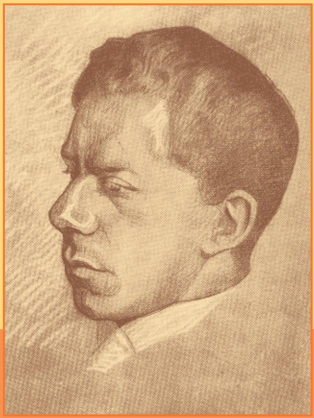
LEONARD NELSON

GESAMMELTE SCHRIFTEN



Die kritische Methode in ihrer Bedeutung für die Wissenschaft

Meiner

LEONARD NELSON

Gesammelte Schriften in neun Bänden

Herausgegeben von
Paul Bernays, Willi Eichler, Arnold Gysin,
Gustav Heckmann, Grete Henry-Hermann,
Fritz von Hippel, Stephan Körner,
Werner Kroebel, Gerhard Weisser

DRITTER BAND

FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

LEONARD NELSON

Die kritische Methode in ihrer Bedeutung für die Wissenschaft

Mit einem Vorwort von
Gerhard Weisser und Lothar F. Neumann

FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

Redaktion: Grete Henry-Hermann

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über ‹http://portal.dnb.de› abrufbar.

ISBN 978-3-7873-3833-7
ISBN eBook 978-3-7873-3842-9

Nachdruck 2020

 Gesamtherstellung: BoD, Norderstedt. Gedruckt auf alterungsbeständigem Werkdruckpapier, hergestellt aus 100 % chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany. www.meiner.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

»Jedes Philosophem, das mit den exakten Wissenschaften übereinstimmt, *kann* wahr sein, jedes Philosophem, das den exakten Wissenschaften widerstreitet, *muß* notwendig falsch sein.«[1]

Diesem Prüfstein, den NELSON schon als Student in seiner Besprechung von H. COHENS »Logik der reinen Erkenntnis« geltend macht, hat er auch Aufbau und Durcharbeitung des eigenen Philosophems ausgesetzt. Das kommt vor allem in den Arbeiten des vorliegenden dritten Bandes seiner Gesammelten Schriften zum Ausdruck. Der Band umfaßt Schriften, in denen NELSON die nach kritischer Methode entwickelte Philosophie auf Ergebnisse der exakten Wissenschaften bezieht und an ihnen mißt. Er enthält darüber hinaus, in seinem dritten Abschnitt, Arbeiten, in denen NELSON als philosophischer Kritiker zeitgenössischer Strömungen auftritt; auch dabei erweist es sich als eins der für NELSONS Urteil vordringlichen Kriterien, ob und wie der geprüfte philosophische Gedankengang mit den Entdeckungen und Entwicklungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung im Einklang ist.

Eine gewisse Sonderstellung unter den Schriften dieses Bandes nimmt die Arbeit von LEONARD NELSON und KURT GRELLING über die Paradoxien der Mengenlehre ein. In ihr geht es nicht um die Entwicklung des eigenen philosophischen Standpunkts, sondern um Teilnahme an der durch diese Paradoxien ausgelösten, Mathematiker und Philosophen gleicherweise beschäftigenden Diskussion. Ohne hier vorschnell eine Lösung anbieten zu wollen, beschränken die beiden Verfasser sich darauf, die logische Struktur der auftretenden Widersprüche zu analysieren und Vorschläge zur Bereinigung der für die Forschung entstandenen Problemlage zu disku-

[1] LEONARD NELSON, Gesammelte Schriften, zweiter Band, S. 10.

tieren. Für diese Untersuchung sei auf das Geleitwort von PAUL BERNAYS verwiesen, das sie anläßlich einer Neuherausgabe im Jahre 1959 erhalten hat[2] und das ihr im vorliegenden Band vorangestellt ist.

Abgesehen von dieser Schrift geht es NELSON in den ersten beiden Teilen dieses Bandes um Grundfragen des eigenen Philosophems, wie es sich ihm aus der erkenntniskritischen Untersuchung der Quellen menschlichen Erkennens ergab. Wie die vorliegenden Arbeiten erkennen lassen, hat NELSON den eigenen philosophischen Standpunkt immer wieder bestätigt und präzisiert im Kampf mit widerstreitenden philosophischen Tendenzen seiner Zeit, insbesondere mit dem Empirismus.

In den der Philosophie der Mathematik gewidmeten Arbeiten behandelt NELSON philosophische Fragen, die durch die damalige Entwicklung der mathematischen Disziplinen aufgeworfen worden waren; er nimmt vom Standpunkt der kritischen Philosophie aus zu ihnen Stellung. Entgegen der weitverbreiteten Überzeugung, wonach das Faktum der nicht-euklidischen Geometrie die Kantische Lehre von der Begründung der euklidischen Geometrie durch Raumanschauung rein a priori widerlege, weist NELSON die Vereinbarkeit beider Lehren nach und gewinnt dabei zudem einen Beweis für die These vom synthetischen Charakter der geometrischen Axiome. In der Hilbertschen Axiomatik sieht er die Verwirklichung der schon von JAKOB FRIEDRICH FRIES geforderten »kritischen Mathematik« oder »Philosophie der Mathematik«. In dem erwähnten Sammelband werden NELSONS Darlegungen zur nicht-euklidischen Geometrie und die zur mathematischen Axiomatik kurz eingeführt durch die Mathematiker PAUL BERNAYS und WILHELM ACKERMANN. Ihre Bemerkungen wurden – die von PAUL BERNAYS in überarbeiteter Form – im vorliegenden Band jeweils in den redaktionellen Einführungstext der entsprechenden Nelsonschen Schrift aufgenommen.

Die Schriften zur Philosophie der Naturwissenschaft arbeiten an der erkenntniskritischen Deutung des Erfahrungswissens; in einer

[2] Im Sammelband: LEONARD NELSON, Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik.

eingehenden Auseinandersetzung grenzt NELSON sie ab gegen die von MACH systematisch entwickelte empiristische Auffassung der naturwissenschaftlichen Erkenntnis.

Die Herausforderung, die der Lehre von den Erkenntnissen rein a priori im Bereich der Physik erwachsen ist, vor allem durch Relativitätstheorie und Quantenmechanik, hat NELSON nicht mehr mit einer eigenen Interpretation des Wandels im physikalischen Weltbild beantwortet. Er war überzeugt, daß sich eine solche Deutung im Einklang mit den Grundthesen der kritischen Philosophie werde geben lassen – nur werde zuvor die physikalische Forschung selber zu besserer Koordinierung alter und neuer theoretischer Ansätze gelangt sein müssen. Daß und wie diese Entwicklung der Physik ihn beschäftigte, tritt zutage in seinen Untersuchungen zur Geschichte der Philosophie, die auf den Konflikt der Friesschen Naturphilosophie mit der modernen Physik nachdrücklich hinweisen[3].

Die Diskussion um die Grundlagen mathematischer und physikalischer Erkenntnis ist bis heute nicht abgeschlossen. Die von NELSON vertretene These von den endgültig deduzierbaren unmittelbaren Erkenntnissen rein a priori wird dem Reichtum immer neuer begrifflich-kategorialer Gliederungen nicht gerecht, wie er die Systeme der fortschreitenden Erfahrungswissenschaften beherrscht. Auf der anderen Seite aber tritt gerade in dieser Entwicklung die Komplexität des Erfahrungswissens hervor. NELSONS Kritik an positivistischen und empiristischen Deutungen, in denen die Problematik in trügerischer Weise vereinfacht wird, findet so in einem entscheidenden Grundgedanken eine Bestätigung. Für jene Diskussion, die noch im Fluß ist, behält sie damit Aktualität; in der Geschichte der sich herausbildenden Philosophie von Reichweite und Erkenntniswert menschlicher Erfahrung hat sie ihren bleibenden Platz.

Grete Henry-Hermann

[3] LEONARD NELSON, Gesammelte Schriften, siebenter Band, S. 681 ff.

Abschnitt I
Philosophie der Mathematik

Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit

Erschienen in den Abhandlungen der Friesschen Schule, neue Folge, herausgegeben von GERHARD HESSENBERG, KARL KAISER und LEONARD NELSON, erster Band, zweites und drittes Heft, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1905 und 1906, S. 373–430. Ein Neudruck der Arbeit erschien im Sammelband: LEONARD NELSON, Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik, Verlag Öffentliches Leben, Frankfurt a. M. 1959, S. 9–54. Dieser Neuausgabe hat PAUL BERNAYS ein Geleitwort vorangestellt, das er für den vorliegenden Band neu bearbeitet hat. Es lautet nun:

In der vorliegenden Abhandlung wird von LEONARD NELSON, im Anschluß an die Lehre KANTS von der reinen Anschauung, die Ansicht verfochten, wonach die euklidische Geometrie eine aus reiner Anschauung gewonnene Erkenntnis a priori bildet, welche auch unmittelbar für die Physik verbindlich ist.

In der heutigen, besonders der wissenschaftlich gerichteten Philosophie ist man generell gegenüber der Behauptung von Erkenntnissen a priori sehr skeptisch. Überdies wird zumeist die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie als eine Widerlegung der Kantischen Lehre angesehen. Gegenüber dieser Ansicht ist zunächst darauf hinzuweisen, daß KANT zu der Frage des Parallelenaxioms gar nicht ausdrücklich Stellung genommen hat. Unabhängig vom Historischen aber besteht das Nelsonsche Argument zu Recht, daß die logische Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie nichts gegen die anschauliche Einsichtigkeit des Parallelenaxioms besagt.

Unberechtigt ist es auch, wenn es vielfach so angesehen worden ist, als ob die Aufnahme des Parallelenpostulates unter die Axiome einen Defekt des euklidischen Axiomensystems bilde. Daß dieser Eindruck bei manchen erweckt wurde, beruht wohl auf zwei Umständen.

Einmal ist die Formulierung des Parallelenaxioms im Vergleich zu derjenigen der anderen Axiome sehr kompliziert. Es hätten hierfür – wie schon frühzeitig von Kommentatoren bemerkt wurde – einfachere Formulierungen zur Verfügung gestanden. Die komplizierte Fassung bei EUKLID erklärt sich vermutlich dadurch, daß man schon zur Zeit EUKLIDS (oder bereits zuvor) versuchte, die Behauptung des Parallelenaxioms aus den anderen Axiomen zu beweisen, wobei man auf einen Hilfssatz stieß, den zu beweisen nicht gelang. Diesen stellte dann EUKLID als Axiom auf, in der richtigen Vermutung, daß dessen Beweis unmöglich sei.

Außerdem aber wurde der Eindruck der Sonderstellung des Parallelenaxioms dadurch verstärkt, daß gewisse wesentliche Postulierungen in dem euklidischen Axiomensystem nicht erwähnt waren, so insbesondere die Voraussetzung der Vergleichbarkeit der Längen distanter Strecken, welche rein vom Anschaulichen her (d. h. unabhängig vom Physikalischen betrachtet) nicht ersichtlicher ist als die Vergleichbarkeit der Richtungen distanter Strecken, aus der man die Behauptung des Parallelenaxioms entnehmen kann. Dieser Sachverhalt – daß man die Vergleichbarkeit der Längen vor derjenigen der Richtungen nicht zu bevorzugen braucht – wird verdeutlicht durch eine in neuerer Zeit von HERMANN WEYL aufgestellte Verallgemeinerung der Riemannschen Differentialgeometrie.

Was die Lehre von der reinen Anschauung betrifft, so besteht wohl das Erfordernis, diese durch eine nuanciertere Theorie zu ersetzen, wobei die Ergebnisse der experimentierenden Psychologie sowie die Überlegungen aus der neueren Philosophie zur Verwertung zu bringen sind. FERDINAND GONSETH hat in seinem Werk »La géométrie et le problème de l'espace« drei Aspekte der Geometrie einander gegenübergestellt: den intuitiven, den experimentellen und den theoretischen.

Eingehende Untersuchungen über die Entwicklung der räumlichen und der mathematischen Vorstellungen hat JEAN PIAGET angestellt, der vor allem die Bedeutsamkeit des Operativen (des Manipulierens) für die Genese unserer anschaulichen Vorstellungen betont und insbesondere auch darauf hinweist, daß unter den für die Geometrie relevanten Vorstellungen die topologischen als die elementareren ausgezeichnet sind.

Für eine befriedigende Theorie der geometrischen Anschauung müssen wir aber doch vor allem den Umstand würdigen, daß die in der Geometrie vollzogenen Idealisierungen des Konkreten nicht nur im Rahmen des Begrifflichen stattfinden, sondern, auf Grund einer Art von spontanem Prozeß, schon vor der wissenschaftlichen Fixierung sich in unserer Anschauung bilden, und daß ferner durch die Entsprechung zu dieser Art der Anschaulichkeit die euklidische Geometrie gegenüber anderen möglichen Geometrien ausgezeichnet ist – woraus freilich nicht eine Verbindlichkeit dieser Geometrie für die theoretische Physik entnommen werden kann.

Mit solchen Erwägungen gelangen wir zu einer Ansicht, die zwar nicht mit derjenigen NELSONS übereinstimmt, wohl aber dieser erheblich näher kommt als viele der heutigen Auffassungen. Man mag an Hand solcher Erwägungen die geeignete Unbefangenheit gewinnen für die Lektüre der hier folgenden Abhandlung, in der NELSON seinen Standpunkt in vorbildlicher Klarheit und Prägnanz darlegt. Auch mag der Leser an diesen durchsichtigen Gedankenführungen geistige Erbauung finden.

Paul Bernays

*Inhalt**

---

* Von den in Klammern angegebenen Seitenzahlen entspricht die erste der Paginierung im Abhandlungsheft, die zweite der im Sammelband »Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik«.

Mathesis scientia eorum est, quae per se clara sunt.

