

GOTTLOB FREGE · DIE GRUNDLAGE DER ARITHMETIK

GOTTLOB FREGE

Die Grundlagen der Arithmetik

Eine logisch mathematische Untersuchung
über den Begriff der Zahl

Centenar Ausgabe

Mit ergänzenden Texten
kritisch herausgegeben von
CHRISTIAN THIEL

FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://portal.dnb.de> abrufbar.

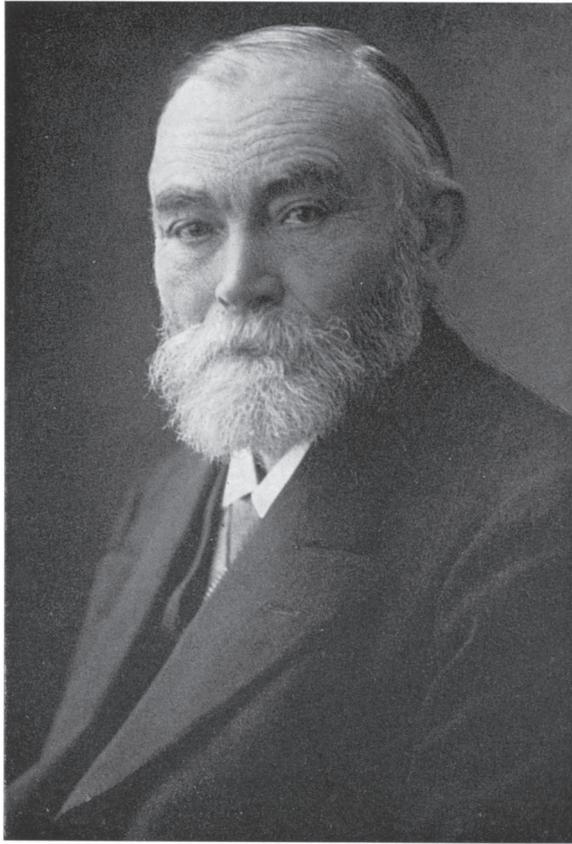
ISBN 978-3-7873-0646-6

ISBN eBook: 978-3-7873-3506-0

© Felix Meiner Verlag GmbH, Hamburg 2016.

Alle Rechte vorbehalten. Dies gilt auch für Vervielfältigungen, Übertragungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen, soweit es nicht §§ 53 und 54 URG ausdrücklich gestatten.

www.meiner.de



Gottlob Frege

1848–1925

INHALT

Einleitung des Herausgebers	XXI
1. Die Ziele der <i>Grundlagen der Arithmetik</i>	XXII
2. Hauptprobleme der <i>Grundlagen</i> und Inhaltsüberblick	XXV
3. Die zeitgenössische Rezeption der <i>Grundlagen</i>	L
4. Die Stellung der <i>Grundlagen</i> in Freges Gesamtwerk	LIII
5. Zu Textüberlieferung und Textgestaltung	LXI

Gottlob Frege

Die Grundlagen der Arithmetik

Einleitung	3
§ 1. In der Mathematik ist in neuerer Zeit ein auf die Strenge der Beweise und scharfe Fassung der Begriffe gerichtetes Bestreben erkennbar.	13
§ 2. Die Prüfung muss sich schliesslich auch auf den Begriff der Anzahl erstrecken. Zweck des Beweises.	13
§ 3. Philosophische Beweggründe für solche Untersuchung: die Streitfragen, ob die Gesetze der Zahlen analytische oder synthetische Wahrheiten, apriori oder aposteriori sind. Sinn dieser Ausdrücke.	14
§ 4. Die Aufgabe dieses Buches.	15
I. Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze.	16
Sind die Zahlformeln beweisbar?	16
§ 5. Kant verneint dies, was Hankel mit Recht paradox nennt.	16
§ 6. Leibnizens Beweis von $2 + 2 = 4$ hat eine Lücke. Grassmanns Definition von $a + b$ ist fehlerhaft.	17
§ 7. Mills Meinung, dass die Definitionen der einzelnen	

