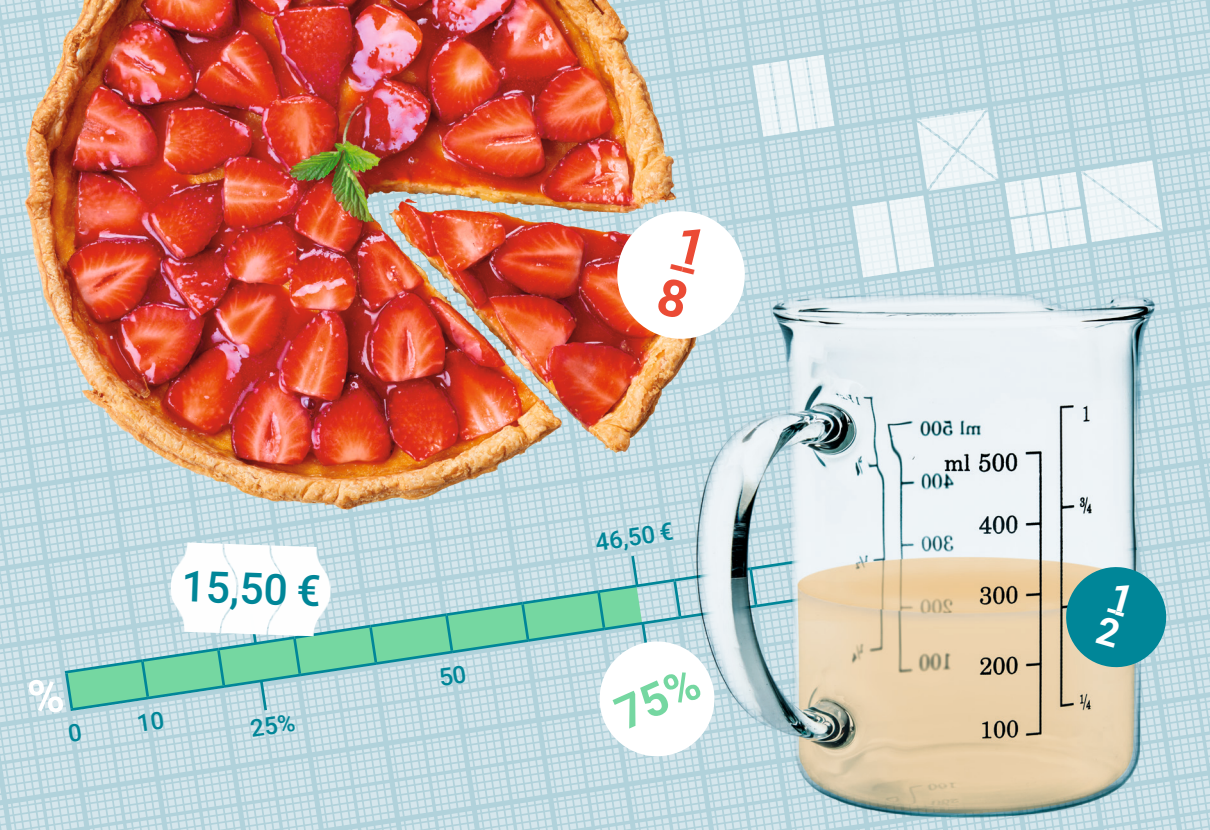




Berthold Eckstein

Brüche, Dezimalzahlen und Prozente darstellen und verstehen

Unterricht, Förderung und Lerntherapie

Berthold Eckstein

Brüche, Dezimalzahlen und Prozente darstellen und verstehen
Unterricht, Förderung und Lerntherapie

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Impressum

Berthold Eckstein

Brüche, Dezimalzahlen und Prozente darstellen und verstehen

Unterricht, Förderung und Lerntherapie

1. Auflage 2023

Das E-Book folgt der Buchausgabe: 2. Auflage 2023

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.

