die kindliche Strategieverwendung positiv und macht sich im Lernerfolg der Kinder deutlicher bemerkbar als eine Erarbeitung, die den überwiegenden Fokus auf die Automatisierung von Einmaleinsaufgaben legt. Der positive Einfluss einer verständnisbasierten Erarbeitung wird zudem auch im direkten Vergleich der Kinder gleicher Leistungsfähigkeit ersichtlich. Insbesondere für die leistungsschwachen Kinder ist erkennbar, dass sie von einer verständnisbasierten Erarbeitung in jeglicher Hinsicht profitieren und den Strategieeinsatz bzw. die Strategiewahl erfolgreicher bewältigen als die leistungsschwachen Kinder der Vergleichsgruppe.

Eine unterrichtliche Behandlung des kleinen Einmaleins, die verschiedene Rechenstrategien des kleinen Einmaleins basierend auf Einsicht und Verständnis erarbeitet, ermöglicht es, Kinder im *ganzen* Leistungsspektrum zu fördern.

## Abstract

There is definitely not only one correct or appropriate way to teach students multiplication facts; multiplication can surely be taught and learned in different ways. In the field of mathematical didactics a broad consensus has been reached on an approach in unison with the current understanding of teaching and learning mathematics: Following this approach, students should be taught to use basic multiplication facts to derive unknown facts (e.g. KRAUTHAUSEN & SCHERER, 2007; PADBERG & BENZ, 2011; WITTMANN & MÜLLER, 1990). However, the effectiveness of this approach, which enables students to gain a deeper understanding of the operation, has been analysed only in a small number of national and international studies so far (GASTEIGER & PALUKA-GRAHM, 2013; WOODWARD, 2006; KROESBERGEN, VAN LUIT & MAAS, 2004). Additionally, it seems that traditional ways to teach multiplication, which place the main focus on single sequences of multiples differ considerably from the current didactical recommendations (e.g. JUNKER & SCZYRBA, 1964; KOLLER, 1958). According to teaching experiences these more traditional approaches are still widely used. However, it has hardly been analyzed in Germany so far to which extent multiplication facts are taught in line with current curricular standards or whether alternative ways are being used.

Therefore, the primary goal of this study is to collect data about different multiplication strategies taught to and used by students attending grade 3 in elementary schools. Furthermore, this study focuses on proving whether different approaches of teaching multiplication facts affect the strategy chosen by students. The study analyses whether there is a link between the strategy used by the respective students and their individual capabilities as well.

The main study used was partly based on a pre-study analyzing and evaluating different instructional approaches used by elementary school teachers to teach multiplication. Two different approaches were identified: Firstly, an approach which is in line with current standards of teaching multiplication where unknown facts are derived from basic multiplication facts. Secondly, an alternative approach which can be described as the *more traditional* one – where single sequences of multiples are usually taught in isolated ways. The results of the main study are based on the effect of these two opposite teaching approaches. The main study analyses the influence of the instructional approach and the individual student's capability on strategy choice and strategy use. In addition to this, the study measured how these two factors interact with each other.

It is important to mention that the use of different multiplication strategies was examined by developing and subsequently using two testing instruments: a reaction time test and an interview (following a standardized questionnaire) to examine different multiplication strategies used by the students.

The findings of this main study indicate that strategy use and strategy choice definitely differ based on the students' individual capabilities: Students are more success-

ful or show an higher competence in strategy use or strategy choice if the individual capability of the respective students is higher. Additionally, teaching multiplication based on a deeper understanding of the operation definitely influences students positively compared to teaching only single sequences of multiplies in isolated ways – this applies also to students with comparable individual capabilities.

And just as important – especially, students with a lower individual capability benefit most from an approach gaining a deeper understanding.

Leading to the final conclusion that teaching multiplication facts through strategies focusing on a deeper understanding makes it possible for *all* students to achieve an optimal or at least a better learning success.

## Einleitung

„Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt.“

(CARL FRIEDRICH GAUß, 1777–1855)

Mindestens von genauso bedeutender Relevanz wie das im Zitat von Carl Friedrich Gauß angeführte *Ergebnis*, ist aus heutiger Sicht der beschrittene *Weg*, der zu diesem Ergebnis führt. Die Intention eines gegenwärtigen Mathematikunterrichtes lautet demnach: „Der Weg ist das Ziel“<sup>1</sup> (HECKMANN & PADBERG, 2014, S. 30). Auch in dieser Arbeit wird dem beschrittenen Weg ein großer Stellenwert zuteil, geht es doch, wie dem Titel der Arbeit zu entnehmen ist, insbesondere um *mathematische Herangehensweisen beim Lösen von Einmaleinsaufgaben*.

Einmaleinsaufgaben, wie die Aufgabe  $6 \cdot 7$  können auf verschiedene Art und Weise gelöst werden – zur Lösung kann z.B. auf einen Faktenabruf aus dem Gedächtnis ( $6 \cdot 7 = 42$ ) zurückgegriffen werden, es können Herangehensweisen basierend auf operativen Beziehungen zum Einsatz kommen ( $6 \cdot 7 = 6 \cdot 6 + 6$ ) oder die wiederholte Addition gleicher Summanden ( $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42$ ).

Die verschiedenen Herangehensweisen könnte man dabei mit dem Erklimmen eines Berggipfels vergleichen. Man kann den Gipfel mit einer Seilbahnfahrt erreichen, man kann hinaufwandern oder beispielsweise einen Klettersteig gehen. Dabei kann man auf dem einem Weg schnell an sein Ziel gelangen, manch anderer mag sich eher als mühsam und schwer erweisen.

Einmaleinsaufgaben können nicht nur auf verschiedenen Wegen, sondern auch – wie in dem bildhaften Vergleich angedeutet – auf (vermeintlich) leichten oder schweren, langsamen oder schnellen, mehr oder weniger geeigneten Wegen gelöst werden. Aber wie sich ein Weg darstellt, variiert von Kind zu Kind und ist von verschiedenen Faktoren abhängig. Das individuelle Leistungsvermögen spielt hierbei sicherlich eine wesentliche Rolle. Wie geeignet ein gewählter Lösungsweg im Allgemeinen ist, dazu gibt es in der Mathematikdidaktik eine überwiegend einhellige Meinung. In der deutschen Fachdidaktik herrscht weitgehend Konsens darüber, noch unbekannte Einmaleinsaufgaben basierend auf operativen Beziehungen und dem Einsatz von Rechenstrategien zu lösen. In diesem Kontext wird von einer verständnisbasierten Erarbeitung des kleinen Einmaleins gesprochen, die dem aktuellen Lehr-/Lernverständnis folgend die Automatisierung von Einmaleinsaufgaben auf Basis von Einsicht anstrebt. Eine verständnisbasierte Erarbeitung zielt insbesondere auf das – nicht nur in Grundschulen – zentrale Ziel des Mathematikunterrichts: Rechenanforderungen mit einem gewissen Maß an Flexibilität zu bewerkstelligen. Ange-

---

1 Dieses Zitat wird häufig mit dem chinesischen Philosophen Konfuzius (551 v. Chr.–479 v. Chr.) in Verbindung gebracht – die Herkunft ist allerdings nicht endgültig geklärt.

strebt wird ein reflektierter Umgang mit Zahlen, verbunden mit der Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen.

Nicht nur Rechenaufgaben können auf verschiedenen Wegen gelöst werden, sondern auch die Erarbeitung von Lösungswegen kann auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen. Trotz weitestgehend einheitlicher Empfehlungen der Mathematikdidaktik lässt eine verständnisbasierte Erarbeitung beispielsweise unterschiedliche Schwerpunktsetzungen in der konkreten Umsetzung der Empfehlungen erkennen (z.B. KRAUTHAUSEN & SCHERER, 2007; PADBERG & BENZ, 2011; RADATZ, SCHIPPER, EBLING & DRÖGE, 1998; SCHIPPER, EBLING & DRÖGE, 2015; WITTMANN & MÜLLER, 1990). Neben einer aktuell empfohlenen, verständnisbasierten Erarbeitung sind in älteren didaktischen Empfehlungen bzw. fachdidaktischen Publikationen auch alternative Vorgehensweisen zur Erarbeitung des kleinen Einmaleins zu erkennen (z.B. JUNKER & SCZYRBA, 1964; KOLLER, 1985). Diese alternativen Zugänge scheinen auf die damalige Sichtweise von Lehren und Lernen zurückzuführen zu sein. Die behavioristische Grundauffassung stellt beispielsweise eine Erarbeitung des kleinen Einmaleins Reihe für Reihe in den Fokus, die sich durch das Lernen von Einmaleinsreihen bzw. einem Vorgehen, was umgangssprachlich auch als *Pauken* von Einmaleinsreihen bezeichnet wird, auszeichnet. Dieser alternative Zugang stellt eine grundsätzlich gegensätzliche unterrichtliche Vorgehensweise zu einer verständnisbasierten Erarbeitung des kleinen Einmaleins dar.

Einer Vielzahl an theoretischen Erkenntnissen sowie einer Reihe empirischer Studien zufolge scheint sich allerdings gerade eine verständnisbasierte Erarbeitung als geeigneter Weg zu empfehlen, um den *Berggipfel*, also die verfolgten Ziele der Erarbeitung des Einmaleins zu erreichen. Eine auf Einsicht und Verständnis basierende Erarbeitung folgt nicht nur den Grundsätzen des aktuellen Lehr- und Lernverständnisses, sondern auch einem zeitgemäßen Mathematikunterricht. Als Argument einer verständnisbasierten Erarbeitung können darüber hinaus auch die in vereinzelt empirischen Studien ermittelten positiven Auswirkungen auf den Lern- und Wissensprozess des kleinen Einmaleins selbst angeführt werden. Mithilfe einer verständnisbasierten Erarbeitung kann demnach nicht nur das grundlegende Verständnis der Rechenoperation gesichert werden, sondern eine auf Einsicht und Verständnis basierende Erarbeitung erleichtert auch das Erkennen, Behalten und Verinnerlichen sowie den erfolgreichen Abruf von Aufgaben aus dem Gedächtnis. Zusätzlich kann eine Vielzahl an positiven Auswirkungen einer verständnisbasierten Erarbeitung im Allgemeinen für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler ermittelt werden. Vor allem die propädeutische Funktion einer verständnisbasierten Erarbeitung des kleinen Einmaleins lässt die Relevanz dieser Art der Erarbeitung ersichtlich werden. Einige theoretische und empirische Erkenntnisse sehen in alternativen Erarbeitungen, die einer behavioristischen Auffassung von Lehren und Lernen folgen und dem reinen *Einschleifen* von Einmaleinsreihen eine wichtige Rolle zuteilwerden lassen, zwangsläufig nicht zielführende alternative Wege der Erarbeitung des kleinen Einmaleins.

Auch wenn in der Theorie weitestgehend Konsens hinsichtlich einer empfehlenswerten Erarbeitung des kleinen Einmaleins besteht, diese Art der Erarbeitung auch weitestgehend als verpflichtender Lerninhalt in Lehr- Bildungs- und Rahmenplänen

vorgeschrieben ist sowie einige Forschungsergebnisse für eine verständnisbasierte Erarbeitung im Allgemeinen aber auch im Hinblick auf das kleine Einmaleins sprechen, muss eine verständnisbasierte Erarbeitung nicht zwingend von allen Lehrkräften in der Unterrichtspraxis umgesetzt werden. Es gibt Hinweise aus der Praxis darüber, dass das kleine Einmaleins nach wie vor von den Empfehlungen bzw. Vorgaben abweichend – mit einem großen Fokus auf dem Auswendiglernen von Reihen – erarbeitet wird (vgl. SCHERER & MOSER OPITZ, 2010).

Inwiefern Lehrkräfte bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins in der Unterrichtspraxis tatsächlich auf alternative Vorgehensweisen zurückgreifen oder aktuelle Vorgaben umsetzen, kann bisher nicht sicher konstatiert werden. Denn bis heute wurden in Deutschland kaum empirische Studien durchgeführt, die die unterrichtlichen Vorgehensweisen bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins in den Blick nehmen. Für die Rechenoperation der Multiplikation kann zusätzlich festgehalten werden, dass sich nur ein geringer Prozentsatz nationaler sowie internationaler Studien detailliert mit der Verwendung von Herangehensweisen, den sogenannten Rechenstrategien beschäftigt, die basierend auf Einsicht in operative Beziehungen zur Aufgabelösung führen. Das gleiche gilt für die Anzahl an Studien, die die Strategieverwendung beim kleinen Einmaleins gekoppelt mit der unterrichtlichen Vorgehensweise der Lehrkräfte betrachtet: Auch hier ist die Anzahl eher gering, da der Einsatz von Rechenstrategien bisher kaum unter Berücksichtigung der expliziten unterrichtlichen Erarbeitung von Lehrpersonen analysiert wurde.

