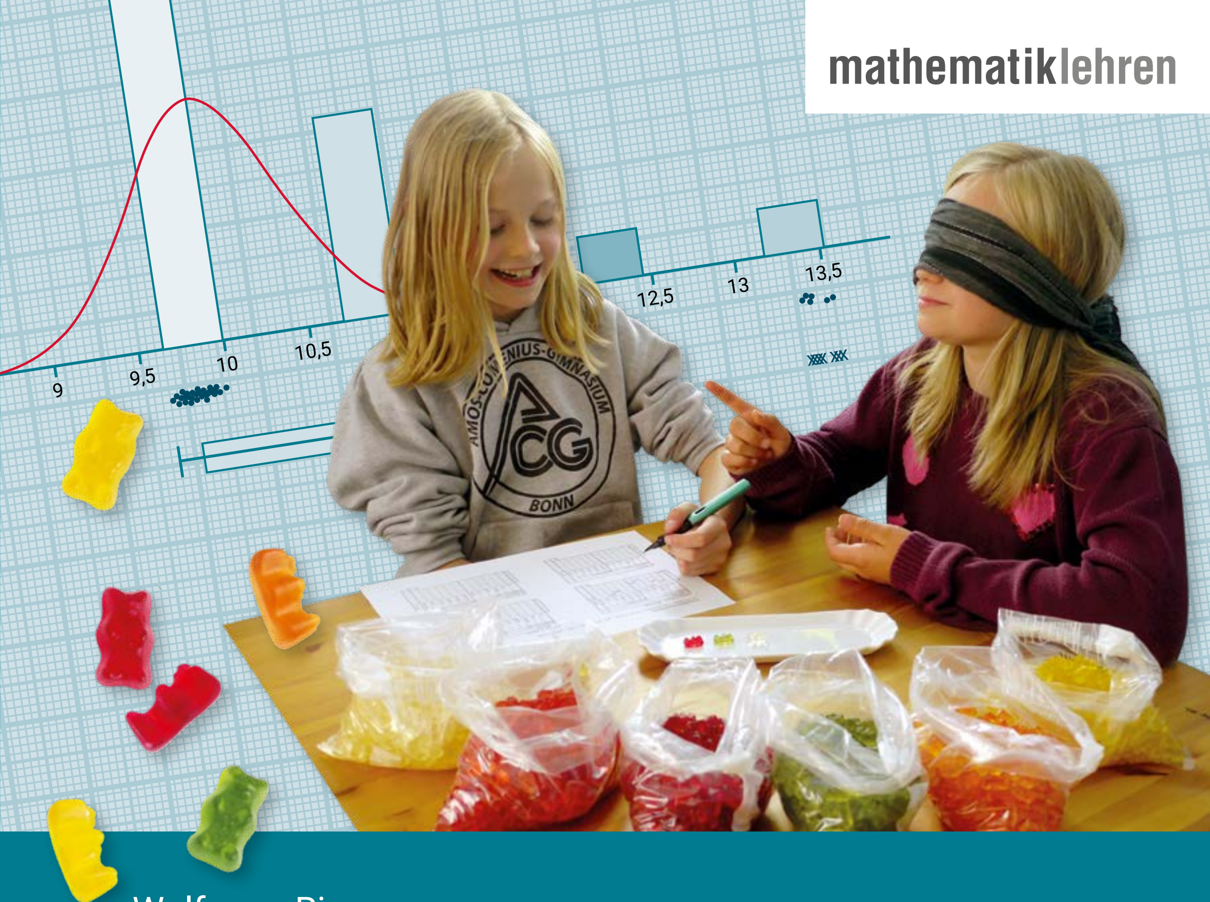
mathematik lehren



Wolfgang Riemer

Statistik unterrichten

Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik

Klett
Kallmeyer

Download-Material

Wolfgang Riemer

Statistik unterrichten

Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik

Klett | Kallmeyer

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek.
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Impressum

Wolfgang Riemer
Statistik unterrichten
Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik

1. Auflage 2023
Das E-Book folgt der Buchausgabe: 1. Auflage 2023

Friedrich Verlag GmbH
Luisenstr. 9
D-30159 Hannover

www.friedrich-verlag.de

Redaktion: Dirk Haupt, Leipzig
Realisation: SchwabScantechnik, Göttingen
E-Book-Erstellung: Friedrich Verlag GmbH

ISBN: 978-3-7727-1749-9 (pdf)
ISBN: 978-3-7727-1748-2 (print)