JAKOBI

1

Die als »mathematische Strenge« sprichwörtlich gewordene, allen Zweifel ausschließende Sicherheit und Notwendigkeit der mathematischen Erkenntnis hat von jeher das Interesse der Philosophen auf sich gelenkt und einen der vornehmsten Gegenstände ihrer Nachforschungen gebildet. Die Hoffnung, der Mathematik das Geheimnis ihrer wissenschaftlichen Strenge abzulauschen, um durch Nachahmung ihres Verfahrens auch die Philosophie auf dieselbe Stufe der Exaktheit zu erheben, mußte immer wieder auf die Frage nach dem Ursprung der mathematischen Gewißheit führen.

Die despotische Gewalt, mit der die Lehre des ARISTOTELES zwei Jahrtausende hindurch die wissenschaftliche Welt beherrschte, hat auch dem Gange der Untersuchung dieser Frage auf lange Zeit hinaus ihr charakteristisches Gepräge aufgedrückt. Nach der Lehre des ARISTOTELES gibt es zwei verschiedene Erkenntnisquellen: die Sinne einerseits und den Verstand andererseits. Aus der einen entspringt die Erfahrung, die andere liefert die Logik. Den Gegenstand der ersteren bilden die zufälligen Tatsachen, den der anderen die notwendigen Wahrheiten. Es liegt nahe, auf Grund dieser Lehre die Mathematik der zweiten Erkenntnisquelle zuzuweisen. Denn die Mathematik lehrt uns nicht zufällige Tatsachen kennen, sondern sie läßt uns notwendige Gesetze einsehen. In der Tat ist diese Ansicht bis auf KANTS Zeit die allgemein herrschende gewesen. Selbst HUME, der Skeptiker, wagte nicht, an dem logischen Ursprung der mathematischen Wahrheiten und ihrer durch diesen Ursprung gewährleisteten Allgemeingültigkeit zu zweifeln. Ja, so weit ging das Vertrauen auf die Macht der logischen Form der mathematischen Schlußweise, daß man durch ihre Übertragung auf die Philosophie die gleiche Sicherheit und Evidenz auch in dieser erreichen zu können überzeugt war. »Geometricorum more demonstrando« hoffte man den philosophischen Stein der Weisen zu finden. Doch diese Bemühungen führten nicht zu dem erhofften Ziel. Durch das Fehlschlagen der Versuche, durch Anwendung der mathematischen Schlußweise die philosophischen Probleme zu fördern, sah sich KANT veranlaßt, die Frage nach der Herkunft der mathematischen Gewißheit von neuem einer gründlichen Prüfung zu unterziehen. Er geriet dadurch als erster auf den Versuch, jene durch ihr Alter ehrwürdige und durch ihre Ehrwürdigkeit gefestigte Aristotelische Lehre von den zwei Erkenntnisquellen einer radikalen Revision zu unterwerfen.

Daß alle Erkenntnis mit der Erfahrung anfängt und uns nur durch Erfahrung veranlaßt zum Bewußtsein kommt, stand für KANT fest; aber ebenso offenbar war es, daß die Mathematik ihre Wahrheiten nicht aus der sinnlichen Wahrnehmung schöpft, denn diese letztere vermag wohl zufällige Kenntnis, aber nicht notwendige Einsicht zu liefern. Aber sollte daraus folgen, daß der Ursprung der mathematischen Erkenntnis im Verstande zu suchen sei? KANT fand, daß diese Folgerung auf der Verwechslung des mathematischen Schlusses mit der mathematischen Wahrheit selbst beruhte. Die Axiome vorausgesetzt, folgen alle Lehrsätze ohne weiteres durch die bloße logische Form des Schließens; aber diese Lehrsätze selbst entspringen darum nicht *aus* der logischen Schlußform, sondern sie lassen sich nur *vermittelst* derselben *aus* den Axiomen herleiten. Aber diese Axiome selbst, was sind sie und welches ist ihr Ursprung? Diese Frage führte KANT auf die Unterscheidung der analytischen und synthetischen Urteile.

2

Worauf beruht die Notwendigkeit der mathematischen Axiome? Um diese Frage zu entscheiden, stellte KANT folgende Überlegung an. Die Notwendigkeit eines Urteils, d. h. die Notwendigkeit, den Subjektsbegriff mit dem Prädikat in einem Urteil zu verbinden, hat ihren Grund entweder in dem Begriff des Subjekts selbst, oder dieser Grund liegt in etwas anderem als dem Subjektsbegriff. Liegt er im Subjektsbegriff, so heißt das Urteil analytisch, denn ich bedarf zu ihm nur einer Zergliederung seines Subjektsbegriffs. Liegt er nicht im Subjektsbegriff, so heißt das Urteil synthetisch, denn ich muß über den Subjektsbegriff hinausgehen, um das Urteil fällen zu können. Daß alle Radien eines Kreises gleiche Länge haben, ist ein analytischer Satz, denn er folgt allein aus einer Zergliederung des Begriffs vom Kreise. Daß aber das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser des Kreises den Wert 3,1415926 ... hat, ist ein synthetischer Satz, denn er läßt sich durch Zergliederung des Begriffs dieses Verhältnisses allein nicht herleiten. – Es ist klar, daß mit dieser Einteilung der Grund der dem Mathematiker geläufigen Unterscheidung zwischen Definitionen und Axiomen getroffen wird. Die Definition enthält die vollständige Zergliederung eines Begriffs und dient als Kriterium dafür, ob ein Gegenstand (oder eine Klasse von Gegenständen) unter den definierten Begriff fällt oder nicht. Alle Definitionen und aus Definitionen folgenden Sätze sind daher analytische Urteile. Jede Beilegung eines Prädikats dagegen, das nicht zu den definierenden Merkmalen des Begriffs gehört, ist ein synthetisches Urteil.

Daraus geht zweierlei hervor:

1) Die analytischen Sätze sind diejenigen, die ARISTOTELES dem Verstande zuwies; es sind die Wahrheiten der Logik.

2) Die mathematischen Axiome und alle auf ihnen beruhenden Theoreme sind synthetische Urteile.

Steht dieses beides fest, so folgt, daß die Mathematik eine andere Erkenntnisquelle voraussetzt als den Verstand. Die mathematische Erkenntnis beruht auf Anschauung und nicht auf bloßen Begriffen. Das war das Resultat der Kantischen Untersuchung.

3

In welchem Verhältnis steht nun diese mathematische Anschauung zur Sinnesanschauung? Zunächst leuchtet ein, daß sie von der Sinnesanschauung – der äußeren sowohl wie der inneren – unterschieden ist. Denn die letztere zeigt uns wohl, was hier oder dort, zu dieser oder jener Zeit ist, aber nicht, was überall und jederzeit gilt. Eine solche notwendige und allgemeine Geltung haftet aber den mathematischen Wahrheiten an. Betrachten wir des näheren die Geometrie und die ihr zugrunde liegende Anschauung, die Raumanschauung. Das Axiom, daß die gerade Linie die kürzeste zwischen zwei Punkten ist, spricht nicht von dieser oder jener geraden Linie, sondern von allen Geraden überhaupt. Sehen wir davon ab, daß Punkte und Linien überhaupt nicht Gegenstände sinnlicher Beobachtung werden können, so müßten wir doch, da zwischen zwei Punkten unendlich viele Linien möglich sind, erst diese unendlich vielen Linien mit der Geraden verglichen haben, ehe wir zu einer allgemeinen Aussage über ihr Längenverhältnis berechtigt wären; dazu allein aber bedürften wir schon einer unendlichen Zeit. Und doch hätten wir damit den Satz erst für eine einzige Gerade gefunden, während es der Geraden unendlich viele im Raume gibt. Und selbst von dieser einen Geraden könnten wir nur sagen: so viel wir bisher beobachtet haben, war sie kürzer als jede mit ihr verglichene Krumme; ob dies morgen oder zu einer beliebigen anderen Zeit sich ebenso verhalten werde, darüber wären wir auf Grund unserer Messungen zu keinem Urteil berechtigt.

Ein konsequenter Empirist müßte daher die Allgemeingültigkeit der geometrischen Wahrheiten preisgeben und den Umkreis seiner Urteile auf den seiner empirischen Messungen einschränken. Aber die Möglichkeit der Messung beruht selbst erst auf der Anwendung bestimmter geometrischer, durch empirische Messung nicht wieder kontrollierbarer Voraussetzungen. Jede Messung beruht auf der Forttragung eines Maßstabes an dem zu messenden Gegenstande und setzt die Unveränderlichkeit des Maßstabes voraus. Diese letztere ist aber nur möglich unter Voraussetzung des den Kongruenzsätzen zugrunde liegenden Axioms, daß sich eine Figur ohne Formänderung im Raume bewegen läßt.

Die mathematische Anschauung ist folglich von der empirischen Anschauung unabhängig. Wenngleich wir uns ihrer nur durch Abstraktion von der empirischen Anschauung gesondert bewußt werden können, so hat sie doch einen von dieser unabhängigen Ursprung. Kant nannte sie *reine* Anschauung. Die reine Anschauung liegt also aller empirischen Messung als Bedingung ihrer Möglichkeit zugrunde.

4

Verbinden wir die Unterscheidung der analytischen und synthetischen Urteile mit derjenigen der Erkenntnisse a priori und a posteriori, d. h. der notwendigen und der zufälligen Wahrheiten, so erhalten wir folgendes System möglicher Urteilsarten:

analytische Urteile a priori,
analytische Urteile a posteriori,
synthetische Urteile a priori,
synthetische Urteile a posteriori.

Es ist klar, daß der zweite Fall von vornherein ausscheidet. Denn analytische Urteile beruhen allein auf dem Begriff ihres Subjekts und bedürfen daher keiner Erfahrung. Dies gilt auch in dem Falle, wo der Subjektsbegriff des analytischen Urteils ein empirischer ist. Denn nicht auf den Ursprung des Subjektsbegriffs kommt es an, sondern auf den Grund seiner Verbindung mit dem Prädikat. Die Katze sei definiert als das fleischfressende Säugetier mit einziehbaren Krallen. Der Begriff der Katze ist zweifellos empirischen Ursprungs; aber das Urteil: die Katze hat einziehbare Krallen, gilt nichtsdestoweniger mit Notwendigkeit und a priori. Denn eine gegenteilige Erfahrung ist gar nicht denkbar, weil, auf Grund der Definition der Katze, ein Wesen, dem die im Prädikat des Urteils genannte Eigenschaft nicht zukäme, gar nicht unter den Begriff der Katze subsumiert werden könnte.

Alle analytischen Urteile sind also Urteile a priori. Bringen wir den Fehler des ARISTOTELES und seiner Nachfolger auf seinen schulgerechten Ausdruck, so können wir sagen, daß er diesen richtigen Satz unrichtigerweise umgekehrt hat: Alle analytischen Urteile sind Urteile a priori, aber nicht alle Urteile a priori sind analytisch. Alle logischen Wahrheiten gelten notwendig, aber nicht alle notwendigen Wahrheiten sind logischen Ursprungs. Die Disjunktion des ARISTOTELES zwischen Logik und Erfahrung ist unvollständig:

Die Mathematik gehört weder der Logik noch der Erfahrung an; ihre Urteile sind synthetische Urteile a priori.

5

In der Eigentümlichkeit ihrer Erkenntnisquelle, die Anschaulichkeit und Apriorität vereinigt, liegt also der Grund der Evidenz der mathematischen Erkenntnis einerseits, und ihrer strengen Notwendigkeit andererseits. Die logische Form ihrer Schlüsse und Beweise kann nur zur Übertragung der Gewißheit von den Grundsätzen auf die Lehrsätze dienen. Wohnte die apodiktische Geltung den Grundsätzen nicht von vornherein kraft ihres rein-anschaulichen Ursprungs bei, so würde doch bei aller Strenge der Beweise den Lehrsätzen dieselbe Zufälligkeit und Unsicherheit anhaften wie den Grundsätzen. Damit ist der Grund des Mißlingens der Anwendung der mathematischen Schlußweise in der Philosophie ohne weiteres aufgeklärt. Denn die erfolgreiche Anwendung dieser Methode setzt zu ihrer Möglichkeit bereits die der Mathematik eigentümliche Erkenntnisquelle voraus. In der Beschaffenheit dieser ursprünglichen Erkenntnisquelle, in der reinen Anschauung, nicht in der logischen Form der Schlüsse liegt der eigentliche Grund der mathematischen Gewißheit.

6

Principia praeter necessitatem non esse multiplicanda, mit möglichst wenig Voraussetzungen möglichst viel zu beweisen: dies ist ein Postulat der Logik an jede systematische Wissenschaft. Diesem Postulat in der Mathematik Rechnung zu tragen, war eine der Hauptbemühungen der wissenschaftlichen Arbeit des verflossenen Jahrhunderts. Die mathematischen Axiome sind unmittelbar evidente Wahrheiten. Aber diese unmittelbare Evidenz genügt nicht zur Charakteristik eines Axioms, sondern nur diejenigen unmittelbar evidenten Sätze gelten als Axiome, auf deren Beweis wir verzichten. Dabei gelten als beweisbar nur solche Sätze, die durch eine endliche Anzahl rein syllogistischer Operationen aus unmittelbar evidenten Sätzen hergeleitet werden können. Da das genannte Postulat verlangt, daß alle Sätze, die überhaupt beweisbar sind, auch tatsächlich bewiesen werden, so ergibt sich daraus die Aufgabe, die Zahl der Axiome auf ein Minimum zu reduzieren. Wir können diese Aufgabe auch so ausdrücken: Es soll ein System von Axiomen aufgestellt werden, derart, daß keins derselben aus den andern logisch hergeleitet werden kann. Soll aber dies System vollständig sein, so müssen wir fordern, daß sich aus den in ihm enthaltenen Axiomen allein, ohne Zuhilfenahme anderer Sätze, sämtliche Lehrsätze der Wissenschaft syllogistisch herleiten lassen. Eine Forderung, die übrigens, wie man leicht bemerkt, nur dann einen Sinn besitzt, wenn die – keineswegs selbstverständliche – Voraussetzung zutrifft, daß die Zahl der als Axiome definierten Sätze endlich ist.