Das Hauptziel dieser Arbeit sind Erkenntnisse in den beschriebenen Forschungslücken. Deshalb untersucht sie verschiedene Herangehensweisen von Kindern bei Aufgaben des kleinen Einmaleins im 3. Schuljahr. Es soll grundsätzlich analysiert werden, ob sich im Strategieeinsatz bei Kindern nach der Erarbeitung des kleinen Einmaleins Herangehensweisen zeigen, die basierend auf Einsicht in operative Beziehungen zur Aufgabelösung führen. Mit Blick auf die enorme gegenwärtige Bedeutung sollen darüber hinaus Erkenntnisse gewonnen werden hinsichtlich flexibler Rechenkompetenzen bei dieser Rechenoperation. Ein Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auch auf der Frage, ob und inwieweit sich verschiedene unterrichtliche Vorgehensweisen der Lehrpersonen in der Strategieverwendung und im Lernerfolg der Kinder bemerkbar machen. Hierbei soll die Strategieverwendung differenziert unter Berücksichtigung eines weiteren möglichen Einflussfaktors, der individuellen Leistungsfähigkeit, untersucht werden.

Mithilfe einer der Hauptstudie vorgeschalteten Vorstudie konnte analysiert werden, dass verschiedene unterrichtliche Vorgehensweisen bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins vorliegen. Diese ging der offenen Frage nach, inwiefern eine verständnisbasierte Erarbeitung des kleinen Einmaleins in der Praxis tatsächlich Umsetzung findet. Eine Klassifizierung von Lehrpersonen und ihren unterschiedlichen Vorgehensweisen bei der unterrichtlichen Erarbeitung wurde ebenfalls in dieser Vorstudie realisiert. Die Forschungsergebnisse dieser Vorstudie zeigen, dass in der Unterrichtspraxis verschiedene Ansätze der Erarbeitung des kleinen Einmaleins vorherrschen. Neben einer Erarbeitung, die sich durch ein Entdecken und Anwenden von Rechenstrategien auszeichnet, die auf Zusammenhängen zwischen verschiede-

nen Einmaleinssätzen basieren, sind, wie Erfahrungen aus der Praxis bereits vermuten ließen, auch Vorgehensweisen zu erkennen, die man als eher traditionell bezeichnen kann, da sie den Hauptfokus auf das Auswendiglernen von Reihen legen.

Basierend auf den Erkenntnissen der Vorstudie wurde in der Hauptstudie angestrebt, die Einflüsse einer verständnisbasierten Erarbeitung im Vergleich zu einer eher traditionellen Erarbeitungsweise auf die Strategieverwendung zu überprüfen.

Steht die Erarbeitung eines mathematischen Inhaltes im Fokus einer Arbeit, ist es fast zwingend notwendig, sich auch mit dem Verständnis von Lehren und Lernen im Allgemeinen sowie dem Lehren und Lernen im Mathematikunterricht zu beschäftigen. Da die beiden gegensätzlichen Erarbeitungsweisen auf jeweils unterschiedlichen Sichtweisen von Lehren und Lernen begründet zu liegen scheinen, soll in dieser Arbeit das aktuell konstruktivistische Verständnis von Lehren und Lernen einer behavioristischen Grundauffassung gegenübergestellt werden. Dies passiert in Kapitel 1. Ein weiteres Hauptaugenmerk dieses Kapitels liegt auf der Abgrenzung einer konstruktivistischen Sichtweise auf das Lehren und Lernen im Mathematikunterricht von einer behavioristischen Sichtweise sowie den Anforderungen und Zielsetzungen des Mathematikunterrichts, wie sie heute vorherrschen.

Das zweite Kapitel widmet sich im Anschluss der Erarbeitung der Einmaleinssätze in der Grundschule. Neben einem Überblick über die fachlichen Grundlagen der Multiplikation wird der Strategiebegriff in der nationalen und internationalen Literatur geklärt sowie die Vielfalt an verschiedenen Herangehensweisen zur Lösung von Einmaleinsaufgaben aus mathematiktheoretischer Sicht präsentiert. In diesem Kapitel wird zusätzlich herausgearbeitet, dass es nicht nur die *eine* Erarbeitung des Einmaleins gibt, sondern vielmehr verschiedene Wege der Erarbeitung unterschieden werden müssen. Neben einer verständnisbasierten Erarbeitung und theoretischen sowie empirischen Argumenten, die für diese Art der Erarbeitung sprechen, stehen auch weitere, alternative Vorgehensweisen im Fokus des zweiten Kapitels. Zudem sollen aktuelle Rahmenvorgaben historisch eingeordnet werden.

Das Hauptaugenmerk des dritten und zugleich letzten Theoriekapitels liegt auf gesicherten Erkenntnissen zur Entwicklung kindlicher Strategien beim kleinen Einmaleins und Forschungsergebnissen hinsichtlich der kindlichen Strategieverwendung. Die Ergebnisse nationaler sowie internationaler Studien verweisen dabei auf den bestehenden Forschungsbedarf in diesem Themengebiet. Darüber hinaus werden die bisherigen Forschungsergebnisse dargelegt, die die Abhängigkeit der Strategieverwendung vom Unterricht und dem Individuum aufzeigen. Voraussetzungen für eine erfolgreiche Strategiewahl bzw. Merkmale, die diese charakterisieren, werden in diesem Kapitel thematisiert und anhand eines Modells zur Kompetenz der Strategiewahl beim kleinen Einmaleins resümierend illustriert.

Im Kapitel 4 dieser Arbeit wird die erwähnte Vorstudie präsentiert, in der die Erkenntnisse hinsichtlich der offenen Frage gewonnen werden, ob und in welcher Ausprägung ein verständnisbasiertes Vorgehen in der Unterrichtspraxis in Deutschland tatsächlich umgesetzt wird. Alternative unterrichtliche Vorgehensweisen der Erarbeitung werden ebenfalls identifiziert und charakterisiert.

Die zentralen Fragestellungen der Hauptstudie werden anschließend im Kapitel 5 umfassend beschrieben. Zusätzlich werden das Studiendesign, die Erhebungsinstrumente, die Kodierung sowie die für die Auswertung der Daten verwendeten statistischen Methoden skizziert.

Im Kapitel 6 wird über die Ergebnisse dieser Hauptstudie berichtet, getrennt nach den verschiedenen Zielsetzungen. Der Fokus liegt hierbei auf den durchgeführten Unterschiedsanalysen, die den Einfluss verschiedener unterrichtlicher Erarbeitungen sowie der individuellen Leistungsfähigkeit eines Kindes auf die Strategieverwendung untersuchen.

Im finalen siebten Kapitel werden die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung zusammengefasst und auf Basis theoretischer Grundlagen kritisch reflektiert. Auch die Grenzen der vorliegenden Arbeit sollen dargelegt sowie weitere Forschungsperspektiven verdeutlicht werden. Abschließend sollen basierend auf den gesamten gewonnenen Erkenntnissen zentrale Punkte aufgezeigt werden, wie Schülerinnen und Schüler unterschiedlichen Leistungsvermögens die Erarbeitung des kleinen Einmal-eins so erfolgreich wie möglich bewältigen können.

# 1. Aktuelles Verständnis von Lehren und Lernen

*„Die Mathematik ist mehr ein Tun als eine Lehre.“*

(LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER, 1881–1966)

Beschäftigt man sich mit der Erarbeitung eines mathematischen Inhaltes, ist es unumgänglich, sich auch mit dem aktuellen Verständnis von Lehren und Lernen im Allgemeinen zu befassen und sich im Speziellen mit dem Lehren und Lernen im Mathematikunterricht auseinanderzusetzen. Wie das Zitat von Luitzen E. J. Brouwer (1881–1966) bereits verdeutlicht, wird dem Tun im mathematischen Lehr- und Lernprozess eine bedeutende Rolle zuteil. Das aktuelle konstruktivistische Verständnis von Lehren und Lernen soll in Gegenüberstellung zu einer behavioristischen Auffassung von Lehren und Lernen in diesem ersten Kapitel erläutert werden, bevor ein Hauptaugenmerk dieses Kapitels auf der Sichtweise des Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht liegt, wie sie heute vorherrscht.

## 1.1 Konstruktivistische Grundannahmen und konstruktivistisches Lernverständnis

*„Menschenwürdiges Lernen ist nicht passiver Nachvollzug fremder Gedanken, sondern aktive Erzeugung eigener Sinnstrukturen.“*

(SCHULZ, 1989, S. 36)

Das aktuelle Verständnis von Lehren und Lernen zeichnet sich durch eine konstruktivistische Grundposition aus (VON GLASERSFELD, 1994). John Dewey (1859–1952), Jean Piaget (1896–1980) und Lev S. Wygotski (1896–1934) können als theoretische Vordenker einer konstruktivistisch orientierten Didaktik angesehen werden. Ihre Ansätze sind gegenwärtig immer noch wichtige Impulsgeber eines Verständnisses von Lehren und Lernen, das die aktive Rolle des Individuums beim Lernprozess betont (REICH, 2008, S. 71 ff.).

Dem *Konstruktivismus* kann keine einheitliche Definition zugrunde gelegt werden – in der Literatur sind vielschichtige, vielfältige und teilweise uneinheitliche Verwendungen des Begriffes vorzufinden (GERSTENMAIER & MANDL, 1995, S. 869; REINMANN-ROTHMEIER & MANDL, 1997, S. 367). Die nachfolgenden Ausführungen spiegeln Grundzüge konstruktivistischer Erkenntnistheorien wider, die sich auf die Gemeinsamkeiten verschiedener Ansätze, denen ein konstruktivistisches Lernverständnis zugrunde liegt, beschränken.

Den verschiedenen konstruktivistischen Auffassungen gemeinsam ist das Verständnis, dass Lernende ihr Wissen selbst konstruieren (HOOPS, 1998, S. 233). Ler-

nen wird demnach als konstruktiver Prozess verstanden und zeichnet sich nach REINMANN-ROTHMEIER und MANDL (1997) durch „das Primat der *Konstruktion* aus“ (ebd., S. 366, Hervorhebung im Original).

Der Lerner steht mit seinen Lernprozessen im Zentrum des Unterrichts und „dessen Gestaltung ist vordringlich eine Frage der Konstruktion“ (BENDORF, 2002, S. 127f.). Fragestellungen, mit denen sich die einzelnen konstruktivistischen Ansätze beschäftigen, widmen sich demnach weniger der Wissensvermittlung als vermehrt der Wissenskonstruktion<sup>2</sup> (REINMANN-ROTHMEIER & MANDL, 1997, S. 366). Der Wissenserwerb stellt eine konstruktive Aufbauleistung dar, die sich nicht durch passive Aufnahme und Reproduktion kennzeichnet, sondern vielmehr durch ein Lernen, das sich durch einen aktiven Aufbau und die Rekonstruktion von Wissen auszeichnet (vgl. FREUDENTHAL, 1991; PIAGET, 1999, S. 180; TREFFERS, 1991, S. 24). „The common conviction is that knowledge can not simply be transferred ready-made [...] from teacher to student but has to be actively built up by each learner in his or her own mind (VON GLASERSFELD, 1991, xiii).“

Die Ausbreitung des konstruktivistischen Denkens hat nach REUSSER (2006) zu einer veränderten Sicht auf schulisches Lernen geführt:

Nicht zuletzt unter dem Eindruck der modernen Entwicklungspsychologie und der Lernforschung hat sich die Perspektive auf schulisches Lernen zunehmend von den Methoden und Sozialformen des Lehrerhandelns zu den Tiefenstrukturen des Schülerlernens, von einer [...] Interventionssicht des didaktischen Handelns zu einer Fokussierung auf die bei Schülern ablaufenden psychologischen Lern- und Verstehensprozesse verlagert. (REUSSER, 2006, S. 160)