Wolfgang Riemer

Statistik unterrichten

Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik

Klett | Kallmeyer

Inhalt

Vorwort

„A telephone Book is useful, but has no educational value.
Many textbooks are telephone books of facts, ergo …“
(Mortimer Jerome Adler)

Wir haben die fachlichen Grundlagen durchgearbeitet und

- kennen den Unterschied zwischen Ergebnis und Ereignis,
- wissen, dass Zufallsvariablen „in Wirklichkeit“ keine Variablen, sondern Abbildungen $P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ sind, die z. B. beim Wurf von drei Münzen dem Ereignis {(1,1,0); (1,0,1); (0,1,1)} die Trefferzahl 2 zuordnen,
- haben von subjektivistischen, laplace'schen und frequentistischen Wahrscheinlichkeiten gehört (wobei letztere mitunter auch als statistische oder empirische bezeichnet werden),
- haben uns bei Signifikanztests über verbeulte Münzen und Fishers Tea tasting Lady informiert, die behauptete, schmecken zu können, ob der Zucker vor oder nach dem Eingießen des Tees hinzugefügt wurde usw. …

Aber wie gestaltet man auf der Grundlage dieses Hintergrundwissens funktionierenden Unterricht?

Mit dieser Frage ist zu rechnen, wenn nicht nur angehende Lehrerinnen und Lehrer Stochastik unterrichten müssen. Und: Ist diese Frage nicht naheliegend, wenn man bedenkt, dass auch so manch ein didaktisch ausgerichtetes Lehrwerk an ein „telephone book of facts“ erinnert, wenn es sich mit einer strikten Trennung von beschreibender Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilender Statistik mehr an der Hochschulsystematik orientiert als am Erkenntnisinteresse neugieriger Kinder und junger Erwachsener?

Hier möchte „Statistik *unterrichten* – eine *handlungsorientierte* Didaktik der Stochastik“ eine Lücke schließen, vielleicht auch einen Kontrapunkt setzen: *Unterrichten* ist ebenso essenzieller Bestandteil dieses Buches wie *Handlungsorientierung*:

- Schülerinnen und Schüler stehen mit ihren Primärerfahrungen, ihrer Neugier und ihren Alltagsintuitionen im Mittelpunkt,
- interessante Fragestellungen werden durch aufschlussreiche, vor allem aber in einer Unterrichtsstunde realisierbare Experimente beantwortet,
- die Experimente unterstützen Begriffsbildungen nicht nur, sie verankern die Begriffe und Zusammenhänge im Erfahrungshorizont der Lernenden,
- wir fassen Wahrscheinlichkeiten weniger als objektiv existierende (?) Größen auf, sondern lassen sie die Lernenden als vom Menschen gemachte Modelle der Wirklichkeit erleben.

- Dadurch gelingt der nahtlose Anschluss an intuitive Vorstellungen aus der Grundschule und dem Lebensalltag. Darüber hinaus wachsen die meist säuberlich voneinander getrennten Gebiete beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende (!) Statistik schon in der Sekundarstufe I zu einer Einheit zusammen.

Um auch Lehrerinnen und Lehrer mit wenig stochastischer Vorerfahrung für Statistik zu begeistern, bevorzugen wir in diesem Buch eine tendenziell informelle Notation, wie sie in Schulbüchern gepflegt wird. Aber auch, wer in seiner Unterrichtskultur der Eleganz formaler Darstellungen einen höheren Stellenwert beimisst, wird die hier angebotenen Fragestellungen und Experimente wertschätzen. Denn das Bild von Mathematik, das wir unseren Schülerinnen und Schülern vermitteln, wandelt sich fundamental ins Positive, wenn wir im Unterricht, statt über fiktiv verbeulte Münzen aus imaginären Schatzkisten nur zu sprechen, über normierte flache Legosteine (wir nennen sie Legomünzen) erst spekulieren, um anschließend die Spekulationen an der Realität experimentell zu prüfen – oder wenn wir Fischers Tea tasting Lady durch reale Experimente ersetzen.

Das Buch ist modular aufgebaut. Die Kapitel oder je nach interessierender Klassenstufe auch Teile daraus lassen sich trotz vieler Vernetzungen unabhängig voneinander lesen und im Unterricht einsetzen. Sie sind Grundlage gelingender und erkenntnisreicher Unterrichtsstunden, an die sich Ihre Schülerinnen und Schüler auch lange nach der Schulzeit gerne erinnern.