	Zahlen beobachtete Thatsachen behaupten, aus denen die Rechnungen folgen, ist unbegründet.	19
§ 8.	Zur Rechtmässigkeit dieser Definitionen ist die Beobachtung jener Thatsachen nicht erforderlich. 	21
	Sind die Gesetze der Arithmetik inductive Wahrheiten?	22
§ 9.	Mills Naturgesetz. Indem Mill arithmetische Wahrheiten Naturgesetze nennt, verwechselt er sie mit ihren Anwendungen.	22
§ 10.	Gründe dagegen, dass die Additionsgesetze inductive Wahrheiten sind: Ungleichartigkeit der Zahlen; wir haben nicht schon durch die Definition eine Menge gemeinsamer Eigenschaften der Zahlen; die Induction ist wahrscheinlich umgekehrt auf die Arithmetik zu gründen.	23
§ 11.	Leibnizens „Eingeboren“.	25
	Sind die Gesetze der Arithmetik synthetisch-apriori oder analytisch?	26
§ 12.	Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Die innere Anschauung als Erkenntnisgrund.	26
§ 13.	Unterschied von Arithmetik und Geometric.	28
§ 14.	Vergleichung der Wahrheiten in Bezug auf das von ihnen beherrschte Gebiet.	28
§ 15.	Ansichten von Leibniz und St. Jevons.	29
§ 16.	Dagegen Mills Herabsetzung des „kunstfertigen Handhabens der Sprache.“ Die Zeichen sind nicht darum leer, weil sie nichts Wahrnehmbares bedeuten.	29
§ 17.	Unzulänglichkeit der Induction. Vermuthung, dass die Zahlgesetze analytische Urtheile sind; worin dann ihr Nutzen besteht. Werthschätzung der analytischen Urtheile.	30
II.	Meinungen einiger Schriftsteller über den Begriff der Anzahl.	32
§ 18.	Nothwendigkeit den allgemeinen Begriff der Anzahl zu untersuchen.	32
§ 19.	Die Definition darf nicht geometrisch sein.	32
§ 20.	Ist die Zahl definirbar? Hankel. Leibniz.	33

Ist die Anzahl eine Eigenschaft der äussern Dinge?	34
§ 21. Meinungen von M. Cantor und E. Schröder.	34
§ 22. Dagegen Baumann: die äussern Dinge stellen keine strengen Einheiten dar. Die Anzahl hängt scheinbar von unserer Auffassung ab.	34
§ 23. Mills Meinung, dass die Zahl eine Eigenschaft des Aggregats von Dingen sei, ist unhaltbar. 	36
§ 24. Umfassende Anwendbarkeit der Zahl. Mill. Locke. Leibnizens unkörperliche metaphysische Figur. Wenn die Zahl etwas Sinnliches wäre, könnte sie nicht Unsinnlichem beigelegt werden.	36
§ 25. Mills physikalischer Unterschied zwischen 2 und 3. Nach Berkeley ist die Zahl nicht realiter in den Dingen, sondern durch den Geist geschaffen.	38
Ist die Zahl etwas Subjectives?	39
§ 26. Lipschitzs Beschreibung der Zahlbildung passt nicht recht und kann eine Begriffsbestimmung nicht ersetzen. Die Zahl ist kein Gegenstand der Psychologie, sondern etwas Objectives.	39
§ 27. Die Zahl ist nicht, wie Schloemilch will, Vorstellung der Stelle eines Objects in einer Reihe.	41
Die Anzahl als Menge.	43
§ 28. Thomaes Namengebung.	43
III. Meinungen über Einheit und Eins.	44
Drückt das Zahlwort „Ein“ eine Eigenschaft von Gegenständen aus?	44
§ 29. Vieldeutigkeit der Ausdrücke „μονάς“ und „Einheit.“ E. Schröders Erklärung der Einheit als zu zählenden Gegenstandes ist scheinbar zwecklos. Das Adjectiv „Ein“ enthält keine nähere Bestimmung, kann nicht als Praedicat dienen.	44
§ 30. Nach den Definitionsversuchen von Leibniz und Baumann scheint der Begriff der Einheit gänzlich zu verschwimmen.	45