7

Wie läßt sich nun die logische Unabhängigkeit der Axiome prüfen? Die zur Lösung dieser Aufgabe ausgearbeitete Methode hat sich aus einer Kritik der euklidischen Parallelentheorie entwickelt. Unter den von Euklid aufgestellten Grundsätzen der Geometrie befindet sich auch der Satz: Wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden und die inneren an derselben Seite der schneidenden Geraden liegenden Winkel zusammen weniger als zwei Rechte betragen, so schneiden sich die beiden Geraden auf der Seite dieser Winkel. Dieser Satz, der speziell als euklidisches Axiom bezeichnet wird, nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als sich eine große Reihe von Lehrsätzen ohne ihn beweisen lassen. Erst zum Beweise seines 29. Lehrsatzes bedient sich Euklid des genannten Axioms. Es ist daher schon früh die Frage aufgeworfen worden, ob dies Axiom sich nicht vielleicht ganz ausschalten lasse und aus den übrigen Voraussetzungen Euklids bewiesen werden könne. Die zahlreich angestellten Versuche, den Satz zu beweisen, schlugen indessen sämtlich fehl und wurden gegen Anfang des neunzehnten Jahrhunderts endgültig aufgegeben. An die Stelle dieser vergeblichen Bemühungen, den Satz zu beweisen, trat nun die Aufgabe, seine Unbeweisbarkeit darzutun. Zur Lösung dieser Aufgabe schlug LOBATSCHEWSKY folgendes Verfahren ein. Wenn das euklidische Axiom von dem System der übrigen Axiome logisch unabhängig ist, so muß es möglich sein, eine in sich konsequente Geometrie zu entwickeln, in der eine diesem Axiom widersprechende Annahme zugrunde gelegt wird. Denn, wenn die anderen Axiome nicht hinreichend sind, um über seine Gültigkeit zu entscheiden, so müssen sie mit seinem Gegenteil ebenso verträglich sein wie mit ihm selbst. Der Beweis der inneren Widerspruchslosigkeit einer dem euklidischen Axiom widersprechenden Geometrie wäre daher zugleich ein überzeugender Beweis der Unbeweisbarkeit des euklidischen Axioms. Nun ist das euklidische Axiom gleichbedeutend mit dem sogenannten Parallelensatz: In einer Ebene läßt sich durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nur eine Gerade ziehen, welche die erstere nicht schneidet. LOBATSCHEWSKY versuchte daher eine Geometrie auszubilden, unter Beibehaltung aller übrigen Axiome, während er den Parallelensatz durch die Annahme ersetzte, daß sich durch einen Punkt außerhalb einer Geraden mehr als eine nicht schneidende Gerade ziehen lassen. Es gelang ihm, diese Geometrie systematisch durchzuführen, ohne in den Folgerungen auf einen logischen Widerspruch zu stoßen. Daß ein solcher auch bei weiterer Entwicklung seiner Geometrie niemals auftreten kann, ohne einen Widerspruch in der gemeinen euklidischen Geometrie selbst nach sich zu ziehen, ist später von BELTRAMI und KLEIN nachgewiesen worden.

8

Es ist für die von LOBATSCHEWSKY ausgebildete »nicht-euklidische« Geometrie charakteristisch, daß die Summe der Winkel des ebenen Dreiecks nicht wie in der euklidischen zwei Rechte, sondern weniger als zwei Rechte beträgt, und daß dieser Betrag um so geringer ist, je größer der Flächeninhalt des Dreiecks ist. Die Differenz zwischen der Winkelsumme eines Dreiecks und zwei Rechten, der sogenannte Defekt, steht nämlich zu dem Flächeninhalt des Dreiecks in einem Verhältnis, welches auf Grund der Kongruenzaxiome einen konstanten Wert hat. Diese Konstante bezeichnet man, nach einer der Flächentheorie entlehnten Ausdrucksweise, als das »Krümmungsmaß« des Raumes. Der Wert desselben beträgt in der euklidischen Geometrie 0, während er in der Lobatschewskyschen Geometrie negativ ist. Man sieht ohne weiteres, daß neben der Lobatschewskyschen noch eine andere nicht-euklidische Geometrie möglich ist, nämlich diejenige, die ein positives Krümmungsmaß des Raumes zugrunde legt. Dies ist die sogenannte Riemannsche Geometrie. Sie ist dadurch charakterisiert, daß sie annimmt, in einer Ebene lasse sich durch einen Punkt außerhalb einer Geraden *keine* Parallele zu ihr ziehen, und durch die sich daraus ergebende Folgerung, daß die Winkelsumme im Dreieck größer als zwei Rechte ist. Sie ist ferner dadurch merkwürdig, daß auf Grund ihrer Annahmen dem Raume nicht mehr wie in der gewöhnlichen Geometrie unendliche Ausdehnung zugeschrieben werden kann. Vielmehr muß zwischen Unendlichkeit und Unbegrenztheit unterschieden werden. Analog der Kugeloberfläche, die zwar keine Grenze hat, aber endlich ist, muß der Riemannsche Raum als zwar unbegrenzt, aber endlich gedacht werden.[*1]

9

Das Parallelenaxiom ist nicht das einzige, dessen logische Unabhängigkeit durch die Methode der »nicht-euklidischen« Geometrie erwiesen worden ist. Der Beweis seiner Unbeweisbarkeit bildet nur das erste und gleichsam klassische Beispiel einer nach streng logischer Methode geführten kritischen Untersuchung der Grund-

[*1] In der Neuausgabe des Jahres 1959 bemerkt PAUL BERNAYS zu diesem Abschnitt: Zu beachten ist, daß die Möglichkeit der Riemannschen Geometrie bei Aufrechterhaltung des archimedischen Axioms nur dann besteht, wenn die Anordnungsaxiome und eventuell auch die Inzidenzaxiome modifiziert werden. In der Tat konnten aus diesem Grunde SACCHERI und LEGENDRE die »Hypothese des stumpfen Winkels«, wonach sich die Winkelsumme des Dreiecks als größer als zwei Rechte ergibt, ausschließen.

lagen der Geometrie. Seit Lobatschewsky, Gauss und Riemann hat die erweiterte Anwendung dieser Methode zur Gründung einer neuen, umfangreichen und selbständigen Disziplin der Mathematik geführt.

Auch auf die Grundlagen der Arithmetik[*2] beginnt man in neuerer Zeit mit Erfolg dasselbe Forschungsprinzip auszudehnen. Der Unabhängigkeitsbeweis wird hier durch die Aufstellung »komplexer Zahlensysteme« geführt, d. h. durch den Nachweis der logischen Widerspruchslosigkeit eines Zahlensystems, das nicht sämtliche durch das vollständige System der arithmetischen Axiome bezeichneten Forderungen erfüllt. Zu diesem Axiomensystem gehört z. B. das »Archimedische« Axiom: Wenn a und b zwei beliebige Zahlen sind und a kleiner ist als b, so gibt es stets ein Vielfaches von a, das größer ist als b. Der Unabhängigkeitsbeweis für dieses Axiom ist in der Tat durch Nachweisung der Möglichkeit eines »nicht-archimedischen« Zahlensystems erbracht worden.

10

Die angeführten Beispiele werden genügen, um den formalen Wert der nicht-euklidischen Geometrie und die methodische Bedeutung, die sie für die kritische Mathematik besitzt, deutlich hervortreten zu lassen.[1] Wenden wir uns nunmehr der Frage zu, in welchem Verhältnis die nicht-euklidischen Untersuchungen zu dem Problem des Ursprungs der mathematischen Axiome stehen, und

[*2] Bemerkung von Paul Bernays in der Neuauflage von 1959: Von den »Grundlagen der Arithmetik« ist hier im Sinne der Axiomatik der *reellen* Zahlen die Rede.

[1] Ich verstehe im folgenden unter »nicht-euklidischer Geometrie« allgemein jedes geometrische System, das in seinen Voraussetzungen von irgendeinem oder mehreren Axiomen der gewöhnlichen, euklidischen Geometrie abweicht, beziehe mich also nicht speziell auf die eigentlich sogenannte nicht-euklidische Geometrie, die eine dem Parallelenaxiom widersprechende Annahme zugrunde legt. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, spreche ich nur von der Geometrie und nicht auch ausdrücklich von der Arithmetik. Die folgenden Ausführungen lassen sich indessen auf Grund des § 9 Gesagten ohne weiteres auf die Arithmetik übertragen.

welche Belehrungen uns aus jenen Untersuchungen für dieses Problem erwachsen. Es ist bekannt, welch heftiger Streit seit der Veröffentlichung von HELMHOLTZ' diesbezüglichen Arbeiten über diese Frage entbrannt ist. Dieser Streit betrifft vornehmlich das Verhältnis der neuen mathematischen Untersuchungen zur Kantischen Lehre von den synthetischen Urteilen a priori. Man hat auf der einen Seite gemeint, auf Grund der nicht-euklidischen Geometrie KANTS Lehre vom rein-anschaulichen Ursprung der Axiome widerlegen zu können, während man auf der anderen Seite geglaubt hat, auf Grund der Kantischen Lehre das ganze Unternehmen der nicht-euklidischen Geometrie verwerfen zu müssen. Nach den vorangeschickten Darlegungen der Kantischen Lehre einerseits und der Methode der nicht-euklidischen Geometrie andererseits werden wir keine Schwierigkeit finden, die Mißverständnisse, die die Streitfrage verdunkelt haben, zu beseitigen und dadurch eine äußerst einfache Lösung des Problems zu gewinnen.

11

KANTS Philosophie der Mathematik läßt sich in den einen Satz zusammenfassen: Die mathematischen Axiome sind synthetische Urteile a priori. Darin liegen die beiden Behauptungen: 1) die Axiome sind nicht logischen Ursprungs, 2) sie gelten unabhängig von aller Erfahrung. Aus der ersten Behauptung folgert KANT ihren Ursprung aus der Anschauung; aus der zweiten schließt er auf den nicht-empirischen Charakter dieser Anschauung.

Fragen wir zuerst: Diese Kantische Lehre vorausgesetzt, was folgt aus ihr für die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der nicht-euklidischen Geometrie?

Die Axiome der euklidischen Geometrie gelten unabhängig von aller Erfahrung. Sie sind also notwendige Wahrheiten. Daraus hat man oft so weiter geschlossen: Notwendige Wahrheiten sind solche, deren Gegenteil unmöglich ist, – also ist eine nicht-euklidische Geometrie unmöglich. Und aus dieser angeblichen Konsequenz hat man dann von der andern Seite auf die Unrichtigkeit der Kantischen Behauptung zurückgeschlossen.

Der Fehler dieses Schlusses beruht auf einem zweifachen Gebrauch des Wortes »unmöglich«. Die Unmöglichkeit des Gegenteils eines Satzes kann nämlich einmal darin ihren Grund haben, daß sein Gegenteil einen inneren Widerspruch einschließt, d. h. daß die Verneinung seines Prädikatsbegriffs der Definition seines Subjektsbegriffs widerspricht. Dies ist der Fall bei der Verneinung analytischer Urteile. Die Unmöglichkeit des Gegenteils eines Satzes kann aber auch darauf beruhen, daß seine Verneinung irgendeiner anderen, sonst schon feststehenden Wahrheit widerstreitet, z. B. der Anschauung, die wir von dem Gegenstande besitzen. Das letztere ist offenbar der Fall bei der Verneinung synthetischer Urteile. Die Notwendigkeit der ersteren Art ist rein logischer Natur und kommt ausschließlich analytischen Urteilen zu. Die Notwendigkeit der zweiten Art ist synthetischer Natur und bedingt keineswegs die logische Unmöglichkeit des Gegenteils. Der synthetische Charakter der geometrischen Axiome schließt also die logische Möglichkeit der nicht-euklidischen Geometrie so wenig aus, daß die Behauptung des ersteren vielmehr mit der der zweiten identisch ist.

Was andererseits die Apriorität der Axiome betrifft, so folgt aus ihr allerdings die synthetische Unmöglichkeit einer ihnen widersprechenden Geometrie. Die nicht-euklidische Geometrie bedarf jedoch für ihre Zwecke einzig und allein der *logischen* Möglichkeit ihres Systems, d. h. ihrer inneren Widerspruchslosigkeit, und es gehört zu den gröbsten Mißverständnissen dieser mathematischen Untersuchungen, daß sie bezweckten, die *Gültigkeit* der euklidischen Axiome umzustoßen.

12

Man hat sich lebhaft über die Vorstellbarkeit nicht-euklidischer Raumformen gestritten.

Es ist dem Mathematiker ein Leichtes, die Geometrie eines nach vier oder mehr Dimensionen ausgedehnten Raumes herzustellen: es gelingt ihm dies auf dem Wege der Rechnung. Etwas anderes aber ist die Frage, ob er sich anschaulich vier oder mehr in einem Punkte aufeinander senkrecht stehende Geraden vorstellen kann, d. h. ob nicht nur der Begriff, sondern auch die Konstruktion eines mehr als dreidimensionalen Raumgebildes als möglich betrachtet werden muß. Daß die Unmöglichkeit dieser Konstruktion die Möglichkeit des Begriffs nicht ausschließt, ist einleuchtend. Verstehen wir unter Vorstellen *Denken,* so werden wir alles das als vorstellbar erachten, was keinen logischen Widerspruch einschließt. Wird aber zur Möglichkeit des Vorstellens Anschaulichkeit verlangt, so werden wir, um ein mathematisches Gebilde als vorstellbar zu bezeichnen, über die innere Widerspruchslosigkeit seines Begriffs hinaus die Ausführbarkeit seiner Konstruktion fordern müssen. Das Gebiet des anschaulich Vorstellbaren ist also notwendig enger als das des Denkbaren, und der wesentliche Unterschied beider läßt sich nicht in einen gradweisen verwandeln.

