GOTTLOB FREGE

DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK

Gottlob Frege · Die Grundlage der Arithmetik

Gottlob Frege

Die Grundlagen der Arithmetik

Eine logisch mathematische Untersuchung

über den Begriff der Zahl

Centenarausgabe

Mit eränzenden Texten
kritisch herausgegeben von
Christian Thiel

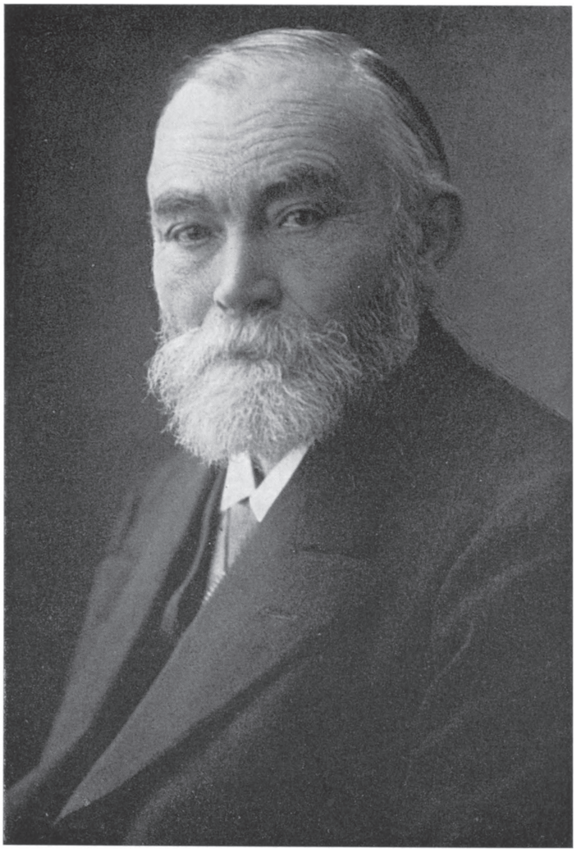
FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über ‹http://portal.dnb.de› abrufbar.

ISBN 978-3-7873-0646-6
ISBN eBook: 978-3-7873-3506-0

www.meiner.de



Gottlob Frege

1848–1925

INHALT

Gottlob Frege

Die Grundlagen der Arithmetik

Das Echo der *Grundlagen*

ABKÜRZUNGEN UND ZITIERHINWEISE

Bei Stellenangaben werden Schriften Freges, für die in G. Frege, *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel* Abkürzungen eingeführt wurden, auch in der vorliegenden Ausgabe der *Grundlagen der Arithmetik* mit derselben Abkürzung zitiert:

BS	=	Begriffsschrift
BuG	=	Ueber Begriff und Gegenstand
FB	=	Function und Begriff
GGA I	=	Grundgesetze der Arithmetik, Band I
GGA II	=	Grundgesetze der Arithmetik, Band II
GLA	=	Die Grundlagen der Arithmetik
GLG II	=	Über die Grundlagen der Geometrie II
NSchrWB I	=	Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel, Band I
NSchrWB II	=	Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel, Band II
SB	=	Über Sinn und Bedeutung.

Die Grundlagen der Arithmetik werden meist kurz als *Grundlagen*, die *Grundgesetze der Arithmetik* als *Grundgesetze* zitiert; die von Frege selbst verwendete Kurzangabe „Baumann" bezieht sich auf J. J. Baumann, *Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik* (s. Literaturverzeichnis). An weiteren, in der Literatur geläufigen Abkürzungen werden verwendet:

Akad.	=	G. W. Leibniz, Sämtliche Schriften und Briefe, ed. Preußische [später: Deutsche] Akademie der Wissenschaften [zu Berlin], Darmstadt/Leipzig [später: Berlin/Leipzig] 1923 ff.
Akad.-Ausg.	=	I. Kant, Gesammelte Schriften, ed. Königlich Preußische [später: Deutsche] Akademie der Wissenschaften [zu Berlin], Berlin 1902 ff.
Erdm.	=	God. Guil. Leibnitii Opera philosophica quae exstant [...], ed. Johann Eduard Erdmann, Berlin 1839/1840
Gerhardt Phil.	=	Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz, ed. Carl Immanuel Gerhardt, Berlin/Halle 1875-1890
KRV	=	I. Kant, Kritik der reinen Vernunft.