§ 31.	Baumanns Merkmale der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit. Die Idee der Einheit wird uns nicht von jedem Objecte zugeführt (Locke).	45
§ 32.	Doch deutet die Sprache einen Zusammenhang mit der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit an, wobei jedoch der Sinn verschoben wird.	46
§ 33.	Die Untheilbarkeit (G. Köpp) ist als Merkmal der Einheit nicht haltbar.	47
	Sind die Einheiten einander gleich?	48
§ 34.	Die Gleichheit als Grund für den Namen „Einheit.“ E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Durch Abstraction von den Verschiedenheiten der Dinge erhält man nicht den Begriff der Anzahl, und die Dinge werden dadurch nicht einander gleich. 	48
§ 35.	Die Verschiedenheit ist sogar nothwendig, wenn von Mehrheit die Rede sein soll. Descartes. E. Schröder. St. Jevons.	49
§ 36.	Die Ansicht von der Verschiedenheit der Einheiten stösst auch auf Schwierigkeiten. Verschiedene Einsen bei St. Jevons.	50
§ 37.	Lockes, Leibnizens, Hesses Erklärungen der Zahl aus der Einheit oder Eins.	51
§ 38.	„Eins“ ist Eigename, „Einheit“ Begriffswort. Zahl kann nicht als Einheiten definirt werden. Unterschied von „und“ und +	51
§ 39.	Die Schwierigkeit, Gleichheit und Unterscheidbarkeit der Einheiten zu versöhnen, wird durch die Vieldeutigkeit von „Einheit“ verdeckt.	52
	Versuche, die Schwierigkeit zu überwinden.	53
§ 40.	Raum und Zeit als Mittel des Unterscheidens. Hobbes. Thomae. Dagegen: Leibniz, Baumann, St. Jevons. . .	53
§ 41.	Der Zweck wird nicht erreicht.	55
§ 42.	Die Stelle in einer Reihe als Mittel des Unterscheidens. Hankels Setzen.	55
§ 43.	Schröders Abbildung der Gegenstände durch das Zeichen 1.	56
§ 44.	Jevons' Abstrahiren vom Charakter der Unterschiede mit Festhaltung ihres Vorhandenseins. Die 0 und die 1	

sind Zahlen wie die andern. Die Schwierigkeit bleibt bestehen.	57
Lösung der Schwierigkeit.	59
§ 45. Rückblick.	59
§ 46. Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe. Einwand, dass bei unverändertem Begriffe die Zahl sich ändere.	60
§ 47. Die Thatsächlichkeit der Zahlangabe erklärt sich aus der Objectivität des Begriffes.	60
§ 48. Auflösung einiger Schwierigkeiten.	61
§ 49. Bestätigung bei Spinoza.	62
§ 50. E. Schröders Ausführung.	62
§ 51. Berichtigung derselben.	63
§ 52. Bestätigung in einem deutschen Sprachgebrauche.	64
§ 53. Unterschied zwischen Merkmalen und Eigenschaften eines Begriffes. Existenz und Zahl.	64
§ 54. Einheit kann man das Subject einer Zahlangabe nennen. Untheilbarkeit und Abgegrenztheit der Einheit. Gleichheit und Unterscheidbarkeit. 	65
 IV. Der Begriff der Anzahl.	 66
Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger Gegenstand.	66
§ 55. Versuch, die leibnizischen Definitionen der einzelnen Zahlen zu ergänzen.	66
§ 56. Die versuchten Definitionen sind unbrauchbar, weil sie eine Aussage erklären, von der die Zahl nur ein Theil ist.	66
§ 57. Die Zahlangabe ist als eine Gleichung zwischen Zahlen anzusehen.	67
§ 58. Einwand der Unvorstellbarkeit der Zahl als eines selbständigen Gegenstandes. Die Zahl ist überhaupt unvorstellbar.	68
§ 59. Ein Gegenstand ist nicht deshalb von der Untersuchung auszuschliessen, weil er unvorstellbar ist.	69
§ 60. Selbst concrete Dinge sind nicht immer vorstellbar. Man muss die Wörter im Satze betrachten, wenn man nach ihrer Bedeutung fragt.	69