Es ist eine dem euklidischen Raume wesentliche Eigenschaft, daß eine Figur, wenn sie um eine feste Achse rotiert, nach einmaliger Umdrehung in ihre Anfangslage zurückkehrt. Diese in der Geometrie gewöhnlich stillschweigend gemachte Annahme ist nicht selbstverständlich in dem Sinne, daß ihr Gegenteil undenkbar wäre. Es führt zu keinem Widerspruch, wenn man etwa annimmt, daß bei der Drehung einer Figur ihre Dimensionen proportional dem Drehungswinkel wachsen. In einer solchen Geometrie wäre der Kreis keine geschlossene Linie; die Linie gleicher Entfernung von einem festen Punkte wäre die Spirale. Ich frage nun: Ist eine *nicht* geschlossene Linie, die zugleich der Bedingung genügt, die Linie gleicher Entfernung von einem festen Punkte zu sein, anschaulich vorstellbar? Wir können den Begriff der Linie gleicher Entfernung ohne Mühe konstruieren; wir können uns desgleichen eine anschauliche Vorstellung der Spirale entwerfen. Aber in der durch Konstruktion erzeugten Anschauung liegt allemal mehr als in dem Begriff, dessen Gegenstand durch diese Anschauung vorgestellt wird. So wird durch Konstruktion der Linie gleicher Entfernung notwendig zugleich eine geschlossene Linie konstruiert, und durch die Konstruktion der Spirale zugleich notwendig eine Linie ungleicher Entfernung. Die Vereinigung beider Begriffe in eine Anschauung durch Konstruktion einer nicht geschlossenen Kreislinie läßt sich also nicht vollziehen, denn sie ist durch die Gesetze unserer Raumanschauung ausgeschlossen, so unzweifelhaft auch die logische Möglichkeit der Vereinigung dieser anschaulich unvereinbaren Begriffe feststeht.

Dieser Unterschied begründet eine Überlegenheit des Denkens über die Anschauung, die sich durch keine noch so große Übung und Gewandtheit in der Handhabung analytischer Operationen und perspektivischer Konstruktionen jemals ausgleichen läßt.

13

Gehen wir zu der anderen Frage über, die uns noch zu beantworten bleibt: Welche Schlüsse lassen sich aus der Möglichkeit der nicht-euklidischen Geometrie auf den Ursprung der Axiome ziehen? – Die Ansicht ist noch heute verbreitet und ist auch von manchen Mathematikern geteilt worden, daß die Möglichkeit der nicht-euklidischen Geometrie die Gültigkeit der euklidischen zweifelhaft mache, und man hat, durch diese Meinung veranlaßt, das Vorrecht der letzteren auf ein bloßes Gewohnheitsrecht zurückzuführen gesucht. Ein Geometer, der so schließen würde, würde offenbar den Ast absägen, auf dem er sitzt; er würde die Selbständigkeit seiner eigenen Wissenschaft untergraben und sie in ein bloßes logisches Spiel mit analytischen Sätzen auflösen, nämlich mit der Ableitung der logischen Folgen aus beliebigen, durch Gewohnheit oder Bequemlichkeit bestimmten Annahmen, ohne den Gesichtspunkt der Wahrheit dieser Annahmen und ihrer Folgen. So daß z. B. einmal auf einem Naturforscher-Kongreß beschlossen werden könnte, statt der euklidischen irgendeine nicht-euklidische Geometrie der Physik zugrunde zu legen, oder daß eine nach in Europa angestellten Berechnungen gebaute Brücke in Amerika einstürzt, weil dort der Krümmungsradius des Raumes ein anderer ist.

Suchen wir nach einem Grunde für die angeführte Schlußweise, so können wir ihn in nichts anderem finden als in dem seit ARISTOTELES traditionell gewordenen, von KANT bekämpften Dogma, das als Kriterien der Wahrheit nur die Logik und die Erfahrung kennt.

Nach diesem Dogma sind alle notwendigen Wahrheiten logischen Ursprungs. Es ist eine notwendige Konsequenz dieser Voraussetzung, daß alle Sätze, die sich der Zuständigkeit der Logik entziehen, aus der Erfahrung stammen. – Geht man indessen nicht von vornherein von diesem Dogma aus, so läßt sich aus der Möglichkeit der nicht-euklidischen Geometrie nicht mehr und nicht weniger folgern als der *nicht-logische* Ursprung der Axiome. Daraus, daß der euklidische Raum nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bildet, geht nur hervor, daß, wie RIEMANN es ausdrückt, »die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Größenbegriffen ableiten lassen«. Mit andern Worten: die Möglichkeit der nicht-euklidischen Geometrie ist ein unwidersprechlicher Beweis des synthetischen Charakters der geometrischen Wahrheiten.

Es liegt auf der Hand, daß aus dieser Tatsache ein Schluß auf die Frage der Apriorität schlechterdings unmöglich ist. Denn die logische Widerspruchslosigkeit des Gegenteils findet bei allen synthetischen Sätzen *als solchen* statt, sie mögen nun a priori oder a posteriori gewiß sein. Es ist also ausgeschlossen, daß aus den Untersuchungen der nicht-euklidischen Systeme jemals etwas für die Beantwortung der Aprioritätsfrage geleistet wird. Jene mathematischen Untersuchungen haben mit dieser philosophischen Frage nicht das geringste zu tun und sind von der Art ihrer Beantwortung gänzlich unabhängig. Die diese Frage betreffende Behauptung KANTS wird daher durch die nicht-euklidische Geometrie gar nicht berührt.

So weit sich also überhaupt die Angelegenheiten der nicht-euklidischen Geometrie mit denen der Kantischen Lehre berühren, nämlich in bezug auf KANTS Entdeckung des nicht-logischen Ursprungs der Axiome, so können wir behaupten, daß die neuere Mathematik auf einem unabhängigen Wege eine glänzende Bestätigung der Kantischen Entdeckung geliefert hat.

14

Bereits die Begründer der nicht-euklidischen Geometrie selbst haben versucht, erkenntnistheoretische Schlüsse aus ihren mathematischen Untersuchungen zu ziehen. Schon LOBATSCHEWSKY hat daraus, daß die Annahme der gewöhnlichen Geometrie, der Wert der Winkelsumme jedes geradlinigen Dreiecks sei konstant, »keine notwendige Folge unserer Begriffe vom Raume ist«, geschlossen, »nur die Erfahrung, z. B. die wirkliche Messung von den drei Winkeln eines geradlinigen Dreiecks, könne die Wahrheit dieser Annahme bestätigen«[2]. – Ebenso RIEMANN. Daraus, »daß die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Größenbegriffen ableiten lassen«, folgert er, daß die besonderen Eigenschaften, durch die sich der euklidische Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten unterscheidet, »nur der Erfahrung entnommen werden können«[3].

Am deutlichsten tritt die Form derselben Schlußweise bei HELMHOLTZ hervor. HELMHOLTZ sagt über die Kongruenzaxiome:[4]

»Wenn wir aber Denknotwendigkeiten auf diese Annahme freier Beweglichkeit fester Raumgebilde mit unveränderter Form nach jeder Stelle des Raumes hin bauen wollen, so müssen wir die Frage aufwerfen, ob diese Annahme keine logisch unerwiesene Voraussetzung einschließt. Wir werden gleich nachher sehen, daß sie eine solche einschließt, und zwar eine sehr folgenreiche. Wenn sie das aber tut, so ist jeder Kongruenzbeweis auf eine nur aus der Erfahrung genommene Tatsache gestützt.«

Hier wird ausdrücklich von dem nicht-logischen Ursprung der Axiome auf ihren empirischen Ursprung geschlossen. Dieses Argument setzt offenbar zu seiner Schlußkräftigkeit neben der ausgesprochenen Prämisse vom nicht-logischen Ursprung der Axiome als zweite Prämisse die stillschweigende Annahme irgendeines allgemeinen Obersatzes voraus. Dieser allgemeine Obersatz müßte die Form haben: Jede logisch unerwiesene Voraussetzung ist der

[2] Pangeometrie § 9.
[3] Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. S. 2.
[4] Populär-wissenschaftliche Vorträge. 3. Auflage. 2. Band, 1. Vortrag, S. 7.

Erfahrung entnommen. Man sieht ohne weiteres, daß dieser stillschweigend benutzte Obersatz nichts anderes ist als die Aristotelische Disjunktion zwischen Logik und Empirie als Erkenntnisquellen.

Dieses Argument bildet den Kernpunkt in HELMHOLTZ' Angriff gegen KANT. Aber gerade jene Disjunktion, auf der dies Argument beruht, hatte KANT bestritten. Soll also die Helmholtzsche Argumentation mehr sein als eine Berufung auf das von KANT widerlegte Vorurteil, so ist sie eine offenbare petitio principii. –

15

Sehen wir einmal von der reinen Anschauung ab (welche ihrerseits selbst erst eine Bedingung der Möglichkeit der Erfahrung ist), und suchen wir den a posteriori gegebenen Stoff der Erfahrung zu befragen, welche von den logisch-möglichen Geometrien die gültige ist. Nehmen wir an, wir wollten durch Nachmessung der Winkel eines geradlinigen Dreiecks zwischen LOBATSCHEWSKY, EUKLID und RIEMANN entscheiden. Bedenken wir zuerst, daß die mathematisch geforderte *absolute* Genauigkeit durch empirische Messung unerreichbar ist. Wir würden vielleicht die Winkelsumme um einen gewissen Bruchteil einer Sekunde nahe bei zwei Rechten finden, bald darüber, bald darunter, und würden vielleicht auch durch Berechnung des Mittelwertes der gefundenen Beträge zwei Rechten um so näher kommen, je mehr wir die Beobachtungen häufen. Ob die euklidische Geometrie genau oder nur angenähert gilt, wäre so nicht zu entscheiden. –

Man hat, mit Rücksicht darauf, daß in allen drei Geometrien die Differenz zwischen der Winkelsumme und zwei Rechten dem Flächeninhalt des Dreiecks proportional ist, vorgeschlagen, durch Messung möglichst großer, *astronomischer* Dreiecke die Frage zu entscheiden. Denn bei diesen könnte sich eine so große Abweichung von zwei Rechten herausstellen, daß wir gewiß sein könnten, daß der festgestellte Defekt nicht auf die Ungenauigkeit unserer Beobachtungsmittel zurückzuführen ist. Ist es also zwar unmöglich, die

Gültigkeit des euklidischen Axioms a posteriori zu erweisen, so ließe sich doch seine *Un*gültigkeit a posteriori erweisen.

Sehen wir ab von der Schwierigkeit, die Parallaxe eines Sterns unabhängig von dem euklidischen Axiom zu bestimmen; nehmen wir etwa an, wir hätten das durch den Durchmesser der Erdbahn und den Sirius gebildete Dreieck ausgemessen und hätten einen Defekt von 3 Sekunden gefunden, während wir aus anderen Gründen wissen, daß die durch die Ungenauigkeit unserer Beobachtungsmittel bedingte Fehlergrenze 0,6 Sekunden nicht übersteigen kann. – Welcher Schluß wäre aus diesem Beobachtungsergebnis zu ziehen?

Was haben wir eigentlich gemessen? Die Winkel eines geradlinigen Dreiecks? Offenbar nicht. Denn die den Sirius mit der Erde verbindende Gerade ist uns empirisch gar nicht gegeben, sondern nur der vom Sirius zu uns gelangende Lichtstrahl, von dem wir annehmen, daß er geradlinige Form hat.

Würden wir also aus unseren Messungen schließen, daß die Winkelsumme des geradlinigen Dreiecks mehr als zwei Rechte beträgt, gemäß der Riemannschen Geometrie, entgegen der euklidischen? Würden wir nicht vielmehr umgekehrt schließen – oder doch jedenfalls *logisch* ebenso gut schließen *können* –, daß unsere Voraussetzung der Geradlinigkeit der Lichtstrahlen unzutreffend war und daß wir somit gar kein geradliniges Dreieck gemessen haben?

Also weder die Gültigkeit noch die Ungültigkeit der euklidischen Geometrie läßt sich auf empirischem Wege nachweisen. Die Erfahrung kann die Axiome weder bestätigen noch widerlegen.[5]

---

[5] Es ist keine seltene Erscheinung, daß ein Entdecker, unter dem Eindruck der überraschenden Fruchtbarkeit der von ihm geschaffenen Forschungsmittel, diesen eine über ihren methodischen Wert hinausgehende metaphysische Bedeutung zuzuschreiben geneigt ist. Vielleicht das interessanteste Beispiel hierfür bietet die Geschichte der Infinitesimalrechnung. Wie nun hier die »unendlich kleinen Größen« aus der Wissenschaft verschwunden sind, während die Grenzmethode ihre Fruchtbarkeit bewährt hat, so wird zweifellos auch die nichteuklidische Geometrie aufhören, ein Gegenstand metaphysischer Deutungsversuche zu sein, während sie ihre methodische Bedeutung nie verlieren wird.
Von historischem Interesse dürfte übrigens die wenig bekannt gewordene Tatsache sein, daß die im 19. Jahrhundert realisierte Idee einer »allgemeinen« Geometrie ihren ersten Ursprung bei KANT hat. »Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumesarten wäre unfehlbar die höchste Geometrie, die ein

16

Man hört auch häufig folgendes Argument: die Wahrheiten der Geometrie gälten in der Natur nur angenähert, sie seien daher streng genommen Hypothesen, über deren mehr oder weniger genaue Übereinstimmung mit der Natur nur die Erfahrung entscheiden könne. »Daß die Halbmesser eines Kreises gleich sind, ist von allen Kreisen wahr, so weit es von irgendeinem wahr ist, allein es ist von keinem einzigen Kreise genau wahr; es ist nur annähernd wahr – so annähernd, daß man in der Praxis keinen Irrtum von Bedeutung begeht, wenn man es als genau wahr annimmt«, sagt JOHN MILL. »Der Charakter der Notwendigkeit, den man den Wahrheiten der Mathematik zuschreibt, ist eine Illusion, die man nicht anders aufrechterhalten kann, als indem man annimmt, daß sich jene Wahrheiten auf rein imaginäre Gegenstände beziehen und nur deren Eigenschaften ausdrücken.«

»Die eigentümliche Gewißheit, die man für eine charakteristische Eigenschaft der ersten Grundsätze der Geometrie hält, beruht also auf einer Fiktion. Die Sätze, auf welche die Schlüsse dieser Wissenschaft gegründet sind, entsprechen den Tatsachen ebensowenig genau, als in anderen Wissenschaften; allein wir nehmen an, daß sie es tun, um die Konsequenzen, die sich aus dieser Annahme ergeben, verfolgen zu können. Die Ansicht DUGALD STEWARTS rücksichtlich der Grundlagen der Geometrie, daß nämlich diese Wissenschaft auf *Hypothesen* gegründet ist, ist meines Erachtens wesentlich richtig.«[6] – So sprechen auch RIEMANN und HELMHOLTZ von den »Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen«.

