

Albert Grote

# Anzahl, Zahl und Menge

Die phänomenologischen Grundlagen der Arithmetik





## PARADEIGMATA 3

## PARADEIGMATA

Die Reihe Paradeigmata präsentiert historisch-systematisch fundierte Abhandlungen, Studien und Werke, die belegen, daß sich aus der strengen, geschichtsbewußten Anknüpfung an die philosophische Tradition innovative Modelle philosophischer Erkenntnis gewinnen lassen. Jede der in dieser Reihe veröffentlichten Arbeiten zeichnet sich dadurch aus, in inhaltlicher oder methodischer Hinsicht Modi philosophischen Denkens neu zu fassen, an neuen Thematiken zu erproben oder neu zu begründen.

*Albert Grote*, geboren 1898, studierte in Freiburg bei Husserl und Geyser Philosophie, in Greifswald bei Jacoby und Rehmke. In Göttingen war er Schüler von Nelson, Hilbert und insbesondere von Hans Lipps. Nebenbei promovierte er in Göttingen zum Dr. med. und übernahm späterhin die Leitung eines Krankenhauses.

1935 veröffentlichte Grote eine Arbeit über die Funktion der Copula. In ihr wurde die Doppelheit der Komponenten einer jeden Erwartung aufgewiesen.

Ausser Aufsätzen in philosophischen Zeitschriften erschienen 1972, wiederum bei Felix Meiner, seine „Grundlagen einer Phänomenologie der Erkenntnis“. Hier werden die beiden Modi der Existenz, das Vorhandensein und das Vorkommen gegeneinander herausgestellt.

Albert Grote

# Anzahl, Zahl und Menge

Die phänomenologischen Grundlagen  
der Arithmetik

FELIX MEINER VERLAG  
HAMBURG

Im Digitaldruck »on demand« hergestelltes, inhaltlich mit der ursprünglichen Ausgabe identisches Exemplar. Wir bitten um Verständnis für unvermeidliche Abweichungen in der Ausstattung, die der Einzelfertigung geschuldet sind. Weitere Informationen unter: [www.meiner.de/bod](http://www.meiner.de/bod)

#### Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://portal.dnb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-7873-0579-7

ISBN eBook: 978-3-7873-2561-0

© Felix Meiner Verlag GmbH, Hamburg 1983. Alle Rechte vorbehalten. Dies gilt auch für Vervielfältigungen, Übertragungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen, soweit es nicht §§ 53 und 54 URG ausdrücklich gestatten. Gesamtherstellung: BoD, Norderstedt. Gedruckt auf alterungsbeständigem Werkdruckpapier, hergestellt aus 100% chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.

[www.meiner.de](http://www.meiner.de)

## INHALT

Vorwort .....	VII
Kapitel	
I. Das <i>Eine</i> und das <i>Andere</i> .....	3
II. Das Aggregat .....	9
III. Frustrane Versuche des Anzahlverstehens .....	22
A. Mill, Bain, Lange .....	22
B. Helmholtz, Kronecker, Dedekind .....	30
C. Natorp .....	35
D. Hobbes, Locke, Leibniz .....	36
E. Schröder, Husserl .....	40
F. Jevons .....	46
G. Frege .....	50
IV. Das Vorhandensein und die Realität .....	59
V. Das Vorkommen .....	71
IV. Die synthetischen Urteile apriori .....	78
VII. Die Art .....	89
VIII. Das Sachnomen und der Plural .....	93
IX. Das Soetwas und die Zahl .....	102
X. Anhang: Abbildhafte Erfassung von Mehrheiten .....	114
Namenregister .....	136
Sachregister .....	138



## VORWORT

Anzahlen sind immer ·Anzahlen von etwas. Man kann Anzahlen addieren (5 Äpfel und 2 Äpfel sind sieben Äpfel). Aber man kann nicht Anzahlen mit Anzahlen multiplizieren; nicht 5 Äpfel mit 2 Äpfeln, nicht Gegenständliches mit Gegenständlichem und so auch nicht Mengen mit Mengen. Womit multipliziert man, und was ist die Anzahl? Und wie ist es möglich, Multiplikand und Multiplikator zu vertauschen?