§ 61.	Einwand der Unräumlichkeit der Zahlen. Nicht jeder objective Gegenstand ist räumlich.	70
	Um den Begriff der Anzahl zu gewinnen, muss man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen.	71
§ 62.	Wir bedürfen eines Kennzeichens für die Zahlengleichheit.	71
§ 63.	Die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung als solches [Kennzeichen]. Logisches Bedenken, dass die Gleichheit für diesen Fall besonders erklärt wird.	71
§ 64.	Beispiele für ein ähnliches Verfahren: die Richtung, die Stellung einer Ebene, die Gestalt eines Dreiecks.	72
§ 65.	Versuch einer Definition. Ein zweites Bedenken: ob den Gesetzen der Gleichheit genügt wird.	73
§ 66.	Drittes Bedenken: das Kennzeichen der Gleichheit ist unzureichend.	74
§ 67.	Die Ergänzung kann nicht dadurch geschehen, dass man zum Merkmal eines Begriffes die Weise nimmt, wie ein Gegenstand eingeführt ist.	75
§ 68.	Die Anzahl als Umfang eines Begriffes.	76
§ 69.	Erläuterung.	76
	Ergänzung und Bewährung unserer Definition.	77
§ 70.	Der Beziehungsbegriff.	77
§ 71.	Die Zuordnung durch eine Beziehung.	79
§ 72.	Die beiderseits eindeutige Beziehung. Begriff der Anzahl. 	80
§ 73.	Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Begriffe G zukommt, wenn es eine Beziehung giebt, welche die unter F fallenden Gegenstände den unter G fallenden beiderseits eindeutig zuordnet.	81
§ 74.	Null ist die Anzahl, welche dem Begriffe „sich selbst ungleich“ zukommt.	82
§ 75.	Null ist die Anzahl, welche einem Begriffe zukommt, unter den nichts fällt. Kein Gegenstand fällt unter einen Begriff, wenn Null die diesem zukommende Anzahl ist.	83
§ 76.	Erklärung des Ausdrucks „n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m.“	84

§ 77.	1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe „gleich \bullet “ zukommt.	84
§ 78.	Sätze, die mittels unserer Definitionen zu beweisen sind	85
§ 79.	Definition des Folgens in einer Reihe.	86
§ 80.	Bemerkungen hierzu. Objectivität des Folgens.	86
§ 81.	Erklärung des Ausdrucks „x gehört der mit y endenden φ -Reihe an“.	87
§ 82.	Andeutung des Beweises, dass es kein letztes Glied der natürlichen Zahlenreihe giebt.	88
§ 83.	Definition der endlichen Anzahl. Keine endliche Anzahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selber.	88
	Unendliche Anzahlen.	89
§ 84.	Die Anzahl, welche dem Begriffe „endliche Anzahl“ zukommt, ist eine unendliche.	89
§ 85.	Die cantorschen unendlichen Anzahlen; „Mächtigkeit“. Abweichung in der Benennung.	90
§ 86.	Cantors Folgen in der Succession und mein Folgen in der Reihe.	91
V.	Schluss.	91
§ 87.	Die Natur der arithmetischen Gesetze.	91
§ 88.	Kants Unterschätzung der analytischen Urtheile.	92
§ 89.	Kants Satz: „Ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben werden“. Kants Verdienst um die Mathematik.	93
§ 90.	Zum vollen Nachweis der analytischen Natur der arithmetischen Gesetze fehlt eine lückenlose Schlusskette.	94
§ 91.	Abhilfe dieses Mangels ist durch meine Begriffsschrift möglich.	95
	Andere Zahlen.	96
§ 92.	Sinn der Frage nach der Möglichkeit der Zahlen nach Hankel.	96
§ 93.	Die Zahlen sind weder räumlich ausser uns noch subjectiv. 	96
§ 94.	Die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes verbürgt nicht, dass etwas unter ihn falle, und bedarf selbst des Beweises.	97

§ 95. Man darf nicht ohne Weiteres (c - b) als ein Zeichen ansehen, das die Subtractionsaufgabe löst.	97
§ 96. Auch der Mathematiker kann nicht willkürlich etwas schaffen.	98
§ 97. Begriffe sind von Gegenständen zu unterscheiden.	99
§ 98. Hankels Erklärung der Addition.	99
§ 99. Mangelhaftigkeit der formalen Theorie.	100
§ 100. Versuch, complexe Zahlen dadurch nachzuweisen, dass die Bedeutung der Multiplication in besonderer Weise erweitert wird.	100
§ 101. Die Möglichkeit eines solchen Nachweises ist für die Kraft eines Beweises nicht gleichgiltig.	101
§ 102. Die blosse Forderung, es solle eine Operation ausführbar sein, ist nicht ihre Erfüllung.	101
§ 103. Kossaks Erklärung der complexen Zahlen ist nur eine Anweisung zur Definition und vermeidet nicht die Einmischung von Fremdartigem. Die geometrische Darstellung.	102
§ 104. Es kommt darauf an, den Sinn eines Wiedererkennungsurtheils für die neuen Zahlen festzusetzen.	103
§ 105. Der Reiz der Arithmetik liegt in ihrem Vernunftcharakter.	104
§ 106-109. Rückblick 	105-108