© 2019. Kallmeyer in Verbindung mit Klett

Friedrich Verlag GmbH

D-30159 Hannover

Alle Rechte vorbehalten.

www.friedrich-verlag.de

Redaktion: Dirk Haupt, Leipzig

Fotos: B. Eckstein; Cover (Messbecher), S. 117 © emuck/stock.adobe.com;

Cover (Torte) © asife/stock.adobe.com

Realisation: Stefan Zielasko

E-Book Erstellung: Friedrich Verlag GmbH, Hannover

ISBN: 978-3-7727-1285-2

Berthold Eckstein

Brüche, Dezimalzahlen und Prozente darstellen und verstehen

Unterricht, Förderung und Lerntherapie

Klett | Kallmeyer

Vorwort	7
Gebrauchsanleitung	8
1 Das zentrale Ziel: Aufbau von Grundvorstellungen	11
2 Das erste Knopfloch: Aufgaben für den Einstieg	18
2.1 Papier falten (fortlaufende Halbierungen)	19
2.2 Lakritzschnecken teilen	23
2.3 Pizzen gerecht teilen	25
2.4 Quadrate unterschiedlich teilen	28
2.5 Anordnung von Rechenplättchen in zwei Farben	29
3 Das Geheimnis lüften: Entwicklung des Bruchzahlverständnisses mit gewöhnlichen Brüchen	32
3.1 Pizza, Torten oder Sand aufteilen	34
3.2 Bruchteile von Flüssigkeiten	36
3.3 Bruchteile von Uhrzeiten	38
3.4 Bruchteile von Geldbeträgen	40
3.5 Bruchteile von Strecken	41
3.6 Bruchzahlen am Geobrett darstellen	42
3.7 Quadratunterteilungen	45
3.8 Parallelenschar	48
3.9 Rechtecke auf kariertem Papier in Bruchteile zerlegen	50
3.10 Bruchalbum – ein Projekt	51
4 Unverzichtbar: Die Darstellung von Bruchzahlen am Zahlenstrahl	55
4.1 Bruchstreifen zur Darstellung von Brüchen und Dezimalzahlen	59
4.2 Bruchstreifen zur Darstellung von Bruchteilen einer Menge	61
4.3 Doppelleisten zur Darstellung von Prozentsätzen und Prozentwerten	64
4.4 Darstellung gleich großer Anteile mit unterschiedlichen Brüchen (Bruchzahlentafel)	66
4.5 Vernetztes Wissen: Brüche, Dezimalzahlen und Prozente am Zahlenstrahl	69

5 Ein anderer Blickwinkel: Die Darstellung von Dezimalzahlen mit Decimats, Mehrsystemblöcken	71
5.1 Decimats	72
5.2 Mehrsystemblöcke	78
5.3 Stellentafel	80
6 Hintergrundwissen: Die Darstellung von Rechenoperationen mit Bruchzahlen am Zahlenstrahl und am Rechteck	82
6.1 Addition und Subtraktion	85
6.2 Multiplikation	87
6.3 Division	89
7 Vernetztes Wissen: Übungen und Spiele zu Brüchen, Dezimalzahlen und Prozenten	94
7.1 Bruchzahlen-Oktett	95
7.2 Brüche würfeln	103
7.3 „Bruchteile finden“ – ein Übungs- und Spielformat	105
7.4 Faktenwissen über Bruchzahlen aufbauen	108
7.5 Preis- und Mengenangaben – ungewöhnlich dargestellt	111
8 Der Intuition fernliegend: Warum Bruchzahlen den Lernenden Kopfzerbrechen bereiten	115
8.1 Grundvorstellungen zu Bruchzahlen	117
8.2 Das Problem des zählenden Rechnens und des fehlenden Stellenwertverständnisses	121
8.3 Gegen die Intuition: Die Zahleigenschaften von Bruchzahlen	124
9 Häufig unterschätzt: Sprachliche Hürden	131
9.1 Bildungssprache und Fachsprache	132
9.2 Die Konstruktion der Zahlwörter im Deutschen	134

Schluss	139
Literatur	140
Übersicht Downloadmaterialien	142

Verzeichnis der Infokästen			
Infokasten 1	Grundvorstellungen	Kapitel 1	Seite 11
Infokasten 2	Brüche, Bruchzahlen, rationale Zahlen	Kapitel 1	Seite 13
Infokasten 3	fundamentale Ideen	Kapitel 4	Seite 56
Infokasten 4	Bruchfamilien	Kapitel 4	Seite 58
Infokasten 5	In vier Phasen vom konkreten zum gedanklichen Handeln	Kapitel 5.1	Seite 75
Infokasten 6	Gleichsetzung von „mal“ und „von“ bei der Multiplikation mit Bruchzahlen	Kapitel 6	Seite 84
Infokasten 7	Grundvorstellungen zur Division	Kapitel 6.3	Seite 90
Infokasten 8	Bildungssprachliche Hürden des Deutschen im Kontext mathematischen Lernens	Kapitel 9.1	Seite 133