Seitenangaben beziehen sich bei Schriften Freges auf die Paginierung der Erstdrucke (die auch in den von I. Angelelli herausgegebenen *Kleinen Schriften* für die dort abgedruckten Texte angegeben ist), bei Schriften anderer Autoren auf die jeweils angegebene, im Literaturverzeichnis nachgewiesene Ausgabe. Das Literaturverzeichnis enthält die (bis auf Umfangsangaben bei Monographien) vollständigen bibliographischen Daten aller in der Einleitung des Herausgebers, im Text der *Grundlagen* oder in den abgedruckten ergänzenden Texten zitierten Schriften, nicht dagegen die bibliographischen Angaben von Texten, die nur in einzelnen Anmerkungen des Herausgebers vorkommen und dort bereits vollständig nachgewiesen sind (die Autorennamen wurden jedoch in das allgemeine Namenregister aufgenommen).

EINLEITUNG

EINLEITUNG DES HERAUSGEBERS

„Meine Anstrengungen, über das ins Klare zu kommen, was man Zahl nennen will, haben zu einem Mißerfolge geführt", notiert Frege am 23. März 1924 in sein Tagebuch. Dieser Mißerfolg, den Frege durch die Herleitung der Zermelo-Russellschen Antinomie (s. u.) in seinem ausgearbeiteten System bestätigt sah, mußte in fehlerhaften Annahmen des Fregeschen Systems seine Gründe haben. Der wohl aus Freges letztem Lebensjahr stammende, fragmentarisch gebliebene *Neue Versuch der Grundlegung der Arithmetik* befaßt sich mit solchen Gründen und enthält als vorausgeschicktes Fazit gleich zu Beginn zwei Selbstberichtigungen Freges:

> „Ich habe die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und daß demgemäß in der Arithmetik alles rein logisch bewiesen werden müsse. Zweitens habe ich die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik auch der Anschauung keinen Beweisgrund zu entnehmen brauche" (NSchrWB 1, 298).

Ganz bewußt lehnt sich die Formulierung dieser Sätze an den Anfang der Einleitung zu den *Grundgesetzen der Arithmetik* an, wo Frege geschrieben hatte:

> „In meinen *Grundlagen der Arithmetik* habe ich wahrscheinlich zu machen gesucht, dass die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und weder der Erfahrung noch der Anschauung irgendeinen Beweisgrund zu entnehmen brauche" (GGA I, 1).

Welche Revolution in Freges Denken die Zurücknahme seines logizistischen Programms, die Arithmetik allein mit Mitteln der Logik zu begründen, bedeutete, kann man erst verstehen, wenn man sich die Hintergründe, die Ziele und die Hauptschritte dieses Programms vor Augen führt. Geschieht dies anhand der *Grundlagen*, so wird zugleich deutlich, weshalb wir heute trotz der Unerreichbarkeit des Fregeschen Zieles auf dem von ihm gewählten Wege zu den klassischen Lehrstücken philosophischer Analyse gerade Freges *Grundlagen der Arithmetik* rechnen, deren Erscheinen vor einem Jahrhundert der Anlaß einer Internationalen Konferenz in Schwerin im September 1984 war und Anlaß auch der Centenarausgabe ist.

1. Die Ziele der *Grundlagen der Arithmetik*

Friedrich Ludwig Gottlob Frege (* 8. 11. 1848 in Wismar, † 26. 7. 1925 in Bad Kleinen) studierte zunächst in Jena und dann in Göttingen, wo er 1873 aufgrund seiner Dissertation über ein geometrisches Thema promoviert wurde. Schon 1874 habilitierte er sich für Mathematik an der Universität Jena, deren Lehrkörper er von da an bis zu seinem Rücktritt vom Lehramt im Jahre 1918 angehörte. Seine drei Buchveröffentlichungen - die *Begriffsschrift* 1879, *Die Grundlagen der Arithmetik* 1884 und *Grundgesetze der Arithmetik I* 1893, *II* 1903 - markieren drei aufeinanderfolgende, jeweils das bis dahin Erreichte in der Darstellung verbessernde und inhaltlich weiterführende Schritte auf dem Weg des obengenannten logizistischen Programms. Über den Schritt zwischen den beiden erstgenannten Schriften (und das heißt, über die Vorgeschichte der *Grundlagen*) schrieb Frege am 23. 9. 1902 an Philip E. B. Jourdain:

> „Das Bedürfnis, stillschweigend gemachte Voraussetzungen bei der Grundlegung der Arithmetik mit Sicherheit auszuschliessen, führte mich zu der Begriffsschrift des Jahres 1879. Die Beschäftigung mit dieser hat mich dann wieder zu einer genaueren Fassung der Grundbegriffe der Arithmetik genöthigt, wiewohl ich dies im einzelnen nicht mehr angeben kann. Die Erkenntnis, daß der Träger der Zahl nicht ein Haufe, Aggregat, System von Dingen, sondern ein Begriff ist, ist wohl wesentlich durch die Begriffsschrift gefördert worden. Statt des Begriffes kann man auch seinen Umfang nehmen, oder was ich dafür auch sage, die zugehörige Klasse. Diese Unterscheidung des Haufens (Aggregats, Systems) von der Klasse, die vor mir vielleicht noch nicht so scharf gemacht ist, verdanke ich, wie ich glaube, meiner Begriffsschrift, obwohl Sie davon beim Lesen meines Werkchens vielleicht keine Spur entdecken werden" (NSchrWB II, 111).