Das Echo der Grundlagen

a. Rezension Hoppe, Archiv für Mathematik und Physik 1885.	109
b. Rezension G. Cantor, Deutsche Litteraturzeitung 1885.	117
c. Anmerkung Zermelos zu Cantors Rezension (1932).	119
d. Erwiderung Freges auf Cantors Rezension, Deutsche Litteraturzeitung 1885.	120
e. Anonyme Rezension („G—1“), Literarisches Centralblatt für Deutschland 1885.	120
f. Rezension Eucken, Philosophische Monatshefte 1886.	122
g. Rezension Laßwitz, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 1886.	123
h. Stellungnahme Schröders in Band I der Vorlesungen über die Algebra der Logik, 1890.	128

i. Husserls Stellungnahme („Freges Versuch“) in der <i>Philosophie der Arithmetik</i> 1891.	129
j. Heinrich Scholz, Rezension des Neudrucks der <i>Grundlagen</i> 1934, <i>Deutsche Literaturzeitung</i> 1935.	134
Anmerkungen des Herausgebers	143
Literaturverzeichnis	175
a. Schriften Freges	175
b. Andere zitierte Literatur	177
Namenregister	185

ABKÜRZUNGEN UND ZITIERHINWEISE

Bei Stellenangaben werden Schriften Freges, für die in G. Frege, *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel* Abkürzungen eingeführt wurden, auch in der vorliegenden Ausgabe der *Grundlagen der Arithmetik* mit derselben Abkürzung zitiert:

BS	= Begriffsschrift
BuG	= Ueber Begriff und Gegenstand
FB	= Function und Begriff
GGA I	= Grundgesetze der Arithmetik, Band I
GGA II	= Grundgesetze der Arithmetik, Band II
GLA	= Die Grundlagen der Arithmetik
GLG II	= Über die Grundlagen der Geometrie II
NSchrWB I	= Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel, Band I
NSchrWB II	= Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel, Band II
SB	= Über Sinn und Bedeutung.

Die Grundlagen der Arithmetik werden meist kurz als *Grundlagen*, die *Grundgesetze der Arithmetik* als *Grundgesetze* zitiert; die von Frege selbst verwendete Kurzangabe „Baumann“ bezieht sich auf J. J. Baumann, *Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik* (s. Literaturverzeichnis). An weiteren, in der Literatur geläufigen Abkürzungen werden verwendet:

Akad.	= G. W. Leibniz, <i>Sämtliche Schriften und Briefe</i> , ed. Preußische [später: Deutsche] Akademie der Wissenschaften [zu Berlin], Darmstadt/Leipzig [später: Berlin/Leipzig] 1923 ff.
Akad.-Ausg.	= I. Kant, <i>Gesammelte Schriften</i> , ed. Königlich Preussische [später: Deutsche] Akademie der Wissenschaften [zu Berlin], Berlin 1902 ff.
Erdm.	= God. Guil. Leibnitii <i>Opera philosophica quae exstant</i> [...], ed. Johann Eduard Erdmann, Berlin 1839/1840
Gerhardt Phil.	= Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz, ed. Carl Immanuel Gerhardt, Berlin/Halle 1875–1890
KRV	= I. Kant, <i>Kritik der reinen Vernunft</i> .

Seitenangaben beziehen sich bei Schriften Freges auf die Paginierung der Erstdrucke (die auch in den von I. Angelelli herausgegebenen *Kleinen Schriften* für die dort abgedruckten Texte angegeben ist), bei Schriften anderer Autoren auf die jeweils angegebene, im Literaturverzeichnis nachgewiesene Ausgabe. Das Literaturverzeichnis enthält die (bis auf Umfangangaben bei Monographien) vollständigen bibliographischen Daten aller in der Einleitung des Herausgebers, im Text der *Grundlagen* oder in den abgedruckten ergänzenden Texten zitierten Schriften, nicht dagegen die bibliographischen Angaben von Texten, die nur in einzelnen Anmerkungen des Herausgebers vorkommen und dort bereits vollständig nachgewiesen sind (die Autorennamen wurden jedoch in das allgemeine Namenregister aufgenommen).