Köln, im August 2023
Wolfgang Riemer

1 Zielsetzung

Darum geht es – das Wichtigste in Stichworten

- Lehrpläne zerlegen Stochastik in beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende Statistik. Sie orientieren sich damit am Vorgehen der Hochschule, das von Anfang an nach formaler Exaktheit und Systematik strebt, weniger an der Neugier und dem Erkenntnisinteresse Lernender.
- Die sich daraus nicht nur für Lernende, sondern auch für Anwendende ergebenden Probleme wurden schon vor Jahren klar benannt – sie sind unverändert virulent.
- Durch Verzahnung der drei Gebiete über authentische, vor allem aber praktikable und alltagstaugliche Fallbeispiele gelingt es, die Probleme zu reduzieren, wenn nicht gar sie aufzulösen.
- Dabei hilft die konsequente Beachtung weniger Paradigmen.

Experiment

- „Hol die OMA aus der Socke."

1.1 Prolog

Wir alle wünschen uns, dass Mathematikunterricht eher einem Erlebnisspielplatz (Abb. 1-1) gleicht als einem Krankenhaus (Abb. 1-2). Auf Erlebnisspielplätzen gibt es etwas zu tun. Da wird gewerkelt, entdeckt, da lernt man, im geschützten Raum kleine Probleme zu lösen. Da wird Selbstwirksamkeit erlebt und auch „Mathe hat mit mir zu tun", „Mathe ist sinnvoll", „Mathe macht Spaß". Krankenhäuser sind natürlich auch sehr nützliche Einrichtungen. Da werden Dinge eingeführt, da wird behandelt, besprochen, untersucht, diagnostiziert und getestet … aber Freude kommt erst auf, wenn man das Krankenhaus verlassen kann.

Wir wünschen uns also, dass Mathematikunterricht (wenigstens ab und zu) aussieht wie in Abb. 1-1, nicht wie in Abb. 1-2.

Die Abb. 1-1 könnte für „realistischen" Mathematikunterricht stehen, den Hans Freudenthal wie folgt charakterisieren würde:

- Stelle einen Kontext ins Zentrum,
- gib Schülerinnen und Schülern Raum, sich aktiv mit diesem Kontext auseinanderzusetzen,
- langweile sie nicht mit Formalismen.

Abb. 1-1: Erinnert an einen Erlebnisspielplatz

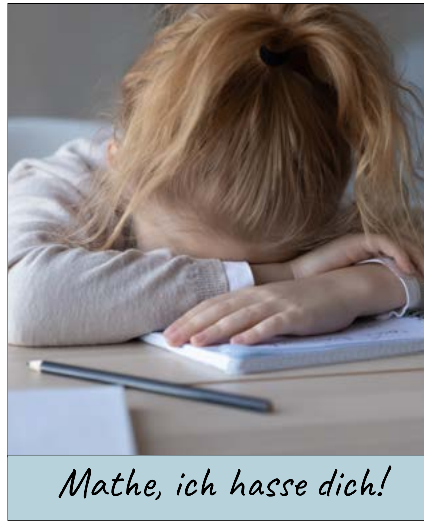


Abb. 1-2: Erinnert an ein Krankenhaus

Das Experiment „Hol die OMA aus der Socke“ (S. 14) zeigt exemplarisch, wie ein „realistischer“[1], gleichermaßen kognitiv wie emotional aktivierender Einstieg in die Stochastik aussehen kann, in dem Laplace-Wahrscheinlichkeiten mit Bauchgefühl und beschreibender Statistik verknüpft werden.

Die Abb. 1-2 ist als Postkarte in jedem Kiosk zu kaufen. Sie zeigt, wie Matheunterricht erlebt wird, wenn man die Forderung nach Wissenschaftspropädeutik z. B. dadurch einzulösen versucht, dass man den Begriff Zufallsexperiment definiert *statt* Zufallsexperimente durchzuführen und dabei den Zufall zu erleben – oder wenn man Teilmengen von Grundräumen Wahrscheinlichkeiten zuordnet*, bevor* man Kinder erleben lässt, wie viel Wahrscheinlichkeiten mit Bauchgefühl zu tun haben.