Diese Verlagerung hin zu kindlichen Verstehensprozessen ist auf die – aus konstruktivistischer Sicht – wichtige Bedeutung des Verstehens beim Lernen zurückzuführen. Einem konstruktivistischen Verständnis zufolge besteht das Ziel darin, „über die bloße Beherrschung von Fertigkeiten hinaus Verstehen beim Lernenden zu ermöglichen und zu fördern“ (DINTER, 1998, S. 272). Verstehen wird nach STEBLER, REUSSER und PAULI (1994, S. 228f.) je nach theoretischer Ausrichtung vielschichtig aufgefasst – beispielsweise als *Einsicht in Zusammenhänge* (WERTHEIMER, 1964), *operatorische Beweglichkeit* (AEBLI, 1951), *Assimilation neuer Inhalte an bestehende Strukturen* (PIAGET, 1976), *Begriffsbildung* (AEBLI, 1980, 1981) oder als *Problemlösen* (REUSSER & REUSSER-WEYENETH, 1994). Verstehen kann somit als Prozess oder als Verstehensprodukt bezeichnet werden. Wobei Verstehen laut AESCHENBACHER (1994) nicht mehr als „Endprodukt eines erfolgreichen Unterrichts“ (ebd., S. 128) bzw. nicht ausschließlich als Ziel und Ergebnis eines Kompetenzerwerbs am Ende

---

2 An dieser Stelle sei erwähnt, dass der Konstruktivismus eine Erkenntnistheorie ist. Die erkenntnistheoretischen Grundlagen dienen weder dazu, didaktische Ansätze zu begründen noch Unterrichtsmethoden aus ihnen abzuleiten. Laut REUSSER (1999b) können „aus radikalisierten grundagentheoretischen Positionsbezügen [nicht] [...] in direkter Weise Orientierungen für didaktisches Handeln abgeleitet bzw. pädagogisch-didaktische Folgerungen gezogen werden“ (ebd., S. 7, Ergänzung der Autorin). Im Zuge einer gründlichen pädagogischen Reflexion können erkenntnistheoretische Grundlagen verschiedene didaktische Ansätze bestenfalls untermauern (DINTER, 1998, S. 268f.; ERNEST, 1994, S. 338).

eines Lernprozesses angesehen wird – in den Mittelpunkt rückt vermehrt der Prozess des Kompetenzerwerbs.

Mit dem folgenden Zitat verweisen REUSSER und REUSSER-WEYENETH (1994) ebenfalls darauf, dass Verstehen als kognitive Konstruktion sowohl als Produkt als auch als Prozess zu sehen ist und betonen im Besonderen, dass Verstehen der Eigenaktivität des Lernenden bedarf und nicht von einer Person auf die andere übertragen werden kann:

Wer versteht, kopiert nicht Wirklichkeit, entschlüsselt nicht eine Struktur mit gegebenem, festem Sinnbestand [...], sondern schafft immer auch neue Information, stiftet oder erzeugt Sinn. Eine konstruktivistische Erkenntnisauffassung [...] nimmt daher Abschied von der Vorstellung, dass es ein Beobachten ohne einen Beobachter, ein Feststellen von Wahrheit ohne einen Wahrnehmenden bzw. ein Verstehen von etwas oder von jemand ohne die aktive, strukturbildende Leistung einer Person gibt. (REUSSER & REUSSER-WEYENETH, 1994, S. 16f.)

Verstehen heißt nicht nur „eigenständig erfahren, erkennen und begreifen, wie Elemente zueinander in Beziehung stehen“ (BECK, GULDIMANN & ZUTAVERN, 1994, S. 207), sondern umfasst auch, diese Erfahrungen in das bereits bestehende Wissensnetz zu integrieren, sie zu erweitern oder umzustrukturieren. So spricht VON GLASERSFELD (1997b) auch von einer „aktiven Konstruktion viabler begrifflicher Netzwerke“<sup>3</sup> (ebd., S. 190), um seine Auffassung von Verständnis darzulegen. Wissen ist ein „Repertoire an Begriffen, begrifflichen Beziehungen und Handlungen oder Operationen, die sich in der Verfolgung unserer Ziele als viabel erwiesen haben“ (VON GLASERSFELD, 1997b, S. 202). Lernen aus konstruktivistischer Sicht stellt somit die aktive Aufnahme neuer Wissens Elemente in ein bereits bestehendes Wissensnetz dar (SIEBERT, 1999, S. 20) und Verstehen kann dabei laut HÖRMANN (1983) als das „Schaffen neuer, weiter als bisher greifender Zusammenhänge“ (ebd., S. 18) gesehen werden.

Ein Verständnis von Lehren und Lernen, das durch eine konstruktivistische Grundposition gekennzeichnet ist und die Eigenaktivität des Lernenden in den Mittelpunkt stellt, fordert auch Eigenverantwortung sowie Selbstorganisation von jedem Individuum. Als „Produkt von Selbstorganisation“ (VON GLASERSFELD, 1997b, S. 191) wird Lernen dabei nach VON GLASERSFELD (1997b) beschrieben. Der Begriff Eigenverantwortung ist eng mit den Begriffen Selbstständigkeit, Selbststeuerung, Selbsttätigkeit, Aktivität und Autonomie verwandt (HUBER, 2004, S. 25). Stellt Lernen einen aktiven, individuellen Prozess dar, der nicht von außen zu steuern ist, dann muss Lernen im engeren Sinne immer selbstgesteuert erfolgen (HUßMANN,

3 Die Begriffe *viabel* und *Viabilität* wurden von ERNST VON GLASERSFELD aus der Biologie übernommen und ersetzen in der Theorie des Radikalen Konstruktivismus den Begriff der Wahrheit. „Handlungen, Begriffe und begriffliche Operationen sind dann viabel, wenn sie zu den Zwecken oder Beschreibungen passen, für die wir sie benutzen. Nach konstruktivistischer Sichtweise ersetzt der Begriff der Viabilität im *Bereich der Erfahrung* den traditionellen philosophischen Wahrheitsbegriff, der eine ‚korrekte‘ *Abbildung der Realität* bestimmt“ (VON GLASERSFELD, 1996, S. 43, Hervorhebungen im Original).

2004, S. 6). Die Selbststeuerung kann dabei von Seiten der Lehrkraft nur angeregt werden. Wobei KONRAD und TRAUB (1999) die Notwendigkeit dieser Anregungen explizit hervorheben: „Wenn Lernen ein individueller Prozess ist, sind Anregungen unausweichlich, die die Lernenden dazu befähigen über den herkömmlichen Unterricht hinaus ihr Lernen selbst in die Hand zu nehmen“ (ebd., S. 24). Selbstgesteuertes Lernen lässt sich nur schrittweise aufbauen (HUßMANN, 2004, S. 6), muss auch erst gelernt werden und bewegt sich demnach nach KONRAD und TRAUB (1999) etwas weiter gefasst auf einem Kontinuum zwischen Selbststeuerung und Fremdsteuerung (ebd., S. 30ff.). Detaillierte Erkenntnisse im Hinblick auf den Grad der Fremdsteuerung bzw. die Lehrerrolle in einer konstruktivistischen Grundauffassung von Lehren und Lernen werden im Abschnitt 1.3 aufgeführt.

## 1.2 Abgrenzung zu einer behavioristischen Auffassung von Lehren und Lernen

„Sag mir, was ich wissen muss; verlang aber nicht von mir,  
dass ich denke!“

(WHITNEY, 1973, S. 285)

Die Kernidee konstruktivistischer Ansätze wird im folgenden Abschnitt einem behavioristischen Verständnis von Lehren und Lernen gegenübergestellt. Die grundsätzlich verschiedenen Positionen des Lehrens und Lernens gehen aus der Gegenüberstellung der beiden Grundauffassungen besonders deutlich hervor.

Während den konstruktivistischen Ansätzen die *individuelle Konstruktion* der Erkenntnis gemeinsam ist, wird in der abbildtheoretischen Erkenntnisauffassung<sup>4</sup> die Erkenntnis als ein Spiegelbild der erkannten Wirklichkeit angesehen. Man geht von der Überzeugung aus, dass der Gegenstand der Erkenntnis unabhängig vom erkennenden Individuum existiert (im Sinne einer *objektiven Erkenntnis*) und nicht erst von diesem im Erkenntnisprozess konstruiert wird. Die Abbildtheorie stellte eine erkenntnistheoretische Grundlage des Behaviorismus<sup>5</sup> im 20. Jahrhundert dar (FATKE, 1979, S. 299). Der Behaviorismus liefert als Erklärung für die Entstehung von Wissen die mechanische Wirkung äußerer Ursachen: Von *außen* werden an den Lernenden Sinneseindrücke herangetragen, die sich als Ergebnis von ständiger Wiederholung und dabei erfolgreicher Bestärkung in besonderem Maße einprägen.

Kontrastiert man die Grundzüge konstruktivistischer Erkenntnistheorien mit abbildtheoretischen und behavioristischen Auffassungen, liegt demnach laut REINMANN-ROTHMEIER und MANDL (1997) ein Hauptunterschied in der Tatsache, dass Lernen nach einem konstruktivistischen Verständnis *aktiv* erfolgt (siehe Ab-

4 Begründer der abbildtheoretischen Erkenntnisauffassung ist John Locke (1632–1704) (FATKE, 1979, S. 299).

5 Die Hauptvertreter des Behaviorismus waren Edwald L. Thorndike (1874–1949), Ivan P. Pawlow (1849–1936) und Burrhus F. Skinner (1904–1990) (SKINNER, 1978).

schnitt 1.1) – wohingegen Lernen nach einem behavioristischen Verständnis als weitgehend *rezeptiver*<sup>6</sup> Prozess verstanden wird (ebd., S. 359):

Das erkennende und lernende Subjekt bleibt passiv und gelangt durch einen rezeptiven Vorgang – im Sinne eines Einbrennens oder Einprägens – zu Erkenntnis. Da die äussere [*sic*] sinnliche Erfahrung die einzige Quelle des Wissens ist, spielt die Reizvermittlung die entscheidende Rolle für das geistige Wachstum des Lerners. (HESS, 2002, S. 14)

Da die Reizvermittlung nach behavioristischer Grundauffassung von bedeutender Relevanz beim Lehren und Lernen ist und der Erkenntnisvorgang weitgehend auf die passive Reizaufnahme und ein assoziatives Verknüpfen in der Vorstellung reduziert zu sein scheint (HESS, 2002, S. 14), wird Unterricht demnach als Ort der Belehrung gesehen. Lernenden wird eine passive Rolle zuteil, die Wissensvermittlung sowie die Kontrolle über den kindlichen Lernprozess liegt ausschließlich in den Händen von Lehrkräften (vgl. DEWEY, 1976; HOLT, 2003). Neben einem Lernen über Sinnesreize, einer Fremdsteuerung des Lernprozesses und einem assoziativen Lernen<sup>7</sup> erfolgt Lernen nach behavioristischer Auffassung auch durch mechanische Wiederholung von Wissensinhalten sowie dem Lernen durch Verstärkung bzw. Lernen am Erfolg (vgl. PAWLOW, BAADER, SCHNAPPER & DRISCHEL, 1972; SKINNER, 1978).

Im Folgenden wird ein Unterrichtsbeispiel aus der Mathematik zur Erarbeitung des kleinen Einmaleins in der Grundschule angeführt. STEINER (2008) veranschaulicht an diesem unterrichtspraktischen Beispiel zur Einführung der Einmaleinsreihe mit 8 den didaktischen Ansatz einer Lehrkraft, die das assoziative Verknüpfen und die Vermittlung von wahrnehmbaren Sinnesreizen in den Mittelpunkt stellt.<sup>8</sup> Die Lehrkraft hat für die Erarbeitung Honigbiskuits mitgebracht, von denen 8 Stück immer in eine vorbereitete Schachtel passen. Jede gefüllte Schachtel wird von den Schülerinnen und Schülern mit einem Kärtchen versehen, auf dem die Gesamtzahl der Honigbiskuits festgehalten wird:

Die erste Schachtel enthielt 8 Stück, die zweite natürlich auch, aber wenn man die beiden zusammenfasste, waren das im ganzen schon 16.  $2 \times 8 = 16$ . Drei Schachteln enthielten 8 mehr, also 24. Sicherheitshalber wurde noch abgezählt, bevor man «24» als dritte Station der Reihe auf ein Kärtchen schrieb: 24, und man sagte dazu oder dachte dabei:  $3 \times 8 = 24$ . Die drei Schachteln sollten zu

---

6 Unter dem Begriff *rezeptiv* wird die Bereitschaft oder die Fähigkeit zur Aufnahme von Sinesindrücken verstanden (HESS, 2002, S. 14) – der Begriff wird im Folgenden auf einen Reizempfänger oder passiven Lerner bezogen.