EINLEITUNG

EINLEITUNG DES HERAUSGEBERS

„Meine Anstrengungen, über das ins Klare zu kommen, was man Zahl nennen will, haben zu einem Mißerfolge geführt“, notiert Frege am 23. März 1924 in sein Tagebuch. Dieser Mißerfolg, den Frege durch die Herleitung der Zermelo-Russellschen Antinomie (s. u.) in seinem ausgearbeiteten System bestätigt sah, mußte in fehlerhaften Annahmen des Fregeschen Systems seine Gründe haben. Der wohl aus Freges letztem Lebensjahr stammende, fragmentarisch gebliebene *Neue Versuch der Grundlegung der Arithmetik* befaßt sich mit solchen Gründen und enthält als vorausgeschicktes Fazit gleich zu Beginn zwei Selbstberichtigungen Freges:

„Ich habe die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und daß demgemäß in der Arithmetik alles rein logisch bewiesen werden müsse. Zweitens habe ich die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik auch der Anschauung keinen Beweisgrund zu entnehmen brauche“ (NSchrWB I, 298).

Ganz bewußt lehnt sich die Formulierung dieser Sätze an den Anfang der Einleitung zu den *Grundgesetzen der Arithmetik* an, wo Frege geschrieben hatte:

„In meinen *Grundlagen der Arithmetik* habe ich wahrscheinlich zu machen gesucht, dass die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und weder der Erfahrung noch der Anschauung irgendeinen Beweisgrund zu entnehmen brauche“ (GGA I, 1).

Welche Revolution in Freges Denken die Zurücknahme seines logizistischen Programms, die Arithmetik allein mit Mitteln der Logik zu begründen, bedeutete, kann man erst verstehen, wenn man sich die Hintergründe, die Ziele und die Hauptschritte dieses Programms vor Augen führt. Geschieht dies anhand der *Grundlagen*, so wird zugleich deutlich, weshalb wir heute trotz der Unerreichbarkeit des Fregeschen Zieles auf dem von ihm gewählten Wege zu den klassischen Lehrstücken philosophischer Analyse gerade Freges *Grundlagen der Arithmetik* rechnen, deren Erscheinen vor einem Jahrhundert der Anlaß einer Internationalen Konferenz in Schwerin im September 1984 war und Anlaß auch der Centenarausgabe ist.

1. Die Ziele der *Grundlagen der Arithmetik*

Friedrich Ludwig Gottlob Frege (* 8. 11. 1848 in Wismar, † 26. 7. 1925 in Bad Kleinen) studierte zunächst in Jena und dann in Göttingen, wo er 1873 aufgrund seiner Dissertation über ein geometrisches Thema promoviert wurde. Schon 1874 habilitierte er sich für Mathematik an der Universität Jena, deren Lehrkörper er von da an bis zu seinem Rücktritt vom Lehramt im Jahre 1918 angehörte. Seine drei Buchveröffentlichungen – die *Begriffsschrift* 1879, *Die Grundlagen der Arithmetik* 1884 und *Grundgesetze der Arithmetik I* 1893, *II* 1903 – markieren drei aufeinanderfolgende, jeweils das bis dahin Erreichte in der Darstellung verbessernde und inhaltlich weiterführende Schritte auf dem Weg des obengenannten logizistischen Programms. Über den Schritt zwischen den beiden erstgenannten Schriften (und das heißt, über die Vorgeschichte der *Grundlagen*) schrieb Frege am 23. 9. 1902 an Philip E. B. Jourdain:

„Das Bedürfnis, stillschweigend gemachte Voraussetzungen bei der Grundlegung der Arithmetik mit Sicherheit auszu-schliessen, führte mich zu der Begriffsschrift des Jahres 1879. Die Beschäftigung mit dieser hat mich dann wieder zu einer genaueren Fassung der Grundbegriffe der Arithmetik genöthigt, wiewohl ich dies im einzelnen nicht mehr angeben kann. Die Erkenntnis, daß der Träger der Zahl nicht ein Haufe, Aggregat, System von Dingen, sondern ein Begriff ist, ist wohl wesentlich durch die Begriffsschrift gefördert worden. Statt des Begriffes kann man auch seinen Umfang nehmen, oder was ich dafür auch sage, die zugehörige Klasse. Diese Unterscheidung des Haufens (Aggregats, Systems) von der Klasse, die vor mir vielleicht noch nicht so scharf gemacht ist, verdanke ich, wie ich glaube, meiner Begriffsschrift, obwohl Sie davon beim Lesen meines Werkchens vielleicht keine Spur entdecken werden“ (NSchrWB II, 111).