> „Ein Zufallsexperiment ist ein Versuchsaufbau mit ‚zufälligem‘ Ausgang, d. h. das Ergebnis kann nicht vorhergesagt werden.“
>
> (Institut für Bildungsanalysen Baden-Württemberg 2023)[2]

1 Realistisch bedeutet für Freudenthal nicht, dass die Situation der Alltagsrealität entstammt, sondern dass sie für die Kinder bedeutsam ist. Als bloße Rechenaufgabe wäre OMA „Würfelbudenmathematik“, würde man nur experimentieren und durch Strichlisten protokollieren, wäre das „Erbsenzählerei“. Die Kombination Spekulieren-Experimentieren-Reflektieren (Paradigma 5 auf der übernächsten Seite) baut Brücken zwischen Modell- und Realitätsebene und die OMA in der Socke dient anspruchsvoller Begriffsbildung. Auf den Kontext kommt es an!

2 https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/sonstiges/basis/basis_daten/Basiswissen_Daten_Zufall.pdf (Zugriff: 23.02.2023)

Leider beschreibt Abb. 1-2 noch zutreffender, wie sich Abiturientinnen und Abiturienten fühlen, wenn sie bei Signifikanztestaufgaben herausfinden müssen, wo in konstruierten Kontexten über unterstellte Interessenlagen Nullhypothesen versteckt wurden (vgl. Kap. 8.3) statt – Abb. 1-1 entsprechend – eigene (im Sinne Freudenthals „realistische“) Hypothesen aufstellen, Testgrößen selber erfinden und deren Wirkungsweise erproben zu dürfen (vgl. Kap. 3). Abiturientinnen und Abiturienten lernen so, Signifikanztests formal durchzurechnen. Sie können die Rechenergebnisse aber nicht angemessen deuten, setzen statistische Signifikanz mit inhaltlicher Relevanz gleich und glauben, was manch ein Erklärvideo unter Rückgriff auf subjektive Alltagswahrscheinlichkeiten weismachen möchte:

> „Wenn man eine Hypothese auf dem Signifikanzniveau (mit der Irrtumswahrscheinlichkeit) 5 % verwerfen konnte, dann gilt die Alternative mit 95 %iger Sicherheit.“
>
> (https://www.youtube.com/watch?v=55Q92wc23nE, Zugriff: 23.03.2023)

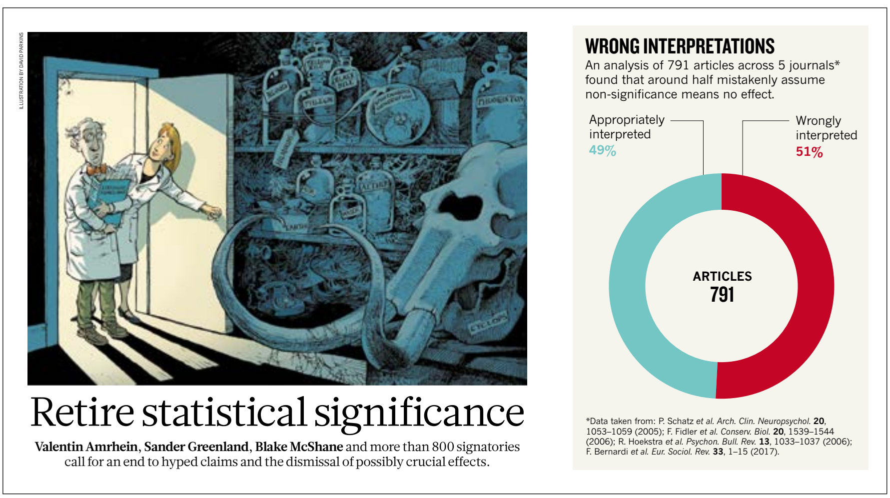


Abb. 1-3: Amrhein u. a. in Nature 305. 21.03.2019

Außerhalb des Schulunterrichts – bei den Anwendern statistischer Verfahren in der empirischen Forschung – sieht es nicht besser aus. Der in Abb. 1-3 zitierte Aufruf dreier Statistiker, die statistische Signifikanz in den Ruhestand zu entsorgen, weil die Ergebnisse erschreckend häufig falsch interpretiert werden, wurde binnen einer Woche von 800 Fachkolleginnen und Fachkollegen unterzeichnet. Das sorgte im Frühjahr 2019 für beachtliche mediale Aufmerksamkeit.

„Hol die OMA aus der Socke."

Eine der schönsten Einstiegsstunden in die Stochastik: Wie man Zufall *erlebt,* nebenbei die Pfadregel entdeckt und Wahrscheinlichkeitsrechnung mit beschreibender Statistik koppelt.

Sie legen als Preis einen Euro auf das Pult und verkünden: Wer beim blinden Hineingreifen in die Socke nacheinander die Buchstaben O-M-A zieht, gewinnt den Euro!