7 Assoziationslernen lässt sich durch die Bildung von Assoziationen zwischen Reizgegebenheit und bestimmten Reaktionsweisen erklären. Zwei Formen des assoziativen Lernens werden unterschieden: die klassische Konditionierung und die operante Konditionierung. Die klassische Konditionierung zeichnet sich durch die Verknüpfung von zwei Umgebungsreizen aus, während ein Organismus bei der operanten Konditionierung lernt, „bestimmte Verhaltensweisen mit bestimmten Konsequenzen zu assoziieren“ (MIETZEL, 2007, S. 140).

8 Die teilweise überspitzten Formulierungen, die STEINER (2008) bei der Beschreibung des unterrichtspraktischen Beispiels gewählt hat, verdeutlichen bzw. deuten an, dass er diesem Ansatz kritisch gegenübersteht.

einem Block, jede neue unterhalb der vorangegangenen, auf den Tisch gelegt und nebendran jeweils mit dem richtigen Ergebnis markiert werden: 8, 16, 24 usw. Als man bei 80 angelangt war, konnte man die ganze Reihe hersagen. Einzelne Kinder sprachen sie vor, dann wurde sie auch an die Tafel und von dort ins Heft geschrieben, und wer jedesmal [sic] leise mitgesprochen hatte, der konnte mit Sicherheit schon die Hälfte der Reihe auswendig, so bis  $5 \times 8$  oder  $6 \times 8$ ! Die Lehrerin, Frau Braun, legte Wert darauf, dass auch mit den Schachteln geübt wurde: Immer wieder durfte ein Kind die Schachteln hinlegen und dazu sprechen: « $1 \times 8 = 8$ ,  $2 \times 8 = 16$ » usw., bis alle 10 schön dalagen. Die Schachteln sollten nicht aufeinandergetürmt, sondern untereinander gelegt werden, weil das die Übersicht erhöhte. Dann durften alle ein vorbereitetes Blatt bemalen, auf dem die 10 Schachteln mit den je 8 Biskuits vorgedruckt waren. Die ersten 8 wurden dunkelbraun, die zweiten hellbraun angemalt, damit man die 8er-Pakete deutlich voneinander unterscheiden konnte. Frau Braun hatte dazu eigens neue hellbraune Farbstifte verteilt; die Freude der Kinder war groß, konnte man die Farbe doch auch für das Kolorieren anderer Dinge gut gebrauchen. Natürlich musste zu jeder der bemalten Schachteln die passende Rechnung mit dem entsprechenden dunkel- oder hellbraunen Stift geschrieben werden. Die letzten fünf Minuten dieser Einführungslektion galten einer, wie man sagt, spielerischen Vertiefung: Die Kinder begannen zunächst im Chor noch einmal: « $1 \times 8 = 8$ ,  $2 \times 8 = 16$ ,  $3 \times 8 = 24$ ,  $4 \times 8 = 32$ », und so weiter, bis « $10 \times 8 = 80$ ». Dann machte es die Lehrerin schwieriger: Sie wischte an der Wandtafel, wo alle Rechnungen standen, das Ergebnis von  $3 \times 8$ , also 24, aus, und wieder begannen die Schüler im Chor: « $1 \times 8 = 8$ ,  $2 \times 8 = 16$ ,  $3 \times 8 = 24 \dots$ » – «Das könnt ihr schon wunderbar», lobte Frau Braun und wischte zwei weitere Resultate, nämlich 40 und 72 weg. Lautstark ging es los: « $1 \times 8 = 8$ », nur bei  $9 \times 8$  wurde die Lautstärke und das Unisono des jungen Arithmetikerchores etwas schwächer. Die einen zogen es vor, lieber nichts Lautes zu sagen, andere entschieden sich für 74 und wieder andere zogen durch mit  $9 \times 8 = 72$ ! Genau dann läutete die Pausenglocke, und das war nicht einmal die größte Belohnung; es gab nämlich für jeden der famosen Rechner ein Biskuit, eine positive Verstärkung für  $9 \times 8 = 72$  oder 74 oder auch «Mhm?», je nachdem, wofür man sich gerade hatte entschließen können, und da in der Pause ein spannendes Spiel die Hauptbeschäftigung war, war auch dafür gesorgt, dass die letzte arithmetische Reaktion, eben das Resultat für die  $9 \times 8$ -Rechnung mit keiner andern arithmetischen Überlegung mehr interferierte und so mit dem zuletzt gewussten, erahnten oder auch verschwiegenen Ergebnis assoziiert blieb. (STEINER, 2008, S. 274f., Hervorhebungen im Original)

Der didaktische Ansatz der Lehrerin besteht im angeführten Unterrichtsbeispiel auf der assoziativen Verknüpfung als Grundlage des Rechenlernens und entstammt demnach der klassischen bzw. behavioristischen Lerntheorie. Bei der gewählten Vorgehensweise des Aufbaus der 8er-Reihe werden die ersten beiden Zahlen (Faktoren einer Aufgabe) mit einer dritten, dem Ergebnis assoziiert. Derjenige, der dabei das Ergebnis nicht mit den beiden Faktoren der Aufgabe abgespeichert hat und somit auch nicht abrufen kann, „ist eben kein guter Rechner; umgekehrt gilt als gu-

ter Rechner, wer die richtigen Assoziationen rasch und korrekt abruff“ (STEINER, 2008, S. 276f.). Merkmale dieses Ansatzes sind eine mechanische Wiederholung bei angemessener Verstärkung und einer von Seiten der Lehrkraft als günstig angesehenen Segmentierung des Unterrichtsstoffes (ebd., S. 277). SKINNER (1958) spricht von Lehrkräften als *Lehrmaschinen*, die herangezogen wurden, um einen klein- und gleichschrittigen, produktorientierten Unterricht zu gestalten: „Each step must be so small that it can always be taken, yet in taking it the student moves somewhat closer to fully competent behavior. The machine must make sure that these steps are taken in a carefully prescribed order“ (SKINNER, 1958, S. 970).

Einer behavioristischen Auffassung von Lehren und Lernen folgend zeichnet sich ein *fully competent behavior* nicht – wie in konstruktivistischen Ansätzen – durch ein Verständnis des Lerninhaltes aus. Im Mathematikunterricht, wie im vorherigen Unterrichtsbeispiel dargestellt, kann die bloße Assoziation eines Zahlenpaares mit dem Ergebnis auch nicht zum Aufbau eines Verständnisses der Rechenoperation beitragen. Dies ist aber aus behavioristischer Sicht auch nicht zwingend nötig bzw. erstrebenswert, da das am Ende stehende *korrekte* Endprodukt des Lernprozesses (im angeführten Beispiel das Beherrschen der Einmaleinsaufgaben) als Ziel der Erarbeitung angegeben wird (AESCHBACHER, 1994, S. 128). Verstehensbasierte Lernprozesse, wie sie im Konstruktivismus angebahnt und angestrebt werden, spielen in der Reinform der Lehr-/Lerntheorie des Behaviorismus keine Rolle – man orientiert sich am korrekten Ergebnis des Lernprozesses, nicht am beschrifteten Lernweg.

### 1.3 Auswirkungen des Verständnisses von Lehren und Lernen auf die Rolle der Lehrperson

*„Wir Lehrer – wahrscheinlich alle Menschen – werden von einer erstaunlichen Täuschung genarrt. Wir glauben, wir könnten ein Bild, eine Struktur oder ein funktionstüchtiges Modell einer Sache, die wir in unserem Geiste aufgrund langer Erfahrung und Vertrautheit zusammengesetzt haben, in den Geist einer anderen Person übertragen, indem wir es in ein langes Band aneinandergereihter Worte verwandeln.“*

(HOLT, 1979, S. 167)

Das zugrundeliegende Verständnis von Lehren und Lernen wirkt sich auch auf die Rolle der Lehrperson aus. Während die Aufgabe einer Lehrkraft nach behavioristischer Auffassung von Lehren und Lernen in der Vermittlung von Wissen liegt, steht bei Lehrkräften, die einer konstruktivistischen Grundauffassung folgen, das Schaffen von Lernumgebungen im Vordergrund, die gute Bedingungen für die Anregung individueller Konstruktionen bieten (TERHART, 1999, S. 636f.). In einem behavioristischen Rollenverständnis wird dem Lerner eine passive Rolle zuteil, der Lehrende übernimmt die alleinige Lernverantwortung, indem er die Segmentierung des Lern-

stoffs vornimmt und je nach Leistungsvermögen eines Kindes Aufgabenschwierigkeit bzw. -umfang variiert. Lernen erfolgt demnach durch die Belehrung von Seiten der Lehrkraft nach dem Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte, die von der Lehrkraft isoliert dargeboten werden, und durch die wiederholte Einforderung eines Übens isolierter Schwierigkeiten. Der Lernerfolg wird von der Lehrkraft am richtigen Ergebnis gemessen und nicht am eingeschlagenen Lernweg des Lerners – der Lehrer selbst gibt den Lernweg vor, er vermittelt Rezepte (HESS, 2002, S. 42ff.) als „fertigen Stoff“ (REUSSER, 2006, S. 161).

BRUNER kehrt sich bereits 1971 von diesem Rollenverständnis ab und betont:

To instruct someone in these disciplines is not a matter of getting him to commit results to mind. Rather, it is to teach him to participate in the process that makes possible the establishment of knowledge. We teach a subject not to produce little living libraries on that subject, but rather to get a student to think mathematically for himself, to consider matters as an historian does, to take part in the process of knowledge-getting. Knowing is a process, not a product. (BRUNER, 1971, S. 72)

Die Vertreter bzw. Fürsprecher einer konstruktivistischen Grundposition distanzieren sich ebenfalls von dem behavioristischen Rollenverständnis der Lehrperson und setzen dabei nach VON GLASERSFELD (1996) auf ein anderes Hauptaugenmerk: „Die Kunst des Lehrens hat wenig mit der Übertragung von Wissen zu tun, ihr grundlegendes Ziel muss darin bestehen, die Kunst des Lernens auszubilden“ (ebd., S. 309). Laut HESS (2002) übernimmt die Lehrkraft dabei im Laufe des Lernprozesses einer jeden Schülerin und eines jeden Schülers die Funktion eines Lernbegleiters mit zunehmend geringerer Lenkungsfunktion. Durch die anfängliche Unterstützung beim Aufbau eines zielgerichteten Lernverhaltens soll Lernen auf Schülerseite zunehmend selbstorganisiert funktionieren (ebd., S. 44f.). REUSSER (2006) betont ebenfalls die Wichtigkeit der Zurücknahme „der Dominanz der Steuerung“ (ebd., S. 165) und plädiert für einen, die Verantwortung abgebenden, „adaptiven Lernhelfer“ (ebd., S. 165).

Sowohl für die Beschreibung der Schüler- als auch der Lehrerrolle der beiden unterschiedlichen Ansätze von Lehren und Lernen setzt KÜHNEL (1916) auf die beiden gegensätzlichen Begriffspaare „Leitung und Rezeptivität“ vs. „Organisation und Aktivität“ (ebd., S. 70). Die konkrete Gegenüberstellung der konträren Rollen von Lehrkräften eines behavioristisch orientierten im Vergleich zu einem konstruktivistisch gestalteten Unterricht ist dabei auch in einigen Veröffentlichungen der letzten Jahre aufgeführt (GALLIN & RUF, 1990, S. 19; HESS, 2002, S. 45; WINTER, 1984a, S. 26; WINTER, 2016, S. 4f.; WITTMANN, 1997, S. 28). In Tabelle 1 wird eine Gegenüberstellung – in ihren Extremausprägungen – in gekürzter Form dargeboten.