---

endlicher Verstand unternehmen könnte.« So bemerkt gelegentlich der dreiundzwanzigjährige KANT (Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte. 1747. § 10). Schon diese Tatsache für sich könnte genügen, um die Unbesonnenheit derer ins Licht zu setzen, die unter Berufung auf die »Entdeckung« der Möglichkeit verschiedener Geometrien gegen KANTS mathematischen Apriorismus zu Felde ziehen.

[6] System der Logik. 2. Buch. 5. Kapitel, § 1.
Nicht mit Unrecht vergleicht STALLO die Achtung, welche MILL bei den zeitgenössischen Mathematikern und Naturforschern als ihr offizieller Logiker und Metaphysiker genoß, mit dem Ansehen, in dem ARISTOTELES bei den mittelalterlichen Scholastikern stand. In der Tat ist es vorzugsweise die Autorität MILLS, durch

Der Grundfehler dieser Argumentationsweise kann nicht zweifelhaft sein: er besteht in einer Verwechslung der mathematischen *Begriffe* mit den von diesen Begriffen geltenden *Gesetzen.* Der Satz von der Gleichheit aller Halbmesser eines Kreises gilt, wenn er überhaupt einen Sinn hat, von allen Kreisen ohne Ausnahme mit absoluter Genauigkeit. Ob aber in der Natur irgendein Gegenstand existiert, dessen Figur genau oder nur angenähert kreisförmig ist, das bleibt durch jenen Satz ganz dahingestellt, und davon hängt seine Wahrheit und der Grad seiner Genauigkeit in keiner Weise ab.

Gewiß werden wir, wenn wir einen Naturkörper als kreisförmig bezeichnen, die Kreisförmigkeit desselben nur mit beschränkter Genauigkeit behaupten dürfen und aus diesem Grunde auch die geometrischen Sätze über den Kreis nur nach Maßgabe der Genauigkeit dieser Behauptung, also nur mit einer gewissen Annäherung, auf den Körper anwenden können. Aber es hätte gar keinen Sinn, hieraus den Schluß ziehen zu wollen, daß die Sätze der Geometrie nur annähernd wahr sind und den Tatsachen nicht genau entsprechen. Denn die Geometrie des Kreises handelt nicht von Naturkörpern – weder von kreisförmigen, noch von nicht kreisförmigen –, sondern vom Kreise. Die beschränkte *Anwendbarkeit* der geometrischen *Begriffe* auf die Erfahrung vermag daher die *Gültigkeit* der geometrischen *Gesetze* auf keine Weise einzuschränken. »Wenn es auch niemals einen Kreis oder ein Dreieck in der Natur geben sollte, so würden doch die von Euklid demonstrierten Wahrheiten in alle Ewigkeit ihre Gewißheit und Evidenz behalten«, sagt mit Recht Hume. Oder haben wir etwa die Genauigkeit der Gesetze der Kegelschnitte darum einzuschränken, weil wir wissen, daß die Planeten nicht genau die ihnen von Kepler zugeschriebene elliptische Bahn einhalten, oder weil wir Galileis parabolische Konstruktion der Wurfbewegung nur als angenähert richtig betrachten können?

Mill verwickelt sich aber noch dazu in einen groben Widerspruch mit sich selbst, wenn er als die Grundlage der Geometrie die Induktion bezeichnet und demgemäß den Ursprung der geometri-

die sich auch auf dem Festland das Vorurteil des mathematischen Empirismus mit besonderer Hartnäckigkeit festgesetzt hat.

schen Begriffe aus der Erfahrung abzuleiten sucht. »Die Punkte, Linien, Kreise und Quadrate, die jemand in seinem Bewußtsein hat«, behauptet er, »sind nichts als Abbilder der Punkte, Linien, Kreise und Quadrate, die ihm die Erfahrung vorgeführt hat.« Wenn dem so wäre, wie kann dann noch von einer Nicht-Übereinstimmung der Geometrie mit der Erfahrung die Rede sein? Wenn die geometrischen Gebilde nur Abbilder der Gegenstände der Erfahrung sind, so fehlt ja jeder Maßstab, mit dem verglichen die Gegenstände der Erfahrung sich als abweichend erweisen könnten. –

Wenn aber die Mathematik keine Erfahrungswissenschaft ist, so ist es auch von vornherein unstatthaft, ihre Grundsätze, die Axiome, als Hypothesen zu bezeichnen. Hypothesen sind Sätze, deren hinreichender Grund nicht gegeben ist, d. h. deren Verhältnis zur unmittelbaren Erkenntnis unbestimmt ist. Solche Sätze kann es strenggenommen nur in empirischen Wissenschaften geben. Denn in diesen und nur in diesen hängt das Gegebenwerden der den Grund ihrer Urteile bildenden unmittelbaren Erkenntis von für die Vernunft zufälliger sinnlicher Anregung ab. Erfahrungswissenschaften müssen daher infolge der stets möglichen Erweiterung ihrer unmittelbaren Erkenntnis jederzeit einen Spielraum für Hypothesen offen lassen. In rationalen Wissenschaften dagegen steht die den Grund ihrer Urteile bildende unmittelbare Erkenntnis ein für allemal fest und ist jederzeit in unserer Gewalt. Denn sie ist durch die Vernunft selbst gegeben, und es bedarf lediglich der willkürlichen Reflexion, um sie deutlich zu machen und ihr Verhältnis zu dem fraglichen Urteil zu bestimmen, d. h. dieses zu begründen. In rationalen Wissenschaften kann es folglich keine Hypothesen geben.

17

In der Tat gelangen wir auf keinem anderen Wege zu den Grundbegriffen und Grundsätzen der Geometrie als durch Abstraktion von der Erfahrung. Allein, Abstraktion ist nicht Induktion. Es liegt schon im Begriff des Grundsatzes, daß Grundsätze keine erschlossenen Wahrheiten sein können. Die Induktion ist aber ein Schlußverfahren, nämlich der disjunktive Schluß von den Fällen auf das Gesetz; ein Schluß, der übrigens, wie alle Schlußarten, zu seiner Möglichkeit bereits irgendwelche allgemeinen Obersätze nicht-empirischen Ursprungs voraussetzt. Der Zweck der Induktion ist es, über die unmittelbar beobachteten Tatsachen hinaus zur Interpolation und Extrapolation zu leiten. Jede Induktion bedarf daher irgendeines allgemeinen Prinzips, das die Berechtigung und Anweisung zum Hinausgehen über die beobachteten Tatsachen liefert, und das folglich selbst nicht wiederum induktorischen Ursprungs sein kann. Die bloße Möglichkeit einer induktorischen Wissenschaft genügt daher schon, um die Existenz einer nicht-induktorischen Wissenschaft zu beweisen. Eine solche nicht-induktorische Wissenschaft ist die reine Mathematik (wie dies schon ihr Name andeutet), und als solche liegt sie allen induktorischen Wissenschaften als Bedingung ihrer Möglichkeit zugrunde. KEPLER kam nicht durch seine Induktion auf die Gesetze der Kegelschnitte, sondern er wandte nur diese Gesetze, die er schon a priori hatte und die ursprünglich nur der Geometrie angehörten, durch seine Induktion auf die Astronomie an. – Wer also weiß, was eine Induktion ist, der wird niemals mit MILL behaupten können, die Induktion sei das Fundament der mathematischen Wissenschaften.

Man hat die Geometrie als das Studium der starren Körper und der die Bewegung derselben regelnden Gesetze bezeichnet. In der Tat: nur die starren Körper, die uns die Erfahrung zeigt, bieten uns Gelegenheit zur Abstraktion unserer Begriffe von Kongruenz, auf welche alle räumliche Messung sich gründet. Wenn es also keine starren Körper in der Natur gäbe, so würden wir auch keine Geometrie haben. – Aber etwas anderes ist die Frage nach den Gelegenheitsursachen der Entwicklung unserer geometrischen Grundbegriffe, etwas anderes die Frage nach dem Ursprung dieser Begriffe. Wenngleich wir nur durch Erfahrung veranlaßt zur Entwicklung dieser Begriffe gelangen, so entspringen dieselben doch nicht *aus* der Erfahrung.[7] Die Abstraktion, durch die wir zu den

[7] Bis zu welchem Grade von Verblendung die empiristische Verwirrung dieser Begriffe führen kann, davon finden wir ein ergötzliches Beispiel bei E. SCHRÖ-

geometrischen Grundbegriffen gelangen, besteht in der Reflexion auf die räumliche Form der Anordnung der uns in der Erfahrung gegebenen Sinnesqualitäten und auf die Ausdehnungs- und Maßverhältnisse dieser Anordnung, während wir von den in diesen Verhältnissen angeordneten Qualitäten selbst absehen. Wir erwerben uns also nicht erst die Raumanschauung durch Abstraktion aus der Erfahrung, sondern wir isolieren sie nur durch diese Abstraktion aus dem verbundenen Ganzen unserer Erkenntnis und bringen sie uns abgesondert zum Bewußtsein.

Nicht also Fiktionen (wie MILL meint) bilden den Gegenstand der Geometrie, sondern Abstraktionen. Es gibt nicht einen besonderen mathematischen Raum, der als Objekt des Geometers diente, und einen von diesem verschiedenen physikalischen Raum, auf welchen die Eigenschaften des ersteren mehr oder weniger genau zu übertragen eine Sache der Erfahrung wäre. Der Raum des Geometers ist mit dem Raum, in dem sich die Naturkörper befinden, schlechthin identisch, und die geometrischen Abstraktionen haben zugleich eine reelle Bedeutung als Formen wirklicher (oder möglicher) Gegenstände.

Die geometrischen Gebilde sind also einerseits Gegenstände der reinen Anschauung, andererseits aber sind sie im Ganzen unserer Erkenntnis doch nur Formen bestimmter (physikalischer) Gegenstände. So z. B. ist das Dreieck eine rein-anschauliche Figur und bildet mit allen aus dem Gesetz seiner Konstruktion folgenden Eigenschaften einen Gegenstand der Geometrie. Aber an Gegenständen der Erfahrung ist es nur die Form solcher, welche dreieckig sind.

Form ist überhaupt dasjenige, was den Grund dafür bildet, daß Mannigfaltiges in gewissen Verhältnissen geordnet erscheint. So finden wir im Raum das Mannigfaltige der Sinnesanschauung in gewissen Ausdehnungs- und Maßverhältnissen angeordnet. Der

---

DER, der in seinem »Lehrbuch der Arithmetik und Algebra« diesen Wissenschaften das folgende, »einzige Axiom« zugrunde legt: »Das gedachte Prinzip könnte wohl das Axiom der Inhärenz der Zeichen genannt werden. Es gibt uns die Gewißheit, daß bei allen unsern Entwicklungen und Schlußfolgerungen die Zeichen in unserer Erinnerung – noch fester aber am Papiere – haften.«

Raum ist also die Form der Sinnesanschauung. Da nun die Form der Nebeneinanderordnung des Mannigfaltigen der Sinnesanschauung nicht selbst wieder ein Gegenstand der Sinnesanschauung sein kann, so ist der Raum, obgleich die Form der Sinnesanschauung, doch selbst nur ein Gegenstand der *reinen* Anschauung. – Ist aber der Raum ein Gegenstand der reinen Anschauung, so ist es auch eine wissenschaftliche Aufgabe, die gesetzmäßigen Eigenschaften dieser rein-anschaulichen Form zu erforschen. Die wissenschaftliche Erkenntnis des Raums ist aber die Geometrie. Die Geometrie ist also eine Wissenschaft aus reiner Anschauung.[8]

18

»Beruhten die geometrischen Sätze auf reiner Anschauung, so brauchten wir sie nicht zu lernen«, sagt ERNST MACH[9], einem sehr verbreiteten Mißverständnis Ausdruck gebend. Was heißt es denn, wenn wir sagen, daß wir einen geometrischen Satz lernen? MACH wird den wesentlichen Unterschied nicht leugnen wollen, der zwischen dem Erlernen historischer Tatsachen und dem Erlernen mathematischer Wahrheiten besteht. Die Kenntnis der ersteren ist für

---

[8] Ich hebe das letztere besonders deshalb hervor, weil daraus die Unhaltbarkeit der von HELMHOLTZ vertretenen Ansicht hervorgeht, nach der zwar der Raum selbst eine reine Anschauungsform sein, der Ursprung der Axiome dagegen in der Erfahrung liegen soll. Die Axiome sind in der Tat nichts anderes als die begriffliche Formulierung der einfachsten Grundverhältnisse der Raumanschauung selbst.
Der Einwand, daß aus der Apriorität der Raumanschauung zwar die Apriorität gewisser, aber nicht notwendig aller geometrischer Axiome folgt, würde KANT wenigstens nicht treffen. Denn die Vernunftkritik behauptet nur die Existenz einer Wissenschaft vom Raum aus reiner Anschauung, gleichviel welcher Umfang dieser Wissenschaft zuzuschreiben ist. Angenommen, der Beweis der empirischen Natur des Parallelenaxioms wäre gelungen (was, wie wir gezeigt haben, *nicht* der Fall ist), so würde dieser Beweis die Kantische Behauptung nicht umstoßen, sondern nur dahin ergänzen, daß dieser Satz aus der Geometrie in die Empirie zu verweisen wäre. Die einmal von GAUSS geäußerte Vermutung, »daß wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können«, ist also mit der Kantischen Lehre sehr wohl vereinbar. (Vgl. Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL, S. 490.)