Tatsächlich kommen im Haupttext der *Begriffsschrift* die Wörter „Arithmetik“ (bzw. „arithmetisch“), „Klasse“ und „Begriffsumfang“ überhaupt nicht und selbst das Wort „Zahl“ nur innerhalb eines Beispiels vor. Ausführlich vorgestellt wird vielmehr die „Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“, wie der vollständige Titel der Veröffentlichung lautet. Das „reine Denken“ aber ist der Gegenstand der formalen Logik, und die Begriffsschrift ein von Frege ausgetüfteltes

zweidimensionales Notationssystem für die logischen Grundbegriffe und Verknüpfungen (z. B. „nicht“, „und“, „wenn... dann...“, „alle... sind...“, „manche... sind...“). In den ersten beiden der drei Abschnitte des Bändchens entwickelt Frege – historisch übrigens ohne jedes Vorbild – in axiomatischer Form die heute so genannte klassische Aussagen- oder Junktorenlogik sowie (stufenunabhängig) die klassische Prädikaten- oder Quantorenlogik, die dann im letzten Abschnitt unter dem Titel „Einiges aus einer allgemeinen Reihenlehre“ eine mathematische Anwendung finden. Welche Absichten Frege mit dieser sehr speziell erscheinenden Anwendung verfolgte, hatte er schon im Vorwort ausgesprochen: er wollte „versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind“ (BS IV), wobei er „zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die *logische* Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten. Damit sich hierbei nicht unbemerkt etwas Anschauliches eindringen könnte, musste Alles auf die Lückenlosigkeit der Schlusskette ankommen“ (ibid.; die letzte Formulierung vielleicht angeregt von Leibniz, dem es ebenfalls um „un certain enchaînement qui soit sans interruption“ ging – so Leibnizens 3. *Maxime* für eine „art de bien raisonner“ in *De la sagesse*, Erdm. 674a). Er schloß das Vorwort mit den Sätzen:

„Die Arithmetik ist der Ausgangspunkt des Gedankenganges gewesen, der mich zu meiner Begriffsschrift geleitet hat. Auf diese Wissenschaft denke ich sie daher auch zuerst anzuwenden, indem ich ihre Begriffe weiter zu zergliedern und ihre Sätze tiefer zu begründen suche. [...] die Beleuchtung der Begriffe der Zahl, der Grösse u.s.w. sollen den Gegenstand fernerer Untersuchungen bilden, mit denen ich unmittelbar nach dieser Schrift hervortreten werde“ (BS VIII).

Bis es soweit war, vergingen allerdings mehr als fünf Jahre (das Vorwort der *Begriffsschrift* trägt das Datum „18. December 1878“). Immerhin konnte Frege in einem Brief an Carl Stumpf (?) am 29. 8. 1882 berichten:

„Ich habe jetzt ein Buch nahezu vollendet, in welchem ich den Begriff der Anzahl behandle und nachweise, dass die ersten Sätze über das Zählen der Zahl, die man bisher als unbeweisbare Axiome anzusehen geneigt war, sich nur [im Sinne von „ausschließlich“, C. T.] mittels der logischen Gesetze aus den

Definitionen beweisen lassen, sodass sie im Kantischen Sinne wohl als analytische zu betrachten sind“ (NSchrWB II, 163). Einem etwaigen Zweifel Stumpfs, ob in diesem Nachweis nicht doch ein Fehler stecke oder sich „ein wesentlicher Inhalt aus anderen Erkenntnisquellen unbemerkt eingeschlichen habe“, hält Frege schon vorab entgegen:

„Die Zuversicht, dass dies nicht geschehen sei, schöpfe ich aus der Anwendung meiner Begriffsschrift, die nichts von dem durchlässt, was nicht ausdrücklich vorausgesetzt war [...]“ (ibid.).

Gerade die Begriffsschrift aber, die schon einer günstigen Aufnahme des nach ihr betitelten Bändchens von 1879 im Wege gestanden hatte, veranlaßte Stumpf, am 9. 9. 1882 in seinem Antwortschreiben von ihrer Verwendung abzuraten:

„Hinsichtlich Ihrer Arbeit, auf welche ich mich außerordentlich freue, bitte ich mir die Frage nicht übel zu nehmen, ob es nicht zweckmäßig wäre, deren Gedankengang zunächst in der gewöhnlichen – und vielleicht getrennt davon ein andermal oder auch im selben Buche in der Begriffsschrift darzulegen; was, dünkte ich, der Aufnahme beider Materien günstig sein müßte“ (NSchrWB II, 257).