Sina ist die erste. Sie erwischt das M: „Mist …!" und reicht die Socke an

Paul. Der zieht das O: Glückshormone! Aufkeimende Hoffnung! ALLE fiebern mit! Bis in die letzte Reihe! Und dann das A! Frust …! Nicht nur bei Paul. Die aufkeimende Hoffnung ist abgestürzt.

Aylin ist dran. Sie erwischt das A … und übergibt, an

Maja. Die zieht O-M – und großer Jubel – schon vor dem dritten Zug!

Abb. 1-4

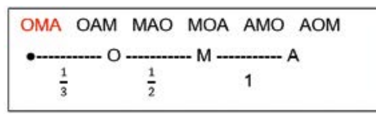


Abb. 1-5: Sechs Kombinationen notieren oder Pfadregel entdecken.

Nichts ist lohnender als dieses Experiment auszuhalten, auch wenn die OMA sich nach 12 Versuchen noch nicht hat blicken lassen … und einen weiteren Euro zu spendieren, wenn „OMA" direkt beim ersten oder zweiten Versuch kam.

In vielen Klassen braucht man die Frage nach der Chance für OMA (= $\frac{1}{6}$) nicht einmal zu stellen, die beantworten die Kinder in der allerersten Stochastikstunde selber, indem sie die sechs Kombinationen notieren … oder die im Bauch gefühlten Emotionen in Zahlen übersetzen und die Pfadregel allen Lehrplänen zum Trotz schon in der ersten (!) Stochastikstunde entdecken: In einem Drittel aller Fälle erwischt man das O. Dann sind aber nur noch zwei Buchstaben da, es steht für das M dann „fifty-fifty" und die Hälfte von $\frac{1}{3}$ ist die Lösung: $\frac{1}{6}$ vgl. Abb. 1-5. Den Erwartungswert entdeckt man gleich mit: Wenn 30 Kinder in der Klasse sitzen, wird man im Schnitt 5 Münzen bereithalten müssen, wenn jeder einmal sein Glück probieren darf. Das ist die gleiche Struktur wie beim Warten auf die 6 beim Würfeln – aber die OMA ist deutlich gehaltvoller. Und die OMA dokumentiert, wie viel Stochastik im Unterricht stattfinden kann, bevor man die Vokabeln Zufallsexperiment, Grundraum, Ergebnis, Ereignis … erwähnt. Und was ändert sich, wenn man die OMA zweimal in die Socke legt oder ein P hinzufügt, sodass man nicht nur bei OMA, sondern auch bei OPA gewinnt? Verdoppelt sich die Gewinnchance? Gute Frage! Man kann sie durch Experimentieren beantworten oder durch Nachdenken – und dabei die Pfadregel lieben lernen!

1.2 Stolpersteine, kritische Stimmen

Was läuft falsch in der Schule – und offensichtlich auch danach – wenn Statistiker dazu aufrufen, Teile des von ihnen geschaffenen Werkzeugkoffers in den Ruhestand zu entsorgen, weil Anwendende mit diesen Werkzeugen Unfug treiben? Bei der Suche nach einer Antwort auf die Frage hilft ein Blick zurück in die 1980er-Jahre, als sich Stochastik neben Algebra und Geometrie als dritte Säule der Schulmathematik zu etablierten begann. Es war die Zeit der Strukturmathematik – und auf der Suche nach „wissenschaftspropädeutischen“ Unterrichtskonzepten diente die Hochschulsystematik als „Kopiervorlage“ samt der bis heute unverändert praktizierten Trennung von beschreibender Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilender Statistik. Hier zwei mahnende Stimmen, die nichts von ihrer Aktualität eingebüßt haben:

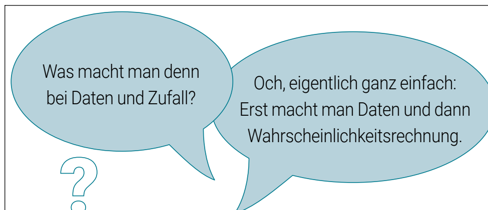
Hans Schupp

So notierte Hans Schupp (1982, S. 210) als Vorsitzender der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik:

> „Lehrgänge, die sich an der Fachsystematik orientieren, trennen wahrscheinlichkeitstheoretische und statistische Gedankengänge strikt voneinander, obwohl sie *erkenntnistheoretisch* und *lernpsychologisch* aufs engste miteinander verwoben sind […] In den meisten Mathematikwerken stehen statistische und wahrscheinlichkeitstheoretische Passagen nahezu beziehungslos (und zuweilen mit falschem Bezug) hintereinander“.