Darüberhinaus ist es bei der Division so, daß man einen Bruch in zweifacher Weise lesen kann. Man kann sehen daraufhin, wie oft im Zähler (als einer Anzahl) der Nenner (auch als Anzahl) enthalten ist und erhält dann im Resultat ein Wieoft. Das aber ist keine Anzahl, sondern ein Verhältnis von Anzahlen. Umgekehrt kann man den Zähler (als eine Anzahl) im echten Sinn teilen. Der Teiler (also der Nenner) ist keine Anzahl von etwas. Durch eine Anzahl von etwas kann man nicht teilen. Wohl aber ist das Resultat dann eine Anzahl. Die Resultate sind in beiden Fällen grundverschieden. Trotzdem rechnet mit dem Resultat (der Zahl) in dieser Ambivalenz der Mathematiker in absolut exakter Weise. Was ist also die Zahl? In dieser Problematik fällt auch der Versuch die Arithmetik auf einer Mengenlehre aufzubauen in sich zusammen.

Eine analoge Problematik bricht schon im gewöhnlichen grammatischen Plural auf. Wenn ich sage: In diesen Kasten gehören Erbsen, so geht es ja nicht um individuelle bestimmte Erbsen. Und auch nicht (wie es eine landläufige Meinung ist) um Begriffe. Begriffe gibt es ja nur als Einmaliges; und Begriffe kann man auch nicht in einen Kasten legen. Was ist also das, was im Plural zusammengefaßt wird?

Dem soll in dieser Arbeit nachgegangen werden.

Für die Hilfe bei der Korrektur und bei der Erstellung von Namen- und Sachregister danke ich Frau E. Leuschner und für sein Verständnis und seine Hilfsbereitschaft Herrn R. Meiner.

Dr. A. Grote



**ANZAHL, ZAHL UND MENGE**

**Die phänomenologischen Grundlagen  
der Arithmetik**



## Kapitel I DAS *EINE* UND DAS *ANDERE*

Es ist ein höchst merkwürdiges Faktum, daß die Menschheit seit Urzeiten rechnet und mit Zahlen umgeht; und trotzdem auch heute noch die Meinungen darüber, womit man denn nun eigentlich rechnet, und was die Zahl ist, auseinandergehen. Die Frage nach dem eigentlichen Wesen der Zahl ist auch jetzt noch weitgehend offen. Und das, obwohl die Mathematik den Anspruch erhebt und Anspruch darauf hat, als die exacteste und weittragendste aller Wissenschaften zu gelten.

Man weiß wohl, daß dies und dies und dies zusammen eine Anzahl ausmacht. Aber was denn nun eine Anzahl ist oder gar eine Zahl, ist weitgehend offen geblieben. Wie weit man davon entfernt ist, zeigt sich daran, daß man versuchte die Arithmetik auf einer Mengenlehre (die auch eine durchaus exacte Wissenschaft ist) aufzubauen und daraus zu verstehen.

In der natürlichen Umwelt hat der in ihr Lebende mit Gegenständen zu tun, die, in sich abgeschlossen, für sich allein so aufzugreifen sind; zu festen Gruppen sachlich geschlossen sich zu stellen vermögen oder auch in blossen Konglomeraten anfallen. Auf all das, und jedes davon vermag man in der Wahrnehmung (und auch vorstellend) den Finger zu legen in einem hindeutenden und vorerfassenden *dies*; und es so festzulegen. (Und im Fall der Wahrnehmung auch einen anderen mitteilend darauf zu verweisen.)