[9] Die Analyse der Empfindungen, 4. Auflage, 1903, S. 270.

den einzelnen zufällig und kann nur durch Belehrung von außen her erworben werden. Das Erlernen mathematischer Wahrheiten dagegen besteht (wie bereits PLATON im Menon gezeigt hat) nicht sowohl in der Erwerbung der mathematischen Erkenntnis selbst, als vielmehr in der Erwerbung der *Einsicht* in dieselbe. Diese Einsicht allein ist es, die durch das Studium der mathematischen Wissenschaften erworben wird, und sie ist mithin ein zufälliger, von äußeren Umständen abhängender Besitz. Die mathematische Erkenntnis selbst aber, die man sich durch dies Studium nur zum Bewußtsein bringt, ist für jedermann notwendig, und jedermann *kann* sich eine Einsicht in dieselbe verschaffen, wenngleich, ob er es wirklich tut, nur von der Erfahrung abhängig ist.

Da nach MACH alles in der Welt lediglich aus Empfindungen besteht[10], so ist es freilich nur natürlich, daß er auch die Raumvorstellung nur als Empfindung angesehen wissen will. Aber es ist bemerkenswert, daß auch MACH sich genötigt sieht, zu gestehen, daß das, was er als »Raumempfindung« bezeichnet, »von der Sinnesempfindung zu unterscheiden« ist und daß die Raumempfindungen »den variierenden Sinnesempfindungen gegenüber ein festes Register bilden, in welches letztere eingeordnet werden«.[11]

Wären übrigens alle Wahrheiten, die wir erst »lernen« müssen, empirischen Ursprungs, so würde dies nicht allein von der Geometrie, sondern in gleicher Weise auch von der Arithmetik, ja sogar von der Logik gelten. Denn der Besitz keiner dieser Wissenschaften ist uns angeboren. Damit aber wäre zugleich die Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit dieser Wissenschaften aufgehoben – eine Konsequenz, die selbst MACH schwerlich zu vertreten geneigt sein dürfte.

19

Man hat behauptet, wenn die Erkenntnisquelle der Mathematik in der Anschauung läge, so würde ihren Sätzen die Genauigkeit fehlen. »Die Raumanschauung ist zunächst etwas Ungenaues, wel-

[10] Ebenda, S. 10.
[11] Ebenda, S. 142.

ches wir zum Zwecke der mathematischen Behandlung in den sogenannten Axiomen idealisieren«, sagt Felix Klein.[12] Und in seinem berühmten Gutachten betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von Lie heißt es: »Die Ergebnisse irgendwelcher Beobachtungen gelten immer nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen und unter partikulären Bedingungen; indem wir die Axiome aufstellen, setzen wir an Stelle dieser Ergebnisse Aussagen von absoluter Präzision und Allgemeinheit. In dieser Idealisierung der empirischen Daten liegt meines Erachtens das eigentliche Wesen der Axiome.«[13] – Die Ergebnisse der Beobachtung, d. h. der empirischen Anschauung, gelten allerdings stets nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen und unter bestimmten Bedingungen. Allein, jede Idealisierung setzt ein Ideal voraus, und wir müssen uns daher fragen, von welcher Beschaffenheit und welchen Ursprungs denn das hier vorausgesetzte Ideal sein soll? Dies Ideal kann offenbar nicht selbst der Beobachtung entlehnt sein, da es ja gerade die Norm der Korrektur der Beobachtung bilden soll. Dies Ideal ist in der Tat nichts anderes als die reine Anschauung, und der hier als Idealisierung bezeichnete Prozeß besteht nicht sowohl in dem Übergang von der »Anschauung« zu den Axiomen als vielmehr in dem Übergang von der *empirischen* Anschauung zur *reinen* (nicht »inneren«) Anschauung. Die in den Axiomen enthaltene Idealisierung der empirischen Daten wäre ohne die Voraussetzung der *reinen* Anschauung gar nicht möglich, weil uns ohne diese jeder Maßstab fehlen würde, der uns als »Ideal« der Präzision dienen könnte, und weil uns ebenso jedes Kriterium fehlen würde, das die »absolute Allgemeinheit« dieser Aussagen gewährleisten könnte.

Es ist wiederholt darauf aufmerksam gemacht worden, daß manche Fehler in der Geschichte der Mathematik durch eine einseitige Beachtung der Anschauung veranlaßt worden sind, indem diese dazu geführt hat, in übereilter Weise Sätze als allgemeingültig anzusehen, die es in der Tat nicht sind. Das berühmteste Beispiel

[12] Über Arithmetisierung der Mathematik. Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1895. Heft 2, S. 83.
[13] Mathematische Annalen. 50. Band, 1898, S. 585.

dieser Art ist die lange Zeit nicht nur für richtig, sondern sogar für selbstverständlich gehaltene Voraussetzung der Differenzierbarkeit aller stetigen Funktionen.

Ein solcher Fehler liegt jedoch in keinem Falle in der mathematischen Anschauung selbst. Er beruht vielmehr entweder darauf, daß man im Vertrauen auf die ungenaue empirische Anschauung diese unbewußt der reinen unterschiebt, oder darauf, daß man sich mit einer unvollständigen Induktion begnügt, die man fälschlich wie eine vollständige ansieht, d. h. also auf einem aus der Anschauung gezogenen Schlusse.

Das letztere ist der Fall bei dem genannten Beispiel. Die Stetigkeit ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung der Differenzierbarkeit, und erst die strengere Unterscheidung dieser Begriffe, nicht aber eine Korrektur der Anschauung führte zur Richtigstellung des wahren Sachverhalts. – Wenn sich nur die differenzierbaren stetigen Funktionen durch stetig verlaufende Kurven geometrisch darstellen lassen, und wenn sich trotzdem die Existenz nicht differenzierbarer stetiger Funktionen auf analytischem Wege beweisen läßt, so steht doch das Ergebnis dieses Beweises keineswegs mit der Anschauung in Widerspruch. Denn die geometrische Darstellbarkeit ist kein notwendiges Kriterium der Existenz eines mathematischen Begriffs. Vielmehr genügt in der Mathematik zur Feststellung der Existenz eines Begriffs die Nachweisung seiner Übereinstimmung mit sich selbst *und mit den Axiomen.* Die Axiome ihrerseits beziehen sich aber nicht nur unmittelbar auf die reine Anschauung, sondern sie können auch zu ihrer Möglichkeit diese unmittelbare Beziehung auf die Anschauung nicht entbehren. Dies gilt von den Axiomen der Analysis ebenso wie von denen der Geometrie. Es kann folglich auch jeder Existenzbeweis für einen geometrisch nicht darstellbaren und überhaupt nicht unmittelbar anschaulichen Begriff nur auf Grund einer mittelbaren Berufung auf die Anschauung geführt werden.

20

Aus dem logischen Postulat der vollständigen Zurückführung unserer Erkenntnis auf ihre Prinzipien entspringt die Forderung, jeden überhaupt erweislichen Satz vermittelst rein syllogistischer Operationen auf die Axiome zurückzuführen. Es ist daher ein berechtigtes und der wissenschaftlichen Strenge förderliches Bestreben der neueren Mathematik, den Gebrauch der Anschauung aus der systematischen Entwicklung der Beweise zu eliminieren und insbesondere bei der Ableitung arithmetischer Sätze die Benutzung geometrischer Interpretationen zu vermeiden. Die erfolgreiche Durchführung dieser besonders von WEIERSTRASS ausgegangenen Bestrebungen hat zu der als »Arithmetisierung« bezeichneten Behandlungsweise der Mathematik geführt.

Diese Bestrebungen haben zu mannigfachen Mißverständnissen Anlaß gegeben. Insbesondere hat man vielfach die Vermutung ausgesprochen, die schließliche Folge oder gar das eigentliche Ziel der Arithmetisierung läge in der gänzlichen Verdrängung der mathematischen Anschauung und in ihrer Ersetzung durch einen logischen Formalismus. Es läßt sich indessen leicht zeigen, daß diese Vermutung irrig ist und daß selbst die vollständig durchgeführte Arithmetisierung die mathematische Anschauung nicht entbehrlich machen kann. Ein Beweis ist nämlich nichts anderes als die logische Zurückführung eines Lehrsatzes auf die Axiome, und also, vermittelst dieser, auf die Anschauung. Während uns die unmittelbare Anschauung schon bei der Betrachtung komplizierterer geometrischer Gebilde sehr bald im Stiche läßt, besteht der richtig verstandene Zweck der Arithmetisierung gerade in einer möglichst vollständigen begrifflichen Analyse des in den Axiomen formulierten Gehalts der mathematischen Anschauung.

Dies Verhältnis wird bei einer genaueren Betrachtung des Wesens der Arithmetisierung noch deutlicher werden. Strenggenommen sind es nämlich zwei verschiedene Forderungen, die man unter der Bezeichnung der »Arithmetisierung der Mathematik« zusammengefaßt hat und die nicht immer mit der nötigen Schärfe unterschieden worden sind: einerseits die Forderung der rein syllogistischen

Ableitung jedes erweislichen mathematischen Satzes, und andererseits die Forderung der rein arithmetischen Bearbeitung arithmetischer Probleme oder, nach DEDEKINDS Ausdruck, die Forderung, »daß die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln solle«[14]. Die eine Forderung läuft auf die Ausscheidung der Anschauung aus den mathematischen Beweisen hinaus, die andere auf die Ausscheidung geometrischer Interpretationen aus der Begründung der Arithmetik. Die eine hat zum Ziel eine strenge Trennung von Anschauung und Denken in der Mathematik, die andere eine strenge Trennung der Analysis von der Geometrie. Die Vermengung dieser beiden an sich richtigen Forderungen hat zu der fehlerhaften Forderung geführt, die Mathematik überhaupt auf die Arithmetik zurückzuführen, zu der irrigen Ansicht, nur *das* dürfe als gesicherter Bestand mathematischer Wissenschaft gelten, was durch ausschließlich arithmetische Beweisführung begründet werden könne. Die schließliche Konsequenz dieser letzteren Ansicht wäre die Ausscheidung der Geometrie aus der reinen Mathematik – eine Konsequenz, die wirklich bereits ihre Vertreter gefunden hat.

In der Tat läßt sich ein geometrischer Satz nie restlos auf einen arithmetischen zurückführen, wenngleich sich den geometrischen Konstruktionen arithmetische Ausdrücke *zuordnen* lassen und man auf Grund dieser Zuordnung die Beziehungen zwischen den geometrischen Gebilden an der Hand derjenigen zwischen den entsprechenden arithmetischen studieren kann. Aber der ursprüngliche Unterschied zwischen der Geometrie und der Arithmetik fällt gleichwohl nicht mit dem Unterschied der anschaulichen Erkenntnis und des logischen Denkens zusammen. Geometrie und Arithmetik sind durch ihre Gegenstände unterschieden; die erstere hat es mit räumlich ausgedehnten Größen, die zweite hat es lediglich mit Zahlen zu tun. Anschauliche und gedachte Erkenntnis hingegen unterscheiden sich nicht hinsichtlich ihrer Gegenstände, sondern vielmehr hinsichtlich der Erkenntnis*weise*. Anschauung ist eine unmittelbare Erkenntnis ihrer Gegenstände, Denken hingegen die durch Begriffe vermittelte Erkenntnis *derselben Gegenstände*. Die Verwechslung dieser

[14] Stetigkeit und irrationale Zahlen. § 3.

beiden Unterschiede mußte in Verbindung mit der allgemein angenommenen Disjunktion zwischen Logik und Empirie notwendig zu dem Unternehmen führen, die Arithmetik der Logik und die Geometrie der Empirie zuzuweisen und somit die letztere aus der reinen Mathematik auszuschließen. Die Geometrie ist indessen so wenig Empirie wie die Arithmetik Logik. Vielmehr findet die Trennung anschaulicher und gedachter Erkenntnis ganz innerhalb beider Disziplinen statt. Das Postulat der systematischen Strenge, d. h. die Forderung, die Rolle der Anschauung aus den Beweisen auszuscheiden und auf die Begründung der Axiome einzuschränken, betrifft daher gleicherweise beide Wissenschaften und kann mithin ebensowenig zu einer völligen Beseitigung der Anschauung aus der Begründung der Arithmetik, wie zu einer Ausschließung der Geometrie aus der reinen Mathematik führen.

Die Mathematik entwickelt sich also, obschon in Begriffen und durch Begriffe, dennoch *aus* der Anschauung.

21

Vor der Entdeckung des Unterschieds der analytischen und synthetischen Urteile mußte freilich der Versuch einer prinzipiellen Scheidung zwischen Mathematik und Logik als ein müßiges und willkürliches Unternehmen erscheinen. Wenn für die Geometrie wenigstens diese Trennung heute unter den Mathematikern allgemeine Anerkennung findet, so hat dies, wie wir gesehen haben, seinen Grund in der Entdeckung der nicht-euklidischen Axiomensysteme, deren Möglichkeit auf das Evidenteste den synthetischen Charakter der geometrischen Axiome erweist. Der Umstand, daß in jüngster Zeit durch das Gelingen des Aufbaus der komplexen Zahlensysteme die analoge Arbeit auch für die Arithmetik geleistet worden ist, wird gewiß auch in dieser Disziplin die rein-logischen Begründungsversuche bald als unhaltbar und veraltet erscheinen lassen. Damit aber wird man zugleich gezwungen sein, die Alternative zwischen Logik und Erfahrung als Erkenntniskriterien endgültig aufzugeben, und so wird sich endlich auch der aus dieser irrigen Alternative entsprungene geometrische Empirismus als nichtig erweisen.