Tabelle 1: Gegenüberstellung der behavioristischen und der konstruktivistischen Lehrkraft-Rolle

| Behavioristische Lehrkraft-Rolle                             | Konstruktivistische Lehrkraft-Rolle                              |
|--|--|
| Lehrperson als Belehre, Leiter, Instrukteur                  | Lehrperson als Lernbegleiter, Organisator, Konstrukteur          |
| Behelren nach dem Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte | Anregen individueller Konstruktionen mithilfe von Lernumgebungen |
| Reduzieren der Schwierigkeit der Lerninhalte                 | Beibehalten der Komplexität der Lerninhalte                      |
| Vermitteln von isolierten Einzelfakten                       | Anregen verständnisbasierter Lernprozesse                        |

Der Konstruktivismus hat ein nach REUSSER (2006) „für die Pädagogik attraktives, empirisch verankertes *Lernparadigma* hervorgebracht“ (ebd., S. 161, Hervorhebung im Original) und dabei den Blick auf die Lernwelten der Schülerinnen und Schüler gerichtet. Evident erscheint, dass sich damit auch ein Wandel der Lehrerrolle vollzogen hat – von einer direkten zu einer eher indirekten Instruktion. Dieser Wandel des Rollenverständnisses geht mit der neuen Aufgabe der Lehrkraft einher, eine Lernumgebung zu schaffen, die einer konstruktivistischen Auffassung von Lehren und Lernen Rechnung trägt:

Das Handeln von Lehrpersonen vermag zwar günstige Bedingungen für verständnisvolles Lernen zu schaffen und damit das Lernfeld abzustecken, das Lernen von individuellen Schülern aber kann es weder zwingend in Gang setzen noch sicher zum Erfolg führen. Das heisst [*sic*], keine Lehrperson kann einem Lernenden den Vollzug einer gedanklichen Verknüpfung abnehmen. (REUSSER, 2006, S. 160f.)

Welche Bedingungen allerdings eine gute Lernumgebung für die Anregung subjektiver Konstruktionen erfüllen muss, geht nicht einheitlich aus der Literatur hervor (TERHART, 1999, S. 637). Je nach zugrunde liegender konstruktivistischer Position – von radikal bis hin zu gemäßigt – unterscheiden sich die Sichtweisen der jeweiligen Ansätze, indem sie einerseits vermehrt die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler hervorheben oder andererseits die gezielte Anleitung durch die Lehrkraft betonen (DUIT, 1995, S. 916). Aus diesen verschiedenen Ansätzen innerhalb des konstruktivistischen Verständnisses geht bereits hervor, dass Unterricht nach aktuellem Verständnis von Lehren und Lernen immer eine Balance zwischen Konstruktion und Instruktion darstellt – das *ausgewogene* Maß an Instruktion für den individuellen Lernprozess allerdings nicht klar formuliert zu sein scheint.

Nach REUSSER (1994) lässt sich die Rolle der Lehrkraft weder „auf einfache Metaphern des Typs ‚der *Lehrer als x* oder *als y*‘ reduzieren, noch der Wandel sich durch simplifizierende Formeln des Typs ‚von der Rolle *x zur Rolle y*‘ qualifizieren“ (ebd., S. 34, Hervorhebungen im Original). Er sieht die beiden Lernkulturen, die behavioristische und die konstruktivistische, nicht schwarz/weiß, sondern eher im Sinne einer Schwerpunktverlagerung, die noch auf der Suche nach der entsprechenden Balance zu sein scheint (HESS, 2002; REUSSER, 1999a). Seiner Meinung

nach schlägt der Wandel des Rollenverständnisses von einem „direkt instruierenden Stoffdarsteller, Unterweiser und Lektionengeber [zu einem] indirekt arrangierenden Lerndesigner, [...] Moderator, Lernberater und Coach“ (REUSSER, 2006, S. 161, Ergänzung der Autorin) zwar eine positive Richtung ein, aber Folgerungen für die didaktische Rolle von Lehrern bzw. eine Theorie des Lehrerhandelns sind nur unzureichend gegeben. Die Schwierigkeit besteht nach REUSSER (2006) darin, einen Unterricht zu konzipieren, der gründliches, in die Tiefe gehendes, fachliches Verstehen *und* Autonomisierung jedes Lernenden zugleich anstrebt – denn individuelle Lernwege den Kindern zu ermöglichen und die Konstruktion von Wissen anzutreiben, geht immer auch damit einher, dieses Freisetzen von Subjektivität wieder zu begrenzen (ebd., S. 161ff.). Es geht nicht um die „totale Selbststeuerung, sondern um eine Integration von Anleitung und Selbstständigkeit, Instruktion und Konstruktion (GUDJONS, 2006, S. 17). Doch wann, wie und wie stark Lehrpersonen unterstützen, anleiten oder instruieren sollen, sind offene Fragen, welche die Unterrichtsforschung noch nicht detailliert geklärt hat (REUSSER, 2006, S. 164ff.).

#### **1.4 Historischer Abriss und gegenwärtige Aktualität behavioristischer und konstruktivistischer Auffassungen von Lehren und Lernen**

*„Wer sich zum Konstruktivismus bekennt, ist nicht nur ‚in‘, er darf sich auch eines weitläufigen Kreises (scheinbar) Gleichgesinnter erfreuen.“*

(REUSSER, 1999b, S. 1, Hervorhebung im Original)

Nicht die ausschließliche Selbststeuerung, sondern eine Integration fordert GUDJONS (2006) in seinem Zitat im vorausgehenden Abschnitt, das zugleich als ein Indiz angeführt werden kann, dass aktuelle Lehr-/Lerntheorien durchaus sowohl konstituierende Elemente des Behaviorismus als auch des Konstruktivismus einschließen. Die Begriffe Anleitung und Instruktion können als kennzeichnende Merkmale einer behavioristischen Grundauffassung geführt sowie Selbstständigkeit und Konstruktion unter der konstruktivistischen Sichtweise subsumiert werden (siehe Abschnitte 1.1 und 1.2). Der folgende Abschnitt soll einen kleinen historischen Abriss der behavioristischen und konstruktivistischen Sicht auf Lehren und Lernen skizzieren und die gerade angesprochene, aktuelle Gegenwartigkeit behavioristischer *und* konstruktivistischer Auffassungen von Lehren und Lernen aufzeigen.

Die Wurzeln des Konstruktivismus liegen weit in der Vergangenheit, sie gehen zurück auf den Philosophen Xenophanes (570 v. Chr.–470 v. Chr.), der sich als einer der ersten mit dem Begriff des Wissens philosophisch auseinandersetzte. Xenophanes betonte, „dass wir es nur mit Erfahrung zu tun haben und nie mit Dingen an sich“ (VON GLASERSFELD, 1997a, S. 9) und bereitete damit „unwillkürlich den Boden [...], aus dem zweieinhalb Jahrtausende später die konstruktivistische Denkweise sprießen konnte“ (ebd., S. 9). Richtig durchgesetzt und präzisiert wurde die-

se philosophische Position – wie man dem Zitat von VON GLASERSFELD (1997a) entnehmen kann – zunächst allerdings nicht. Die „Machthaber in allen Sparten“ (VON GLASERSFELD, 1997a, S. 9) beruhten lange Zeit auf dem Standpunkt, „sie allein hätten Zugang zur endgültigen Wahrheit gefunden, und darum müsse man ihnen folgen“ (ebd., S. 9). Lehr- und Lerntheorien wurden vornehmlich von den Ideen des Behaviorismus geprägt, Unterricht wurde demnach als Ort der Belehrung verstanden und Lernen als passivistisch angesehen (vgl. DEWEY, 1976; HOLT, 2003). Gerade für Didaktiker und Pädagogen gestaltete sich diese Theorie des Lernens als besonders ansprechend, sicherte sie doch die „Berechenbarkeit von Lernen sowie die *suggestierte Kontrollierbarkeit* von Unterricht und seinen Wirkungen“ (BRÜGELMANN, 2005, S. 61f., Hervorhebungen im Original). Diese behavioristische Sicht auf Lehren und Lernen konnte weit bis ins 20. Jahrhundert aufrecht erhalten werden – bis zu diesem Zeitpunkt bestand kein Anreiz, sich mit den Denkprozessen der Kinder auseinanderzusetzen. Alles Wissen, über das Kinder verfügen, wurde den Kindern *eingeflüßt* oder wie die Metapher des *Nürnberger Trichters* (als rein mechanische Wissensvermittlungsmethode) sehr treffend bildlich veranschaulicht, in den Kopf der Kinder *hinein geschüttet* (ANDRESEN & DIEHM, 2006, S. 263f.). Es gab einzelne frühe Bewegungen, die das Lernen unter konstruktivistischer Perspektive betrachtet haben und den Versuch unternommen haben, diese Perspektive auf den Unterricht zu übertragen. Aber erst Anfang des 20. Jahrhunderts wurde der Grundgedanke des Konstruktivismus durch die Reformpädagogik und ihre Forderungen nach einer aktiven Rolle der Kinder im Lernprozess aufgegriffen und die konstruktivistisch ausgerichtete Erkenntnistheorie erfuhr einen stärkeren Einfluss. Mitte des 20. Jahrhunderts wurde demnach immer deutlicher, dass sich Verhaltensweisen der Menschen und Prozesse nicht rein mit behavioristischen Mitteln erklären lassen. Der Konstruktivismus ist ab diesem Zeitpunkt auf dem Vormarsch und ist aus heutiger Sicht nicht mehr wegzudenken – „konstruktivistisches Denken scheint ‚im Trend‘ zu liegen“ (SIEBERT, 1999, S. 5, Hervorhebung im Original). „Es ist jedoch eine Tatsache, dass die behavioristische Bewegung nicht nur vor einigen Jahrzehnten außerordentlich einflussreich war; ihre Schlüsselbegriffe sind heute noch lebendig und in den Vorstellungen vieler Erzieher wirksam“ (VON GLASERSFELD, 1996, S. 287). Dies ist sicherlich auch darauf zurückzuführen, dass dem Behaviorismus laut HESS (2002) vereinzelt auch Positives abgewonnen werden kann: Verhaltensweisen oder -muster können angebahnt und gefestigt, vermittelte Fertigkeiten ausgebildet werden (ebd., S. 19). Einzelne Ansichten eines behavioristischen Verständnisses von Lehren und Lernen nehmen auch in der aktuellen Lehr-/Lerntheorie bzw. der gegenwärtigen Diskussion eine nicht zu vernachlässigende Rolle ein.

Nach diesen vorgeschalteten, allgemeinen und nicht explizit mathematikspezifischen Ausführungen zum Lehren und Lernen wird im folgenden Abschnitt die Bedeutsamkeit der Diskussion um verschiedene Lerntheorien (Abschnitt 1.1 bis 1.4) auf die Mathematik-Didaktik in den Blick genommen. Die Mathematik-Didaktik be-

ruft sich auf verschiedene wissenschaftliche Bezugsdisziplinen<sup>9</sup>, „eine interdisziplinär angelegte Leitschiene“ (HESS, 2002, S. 8, Hervorhebung im Original) verläuft dabei von einer behavioristischen zu einer konstruktivistischen Auffassung von Lehren und Lernen. Welche fachdidaktischen Auswirkungen einer gewissen Tragweite die veränderte Sichtweise auf das Lehren und Lernen im Mathematikunterricht hat, soll im Folgenden näher ausgeführt werden.

## 1.5 Veränderte Sichtweise auf das Lehren und Lernen im Mathematikunterricht

*„Learning mathematics is a constructive activity. Something which contradicts the idea of learning as absorbing knowledge which is presented or transmitted.“*

(TREFFERS, 1991, S. 24)

Die Entwicklung des Mathematikunterrichts der Grundschule Ende des letzten Jahrhunderts bis in die Gegenwart ist nach KRAUTHAUSEN (2000) dem Paradigmenwechsel von einer behavioristischen zu einer konstruktivistischen Sichtweise auf das Lehren und Lernen geschuldet (siehe Abschnitt 1.1 bis 1.3) (ebd., S. 13). In diesem Abschnitt soll präzisiert werden, inwieweit bzw. inwiefern sich die veränderte Sichtweise bezogen auf die Lehr- und Lernprozesse im Allgemeinen auf das Lehren und Lernen im Fach Mathematik widerspiegelt. Der Abschnitt 1.5 bietet zu Beginn einen historischen Abriss, der im Vergleich zum vorherigen Abschnitt die historische Entwicklung des Lehr- und Lernverständnisses im Mathematikunterricht in den Fokus stellt und einen Blick auf die gegenwärtige Aktualität der beiden Grundauffassungen von Lehren und Lernen in diesem Fach richtet. Im Zentrum der Ausführungen steht die Auseinandersetzung mit einem – vor dem Hintergrund des sogenannten Paradigmenwechsels – *revidierten* Verständnisses von Mathematikunterricht, welches das Lernen und nicht mehr das Lehren in den Mittelpunkt stellt, die aktive Rolle des Lernenden betont sowie dem Verstehensprozess im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle zuteilwerden lässt. Wie eine konkrete, konzeptuelle Vorgehensweise in einem Mathematikunterricht, der auf einem konstruktivistischen Lehr-Lernverständnis beruht, aussehen kann, wird zum Abschluss dieses Abschnittes diskutiert.