Vorwort

Während der Arbeit am Manuskript für dieses Buch habe ich in einem berufsvorbereitenden Mathematikkurs Hassan, einen 16-jährigen Jugendlichen mit marokkanischen Wurzeln, kennengelernt. „Ich hasse Brüche!“, so erinnerte er sich an den Mathematikunterricht in der Klasse 6 einer Gesamtschule. Er war an der Bruchrechnung grundlegend gescheitert und musste am Ende des Schuljahres auf eine Förderschule mit dem Förderschwerpunkt *Lernen* wechseln.

Die Arbeit mit Hassan und vielen anderen Jugendlichen und jungen Erwachsenen ermöglichte mir in den letzten Jahren immer wieder eine rückblickende Betrachtung von Lernbiografien, die im mathematischen Bereich wenig erfolgreich verlaufen waren. Meist nicht mit so dramatischen Einschnitten wie bei Hassan. Manche der jungen Menschen haben sich am Ende ihrer Schulzeit entschieden, an ihren zwischenzeitlich erworbenen Ausweich- und Kompensationsstrategien festzuhalten und Angebote zum nachholenden mathematischen Lernen auszuschlagen. Andere haben sich dem Problem gestellt und haben oft in erstaunlich kurzer Zeit Dinge gelernt, an denen sie früher gescheitert waren. Diese jungen Menschen haben ganz entscheidend an der Entstehung dieses Buches mitgewirkt. Ich durfte sie beim nachholenden mathematischen Lernen begleiten. Ihre Lernerfolge haben mich ermutigt, Dinge auszuprobieren. Ihre Rückmeldungen haben mir geholfen, ein tragfähiges Konzept für den Erwerb des Bruchzahlverständnisses zu entwickeln. Denn die Erweiterung des Zahlbegriffes von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen – und dafür braucht man das Bruchzahlverständnis – erwies sich immer wieder als ein Nadelöhr in den Lernbiografien dieser jungen Leute. Ohne das Bruchzahlverständnis hatten sie im Mathematikunterricht ihrer weiteren Schulzeit keine Chance.

Mein herzlicher Dank gilt Karin Kempfer und Sabine Rübartsch, die das Manuskript sorgfältig gelesen haben. Sie haben mit ihren kritischen Rückmeldungen ganz wesentlich zur inhaltlichen Klarheit und zur Verständlichkeit der Texte beigetragen. Meine Tochter Nathalie hat mich immer wieder auf sprachliche Schwächen und Ungereimtheiten hingewiesen. Danke!

Wuppertal, im Juni 2018

Gebrauchsanleitung

Dieses Buch bietet Ihnen eine Fülle von Ideen und Materialien, mit denen Sie Lernende jedes Alters an Brüche, Dezimalzahlen und Prozente heranführen können. Mathematisch geht es um die Erweiterung des Zahlbegriffes von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen und schließlich zu den rationalen Zahlen. Damit dies gelingt, muss der Aufbau des Bruchzahlverständnisses im Mittelpunkt der Arbeit stehen. Ziel der Arbeit sollte sein, dass die Lernenden Fragen wie diese beantworten können:

- ▶ Was bedeutet $\frac{3}{8}$? Wie kann man diese Zahl verständlich darstellen?
- ▶ Was ist mehr: 0,4 oder $\frac{3}{8}$? Wie kann man das ohne Taschenrechner herausfinden?
- ▶ 25 %, 0,25 und $\frac{1}{4}$. Drei Bezeichnungen für denselben Anteil?
- ▶ $3 : \frac{1}{8} = 24$ und $60 \cdot 0,2 = 12$. Stimmt das? Kann eine Zahl durch Multiplizieren kleiner und durch Dividieren größer werden?
- ▶ Was ist mehr: 25 % von 20 oder 20 % von 25? Oder ist das gleich viel?
Wie kann man das ohne Taschenrechner herausfinden?

Je nach Arbeitsfeld und abhängig vom Lernstand, unterscheiden sich die Ziele und die Arbeitswege erheblich. Im **Unterricht der Sekundarstufe I** geht es um die Einführung von Bruchzahlen, um das Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen und um die Prozentrechnung. In der **begleitenden Förderung** oder **Lerntherapie** geht es darüber hinaus um das Nacharbeiten grundlegender mathematischer Kenntnisse und Fähigkeiten. In der **nachholenden Grundbildung** für Erwachsene geht es um die Vermittlung von mathematischem Wissen, das in der Ausbildung oder am Arbeitsplatz unverzichtbar ist.