Um den analytischen Charakter der arithmetischen Urteile zu erhärten, hat man die Behauptung aufgestellt, daß es möglich sei, sie zu beweisen, »ohne Wahrheiten zu benutzen, welche nicht allgemein logischer Natur sind«[15]. Hierauf haben wir zunächst zu erwidern, daß, wenn man die analytischen Urteile als solche definiert, welche sich ausschließlich auf »die allgemeinen logischen Gesetze« gründen, sich die Frage erhebt, nach welchem Kriterium sich denn die »allgemein logische Natur« eines Gesetzes entscheiden lasse? Ein solches Kriterium werden wir fordern müssen, wenn wir nicht etwa von vornherein das Gebiet der Logik durch eine willkürliche Festsetzung dogmatisch abgrenzen wollen; in welchem Falle offenbar die Frage nach den Grenzen der Logik und der Arithmetik jedes wissenschaftliche Interesse verlieren würde. Ein solches Kriterium bietet sich in der Unterscheidung der analytischen und synthetischen Urteile. Aber wir müssen wohl beachten, daß wir die Definition dieses Unterschiedes nicht wiederum auf den Begriff der Logik gründen dürfen, wofern wir nicht in einen offenbaren Zirkel im Erklären geraten wollen.[16]

Ferner aber müssen wir daran erinnern, daß »die rein logische Natur der arithmetischen Schlußweisen« keineswegs die rein logische Natur der durch solche Schlußweisen erschlossenen Sätze bedingt. Wäre dies richtig, so würde sich *alle Wissenschaft überhaupt*, soweit sie nur irgend dem Postulat der systematischen Strenge genügt, in bloße Logik auflösen. Daß vielmehr die logische oder nicht-logische Natur eines Satzes davon ganz unabhängig ist, ob er rein logisch erschlossen ist oder nicht, geht schon daraus hervor, daß wir auch aus induktorisch gewonnenen Prämissen streng logische Schlüsse ziehen können. Die letztere Möglichkeit wird durch die theoretische Physik realisiert; und da also die Prämissen derselben

[15] Vgl. FREGE, Grundlagen der Arithmetik, S. 4.

[16] Diesen Umstand scheint selbst KERRY übersehen zu haben, dessen klaren und gründlichen Ausführungen über die vorliegende Streitfrage wir im wesentlichen zustimmen müssen. (Vgl. Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, Bd. 11, S. 249–307.)

zweifellos *nicht* logischer Natur sind, können auch die aus ihnen gezogenen Folgerungen nicht rein logischer Natur sein. Die logische oder nicht-logische Natur einer durch logische Schlüsse abgeleiteten Wahrheit hängt also allein von der logischen oder nicht-logischen Natur ihrer Prämissen ab.

Halten wir uns nun an das angegebene Kriterium, so bedarf es nur geringen Nachdenkens, um den nicht-logischen Charakter der arithmetischen Prämissen, und somit der arithmetischen Wahrheiten überhaupt, zu erkennen. Wir brauchen hierzu nur den schon von Leibniz aus angeblich rein logischen Prämissen geführten Beweis des Satzes $2 + 2 = 4$ zu zergliedern. Leibniz definiert die Zahlen 2, 3, 4, durch die Gleichungen: $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, und meint aus diesen Definitionen allein den Beweis führen zu können. Allein, näher zugesehen bedürfen wir, um von der Gleichung $2 + 2 = 2 + (1 + 1)$ weiter schließen zu können, eines aus den aufgestellten Definitionen nicht zu entnehmenden Satzes, der uns zu der Gleichung führt:

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1.$$

Erst wenn wir zu dieser letzteren Gleichung gelangt sind, werden wir aus den Definitionen weiter folgern dürfen: $(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$. Das bei dem Beweis stillschweigend vorausgesetzte, aus den Definitionen der vorkommenden Begriffe unableitbare Axiom ist das assoziative Gesetz der Addition.

Die Formel

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

die die Grassmannsche Formulierung dieses Axioms bildet, ist zwar, mathematisch betrachtet, eine reine Identität. Aber was der Mathematiker eine Identität nennt, ist keineswegs eine Identität im logischen Sinne. Denn das Gleichheitszeichen ist ein Zeichen für die Identität der Größe zweier Gegenstände. Aber die Identität der Größe zweier Gegenstände ist nicht die Identität zweier Begriffe.

Es springt ferner sofort in die Augen, daß beispielsweise die Unendlichkeit der Zahlenreihe, also das Axiom, daß auf jede Zahl eine andere folgt, sich auf keine Weise als eine begriffliche Notwendigkeit herleiten läßt. Das Axiom entspringt also nicht aus reinem Denken, sondern aus reiner Anschauung. – Wir erkennen aber auch zugleich, daß einige Sätze, die man unter den arithmetischen Axiomen aufzuzählen pflegt, in der Tat logischen Ursprungs sind. Hierher gehört der Satz: Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie auch untereinander gleich. Denn, wenn wir haben: $a = b$ und $b = c$, so können wir, da Gleichheit Identität hinsichtlich der Größe bedeutet, in der ersten Gleichung b durch c substituieren und erhalten $a = c$. Der Satz geht mithin unmittelbar aus dem Begriff der Gleichheit hervor. – Hierher gehört aber auch das Prinzip der vollständigen Induktion: Ist ein Gesetz für das erste Glied einer Reihe erfüllt, und folgt aus seiner Gültigkeit für irgendein Glied seine Gültigkeit für das nächstfolgende Glied, so gilt es für alle Glieder der Reihe. Die logische Notwendigkeit dieses Satzes zeigt sich am deutlichsten, wenn man versucht, die Annahme seiner Ungültigkeit auch nur an irgendeinem Beispiele durchzuführen. – Es läßt sich sehr wohl ohne logischen Widerspruch ein System von Zahlen denken, die z. B. das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht erfüllen oder für die das archimedische Axiom nicht gilt. Es läßt sich hingegen kein arithmetisches System ohne logischen Widerspruch durchführen, das das genannte Gesetz der Größengleichheit oder das Prinzip der vollständigen Induktion nicht erfüllt. Das Mißlingen dieser Versuche lehrt uns ebenso bestimmt den logischen Ursprung der letzteren Gesetze einsehen, wie das Gelingen jener den synthetischen Charakter der ersteren.

Auf solche Weise können wir aufs Genaueste die logische oder arithmetische Natur eines jeden vorgelegten Satzes entscheiden.

22

Natürlich unterliegt die Mathematik, wie jede Wissenschaft, den Gesetzen der Logik. Aber die Logik vermag nur *negative* Bedingungen der mathematischen Wahrheit aufzustellen, insofern sie den Widerspruch ausschließt. So ist z. B. der Begriff des Differentialquotienten einer an keiner Stelle stetigen Funktion ein logisch unmöglicher Begriff, denn er schließt einen Widerspruch ein. Allein, logische Widerspruchslosigkeit bedeutet noch nicht mathematische

Existenz. Der Begriff der größten Primzahl, oder, um ein geometrisches Beispiel zu nennen, der Begriff eines regulären Siebzehnflächners, ist ein logisch möglicher, nichtsdestoweniger aber mathematisch nicht existierender Begriff. Denn, wenn er gleich keinen Widerspruch enthält, so widerstreitet er doch der mathematischen Anschauung. Die *positiven* Kriterien der mathematischen Existenz lassen sich daher aus bloßer Logik nicht ableiten.[17]

Um dennoch den logischen Charakter der Arithmetik um jeden Preis aufrechtzuerhalten, hat man sich bemüht, die Axiome durch geeignete Definitionen der in ihnen auftretenden Begriffe zu ersetzen. Der Satz $a \cdot 1 = a$, so argumentiert man beispielsweise, besage im Grunde nichts anderes als die Definition der Zahl 1. Nun mag allerdings zugegeben werden, daß wir die Zahl 1 durch diese Identität, d. h. also als Invariante der Multiplikation, definieren können. Aber alsdann bleibt uns noch die wesentliche Aussage übrig, daß es eine solche Invariante der Multiplikation auch wirklich *gibt;* und diese Aussage ist, wie jeder Existentialsatz, synthetisch. Und so würden auch die übrigen Axiome durch Definitionen niemals wirklich ersetzt werden können, da zu jeder neuen Definition auch wieder ein eigenes Axiom über die Existenz des definierten Begriffs oder der definierten Operation hinzutreten müßte. Oder, falls man die Existenz der definierten Gebilde *beweisen* will, so muß doch zur Möglichkeit jedes Existenzbeweises schon die Existenz der in der Definition als Elemente auftretenden Begriffe axiomatisch vorausgesetzt werden. – Hieran scheitert z. B. auch der Versuch, das oben genannte Grassmannsche Axiom als Definition der Addition aufzufassen. Denn abgesehen davon, daß wir, um den Sinn des $+$ Zeichens auf der linken Seite der Gleichung durch die rechte Seite zu erklären, bereits die Bedeutung kennen müßten, die es auf der rechten Seite hat, – davon abgesehen enthält eine solche »Definition« schon die Voraussetzung, daß es von jeder beliebigen Zahl

[17] Wer es freilich vorzieht, das, was wir, dem Sprachgebrauch gemäß, als logische Möglichkeit bezeichnen, »Existenz« zu nennen, der mag in der Widerspruchslosigkeit eines Begriffs einen hinreichenden Beweis seiner Existenz erblicken. Es dürfte sich jedoch empfehlen, wesentlich verschiedene Begriffe auch durch verschiedene Worte zu bezeichnen, statt ihre Verschiedenheit durch willkürliche Verletzung des Sprachgebrauchs ohne Not unkenntlich zu machen.

und der Zahl 1 eine Summe gebe, daß also die Operation des Addierens in jedem Falle ausführbar sei.

Diese Existentialaxiome lassen sich allerdings durch eine geeignete Methode auf ein minimales Maß einschränken. Dadurch nämlich, daß man die Zahlen von vornherein nur dadurch definiert, daß sie ein System von Dingen bilden, welches die in arithmetischen Axiomen formulierten Bedingungen erfüllt. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß alle durch diese Methode überhaupt ableitbaren Eigenschaften der Zahlen in dem bloßen Begriff der Zahl ihren Grund haben. Allein, so fruchtbar sich diese (auch in der Geometrie anwendbare) »axiomatische« Methode für gewisse mathematische Untersuchungen erweist, so ist doch geltend zu machen, daß den auf solche Weise definierten Dingen zwar, sofern die definierenden Bedingungen ein in sich widerspruchsloses System bilden, logische Möglichkeit, an und für sich aber noch keineswegs mathematische Existenz zukommt.[18] Dies zeigt sich sofort, wenn wir das System von Sätzen, das durch den Inbegriff der Axiome und der aus den Axiomen folgenden Theoreme gebildet wird, von dem System von Sätzen unterscheiden, das durch die Schlußfolgerungen gebildet wird, die von den Axiomen zu den aus ihnen folgenden Theoremen führen. Das zweite System besteht lediglich aus analytischen hypothetischen Urteilen; das erste System dagegen ausschließlich aus synthetischen: nämlich aus dem Inbegriff der Vordersätze und Nachsätze der hypothetischen Urteile des zweiten. Die Mittel der Logik können daher nur zur Aufstellung des zweiten Systems hinreichen, das in der Tat nichts anderes ist als ein logischer Formalis-

[18] Über die Anwendung der axiomatischen Methode auf die Arithmetik vgl. Hilbert, Über den Zahlbegriff (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 8, 1900, S. 180 ff.), sowie: Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik (Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, 1905, S. 174 ff.). Es ist bemerkenswert, daß der in dem letztgenannten Vortrage erhobene Protest gegen den Empirismus von einem Forscher ausgeht, dessen eigene Arbeiten (vgl. Grundlagen der Geometrie, §§ 12, 13, 33) den synthetischen Charakter der arithmetischen Wahrheiten in das hellste Licht setzen. Es scheint daher die Durchführung der neuerdings von Hilbert ausgehenden Bestrebungen rücksichtlich der Grundlagen der Arithmetik unvermeidlich gerade zu der von uns vertretenen kritischen Auffassung zu drängen.

mus. Nach rein logischer Methode können wir also wohl hypothetisch urteilen: *Wenn* es Dinge gibt, die ein bestimmtes Axiomensystem befriedigen, so existiert auch alles das, was sich durch rein logische Schlußfolgerungen aus dem Axiomensystem ableiten läßt. Ja, wir können so viele verschiedene hypothetische Systeme der Arithmetik (und ebenso der Geometrie) aufstellen, als sich widerspruchslose Axiomensysteme denken lassen. Da sich aber die in den *verschiedenen* hypothetischen Systemen enthaltenen Systeme von Vorder- und Nachsätzen *gegenseitig* logisch ausschließen, so kann es unter diesen letzteren nur eins geben, das kategorisch behauptet werden darf. Zur Aufstellung dieses Systems ist die Logik unzureichend. Denn schon zur Aufstellung auch nur eines einzigen mathematischen Theorems bedarf es des Hinzukommens der *Assertion* zu den für sich problematischen Prämissen des zu seinem Beweise erforderlichen hypothetischen Systems. Also setzt auch die »axiomatische« Begründungsweise der Arithmetik von vornherein schon ein von dem durch die Axiome definierten Zahlbegriff unabhängiges Existentialaxiom voraus, von der Form: Es *gibt* Dinge, welche die durch das Axiomensystem postulierten Bedingungen erfüllen. – Es läßt sich folglich die Notwendigkeit wenigstens *eines* synthetischen Grundsatzes für jede auf ein eigenes Axiomensystem gegründete Disziplin auf keine Weise umgehen.

Dieser Notwendigkeit hat man sich entziehen zu können geglaubt durch die Behauptung, die Frage nach der kategorischen Gültigkeit eines mathematischen Systems oder nach der Existenz der mathematischen Begriffe gehöre in die Naturwissenschaft und sei daher aus der Mathematik auszuschließen. Soll hiermit nur der Wunsch ausgesprochen werden, man möge der Bearbeitung der genannten Frage nicht den Namen »Mathematik« geben, sondern sie mit unter dem Namen der Naturwissenschaft befassen, so wäre dies ein rein terminologischer Vorschlag, gegen den wir nichts einzuwenden hätten, als daß er einen gefährlichen Irrtum nahelegt. Den Irrtum nämlich, die in Rede stehende Frage sei auf dem Wege der Beobachtung und des Experiments zu entscheiden. Denn unter »Naturwissenschaft« versteht der übliche Sprachgebrauch diejenige Wissenschaft, die sich der Methoden der Beobachtung und des Experiments bedient. – Will aber etwa die genannte Behauptung das Wort »Naturwissenschaft« in diesem herkömmlichen Sinne verstanden wissen, so beruht sie auf der Verwechslung des Begriffs der mathematischen Existenz mit dem Begriffe der empirischen Existenz. Das Kriterium der letzteren liegt in der Sinneswahrnehmung und bedarf zu seiner wissenschaftlichen Anwendung allerdings der Methoden der Naturwissenschaft. Das Kriterium der ersteren aber liegt ausschließlich in der reinen Anschauung und bedarf zu seiner Anwendung keinerlei naturwissenschaftlicher Methoden.