---

9 Als bedeutendste Bezugsdisziplinen der Mathematikdidaktik führt z.B. WITTMANN (1995b) die verschiedenen Bereiche der Mathematik, die Pädagogik, die Allgemeine Didaktik, die Lernpsychologie, die Pädagogische Psychologie, die Kognitionspsychologie, die Entwicklungspsychologie, die Neurophysiologie sowie die Philosophie an (ebd., S. 1f.).

### 1.5.1 Historische Entwicklung zweier miteinander konkurrierender Ansätze des Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht

Laut WITTMANN (1990) sind die konstruktivistische und die behavioristische Grundauffassung von Lehren und Lernen zwei Ansätze, die sich auch auf das Lehren und Lernen von Mathematik ausgewirkt haben. Insbesondere seit Beginn des 20. Jahrhunderts konkurrieren diese beiden Ansätze miteinander und werden in der einschlägigen fachdidaktischen Diskussion des Öfteren als *Idealtypen*<sup>10</sup> gegenübergestellt (vgl. z.B. AHMED, 1987; GALLIN & RUF, 1990; KRAUTHAUSEN, 2000; KÜHNEL, 1916; WINTER, 2016; WITTMANN, 1990). Historisch betrachtet war „die Praxis des Unterrichts [bis weit ins 20. Jahrhundert] durchwegs von der passivistischen Sichtweise beherrscht, obwohl es immer Einzelgänger gegeben hat, die für aktives Lernen eingetreten sind“ (WITTMANN, 1990, S. 153, Ergänzung der Autorin). So plädierte der bedeutende Rechendidaktiker Johannes Kühnel (1869–1928) bereits Anfang des 20. Jahrhunderts für eine notwendige Veränderung der Schüler- und Lehrerrolle im Mathematikunterricht und reihte sich damit in eine frühe Bewegung ein, die der Forderung nach einer aktiven Rolle der Kinder bezogen auf Lernprozesse im Allgemeinen nachkam (siehe Abschnitt 1.4). Die Hauptintention KÜHNELS (1916) bestand bereits zu diesem frühen Zeitpunkt darin, Kinder angemessen zu fördern und effektives Lernen zu erzielen – KÜHNEL (1916) formulierte diese Intention in seinem Werk *Neubau des Rechenunterrichts* wie folgt:

*Beibringen, darbieten, vermitteln* sind vielmehr Begriffe der *Unterrichtskunst vergangener Tage* und haben für die Gegenwart geringeren Wert; denn der pädagogische Blick unserer Zeit ist nicht mehr stofflich eingestellt. Wohl soll der Schüler auch künftig Kenntnisse und Fertigkeiten gewinnen – wir hoffen sogar noch mehr als früher, aber wir wollen sie ihm *nicht beibringen*, sondern er soll sie sich *erwerben*. (KÜHNEL, 1916, S. 136, Hervorhebungen im Original)

Diese Sichtweise konnte sich allerdings lange Zeit auch in der Mathematikdidaktik nicht durchsetzen (vgl. KRAUTHAUSEN, 2000; SCHIPPER, 2009) – wurden doch die didaktischen Möglichkeiten des Lehrers dauerhaft überschätzt und das geistige Potential der Schülerinnen und Schüler unterschätzt (WITTMANN, 1995a, S. 12). Zudem war die Vorstellung allgegenwärtig, dass die starke Fachstruktur der Mathematik<sup>11</sup> nur als Folge kleiner und kleinster Schritte vermittelt werden konnte, da „für die Mathematik [ein] kleinschrittiger hierarchischer Aufbau aus Elementen geradezu als naturgemäß“ (WITTMANN, 1995a, S. 13, Ergänzung der Autorin) angesehen wurde. Fachspezifisch betrachtet für das Fach Mathematik vollzog sich erst gegen Ende des letzten Jahrhunderts die *konstruktivistische Wende* mit dem unauf-

---

10 Die beiden Positionen dieser Dichotomie – der belehrende Unterricht im Zuge der behavioristischen Position und ein aktiv-entdeckender Unterricht im Sinne einer konstruktivistischen Auffassung – werden teilweise mit unterschiedlichen Begrifflichkeiten beschrieben, in ihren Grundaussagen herrscht allerdings Einigkeit.

11 Unter *Fachstruktur der Mathematik* wird nach BUSCHKÜHLE, DUNCKER & OSWALT (2009) die „Fachsystematik der Wissenschaftsdisziplin Mathematik“ (ebd., S. 48) verstanden.

haltsamen Aufstieg aktivistischer und dem gleichzeitigen Rückgang passivistischer Theorien. Die *konstruktivistische Wende* stellte dabei nach KRAUTHAUSEN (2000) für den Mathematikunterricht allerdings nur eine – wenn auch extreme – Akzentverschiebung dar, die nicht mit dem „Absolutheitsanspruch des einen oder anderen Typs“ (KRAUTHAUSEN, 2000, S. 18) einherging. Für die Mathematikdidaktik und den Mathematikunterricht läutete die konstruktivistische Sichtweise auf das Mathematiklernen einen mit der Formel „Mathematik entdecken“ (WINTER, 1987) gekennzeichneten Umbruch ein, der für einen Mathematikunterricht plädierte, der den Kindern das Lernen auf eigenen Wegen ermöglicht (SCHIPPER, 2009, S. 66).

Das von STEINER (2008) bereits im Jahr 1988 in seiner Erstauflage illustrierte Beispiel zur Einführung der Einmaleinsreihe mit 8 in der Grundschule (siehe Abschnitt 1.2) aus dem Buch *Lernen – 20 Szenarien aus dem Alltag* scheint auch noch heute eine mögliche Alltagssituation zu veranschaulichen – abbildtheoretische und behavioristische Annahmen gehören nicht vergangenen Tagen an, sondern scheinen didaktisch gegenwärtig zu sein (HESS, 2002, S. 16). Auch KRAUTHAUSEN (2000, S. 13ff.) verweist darauf, dass behavioristische Vorstellungen von Lernen und Lehren von Mathematik nicht an Aktualität in der Unterrichtsrealität bzw. -praxis verloren haben (ebd., S. 13ff.; FREESEMANN, 2014, S. 17; KRAUTHAUSEN & SCHERER, 2007, S. 103).<sup>12</sup> Nach BAUER (1995) besteht in der pädagogisch-didaktischen Literatur weitgehend Konsens bezüglich einer veränderten Sichtweise auf das Lehren und Lernen von Mathematik. Die „Realisierung [in der Unterrichtspraxis] ist allerdings schwierig und anstrengend“ (ebd., 1995, S. 15, Ergänzung der Autorin). Auch in den Niederlanden, die bezüglich dieser veränderten Sichtweise in der Mathematikdidaktik eine führende Rolle innehatte, wurden Schwierigkeiten in der Umsetzung eines konstruktivistisch orientierten Mathematikunterrichts wahrgenommen – die Praxis spiegelte auch dort ein anderes Bild wider als die Fachdidaktik und die Lehrbücher. TREFFERS (1997) betont, dass die „Erneuerung, die gegenwärtig in den Lehrbüchern erkennbar wird, in der Praxis noch lange nicht umgesetzt wird“ (ebd., S. 21). WITTMANN (1990) sieht eine ähnliche Entwicklung, wenn er davon spricht, dass vermehrt Stimmen gegen die behavioristische Sichtweise laut werden und gleichzeitig die Akzentverschiebung zu einer konstruktivistischen Auffassung von Lehren und Lernen einen sehr breiten Konsens gefunden hat. Auch in den Lehrplänen verdichten sich zunehmend die Anzeichen für ein konstruktivistisches Verständnis von Lernen und Lehren. „Trotzdem ist nicht zu erwarten, dass sich die Schulwirklichkeit in kurzer Zeit von selbst auf die didaktischen Prinzipien der neuen Richtlinien und Lehrpläne einstellen wird“ (ebd., S. 154). Verwunderlich scheint dies nicht, bedenkt man, dass laut KUHN (1993) ein Paradigmenwechsel, wie der skizzierte, durchaus 20–25 Jahre benötigt, um breite Anerkennung zu erlangen.

---

12 Nach KRAUTHAUSEN (2000) gibt es dafür auch einige Gründe, die durchaus nachvollziehbar erscheinen, „u.a. die eigene Lernbiographie, [die] Altersstruktur und [der] Aus- und Fortbildungsstand der Kollegen [...] – abgesehen vom prinzipiellen Zeitbedarf eines Paradigmenwechsels“ (ebd., S. 13, Ergänzungen der Autorin), der im weiteren Verlauf dieses Abschnittes auch von KUHN (1993) beschrieben bzw. aufgezeigt wird.

Einer Aussage von PLANCK (1948) zufolge, scheint ein aufgrund eines Paradigmenwechsels wünschenswerter Umbruch in der Unterrichtspraxis bezogen auf das Lehren und Lernen im Allgemeinen nur unter drastischen Voraussetzungen vonstattengehen zu können: „Eine neue wissenschaftliche Wahrheit pflegt sich nicht in der Weise durchzusetzen, daß [sic] ihre Gegner überzeugt werden, sondern viel mehr dadurch, daß [sic] die Gegner allmählich aussterben und daß [sic] die heranwachsende Generation von vorneherein mit der Wahrheit vertraut gemacht ist“ (PLANCK, 1948, S. 22).

Was man nach derzeitigem Verständnis als *neue wissenschaftliche Wahrheit* – wie es PLANCK (1948) in seinem angeführten Zitat genannt hat – im Hinblick auf das Lehren und Lernen von Mathematik versteht, soll im folgenden Abschnitt einer detaillierten Betrachtung unterzogen werden. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem Primat des Verstehens. Darüber hinaus soll einerseits die konstruktivistische Sichtweise auf das Lehren und Lernen im Mathematikunterricht von einer behavioristischen Sichtweise abgegrenzt und andererseits aufgezeigt werden, inwiefern behavioristische Elemente Bestandteil einer konstruktivistischen Auffassung von Lehren und Lernen im Mathematikunterricht aus heutiger Sicht sind.

### 1.5.2 Primat des Verstehens im Mathematikunterricht

Einem behavioristischen Verständnis von Lehren und Lernen zufolge wird Erkenntnis von *außen* an den Lernenden herangetragen und durch wiederholtes Üben und damit einhergehender Bestärkung eingepreßt (siehe Abschnitt 1.2). Die ursprünglich behavioristische Position sah die Schule demnach als „Ort [an], an dem kenntnisreiche Lehrkräfte dafür sorgten, dass die Lebenserfahrungen und Denkprodukte anderer Leute in wohlproportionierten Häppchen der nächsten Generation vermittelt wurden“ (BECK et al., 1992, S. 9, Ergänzung der Autorin). Diese Unterrichtsauffassung, die auch den Mathematikunterricht entscheidend geprägt hat, konnte in erster Linie aufgrund der starken Fachstruktur der Mathematik im Fach Mathematik lange nicht überwunden werden. Die Fachstruktur verlangte nach damaliger Vorstellung von Natur aus die Übersetzung in „eine methodisch gestufte Folge «kleiner und kleinster Schritte», die unter «Isolierung der Schwierigkeit» vom «Leichten zum Schweren» und vom «Einfachen zum Zusammengesetzten» durchlaufen“ wird (WITTMANN, 1995a, S. 13, Hervorhebungen im Original). In Anlehnung an den Behaviorismus avancierte Lernen im eigentlichen Sinne auch im Mathematikunterricht zum Nebenprodukt, von zentraler Bedeutung war das Einüben eines richtigen Lösungsweges bzw. das Anwenden eines Verfahrens, um schnellstmöglich zum richtigen Ergebnis zu gelangen (KRAUTHAUSEN, 2000, S. 14f.). Wird Mathematik dieser behavioristischen Auffassung zufolge „als *Fertigprodukt* verstanden, dann kann ein Unterrichtsziel als erreicht gelten, wenn der angebotene Inhalt adäquat <übernommen> wurde, d.h. das Kind ein für geeignet erachtetes Endverhalten zeigt“ (ebd., S. 16, Hervorhebungen im Original). FREUDENTHAL beschreibt die Gegebenheiten 1973 mit folgenden Worten: „Die Mathematik ist bis heute nur als Fertig-

produkt analysiert worden, und wenn dann auf die Analyse eine formalisierte Synthese folgt, so wird das Ergebnis als Fertigprodukt präsentiert“ (ebd., S. 110). Dieses Lern- bzw. Unterrichtsverständnis stimmt mit dem teilweise auch noch gegenwärtigen Bild von der Mathematik als einem Anhäufen von Definitionen, Regeln und Verfahren im Umgang mit Zahlen überein. Schülerinnen und Schüler eignen sich einen sogenannten *Königsweg*, eine aus Sicht der Lehrkraft elegante Vorgehensweise zur Lösung von Aufgaben, an und führen diese ohne jegliches mathematisches Denken – wie ein *Rezept* – durch (GALLIN, RUF & SITTA, 1985). Es erweckt den Anschein, als würden feste Methoden bzw. Prozeduren oder Formeln als Ersatz für Denkleistungen zum Einsatz kommen (BENEZET, 1988, S. 363).