Solch Bestimmtheit durch ein *dies* ist vom qualitativen Gehalt des so bestimmten unabhängig. Es ist rein pragmatischer Natur und kein subjekt-unabhängiger Charakter. Es ist belanglos, ob das hinweisende und so fixierende *dies* auf ein Ding oder ein Gefühl, ein Konkretum oder Abstraktum abzielt, ob um ein geometrisches Gebilde oder eine Zahl es sich handelt; oder überhaupt um das Totum der Welt schlechthin, in einem emphatischen Geöffnetsein auf ein *dies Alles*. Auch auf Stoffe („die Milch“, „das Gold“) oder Arten („der Löwe und der Tiger sind Säugetiere“), die als solche nicht individualiter oder quantitativ gefaßt und nur qualitativ durch ihren Sachgehalt bestimmt sind und so sich von anderen Stoffen und Arten unterscheiden und absetzen, kann ich derart verweisen und sie in den Griff bekommen. Und ebenso vor allem auch eine Leere oder das absolute Nichts. Es ist so, daß der besondere (deïctische) Charakter des *dies* derselbe ist, gleichgültig, ob es sich um Individualia oder Generalia handelt. Und das unterstreicht den objektunabhängigen Charakter des *dies*. Und daß es nicht so etwas ist wie ein abstrahierend gewonnenes Residuum.

Wie das *dies* ist auch das *Etwas* formales Korrelat eines Hindeutens. Das *dies* ist in ihm latent. In ihm ist das *dies* auf die bloße Möglichkeit, es als *dies* zu

erfassen, hin entaktualisiert. Es ist etwas, das in einem deiktischem *dies* gefaßt werden kann und in der Möglichkeit dazu gegenständlich festgeworden ist. Von dorthier erhält das *Etwas* seinen formalen Gehalt; als eine unvollzogene *dies* – deïxis terminierend.

Das *Etwas* ist (wie das *dies*) an sich selbst qualitätslos. Aber gerade so, weil es sich nicht aus der Gegenweltlichkeit her sich gibt, sondern nur leeres Korrelat bloßer vitaler Intention ist, kann schlechthin alles mit ihm bezeichnet und angegangen werden. Und gerade so an allem Qualitativen sich aufüllen; und auftreffen auf das, durch das in ihm latente *Dies*. In dieser qualitativen Offenheit ist es offen für alles und jedes von dem und kann in seiner sachlichen Leere jeden gegenständlichen Gehalt in sich aufnehmen.

Man kann sogar iterierend von dem *Etwas* als von einem Etwas reden. Auch das ist eben etwas. Aber es gilt nicht das Umgekehrte. Der Charakter des *Etwas* (bzw. *Dies*) als solcher, als formaler sachlich leerer Zielpunkt eines hindeutenden Meinens kann nicht entfallen, man kann nicht von ihm absehend abstrahieren, wenn man überhaupt meint; und das ist: Wenn man überhaupt etwas meint. Das ist im Wesen hindeutenden Meinens, das eben ein *Hin* deuten ist, vorgegeben (oder – wenn man will – ist mit seinem Begriffe schon angesetzt). Man kann von etwas alle seine Qualitäten abstrahierend fortlassen, nicht dagegen seinen Charakter als Etwas.<sup>1</sup> Es würde einem sonst aus der Hand gleiten. Das leere Etwas ist Reflex eines subjektgebundenen Pragmas. Ohne das würde eine völlige Leere resultieren, in der nichts auf nichts angesprochen wäre und werden könnte, nicht einmal auf ein „Nichts“.

Das *Etwas* ist derart auch nicht so etwas, wie ein qualitatives Residuum, nach Abblassung aller seiner objektiv-sachlichen Spezifikationen. Es wird aus einer ganz anderen Sphäre her manifest, als der des lediglich Anfallenden: Auch das absolute Nichts kann unter die Supposition des Etwas geraten, trotzdem es ja nichts von ihm selbst ist (z. B. „Das Nichts ist *etwas* anderes als etwa eine Taschenuhr“).<sup>2</sup>

Das *Etwas* ist kein objektiv anfallender Befund, wie ein Blau oder ein Rot oder ein Dreieck. Es ist als solches lediglich der an sich leere (wenn auch

1 Das Etwas-sein und das Gegenstand-sein (auch das qualitätsleere) vermögen auf dasselbe Sachliche zu gehen. Trotzdem ist die Supposition, unter der es dann angegangen wird, in beiden Fällen eine verschiedene. Der Möglichkeit des pragmatischen *Anrührens* in einem Falle steht gegenüber das *Hinnehmen* als zur leibhaften Begegnung anstehend. (Auch wenn dies nicht realisierbar ist, wie bei einem unmöglichen Gegenstand oder der als ein *ens tamquam verum* genommen wird). cf. dazu: Grote, Grundlagen einer Phänomenologie der Erkenntnis, Hamburg 1972, Kap. III.