Wem es schließlich scheinen sollte, daß der von uns als notwendig erwiesene synthetische Grundsatz eine zum Aufbau des kategorischen Systems zwar erforderliche, im übrigen aber für die Mathematik interesselose Beigabe zu dem logischen Formalismus der hypothetischen Systeme sei, den müssen wir daran erinnern, daß nicht nur die Möglichkeit des ganzen kategorischen Systems wesentlich auf diesem Grundsatze beruht, sondern daß auch die methodische Bedeutung, die den verschiedenen möglichen hypothetischen Systemen beiwohnt, gerade in den Aufklärungen besteht, die sie uns über die logischen Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den Sätzen des kategorischen Systems erteilen, und daß daher das wissenschaftliche Interesse, das sich an die hypothetischen Systeme knüpft, ohne Rücksicht auf das kategorische System völlig hinfällig werden müßte. Wir würden die Mathematik ihrer wissenschaftlichen Würde berauben, wollten wir die Frage, ob wir es mit einer Aneinanderreihung von Hirngespinsten oder mit der Erkenntnis der Wahrheit zu tun haben, aus ihr streichen.

23

Es ist eine wohl von keinem Mathematiker bezweifelte, obzwar meist unbewußt die Forschung leitende Überzeugung, daß jedes sich uns darbietende mathematische Problem eine bestimmte Lösung zulasse; mag diese Lösung nun darin bestehen, daß man die gesuchte Antwort auf die vorgelegte Frage erteilt, oder darin, daß man den Grund der Unmöglichkeit, sie in der gesuchten Weise zu beantworten, aufweist. Worauf gründet sich diese Überzeugung? Wenn die Quelle der mathematischen Wahrheit, wie wir zu zeigen suchten, *nicht*, wie die der logischen, in unseren eigenen Begriffen liegt, mit welchem Rechte können wir uns dann anmaßen, im Besitz der zur Auflösung jedes beliebigen mathematischen Problems hinreichenden Mittel zu sein? Ein solch eigentümlicher Vorzug scheint mit dem nicht-logischen Charakter der mathematischen Erkenntnis unverträglich zu sein.

Schon in der populären Erörterung bisher ungelöster Probleme hören wir die Frage diskutieren, ob das Mißlingen ihrer Auflösung in einer »prinzipiellen« Unmöglichkeit seinen Grund habe, oder nur durch Hindernisse veranlaßt werde, welche sich durch die bloße Kraft unseres Verstandes überwinden lassen. Wenn nun die Frage aufgeworfen wird, ob und warum bei mathematischen Problemen eine solche prinzipielle Unlösbarkeit nicht vorkommen kann, so wird es zuerst erforderlich sein, dem Begriff der »prinzipiellen« Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Lösung einer Aufgabe eine präzise Formulierung zu geben.

Es ist zunächst klar, daß ein Problem dann und nur dann vorliegt, wenn wir von einem Satze nicht entscheiden können, ob er wahr oder falsch ist. Ein solches Problem werden wir als prinzipiell lösbar oder unlösbar bezeichnen, je nachdem, ob wir im Besitz der zur Entscheidung der Richtigkeit oder Unrichtigkeit des fraglichen Satzes hinreichenden Kriterien sind oder nicht. Die Handhabung dieser Kriterien und ihre Anwendung auf den besonderen Fall mag noch so großen Schwierigkeiten unterliegen – solange diese Schwierigkeiten nur die vermittelnden logischen Operationen und nicht die ursprüngliche Gewinnung des Kriteriums selbst betreffen, werden wir sie als durch die bloße Kraft unseres Verstandes überwindlich erachten. Die zur Entdeckung der wahren Figur der Marsbahn hinreichenden Kriterien waren in der Geometrie der Kegelschnitte des Apollonius einerseits und durch die Tychonischen Beobachtungsreihen andererseits vollständig gegeben. Aber es bedurfte freilich der Genialität eines Kepler, um durch die Anwendung der geeigneten logischen Methoden diese Daten für die wirkliche Auflösung des Problems fruchtbar zu machen.

Welches sind nun die Prinzipien der Möglichkeit der Auflösung *mathematischer* Probleme? Und können wir behaupten, im vollständigen Besitz dieser Prinzipien zu sein?

Unter dem Beweise eines Satzes hatten wir seine Zurückführung auf die Axiome vermittelst rein logischer Operationen verstanden. Die Kriterien, auf die wir beim Beweise eines Satzes zurückgehen, liegen also in den Axiomen. Da aber die Axiome, als Urteile, selbst der Begründung bedürfen, so können die ursprünglichen Kriterien der mathematischen Wahrheit nicht in den Axiomen, sondern erst in der den Axiomen zugrunde liegenden unmittelbaren Erkenntnis enthalten sein. Wir wollen die Axiome, sofern sie die Gründe bilden, auf die sich ein System von Sätzen vermittelst rein logischer Operationen zurückführen läßt, während sie selbst nicht wiederum eine *logische* Zurückführung auf andere Erkenntnisse gestatten, als die *logischen Prinzipien* des Systems bezeichnen. Im Unterschied von diesen logischen Prinzipien eines Systems von Sätzen möge die unmittelbare Erkenntnis, die ihrerseits den Grund der Axiome und somit das allgemeine Kriterium der Wahrheit *aller* Sätze eines wissenschaftlichen Systems bildet, das *konstitutive Prinzip* dieses Systems heißen.

Die Prinzipien der Möglichkeit der Auflösung eines Problems sind also in dem konstitutiven Prinzip desjenigen wissenschaftlichen Systems zu suchen, in dessen Gebiet das Problem fällt. Ob eine Wissenschaft von der Art ist, daß jedes beliebige in ihr Gebiet fallende Problem prinzipiell lösbar ist oder nicht, wird also davon abhängen, ob ihr konstitutives Prinzip einen abgeschlossenen, d. h. keiner Erweiterung fähigen Erkenntnisbereich bildet oder nicht.

Die Frage, ob diese Bedingung bei der Mathematik erfüllt ist, haben wir eigentlich schon beantwortet durch den Nachweis, daß es in der Mathematik keine *Hypothesen* geben könne. Hypothesen sind Sätze, für deren Behauptung oder Verneinung kein hinreichender Grund vorliegt, für deren Richtigkeit oder Unrichtigkeit wir also kein Kriterium besitzen. Eine Wissenschaft, in der es keine Hypothesen geben kann, kann also auch kein prinzipiell unlösbares Problem enthalten. Daß die Mathematik eine solche Wissenschaft in der Tat ist, erkennen wir als eine notwendige Folge der rein-anschaulichen Natur ihres konstitutiven Prinzips. Wenn nämlich das konstitutive Prinzip der Mathematik in reiner Anschauung besteht, so ist es von der Erweiterung unserer Erfahrung unabhängig. Folglich liegen die Prinzipien der Möglichkeit der Auflösung mathematischer Probleme vollständig im Bereich unseres Verstandes, und es kann deshalb keine mathematische Aufgabe geben, von der nicht entweder eine positive Auflösung oder der Beweis ihrer Unlösbarkeit möglich wäre.

Ein Astronom, der die Existenz eines intramerkuriellen Planeten behauptet, muß es sich notwendig gefallen lassen, daß man diese Behauptung so lange als eine bloße Hypothese gelten läßt, bis eine hinreichende Erweiterung unserer unmittelbaren Erkenntnis (der Beobachtung) ein Kriterium der Existenz eines solchen Planeten an die Hand gibt. Die unter den Physikern noch unentschiedene Frage, ob der Ursprung der Radioaktivität auf eine Umwandlung in der Konstitution der Atome oder auf die Absorption äußerer Strahlung zurückzuführen ist, wird sich durch keine Aufbietung noch so scharfsinniger Reflexionen, sondern einzig und allein durch geeignete Experimente befriedigend beantworten lassen. Denn die über diese Frage herrschende Ungewißheit hat ihren Grund nicht in der Unfähigkeit unseres Verstandes, ein in unserer Erkenntnis tatsächlich bestehendes Verhältnis durch Anwendung geeigneter logischer Operationen aufzuweisen, sondern in einer Unvollständigkeit unserer unmittelbaren Erkenntnis selbst. Wenn dagegen ein mathematischer Satz noch unbegründet ist – man denke nur an den großen Fermatschen Satz aus der Zahlentheorie oder an das sogenannte Vierfarbenproblem aus der Analysis Situs –, so liegt dies nicht sowohl an einer Unvollständigkeit unserer unmittelbaren mathematischen Erkenntnis, als vielmehr an der Schwierigkeit der Auswahl und der mittelbaren Vergleichung geeigneter schon feststehender Sätze.

So leicht sich nach dem Vorstehenden die prinzipielle Lösbarkeit jedes mathematischen Problems als eine Folge des rationalen Charakters der mathematischen Erkenntnis erweisen läßt, so unverständlich müßte dieser wichtige Vorzug der Mathematik für denjenigen bleiben, der ihren empirischen Ursprung behauptet. Ja seine Möglichkeit widerspricht geradezu der Voraussetzung des mathematischen Empirismus. Denn bei der notwendigen Unvollständigkeit ihres konstitutiven Prinzips kann eine empirische Wissenschaft niemals in den Besitz der zur Auflösung eines *beliebigen* Problems hinreichenden Bedingungen gelangen. Sie würde vielmehr eine prinzipielle Lösungsmöglichkeit nur für diejenigen Probleme beanspruchen dürfen, deren Entscheidungsgründe in dem ihr gerade zur Verfügung stehenden Beobachtungsmaterial enthalten sind. Das Zugeständnis, daß es sich in der Mathematik anders verhält, kann daher seinerseits zur Bestätigung des mathematischen Apriorismus dienen.

24

Darin liegt das Merkwürdige und Rätselhafte der mathematischen Erkenntnis: Ihre Apodiktizität verbietet es, ihre Erkenntnisquelle in der Empirie zu suchen, und doch wissen wir andererseits durch die nicht-euklidische Geometrie, daß in der Logik ihre Erkenntnisquelle gewiß nicht liegen kann. KANT hat dies der Mathematik zugrunde liegende paradoxe Faktum durch den Terminus »reine Anschauung« formuliert. Die reine Anschauung ist, als Anschauung, eine Erkenntnis nicht-logischer Art. Und als »reine« Anschauung ist sie eine Erkenntnis nicht-empirischer Art. Mit der logischen hat sie die Notwendigkeit, mit der empirischen die Anschaulichkeit gemein, und steht so gleichsam in der Mitte zwischen diesen beiden. Dies Verhältnis ist es, das schon PLATON vorgeschwebt hat, wenn er sagt, daß die Erkenntnisweise der Geometer und verwandter Forscher etwas zwischen Sinnlichkeit und Verstand mitten inne sei.[19]

Über die eigentümliche Stellung der Mathematik innerhalb unserer Gesamterkenntnis hat neuerdings auch POINCARÉ eingehende Betrachtungen angestellt. Aus ähnlichen Gründen, wie den von uns § 15 erörterten, bricht POINCARÉ vollständig mit dem mathematischen Empirismus. Er konstatiert, ähnlich wie KANT, die paradoxe

[19] Vgl. C. BRINKMANN, Über kritische Mathematik bei PLATON; in den Abhandlungen der Friesschen Schule, Band I, S. 321 ff.

Natur der mathematischen Erkenntnis, als einer Erkenntnis nichtlogischen Ursprungs und dennoch von apodiktischem Charakter. Je mehr wir diese Annäherung des großen französischen Mathematikers an den kritischen Standpunkt als einen Fortschritt anerkennen und je mehr wir seine scharfe Unterscheidung zwischen dem Ursprung der mathematischen Begriffe in der Selbsttätigkeit des Erkenntnisvermögens und ihrer Entwicklung durch die Erfahrung bewundern müssen, desto mehr müssen wir den Irrtum bedauern, der diesen Fortschritt beeinträchtigt und seiner kritischen Verwertung im Wege steht. Wenngleich nämlich POINCARÉ die empiristische Erklärung des Ursprungs der geometrischen Axiome verwirft, so glaubt er dennoch ihre Apriorität nicht zugestehen zu dürfen: »Les axiomes géométriques sont-ils des jugements synthétiques a priori, comme disait KANT? Ils s'imposeraient alors à nous avec une telle force, que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sur elle un édifice théorique. Il n'y aurait pas de géométrie non euclidienne.«[20]

Dies beruht auf bloßem Mißverständnis. Der Unterschied der Apriorität und Aposteriorität ist nicht ein Unterschied der Stärke oder des *Grades* der Überzeugung, sondern er geht auf die *Art* des Ursprungs der Urteile. Nur analytische Urteile sind von der Art, daß ihr Gegenteil undenkbar ist, und da die Apriorität eines Urteils keineswegs seine analytische Natur bedingt, so ist auch durch die Apriorität eines Urteils noch nichts über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit seines Gegenteils entschieden.

Was sollen die Axiome aber sein, wenn sie weder Urteile a posteriori noch Urteile a priori sein sollen?

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal das Beispiel von dem astronomischen Dreieck. Wir sehen, daß wir hier ohne die Kantische Lehre von der reinen Anschauung gar keine wissenschaftliche Entscheidung treffen könnten. Wollten wir bloß auf Logik und Erfahrung Rücksicht nehmen, so könnten wir in der Tat ebensogut auf Grund des gemessenen Defekts auf die Ungültigkeit des euklidischen Axioms schließen, wie auch auf Grund des euklidischen

[20] La science et l'hypothèse, p. 64.