Die Entwicklung des Bruchzahlverständnisses gelingt nicht in wenigen Wochen oder gar Tagen. Nach meiner Erfahrung müssen Sie den Lernenden mehrere Monate, vielleicht auch ein bis zwei Jahre, Zeit geben, um sich immer wieder und aus unterschiedlichen Perspektiven mit Bruchzahlen auseinanderzusetzen. Machen Sie sich gemeinsam mit den Lernenden auf den Weg. Stellen Sie sich auf eine lange und bisweilen mühsame Reise ein. Hinsichtlich des Unterrichts in der Sekundarstufe I fordert dieses Buch zum Umdenken auf. Das Rechnen mit Brüchen, Dezimalzahlen und Prozenten erledigen heute die überall verfügbaren elektronischen Rechner. Nachhaltiges Lernen ist nur möglich, wenn die Schülerinnen und Schüler zu einem fundierten Bruchzahlverständnis kommen.

Die einzelnen Kapitel dieses Buches sind in sich verständlich, sie können in beliebiger Reihenfolge gelesen werden. Wenn Sie sich vorab über die Herausforderungen informieren wollen, die Lernende auf ihrem Weg zum Bruchzahlverständnis bewältigen müssen, sollten Sie mit **Kapitel 8** beginnen. Die Auseinandersetzung mit Bruchzahlen, so erfahren Sie dort, ist u. a. deshalb schwierig, weil die Zahleigenschaften von Bruchzahlen dem zuwi-

der laufen, was die Lernenden intuitiv über Zahlen wissen. Wenn Lernende zählende Rechner sind oder über kein gesichertes Stellenwertverständnis im Bereich der natürlichen Zahlen verfügen, ist der Erwerb des Bruchzahlverständnisses zusätzlich erschwert. **Kapitel 9** informiert über **sprachliche Hürden**, denen die Lernenden begegnen und die Sie unbedingt im Blick haben müssen. Mathematisches Lernen scheitert häufig an sprachlichen Problemen.

Wenn Sie hingegen Ideen und Materialien für die praktische Arbeit suchen, sollten Sie dem Aufbau des Buches folgen. In **Kapitel 1** lernen Sie meine **didaktische Position** kennen. Hier, wie an anderer Stelle, finden Sie Infokästen, die einige grundlegende Begriffe klären und die Dinge zusammenfassen. Auf ein Glossar habe ich hingegen verzichtet. Das Buch ist auch für mathematische Laien verständlich, kommt freilich nicht ohne mathematische Fachbegriffe aus. Im Zweifelsfall ziehen Sie bitte ein mathematisches Lexikon oder einschlägige Seiten im Internet zu Rate.

Ein guter **Einstieg in das Thema Bruchzahlen** ist wichtig. Deshalb finden Sie in **Kapitel 2** fünf Aufgaben, die erste Einsichten vermitteln, vor allem aber die Richtung angeben: Die Lernenden sollen von Anfang an die Erfahrung machen, dass es darum geht, die Dinge wirklich zu verstehen.

Gewöhnliche Brüche werden im Alltag selten verwendet, es dominieren Dezimalzahlen und Prozentangaben. Dennoch schlage ich vor, zur **Entwicklung des Bruchzahlverständnisses** Aufgaben mit gewöhnlichen Brüchen zu verwenden. In **Kapitel 3** wird dies begründet. Sie finden dort eine Reihe methodischer Möglichkeiten, aus denen Sie das für Ihre Lerngruppe Passende auswählen können.

Verständiger Umgang mit Bruchzahlen bedeutet, dass die Lernenden Bruchzahlen grafisch darstellen können oder didaktisches Material zur Darstellung von Bruchzahlen nutzen können. Die **Darstellung von Bruchzahlen am Zahlenstrahl** spielt dabei eine zentrale Rolle. Dies ist Gegenstand von **Kapitel 4**.