Frege ist vermutlich dieser Anregung Stumpfs gefolgt, als er bei der Aufstellung seiner rein logischen Anzahldefinition (dem nächsten Schritt des logizistischen Programms) in den 1884 veröffentlichten *Grundlagen der Arithmetik* völlig auf die Heranziehung der Begriffsschrift verzichtete. Erst für den letzten Schritt, die lückenlose Herleitung der arithmetischen Sätze in den *Grundgesetzen der Arithmetik*, hat sich Frege der dann – nach weiteren neun Jahren! – sogar stark weiterentwickelten Begriffsschrift wieder bedient und wohl bedienen müssen. Weder in den *Grundlagen* noch in den *Grundgesetzen* hat er uns allerdings mitgeteilt, ob die erstgenannte Schrift als Umarbeitung eines schon fertigen Teils des in dem Brief an Stumpf erwähnten Manuskripts, oder aber als neues, eigenes Manuskript entstanden ist. Der Verzicht auf die Begriffsschrift wird Frege in keinem Falle leicht geworden sein, denn seine Äußerungen in den §§ 90 und 91 der *Grundlagen* und im ersten Band der *Grundgesetze* (z. B. S. VIII f. und S. 1) lassen erkennen, daß Frege es diesem Verzicht zuschrieb, wenn er die analytische Natur der arithmetischen Sätze in den *Grundlagen* nicht mehr als „wahrscheinlich“ habe machen können. Obwohl sich die begriffsschriftfreie Darstellung

der *Grundlagen der Arithmetik* für deren Aufnahme bei den Zeitgenossen nicht so „günstig“ auswirkte, wie Stumpf dies Frege (und dieser sich selbst) gewünscht hatte, so erleichtert sie doch bis heute die Vermittlung der Grundgedanken Freges zur Philosophie der Mathematik ganz außerordentlich und ist vielleicht entscheidend dafür geworden, daß den *Grundlagen* bei den philosophisch interessierten Lesern die Aura des Esoterischen erspart blieb, die der *Begriffsschrift* und den *Grundgesetzen* wohl für immer anhaften wird.

Auf den ersten Seiten des Haupttextes der *Grundlagen* hat Frege klar ausgesprochen, daß er mit den Überlegungen des Buches einen doppelten Zweck verfolgte. Es sollte einen *mathematischen Beitrag* liefern, indem die zeitgenössischen Bemühungen um eine strengere Begründung der Mathematik durch genauere Analyse ihrer Begriffe und Zurückführung ihrer Sätze auf wenige überschaubare Axiome um eine Analyse der Begriffe und Sätze der Arithmetik erweitert wurde, bis zu denen das sog. „Arithmetisierungsprogramm“ der Analysis bereits zurückgegangen war. Es sollte aber auch einen *philosophischen Beitrag* leisten und die Frage „nach der apriorischen oder aposteriorischen, der synthetischen oder analytischen Natur der arithmetischen Wahrheiten“ (GLA 3) dadurch einer Beantwortung näherbringen, daß die Frage entschieden wird, ob der Anzahlbegriff durch einfachere Begriffe definiert werden könne oder nicht. „Das soll die Aufgabe dieses Buches sein“ (ibid.).

2. Hauptprobleme der *Grundlagen* und Inhaltsüberblick

Frege gibt in den *Grundlagen der Arithmetik* eine Definition des Anzahlbegriffs, in deren Definiens allein Begriffe der Logik vorkommen (so wie Frege deren Bereich abgrenzt; nach heutiger Sichtweise und Terminologie definiert er die Anzahl durch Begriffe der elementaren Mengenlehre). Damit beantwortet er die Frage nach der Natur der arithmetischen Wahrheiten im Sinne ihres analytischen Charakters.

Für diese Antwort aber, die erst im letzten Drittel der *Grundlagen* erfolgt, müssen Vorbereitungen getroffen werden, und Frege rechnet zu diesen offenbar auch die umfassende, die erste Hälfte des Buches füllende Zusammenstellung und Kritik von „Meinungen von Philosophen und Mathematikern über die hier in Betracht kommenden Fragen“ (GLA IV). Damit verfolgt Frege nach seiner