Die folgende Zusammenschau (siehe Tabelle 2) kontrastiert pointiert angelehnt an FREESEMANN (2014) die charakteristischen Merkmale eines rezeptiv gestalteten Mathematikunterrichts und seines Pendantes, eines konstruktivistischen Mathematikunterrichts (ebd., S. 17f.).

Tabelle 2: Zusammenfassende Gegenüberstellung von Merkmalen eines rezeptiv gestalteten und konstruktivistisch orientierten Mathematikunterrichts (in Anlehnung an FREESEMANN, 2014, S. 17f.)

| Rezeptiv gestalteter Mathematikunterricht                                 | Mathematikunterricht orientiert am konstruktivistischen Lernen                               |
|---|--|
| Mathematik wird auf das Rechnen verkürzt                                  | Verständnis von Zusammenhängen, von Zahlbeziehungen und arithmetischen Operationen           |
| Betonung der (schriftlichen) Algorithmen; Einüben von Rechenschritten     | Einsicht ist wichtiger als Automatisieren; „Inhaltliches Denken vor Kalkül“ (PREDIGER, 2009) |
| Kleinschrittigkeit, didaktisches Vereinfachen; geringeres Anspruchsniveau | Lernen in komplexen Problemstellungen; hohes Anspruchsniveau                                 |
| Lehrperson als Belehrer   | Lehrperson als Lernbegleiter   |
| Belehrung durch die Lehrperson im Sinne des Vormachens und Nachmachens    | Mathematiktreiben als aktives Entdecken durch die Schülerinnen und Schüler                   |
| Vorgabe fester Rechenwege   | Schülerinnen und Schüler entwickeln eigene Lösungen  |
| Auswendiglernen und mechanisches Üben                                     | Von- und miteinander lernen; begründen, argumentieren, vergleichen, nachvollziehen           |

Mit dem Paradigmenwechsel von einer behavioristischen Sichtweise zu einer konstruktivistischen Sicht wird gerade dem *Verstehen der Lern- und Denkprozesse* eine besondere Bedeutung zuteil – geht man doch heute davon aus, dass Lernen zentral darin besteht, dass von jedem Individuum kognitive Strukturen aufgebaut werden (siehe Abschnitt 1.1). Die folgenden Ausführungen widmen sich ausführlich dem Primat des Verstehens der konstruktivistischen Grundauffassung von Lehren und Lernen.

Das konstruktivistische Lehr-/Lernverständnis wirkt sich ebenso wie die behavioristische Auffassung von Lehren und Lernen auf die Gestaltung des Mathematikunterrichtes aus. Die Vorstellung, dass die starke Fachstruktur der Mathematik keine Öffnung des Unterrichtes zulässt, wurde in den 70er Jahren aufgelöst, „als neue Erkenntnisse und Entwicklungen in der Wissenschaftsgeschichte, Wissenschaftstheorie und Philosophie der Mathematik“ (WITTMANN, 1995a, S. 13) einhergehend mit dem aufkommenden Konstruktivismus zu einem vollkommen neuen Verhältnis von Wissenschaft und Unterricht führten. WITTMANN (1995a) beschreibt die neue Beziehung von mathematischer Wissenschaft und dem Mathematikunterricht wie folgt:

Lernprozesse [werden] nicht mehr von den logischen Begriffsstrukturen der Mathematik bestimmt. Maßgebend sind vielmehr die mathematischen Erkenntnisprozesse, die in sinnvollen Problemsituationen nach ihrer eigenen Logik ablaufen. Mathematik wird vorrangig als **Tätigkeit** gesehen, die gekennzeichnet ist durch die mathematische Beschreibung von problemhaltigen Situationen, durch das Entdecken und Begründen von Beziehungen sowie durch die mündliche und schriftliche Mitteilung der Lösungswege und Ergebnisse. (WITTMANN, 1995a, S. 13, Hervorhebungen im Original, Ergänzung der Autorin)

Dass Schülerinnen und Schüler ihr Wissen individuell konstruieren müssen bzw. mathematische Konzepte entwickeln müssen, indem sie sich auf mathematische Aktivitäten einlassen, ist mittlerweile weit verbreitet und allgemeiner Konsens der Mathematikdidaktik (vgl. KÄPNICK, 2014, S. 36ff.; KRAUTHAUSEN, 2000, S. 28; SCHERER & MOSER OPITZ, 2010, S. 17ff.; SCHIPPER, 2009, S. 32ff.; SCHÜTTE, 2008, S. 45ff.; WINTER, 2016; WITTMANN, 1990, 1995a). Nach WINTER (1984b) wird Lernen demnach als ein „aktiver, schöpferischer Prozess, den man zwar durch eine geeignete Lernumgebung von außen begünstigen kann und freilich auch muss, den man aber nicht einfach (durch gutes Erklären) beliebig herbeiführen kann“ (WINTER, 1984b, S. 27), verstanden. Wissen ist nach heutiger Auffassung prinzipiell nicht vermittelbar – wie TRIVETT (1977, S. 41f., übersetzt nach E. CH. WITTMANN) bereits 1977 in folgendem Zitat betont:

Es kann sehr leicht sein, dass Kinder von Natur aus so leistungsfähige Lerner sind, dass das Rechnen, das wir ihnen beizubringen versuchen, viel leichter von ihnen gelernt werden könnte, wenn wir als Lehrer nicht so darauf fixiert wären, es ihnen beibringen zu wollen. (TRIVETT, 1977, S. 41f., übersetzt nach E. CH. WITTMANN)

REVUZ (1980) weist darüber hinaus darauf hin: „On ne peut comprendre les mathématiques qu'en les faisant soi-même, en n'admettant rien de quelque autorité que cela provienne [...] Dans un sens, on ne peut enseigner véritablement les mathématiques qu'à soi-même“<sup>13</sup> (ebd., S. 140). Verstehen wird dabei nach CARPENTER und LEHRER (1999) nicht als „static attribute of an individual's knowledge“ (ebd.,

---

13 Man kann die Mathematik nur verstehen, indem man sie selbst erschafft und autonom bewertet [...]. In einem bestimmten Sinn kann man sich die Mathematik nur selbst beibringen (Übersetzung der Autorin).

S. 20) beschrieben, sondern als „mental activity that contributes to the development of understanding“ (ebd., S. 20). HIEBERT und CARPENTER (1992) führen folgende Definition von Verstehen von Mathematik an, die durch ein konstruktivistisches Lernverständnis geprägt ist: „Understanding in mathematics is making connections between ideas, facts or procedures“ (ebd., S. 67). Verstehen bedeutet demnach das Herstellen von Verknüpfungen, Beziehungen oder Zusammenhängen zwischen mathematischen Ideen, Prozeduren und Konzepten – die zu umso tieferem Verständnis führen, je zahlreicher und ausgedehnter die mentalen Verbindungen sind (HIEBERT & GROUWS, 2007, S. 380). Tiefes Verstehen erzeugt Strukturen, die sich durch Flexibilität und Beweglichkeit auszeichnen und den Transfer erleichtern bzw. begünstigen. Verstehen trägt aber auch zum Erinnern bei und reduziert somit das, was erinnert werden muss. Wer auf ein tiefes Verständnis zurückgreifen kann, dem dürfte auch das weitere Verstehen mühelos von der Hand gehen – kann dieses doch in ein strukturiertes und verknüpftes Netzwerk leichter integriert werden (DROLLINGER-VETTER, 2011, S. 28f.).

Es sei an dieser Stelle allerdings nach FREUDENTHAL (1973) auf die Notwendigkeit hingewiesen, dass nicht die fertige Mathematik als Ausgangspunkt für Verstehensprozesse anzusehen ist (ebd., S. 100f.), sondern ein Begriff bzw. die Mathematik als verstanden betrachtet werden kann, wenn man an der Erschaffung auch selbst mitwirkt (REVUZ, 1980, S. 140f.). Verstehen kann demnach in Anlehnung an eine konstruktivistische Auffassung (siehe Abschnitt 1.1) auch im Mathematikunterricht als (Verstehens-) Prozess oder aber als Produkt bzw. Ziel dieses Prozesses angesehen werden (STEBLER et al., 1994, S. 228f.). Nach DROLLINGER-VETTER (2011) sollte beides „in der Mathematik vor allem in Bezug auf die Darstellung von mathematischen Objekten und Zusammenhängen deutlich voneinander getrennt werden“ (ebd., S. 29). Bei einer korrekt angewandten Prozedur kann beispielsweise nicht zwangsläufig auf ein Verständnis dieser Prozedur geschlossen werden, da diese auch auswendig gelernt korrekt durchgeführt werden kann. Das Verständnis einer Prozedur stellt allerdings auch keine notwendige Voraussetzung für deren fehlerfreie Durchführung dar.

SCHOENFELD (1988) spricht in dieser Diskussion von der Diskrepanz zwischen der instrumentellen Rechenfertigkeit, einer Fertigkeit, Regeln auch ohne Einsicht anzuwenden und dem wirklichen Verstehen der zugrunde liegenden mathematischen Konzepte. Während in der Vergangenheit ein häufiger Diskussionsbedarf bestand, ob die Aneignung von Fertigkeiten oder das Verstehen beim Mathematiklernen priorisiert werden soll bzw. nach behavioristischer Auffassung von Lehren und Lernen ausschließlich Fertigkeiten angestrebt werden sollen, wird in der aktuellen Diskussion vermehrt die Beziehung zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen in den Blick genommen und als Schlüssel zum Verständnis vieler Lernprozesse angesehen (HIEBERT, 1986, S. 2ff.; HIEBERT & LEFEVRE, 1986, S. 1ff.). Konzeptuelles Wissen wird als Wissen aufgefasst, das reich an Beziehungen ist. Es wird definiert als zusammenhängendes Netz von Wissensbestandteilen, das sich aus Einzelfakten und ihren Beziehungen zueinander zusammensetzt und sich durch eine Verknüpfung bzw. Verbindung alter und neuer Informationen entwickelt (BAROODY, 2003,

S. 12). Durch eine Verbindung dieser alten und neuen Wissensbausteine oder einer kognitiven Neuorganisation entsteht Einsicht bzw. Verständnis. Konzeptuelles Wissen kann demnach nur zusammen mit Einsicht und Verständnis entwickelt werden.

Der Grad des Verständnisses wird bestimmt durch die Anzahl und die Stärke der Verbindungen in einem Netzwerk von Informationsbestandteilen. Ein mathematisches Konzept oder eine mathematische Prozedur ist um so besser *verstanden*, je zahlreicher und stärker die Verbindungen sind zu bereits *im Individuum* etablierten Netzwerken. (GERSTER & SCHULZ, 1998, S. 32, Hervorhebungen im Original)

Während das konzeptuelle Wissen, das BAROODY (2003) mit „knowledge that involves understanding *why*“ (ebd., S. 12, Hervorhebung im Original) beschreibt, auf Verständnis basiert, kann prozedurales Wissen abgekoppelt vom Verständnis angeeignet werden und stellt Wissen dar, das aus der Kenntnis über Symbole und den Regeln, die den Umgang mit diesen Symbolen regeln, besteht. Es handelt sich demnach um Wissen, „that involves knowing *how*“ (ebd., S. 12, Hervorhebung im Original). Das auswendige Beherrschen von prozeduralem Wissen setzt eine kleine Anzahl an verknüpften Verbindungen voraus, genauer gesagt die Anzahl an Schritten, die zur Durchführung einer Prozedur vonnöten sind. Der Sinn der aufeinanderfolgenden Schritte bzw. ein Verständnis des mathematischen Konzeptes kann dabei vollkommen unbeachtet bleiben (GERSTER & SCHULZ, 1998, S. 32).