2 Man wende hier nicht ein, daß ein solches absolutes Nichts ja nur durch Abstreichen von qualitativ gefülltem Gegenständlichen gemeint werden könne; und daß ihm so eine Art negativen Gehalts zukäme. Das würde eine Verwechslung von Begriff und Begriffsgegenstand sein. Das gegenständliche Nichts ist an sich seinem qualitativen Gehalt nach eben doch lediglich nichts. Es hat keine eigene sachliche Eigenschaft, von der man abstrahieren könnte, allenfalls die, keine zu haben.

sachlich auffüllbare), nur durch das Hindeuten bestimmte Zielpunkt eben dieser Intention. Es ist vorgängig rein formal schon aufgetan in eine Zukunft, dem vitalen, bedürftenden Ausgerichtetsein in eine Welt; wie es dem Lebendigen notwendig eigen sein muß; wenn anders das überhaupt Bestand haben will. Das Etwas ist qualitätsleer, nicht entleert. Es ist qualifiziert lediglich als Modus und Korrelat lebendiger Ausrichtung und unselbständig ihr zugehörig.

Von allen Qualitäten, Beschaffenheiten und Relationen läßt sich abstrahieren. Nicht so der Etwascharakter des Etwas. Wohl auch der deïtische Hinweischarakter im *Dies* und das generell anfallende *So* im Soetwas, nicht aber das Etwassein überhaupt. Man würde bei dem Versuch immer wieder auf das Etwas stoßen, von dem das Etwassein ausgesagt wäre. Das Etwas ist der leere, aber auffüllbare Reflex des Geöffnetseins in die Welt, ohne einen sonstigen sachlichen Gehalt. Es ist auch nicht wie eine Qualität oder Beschaffenheit einer Abschwächung oder Verstärkung fähig.<sup>3</sup> Das *Dies* geht vom Ich aus; das *Etwas* auf das Ich hin. Als ein *Dies* ist etwas vom Subjektiven her gesehen. Als ein Etwas fällt es vom Objektiven her an; es macht im erwartenden Bedürfen das Wesen lebendigen Erkennens aus und ist nur dessen Widerschein. So kann man wohl sagen „dies Etwas“, aber nicht „etwas dies“; wohl aber etwas, das „wie dies“ ist. Das *Dies* kann nicht als Prädikat auftreten.

Neben dem, worauf als auf ein *Dies* man ausgerichtet ist, ist mit diesem lebendigen Geöffnetsein unter einem möglichen Wandernlassen der Ausrichtung der Blick freigegeben auch auf seitabliegendes Anderes neben ihm; im begrifflichen Festhalten auch weiterhin das *Dies* daneben.

Das *Dies* und sein *Anderes* kommen in einem dynamischen Nebeneinander in Sicht, im Übergehen von einem aufs andere. Aber das *Dies* ist nicht begrifflich auf das *Andere* angewiesen. Es kommt in einer *intentio directa* in Sicht; nicht in einem relationalen Übergang, von einem als objektiv Hingenommenen auf ein Anderes. Sondern gründet *primär* und unmittelbar im erwartend-bedürftenden Ausgerichtetsein des Lebendigen in die Welt. Es hat absoluten Charakter als bloßer Zielpunkt eines Hindeutens und ausrichtenden Zufassens und ist an sich sachlich und qualitativ leer. Im Übergang von einem *Dies* wird das *Andere* getragen und wird so demgegenüber gegenständig fest. Wie denn auch das *Dies* selbständig in sich zu stehen vermag; keineswegs aber das *Andere*.