Seine Kritik lässt sich treffend zusammenfassen in einem Bonmot, das vielerorts auch heute noch die schulische Praxis charakterisiert:

- Statistik ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung ist blind („Erbsenzählerei“).
- Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Statistik ist leer („Würfelbudenmathematik“).



Situationsbeschreibung durch M. Vogel auf einer Tagung im Dezember 2022

Deskriptive Statistik
- Häufigkeitsverteilungen
- Maßzahlen
- Zusammenhangmaße
- Regression

Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Spezielle Verteilungen

Induktive Statistik
- Testtheorie
- Schätztheorie (Intervallschätzung)

Struktur einer Vorlesung „Statistik für Mediziner“: Beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende (induktive) Statistik werden strikt voneinander getrennt.

Abb. 1-6

Tatsächlich arbeitete man in den 1980er-Jahren in der deskriptiven Statistik ausschließlich in der *Realitätsebene* – und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Laplace-Wahrscheinlichkeiten, Kombinatorik, Pfad- und Summenregel dann ausschließlich auf der *Modellebene*.

Dass sich daran bis heute vielerorts wenig geändert hat, bringt die Karikatur Abb. 1-6 von Markus Vogel auf den Punkt.

Hermann Dinges

Auch Hermann Dinges (1980, S. 50) hinterfragt die strikte Orientierung der Schulcurricula an Hochschulvorlagen mit den Worten:

> „Stochastik muss auf der Schule als eigenständige Unternehmung gesehen werden, die weder durch Elementarisierung aus der bestehenden Universitätsstatistik noch durch Verkleinerung aus der heutigen Praxis abgeleitet werden kann."

Zum Wahrscheinlichkeitsbegriff hält er fest:

> „Der objektivistische Wahrscheinlichkeitsbegriff, der sich an Urne und Glücksrad orientiert, scheint gut geeignet am Anfang des Stochastikunterrichts zu stehen. Er hat aber Grenzen. Die Bayes'sche Formel passt nicht dazu; sie braucht den subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff. Die höhere Wahrscheinlichkeitstheorie braucht den Begriff der Hypothese […].
> Viele Schulbücher scheinen entschlossen, die natürlichen Denkansätze über den Zufall bedenkenlos mit den aus der Strukturmathematik gewohnten Prinzipien des Mathematiklernens zu überrollen. Ebenso wenig werden die Vorstellungsweisen der statistischen Praxis vorbereitet […]." (Dinges 1978, S. 113, 121)

1.3 Paradigmen

Den Schlüssel zur Lösung der von H. Schupp, H. Dinges und letztendlich auch von V. Amrhein u. a. beschriebenen Probleme liefert Lothar Sachs (1999, S. 10) in seinem Handbuch der angewandten Statistik in einer eher beiläufig eingestreuten Anmerkung, die zweifellos auch von Freudenthal hätte stammen können:

> „Der Erklärungswert statistischer Verfahren lässt sich nur an ausführlich dargestellten Fallbeispielen aufzeigen. Um eine nachhaltige Wirkung zu erzielen, sollte das Thema interessant sein und zu aufschlussreichen Resultaten führen." (Sachs 1999, S. 10)

Wir stellen solche „Fallbeispiele mit aufschlussreichen Resultaten" in das Zentrum dieses Buches, um schon in der Sekundarstufe I Statistik mit Wahrscheinlichkeitsrechnung zu vernetzen und Schülerinnen und Schüler langfristig gegen Fehlinterpretationen im Bereich der beurteilenden Statistik zu impfen. Dabei hat sich in der Unterrichtspraxis die Beachtung weniger einprägsamer Paradigmen, die uns durch das Buch begleiten, als überaus hilfreich erwiesen.

Paradigmen

(1) Pflege einen passenden Wahrscheinlichkeitsbegriff
(wir nennen ihn hypothetisch-prognostisch).
(2) Trenne Modell und Realität messerscharf und konsequent.
(3) Untersuche Zufallsschwankungen statt sie wegzuwünschen.
(4) Stelle authentische Probleme ins Zentrum.
(5) Nutze den „didaktischen Dreisatz" Spekulieren-Experimentieren-Reflektieren.