Mit der Ausbildung von Rechenfertigkeiten *und* der Entwicklung mathematischen Denkens und Verstehens existieren in der Literatur somit zwei zunächst komplementäre Vorstellungen in Hinblick auf das verfolgte Ziel des Mathematikunterrichts (COWAN, 2003, S. 35ff.). Dabei erfährt das Ausführen von Rechenprozeduren oder das Verinnerlichen von Einzelfakten einer Rechenoperation, wie beispielsweise das Abspeichern der Aufgaben des kleinen Einmaleins, sowie der damit einhergehende Aufbau von Rechenfertigkeiten im Sinne eines prozeduralen Wissens oft eine größere Bedeutung im Mathematikunterricht als eine verständnisbasierte Erarbeitung der Inhalte (GERSTER & SCHULZ, 1998, S. 31). Diese Erkenntnis nach GERSTER und SCHULZ (1998) zeigt – wie bereits im Abschnitt 1.4 für das Verständnis von Lehren und Lernen im Allgemeinen dargelegt – auch für den Mathematikunterricht die Aktualität konstituierender behavioristischer Elemente auf. Das folgende Zitat aus den Bildungsstandards (KMK, 2004) verdeutlicht allerdings, dass eine ausschließliche Beschränkung des Mathematikunterrichts auf die Entwicklung und Aneignung von prozeduralem Wissen nicht als wünschenswert angesehen wird: „Das Mathematiklernen in der Grundschule darf nicht auf die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten reduziert werden. Das Ziel ist die Entwicklung eines gesicherten *Verständnisses* mathematischer Inhalte“ (ebd., S. 6, Hervorhebung im Original).

Aus fachdidaktischer Perspektive werden für ein erfolgreiches Mathematiklernen beide Wissensaspekte (ein konzeptuelles und prozedurales Wissen) gleichermaßen verfolgt und gekoppelt angestrebt: Der Erwerb von Rechenfertigkeiten erfolgt dabei auf der Basis mathematischer Einsicht (BAROODY, 2003, S. 8; HIEBERT & WEARNE, 1986, S. 201). Wenngleich nach BAROODY noch Uneinigkeit über die Rei-

henfolge und den eingeschlagenen Weg besteht (2003, S. 10ff.), sprechen zahlreiche Untersuchungen jedoch für eine Vorgehensweise, bei der zunächst Verständnis für die Symbole und ihre Prozeduren entwickelt und erst anschließend das Einüben der Regeln in den Blick genommen wird (vgl. HIEBERT, 1986; WEARNE & HIEBERT, 1988).

Die bisherigen Ausführungen dieses Abschnittes haben deutlich gezeigt, dass das zugrundeliegende Lehr-/Lernverständnis mit zentralen Folgen für den Mathematikunterricht einhergeht. Wie bereits im historischen Abriss des Abschnittes 1.5.1 dargestellt und in diesem Abschnitt präzisiert, kann das aktuelle Verständnis von Mathematikunterricht als Akzentverschiebung zwischen den Extremen einer behavioristischen und konstruktivistischen Grundauffassung von Lehren und Lernen charakterisiert werden. Die Unterrichtspraxis durchlief aber nicht nur aufgrund des Wandels des Lehr-/Lernverständnisses weitreichende Veränderungen. Weitere den Mathematikunterricht bzw. die Unterrichtspraxis beeinflussende Faktoren, die auch im weiteren Verlauf der Arbeit von Relevanz sind, werden im Folgenden angeführt.

### **1.5.3 Aktuelle Anforderungen und Zielsetzungen des Mathematikunterrichtes**

Insbesondere die Ergebnisse der internationalen Vergleichsstudien wie TIMMS (Third International Mathematics and Science Study) und PISA (Programme for International Student Assessment), die Schwächen deutscher Kinder bei Aufgaben zum Vorschein brachten, die über die Anwendung von Routinen hinausgehen, führten zu zentralen Veränderungen der Vorgaben für die Unterrichtspraxis. Wie bereits in den bisherigen Ausführungen aufgezeigt, wird in einem gegenwärtigen Mathematikunterricht nicht mehr ausschließlich der korrekten Lösung, sondern verstärkt dem Prozess, der zur Lösung führt, die zentrale Rolle zuteil. Die stärkere Betonung des Lernprozesses geht auch auf die Verabschiedung der KMK-Bildungsstandards zurück, die als Folge des schlechten Abschneidens der Kinder bei den Vergleichsstudien beschlossen wurden. Besonders das explizite Ausweisen und die stärkere Akzentuierung allgemeiner bzw. in der Literatur häufig auch als prozessbezogen bezeichneten Kompetenzen, verdeutlicht die Intention des Mathematikunterrichts aus heutiger Sicht: „Der Weg ist das Ziel“ (HECKMANN & PADBERG, 2014, S. 30). Fünf prozessbezogene Kompetenzen, die für den Mathematikunterricht als wichtig erachtet und auf deren stärkere Berücksichtigung in der Unterrichtspraxis abgezielt wird, werden häufig – unter Rückgriff auf die Bildungsstandards – unterschieden: das Problemlösen, das Argumentieren, das Kommunizieren, das Modellieren sowie das Darstellen. LEUDERS (2007b) führt vier verschiedene Prozesskontexte auf, in denen die prozessbezogenen Kompetenzen im Unterricht Anwendung finden. Er unterscheidet dabei den Prozesskontext des *Erfindens und Entdeckens*, den des *Prüfens und Beweisens*, den Prozesskontext des Überzeugens und Darstellens sowie den des *Vernetzens und Anwendens*. Betonung findet nach HECKMANN UND PADBERG (2014) in den didaktischen Veröffentlichungen dabei häufig die Phase des

*Erfindens und Entdeckens* (ebd., S. 30). Was die konkrete Umsetzung im Mathematikunterricht betrifft, erfahren die verschiedenen Kontexte unterschiedliche Bedeutung (LEUDERS, 2007b, S. 268ff.).

Nimmt die Phase des Erfindens und Entdeckens im Mathematikunterricht viel Raum ein bzw. werden konkrete Entdeckungen in der Unterrichtspraxis unternommen, dann sollte diesen Entdeckungen nach HECKMANN und PADBERG (2014) immer auch eine Phase des Beweisens und Prüfens nachfolgen, in der sich den Kindern die Möglichkeit bietet, ihre gemachten Entdeckungen auch zu überprüfen. Da die kognitiven Voraussetzungen in der Grundschule allerdings noch keine formalen Beweise ermöglichen, werden allenfalls beispielgebundene Beweisstrategien zum Absichern der Entdeckungen angestrebt. Der Prozesskontext des Überzeugens und Darstellens zielt im Anschluss darauf ab, die erworbenen Erkenntnisse auch für andere korrekt und verständlich zu präsentieren, schlüssige Argumente darzubieten. Dabei ist „das Bewusstsein [wichtig], dass diese Unterrichtsphasen anders als die des Entdeckens nicht mehr durch Offenheit, sondern durch Konvergenz und Zielgerichtetheit gekennzeichnet sind“ (HECKMANN & PADBERG, 2014, S. 30, Ergänzung der Autorin), strebt man doch neben einem korrekten Ergebnis und einem verständlich bestrittenen Lösungsweg auch eine prägnante Argumentation an. Zu guter Letzt soll auch den Kontexten des Vernetzens und Anwendens, in denen überwiegend die Prinzipien der Anwendungs- und Strukturorientierung (siehe nachfolgenden Absatz) zum Tragen kommen, im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle zuteilwerden (HECKMANN & PADBERG, 2014, S. 31f.). Diese vier von LEUDERS (2007b) beschriebenen Prozesskontexte, in denen die prozessbezogenen Kompetenzen Anwendung finden, dienen „als Interpretationsrahmen für eine Unterrichtsgestaltung, die mathematische Prozesse in den Fokus rückt“ (ebd., S. 272) und stellen – wie bereits erwähnt – ein verfolgtes aktuelles Ziel des Mathematikunterrichtes dar.

Veränderungen in den Vorgaben für die Unterrichtspraxis sind unter anderem auch dem Anliegen der Bildungsstandards im Fach Mathematik geschuldet, vermehrt *Anwendungs-* und *Strukturorientierung* im Unterricht zu ermöglichen. Unterricht soll der Umwelterschließung, „also der Aneignung von Fähigkeiten und Kenntnissen zum Leben in der Umwelt dienen bzw. signalisieren, dass mathematische Fragestellungen aus Problemen der Lebenswelt entstanden sind“ (HECKMANN & PADBERG, 2014, S. 21). Kinder sollen den Nutzen der Mathematik, die Legitimierung der Unterrichtsinhalte erfahren, der Unterricht anwendungsorientiert erfolgen. Anknüpfen soll der Mathematikunterricht demnach also nicht nur an den Vorkenntnissen, dem Wissen und bereits vorhandenen Fähigkeiten der Kinder, sondern auch an ihrer Lebenswelt. Nach KRAUTHAUSEN (2012) wird unter einem anwendungsorientierten Unterricht zweierlei gefasst:

Einerseits wird vorhandenes Alltagswissen aufgegriffen und genutzt, um mathematische Ideen aufzuklären, zu konkretisieren, anzuwenden. Andererseits aber kann und soll auch mit Hilfe der Mathematisierung – also gerade und spezifisch durch den mathematischen Blick, durch den Einsatz mathematischer Ideen oder Verfahren – neues Fachwissen (außerhalb der Mathematik) entstehen können. (KRAUTHAUSEN, 2012, S. 99f.)

Strukturorientierung nimmt im Vergleich dazu nach HECKMANN und PADBERG (2014) „die innermathematischen Strukturen des Unterrichtsinhaltes, d.h. Regelmäßigkeiten, Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten“ (ebd., S. 23) in den Blick. Die Forderung nach einem strukturorientierten Mathematikunterricht, der auf dem Aufbau mathematischer Erkenntnisse auf Basis des Entdeckens und Nutzens der zugrundeliegenden Strukturen abzielt, deckt sich im Kern mit einer konstruktivistischen Lehr-/Lernauffassung und ihren verfolgten Zielen in der Unterrichtspraxis (HECKMANN & PADBERG, 2014, S. 23). KRAUTHAUSEN (2007) betont in diesem Zusammenhang: „Strukturen und Gesetzmäßigkeiten gilt es zum einen in der *Welt der Zahlen* und *Formen* aufzudecken, zum anderen und insbesondere aber auch in der *Lebenswelt*“ (S. 300, Hervorhebungen im Original). Während man in der Geschichte des Mathematikunterrichts „eine immer wieder wechselnde Polarisierung zwischen diesen beiden Richtungen“ (KRAUTHAUSEN, 2007, S. 300) feststellen konnte, ist man sich heute über die fundamentale Notwendigkeit einer engen Verknüpfung zwischen Struktur- und Anwendungsorientierung, zwischen mathematischer Ebene und Sachebene uneingeschränkt bewusst. Dabei bleibt nach PESCHEL (2009) festzuhalten:

Mathematik ist ein faszinierendes Gebilde von Strukturen und Beziehungen, das in sich noch nicht mit Lebenswirklichkeitsorientierung o. Ä. zu tun hat. Die Entwicklung eines Zahl- und Zahlraumverständnisses, der Aufbau von Zahlbeziehungen, Rechenstrategien und Rechenfertigkeiten usw. kann in Sachsituationen veranschaulicht werden, ist aber eigentlich ein Vorgang, der losgelöst von diesen innerhalb der Mathematik selbst stattfindet und gerade durch diese Abstraktion seinen eigenen Reiz erhalten kann. (PESCHEL, 2009, S. 120f.)

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Anforderungen sowie die Zielsetzungen des Hinterfragens von Prozeduren bzw. des Erforschens von Zusammenhängen werden in einem modernen Mathematikunterricht dadurch umgesetzt, dass Kindern Gelegenheiten gegeben werden, Mathematik selbst zu entdecken. „Ausgehend von ihren Entdeckungen sollen sie dann die Konventionen der Mathematik lernen“ (SCHIPPER, 2009, S. 33). Da aber nicht alle mathematischen Inhalte durch Entdeckungen erarbeitet werden können, kann Mathematikunterricht bzw. -lernen auch nicht nur auf dem Weg „von Invention zur Konvention“ stattfinden, sondern muss vielmehr als Lernen „zwischen Invention und Konvention“ verstanden werden (ebd., S. 34ff.; LEUDERS, 2007a, S. 222). In diesem Sinne muss auch die aufgelistete Tabelle 2 als Gegenüberstellung von Extremausprägungen betrachtet werden, die in der Praxis, aber auch in der Theorie – wie gerade geschildert – mit großer Wahrscheinlichkeit nicht in Reinform Anwendung finden.