Rein empirisch ist es auch so, daß beim Auszählen eines Konglomerats sehr differenzierter und differenter Gegenständlichkeiten man keineswegs erst von den qualitativen Besonderheiten abstrahiert und explizite von anderen Gegenständen absetzt; sondern daß man sie in einem *dies* und *dies* und das anrührt und zusammenfaßt. Von vorgängiger Abstraktion ist hier

<sup>3</sup> Das Etwas ist iterierbar in infinitum. Zugleich aber würde ein Versuch von ihm zu abstrahieren, sich in einem Regressus in infinitum totlaufen.

wahrhaftig nichts zu sehen. Man zählt zusammen, worauf man den Finger legt; in einem deïtischen *Dies*.

Das Erfassen im *Dies* ist unmittelbar. In solchem Erfassen ist etwas zu einem in sich Festen geschlossen und nur auf das bezogen. Es ist nicht angewiesen auf ein sich-Absetzen von einem Anderen; wie wenn das *Dies* und das *Andere* schlicht Korrelate wären und nur in ihrem Gegeneinander zu sich selbst kämen. Es ist qualitätslos auch in der Art, wie nicht von außen her, von Anderem aus, es zu sich selbst kommt und aus dem her verstanden wird; sondern auf sich selbst hin orientiert bleibt. Der Grundcharakter des *Dies* (oder *Etwas*) ist vom Boden eines deïtischen Pragma aus zu verstehen, nicht von dem einer, wenn auch noch so unbestimmten, objektiven Qualifikation.

Wie nicht durch Abstraktion von Qualitativem wird auch das *Dies* nicht erst aus einem ihm korrelaten Anderem und mit dem zusammen und zugleich verstanden. Aber ich kann bei einem Festhalten an ihm den Blick wandern lassen auf ein *Dies* neben ihm. Ich kann nach etwas von ihm gegenständlich Getrennten, von ihm abgesetzt Selbständigen greifen, als einem Andern; gleichgültig, ob das leibhaftig in der Wahrnehmung, oder in der Vergangenheit oder Zukunft oder auch nur in einer bloßen Vorstellung überhaupt liegt. Und das so dann im Hinblick auf seine gesonderte Greifbarkeit als ein von ihm *Verschiedenes* sich stellt.

Solch unter mein Belieben gestelltes *Wandernlassen* des Blicks im behaltenden Festhalten am ursprünglichen *Dies* und so im in-Sicht-bringenkönnen eines Neuen ist von Bedeutung für das Verstehen von Verschiedenheit.

Ein solches Nebeneinanderliegen im Blickfeld würde eine Gesamtgestalt in Sicht bringen, die lediglich qualitativ differenziert wäre. Aber nicht aus von sich aus gegeneinander Selbständigem bestünde. Und auch ein nacheinander Auftreten und sich-Verschieben gegeneinander der Qualien würde wohl ein vorgangartiges sich-Ändern dieser Gesamtgestalt ausmachen, nicht aber diese Qualien als für sich Selbständige zur Gegebenheit bringen und gegeneinander absetzen.

Man mag das hier Gemeinte ganz grob mechanisch sich veranschaulichen: Wenn man die Intention auf ein *Dies*, etwa das Gerichtesein des Sehstrahls auf ein Gegenständliches hin, sich ersetzt denkt durch das Hindurchsehen durch ein enges Sehrohr auf eine figural gefärbte Fläche hin, so wird beim unbemerkten Verschieben dieser Fläche eine qualitative Änderung des von mir Gesehenen eintreten, aber nicht ein neues Gegenständliches phänomenal sich stellen. Und ebenso ist es, wenn (unbemerkt) solches Sehrohr mit mir zusammen passiv in seiner Richtung geändert wird. Auch dann würde nur ein sich-Ändern eines gegenständlich Selben phänomenal resultieren. Auch bei einem ins Bewußtseintreten solch passiver Sehstrahlverschiebungen würde nur ein komplexeres vorgängliches sich-Ändern von Qualitativem sichtbar werden, nicht aber ein gegenständliches sich-Absetzen von diesem und jenem gegeneinander. Erst wenn es durch mein aktives, freiwillliches Aufsuchen,