Tatsächlich kommen im Haupttext der *Begriffsschrift* die Wörter „Arithmetik" (bzw. „arithmetisch"), „Klasse" und „Begriffsumfang" überhaupt nicht und selbst das Wort „Zahl" nur innerhalb eines Beispiels vor. Ausführlich vorgestellt wird vielmehr die „Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens", wie der vollständige Titel der Veröffentlichung lautet. Das „reine Denken" aber ist der Gegenstand der formalen Logik, und die Begriffsschrift ein von Frege ausgetüfteltes zweidimensionales Notationssystem für die logischen Grundbegriffe und Verknüpfungen (z. B. „nicht", „und", „wenn..., dann---", „alle... sind---", „manche... sind---"). In den ersten beiden der drei Abschnitte des Bändchens entwickelt Frege – historisch übrigens ohne jedes Vorbild – in axiomatischer Form die heute so genannte klassische Aussagen- oder Junktorenlogik sowie (stufenunabhängig) die klassische Prädikaten- oder Quantorenlogik, die dann im letzten Abschnitt unter dem Titel „Einiges aus einer allgemeinen Reihenlehre" eine mathematische Anwendung finden. Welche Absichten Frege mit dieser sehr speziell erscheinenden Anwendung verfolgte, hatte er schon im Vorwort ausgesprochen: er wollte „versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind" (BS IV), wobei er „zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die *logische* Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten. Damit sich hierbei nicht unbemerkt etwas Anschauliches eindrängen könnte, musste Alles auf die Lückenlosigkeit der Schlusskette ankommen" (ibid.; die letzte Formulierung vielleicht angeregt von Leibniz, dem es ebenfalls um „un certain enchaînement qui soit sans interruption" ging – so Leibnizens 3. Maxime für eine „art de bien raisonner" in *De la sagesse*, Erdm. 674a). Er schloß das Vorwort mit den Sätzen:

> „Die Arithmetik ist der Ausgangspunkt des Gedankenganges gewesen, der mich zu meiner Begriffsschrift geleitet hat. Auf diese Wissenschaft denke ich sie daher auch zuerst anzuwenden, indem ich ihre Begriffe weiter zu zergliedern und ihre Sätze tiefer zu begründen suche. [...] die Beleuchtung der Begriffe der Zahl, der Grösse u.s.w. sollen den Gegenstand fernerer Untersuchungen bilden, mit denen ich unmittelbar nach dieser Schrift hervortreten werde" (BS VIII).

Bis es soweit war, vergingen allerdings mehr als fünf Jahre (das Vorwort der *Begriffsschrift* trägt das Datum „18. December 1878"). Immerhin konnte Frege in einem Brief an Carl Stumpf (?) am 29. 8. 1882 berichten:

> „Ich habe jetzt ein Buch nahezu vollendet, in welchem ich den Begriff der Anzahl behandle und nachweise, dass die ersten Sätze über das Zählen der Zahl, die man bisher als unbeweisbare Axiome anzusehen geneigt war, sich nur [im Sinne von „ausschließlich", C. T.] mittels der logischen Gesetze aus den

> Definitionen beweisen lassen, sodass sie im Kantischen Sinne wohl als analytische zu betrachten sind" (NSchrWB II, 163).

Einem etwaigen Zweifel Stumpfs, ob in diesem Nachweis nicht doch ein Fehler stecke oder sich „ein wesentlicher Inhalt aus anderen Erkenntnisquellen unbemerkt eingeschlichen habe", hält Frege schon vorab entgegen:

> „Die Zuversicht, dass dies nicht geschehen sei, schöpfe ich aus der Anwendung meiner Begriffsschrift, die nichts von dem durchlässt, was nicht ausdrücklich vorausgesetzt war [...]" (ibid.).