Die Fallbeispiele (insbesondere in den Kapiteln 2, 3 und 9) sorgen im Sinne der Paradigmen (4) und (5) nicht nur für Spannungsbögen, sondern im Sinne der Paradigmen (1) und (2) auch dafür, dass Schülerinnen und Schüler alle Wahrscheinlichkeiten, insbesondere auch die Laplace'schen, als vom Menschen gemachte Modelle erleben, die auf Erfahrungen beruhen, in Bezug auf die Realität hypothetischen Charakter haben, Erwartungen quantifizieren und Prognosen machen wollen. Im Sinne von H. Dinges erleben Schülerinnen und Schüler ab Klasse 7:

- dass es verschiedene Modelle (statistisch gesprochen: verschiedene Hypothesen) zur Vorhersage relativer Häufigkeiten gibt, denen man unterschiedlich viel Vertrauen schenkt;
- dass das (selten quantifizierbare) Vertrauen in unterschiedliche Hypothesen eine andere Qualität besitzt als die prognostischen Wahrscheinlichkeiten, die zu den Hypothesen gehören.

Statt das Unmögliche zu versuchen, nämlich den Begriff „Wahrscheinlichkeit" definieren zu wollen, lassen wir Paradigma (1) entsprechend Schülerinnen und Schüler erleben, wie Wahrscheinlichkeiten entstehen und wie man mit ihnen arbeitet. Paradoxerweise werden dabei Brücken geschlagen zwischen Freudenthals „realistischer" Mathematik und Kolmogoroffs axiomatischer Sicht auf Wahrscheinlichkeit.

Mithilfe des Paradigmas (3) lassen sich beschreibende und beurteilende Statistik schon in der Sekundarstufe I miteinander verknüpfen. Dies gelingt in Kapitel 3 durch das „Sortieren gefühlten Zweifels" und in Kapitel 4 über das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz (in seiner einfachsten Form für $p=\frac{1}{2}$). Der Vorzeichentest eröffnet spannende Anwendungsfelder und belegt, dass das Werfen von Münzen und das Rollen von Würfeln zum Gegenteil von Würfelbudenmathematik wird, wenn man Zufallsschwankungen untersucht und Kindern geeignete Probleme und Fragestellungen schenkt.

1.4 Resümee

Wir pflegen in diesem Buch eine „hypothetisch-prognostische" Wahrscheinlichkeitsinterpretation. Wir lassen Kinder erleben, wie alle Wahrscheinlichkeiten, die subjektivistischen, die Laplace'schen und die frequentistischen in uns Menschen als Modelle der Realität dadurch entstehen, dass aus unseren Erfahrungen Erwartungen werden. Da alle Wahrscheinlichkeiten Vorhersagen machen wollen, lassen sie sich durch Vergleich mit der Realität auf Brauchbarkeit prüfen. In Modellbildungsprozessen müssen sie evtl. modifiziert werden – und sie lassen sich trotz aller Vorläufigkeit für Rechnungen und weitere Prognosen nutzen.

Diese pragmatische Sicht auf Wahrscheinlichkeit als eines von uns Menschen gemachten überprüfbaren Modells, in das wir mehr oder weniger Vertrauen haben, hält Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik von Anfang an wie eine Klammer zusammen. Sie beantwortet die von H. Dinges und H. Winter aufgeworfenen Fragen so, dass auch Freudenthal mit seiner „realistischen Mathematik" seine Freude daran gehabt hätte – und vermutlich sogar A. N. Kolmogoroff, wenn er sich denn für die Didaktik interessiert hätte.

2 Wahrscheinlichkeit entsteht, wenn aus Erfahrung Erwartung wird

Darum geht es – das Wichtigste in Stichworten

- Schon in der Primarstufe werden subjektive Sicherheiten auf Skalen markiert. Diese Skalen zwischen unmöglich und sicher begleiten uns durch das ganze Leben.
- Mit Verfügbarkeit des Prozentbegriffs bekommen die subjektiven Sicherheiten nur durch die Normierung der Skalenenden 0 % und 100 % prognostischen Charakter, denn zu jeder Markierung gehört dann ein Prozentsatz und mit jedem Prozentsatz ist bei vorgegebenem Stichprobenumfang ein Prozentwert verbunden: die erwartete Häufigkeit.
- Durch Spekulieren und Experimentieren mit teilsymmetrischen Objekten bildet sich ein auch für die beurteilende Statistik tragfähiger prognostischer Wahrscheinlichkeitsbegriff, der auf Grundlage subjektivistischer Vorstellungen sowohl den Laplace'schen wie auch den frequentistischen umfasst.
- Wahrscheinlichkeiten werden erlebt als vom Menschen gemachte Modelle der Wirklichkeit, die einem Modellierungskreislauf unterliegen – und Lernende erleben, wie das Vertrauen in die Güte eines Modells vom Stichprobenumfang abhängt.
- Der für die beurteilende Statistik fundamentale Begriff des Konfidenzintervalls als eines Bereiches vertrauenswürdiger Modelle wird damit schon ab Klasse 7 intuitiv vorbereitet.
- Man erlebt, wie gut man über Pfad- und Summenregel mit prognostischen Wahrscheinlichkeiten rechnen und Vorhersagen machen kann. Und – das ist für Lernende zentral – die Prognosen lassen sich an der Realität überprüfen.