Gerade die Begriffsschrift aber, die schon einer günstigen Aufnahme des nach ihr betitelten Bändchens von 1879 im Wege gestanden hatte, veranlaßte Stumpf, am 9. 9. 1882 in seinem Antwortschreiben von ihrer Verwendung abzuraten:

> „Hinsichtlich Ihrer Arbeit, auf welche ich mich außerordentlich freue, bitte ich mir die Frage nicht übel zu nehmen, ob es nicht zweckmäßig wäre, deren Gedankengang zunächst in der gewöhnlichen – und vielleicht getrennt davon ein andermal oder auch im selben Buche in der Begriffsschrift darzulegen; was, dächte ich, der Aufnahme beider Materien günstig sein müßte" (NschrWB II, 257).

Frege ist vermutlich dieser Anregung Stumpfs gefolgt, als er bei der Aufstellung seiner rein logischen Anzahldefinition (dem nächsten Schritt des logizistischen Programms) in den 1884 veröffentlichten *Grundlagen der Arithmetik* völlig auf die Heranziehung der Begriffsschrift verzichtete. Erst für den letzten Schritt, die lückenlose Herleitung der arithmetischen Sätze in den *Grundgesetzen der Arithmetik*, hat sich Frege der dann – nach weiteren neun Jahren! – sogar stark weiterentwickelten Begriffsschrift wieder bedient und wohl bedienen müssen. Weder in den *Grundlagen* noch in den *Grundgesetzen* hat er uns allerdings mitgeteilt, ob die erstgenannte Schrift als Umarbeitung eines schon fertigen Teils des in dem Brief an Stumpf erwähnten Manuskripts, oder aber als neues, eigenes Manuskript entstanden ist. Der Verzicht auf die Begriffsschrift wird Frege in keinem Falle leicht geworden sein, denn seine Äußerungen in den §§ 90 und 91 der *Grundlagen* und im ersten Band der *Grundgesetze* (z. B. S. VIII f. und S. 1) lassen erkennen, daß Frege es diesem Verzicht zuschrieb, wenn er die analytische Natur der arithmetischen Sätze in den *Grundlagen* nicht mehr als „wahrscheinlich" habe machen können. Obwohl sich die begriffsschriftfreie Darstellung der *Grundlagen der Arithmetik* für deren Aufnahme bei den Zeitgenossen nicht so „günstig" auswirkte, wie Stumpf dies Frege (und dieser sich selbst) gewünscht hatte, so erleichtert sie doch bis heute die Vermittlung der Grundgedanken Freges zur Philosophie der Mathematik ganz außerordentlich und ist vielleicht entscheidend dafür geworden, daß den *Grundlagen* bei den philosophisch interessierten Lesern die Aura des Esoterischen erspart blieb, die der *Begriffsschrift* und den *Grundgesetzen* wohl für immer anhaften wird.

Auf den ersten Seiten des Haupttextes der *Grundlagen* hat Frege klar ausgesprochen, daß er mit den Überlegungen des Buches einen doppelten Zweck verfolgte. Es sollte einen *mathematischen Beitrag* liefern, indem die zeitgenössischen Bemühungen um eine strengere Begründung der Mathematik durch genauere Analyse ihrer Begriffe und Zurückführung ihrer Sätze auf wenige überschaubare Axiome um eine Analyse der Begriffe und Sätze der Arithmetik erweitert wurde, bis zu denen das sog. „Arithmetisierungsprogramm" der Analysis bereits zurückgegangen war. Es sollte aber auch einen *philosophischen Beitrag* leisten und die Frage „nach der apriorischen oder aposteriorischen, der synthetischen oder analytischen Natur der arithmetischen Wahrheiten" (GLA 3) dadurch einer Beantwortung näherbringen, daß die Frage entschieden wird, ob der Anzahlbegriff durch einfachere Begriffe definiert werden könne oder nicht. „Das soll die Aufgabe dieses Buches sein" (ibid.).

2. Hauptprobleme der *Grundlagen* und Inhaltsüberblick

Frege gibt in den *Grundlagen der Arithmetik* eine Definition des Anzahlbegriffs, in deren Definiens allein Begriffe der Logik vorkommen (so wie Frege deren Bereich abgrenzt; nach heutiger Sichtweise und Terminologie definiert er die Anzahl durch Begriffe der elementaren Mengenlehre). Damit beantwortet er die Frage nach der Natur der arithmetischen Wahrheiten im Sinne ihres analytischen Charakters.

Für diese Antwort aber, die erst im letzten Drittel der *Grundlagen* erfolgt, müssen Vorbereitungen getroffen werden, und Frege rechnet zu diesen offenbar auch die umfassende, die erste Hälfte des Buches füllende Zusammenstellung und Kritik von „Meinungen von Philosophen und Mathematikern über die hier in Betracht kommenden Fragen" (GLA IV). Damit verfolgt Frege nach seiner