Experimente

- Mit Quadern „würfeln", Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufstellen und verbessern.
- Wahrscheinlichkeiten für Prognosen nutzen, Güte von Prognosen beurteilen.

2.1 Anknüpfen an alltägliche Vorerfahrungen

Im Alltag nutzen wir subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertungen, die auf Erfahrungen beruhen. Wie Abb. 2-1 belegt, werden sie in der Primarstufe auf einer Skala zwischen völlig unmöglich und ganz sicher lokalisiert.

Wenn Maike mehrmals mitbekommen hat, dass ihre Grundschullehrerin am letzten Schultag vor den Ferien ein Eis spendiert hat, wird sie sich auf der Skala nahe bei „ganz sicher“ (vielleicht bei 8 von 10) positionieren, wenn sie nach ihrer Einschätzung für den kommenden letzten Schultag befragt wird. Aus ihrer *Erfahrung* ist *Erwartung* geworden.

Sobald Schülerinnen und Schüler mit dem Prozentbegriff vertraut sind, wird das untere Skalenende „völlig unmöglich“ vom Lehrer (!) mit 0 % und das obere „ganz sicher“ mit 100 % beschriftet. **Diese Beschriftung** ist ein Kunstgriff, dessen Genialität für die Begriffsbildung in der didaktischen Literatur bisher noch an keiner Stelle gesehen wurde.[3]

Nur durch die Beschriftung der Ränder erhält jede Stelle der Skala nämlich urplötzlich die Bedeutung eines Prozentsatzes. Und Siebtklässler wissen, dass bei festem Grundwert n zu jedem Prozentsatz p der Prozentwert n · p gehört. Bei reproduzierbaren Situationen ist n die Versuchszahl und n·p wird zur erwarteten Häufigkeit, kurz zum Erwartungswert, um den herum die Ergebnisse zufällig pendeln.

Die Kiewer Führung hält ein Eingreifen von Belarus an der Seite Russlands in den Krieg gegen die Ukraine aktuell für wenig wahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit, dass der belarussische Präsident Alexander Lukaschenko sich für eine Teilnahme am Krieg entscheide, liege „bei 15 bis 20 Prozent“, sagte der ukrainische Präsidentenberater Olexij Arestowitsch nach Angaben der Agentur Unian.

https://www.boerse-online.de/nachrichten/aktien/kein-sofortigeseingreifen-von-belarus-die-nacht-im-ueberblick-1031300215

Wie wahrscheinlich würden Sie SATURN aufgrund Ihrer letzten Erfahrung mit unserem Reparaturservice im SATURN-Markt Koeln 3 (Weiden) einem Freund, Bekannten oder Kollegen empfehlen?

sehr unwahrscheinlich										sehr wahrscheinlich
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

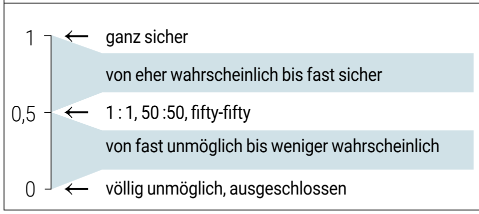


Abb. 2-1: a), b) subjektive Wahrscheinlichkeiten im Alltag und c) in der Primarstufe gemäß Krüger u. a. 2015.

Damit wurde der qualitative subjektivistische Wahrscheinlichkeitsbegriff der Primarstufe quantitativ-prognostisch.

So wird die Stelle 25 % bei n = 300 Wiederholungen mit der erwarteten Häufigkeit 300 · 0.25 = 75 verknüpft. Sollte dann bei vielen 300er-Versuchen das fragliche Ergebnis immer wieder deutlich unter der Erwartung 75 liegen, korrigiert man die Angabe 25 % nach unten. Und damit hat man die Schlei-

3 Auf einer Fachdidaktik-Tagung wurde dieser Gedanke kürzlich als „die Entdeckung des missing link zwischen Primar- und Sekundarstufenstochastik“ bezeichnet.