Dezimalzahlen, von den Lernenden häufig „Kommazahlen“ genannt, begegnen uns im Alltag auf Schritt und Tritt. Deshalb ist es naheliegend, zusätzlich zur Darstellung am Zahlenstrahl andere Möglichkeiten zu verwenden, Dezimalzahlen im Unterricht und in der Förderung darzustellen. Dies soll (und kann) den Lernenden helfen, den Stellenwert der Nachkommastellen zu verstehen. In **Kapitel 5** erfahren Sie, wie Sie die **Darstellung von Dezimalzahlen mit Decimats und Mehrsystemblöcken** sowie die **Stellentafel** dafür nutzen können.

Das Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen nimmt im Unterricht der meisten Schulen großen Raum ein, kann aber im beruflichen und privaten Alltag problemlos mit elektronischen Rechnern erledigt werden. Weil das schnelle und sichere Beherrschen von Rechenprozeduren drastisch an Bedeutung verloren hat, kann das Rechnen mit Bruchzahlen weitgehend zum

Aufbau von Bruchzahlverständnis, also von Hintergrundwissen, genutzt werden. In **Kapitel 6** wird gezeigt, wie die **Darstellung von Rechenoperationen mit Bruchzahlen am Zahlenstrahl und am Rechteck** hierbei helfen kann.

In **Kapitel 7** finden Sie einige Übungsformate, mit denen es gelingt, **vernetztes Wissen** aufzubauen. So erlangen die Lernenden **Faktenwissen über Bruchzahlen**.

Zu den Kapiteln 2, 3, 4, 5 und 7 gibt es **Downloadmaterial**, das Ihnen hilft, für die praktische Arbeit erforderliche Materialien zu erstellen. Eine Übersicht ist im Anschluss an das Literaturverzeichnis abgedruckt. Einige Downloadmaterialien sind auch als editierbare Word-Dateien verfügbar, sodass Sie die Dinge an den Lernstand und die Bedürfnisse Ihrer Lerngruppe anpassen können. Außerdem enthält das Downloadmaterial eine **Linkliste**, die den Zugriff auf online verfügbare Quellen zum Thema ermöglicht.

1 Das zentrale Ziel: Aufbau von Grundvorstellungen

Beim Unterricht selbst ist streng darauf zu achten, daß der Schüler zu selbstthätiger Auffassung und zu wirklichem Verständniß gelange. [...] Jeder Erkenntniß, welche gebildet werden soll, muß womöglich die entsprechende Grundanschauung, sei es in Wirklichkeit oder im Bilde, vorausgehen; das bloß mechanische Lernen ist auszuschließen.
(J. Löser: Lehrbuch für den Rechenunterricht in den deutschen Schulen. 1876, S. 4)

Schon vor fast 150 Jahre, so zeigt dieses Zitat aus einem damals weit verbreiteten Handbuch für Lehrer, war das Verstehen mathematischer Inhalte Ziel des Unterrichts und nicht das bloße Beherrschen von Rechenmethoden. Der heutige Mathematikunterricht verfehlt leider häufig dieses Ziel. Er verkommt allzu oft zu dem „bloß mechanischen Lernen“, vor dem das Lehrbuch aus dem Jahre 1876 ausdrücklich warnt. Die Folgen sind bekannt: Mathematik wird oft als „Horrorfach“ oder „Hassfach“ erlebt.

Das Verstehen mathematischer Begriffe und Inhalte ist ein vielschichtiger Prozess. Helmerich u. a. (2011, S. V) sprechen im Vorwort zu einem Sammelband mit dem Titel „Mathematik verstehen“ von „dem rätselhaften Übergang zwischen Unverständnis und Durchblick“. In der aktuellen mathematikdidaktischen Diskussion herrscht weitgehend Übereinstimmung, dass der Aufbau mathematischer Grundvorstellungen Voraussetzung für das Verstehen mathematischer Inhalte ist. Auch das Standardwerk zur Didaktik der Bruchzahlen (Padberg & Wartha 2017, S. 2) nennt den Aufbau von Grundvorstellungen „das zentrale Ziel von Unterricht“.



Infokasten 1: Grundvorstellungen

„Grundvorstellungen sind gedankliche Werkzeuge, die zu Zahlen, Operationen und Strategien aufgebaut werden können. Grundvorstellungen ermöglichen Übersetzungen zwischen Darstellungsebenen (etwa von symbolisch zu ikonisch) in Bezug auf Zahlen, Operationen und Strategien. Eine Grundvorstellung zur Bruchzahl kann aktiviert werden, wenn z. B. zwischen der symbolischen Darstellung $\frac{1}{6}$ und einem entsprechenden Bild übersetzt wird.“ (Wartha 2011, S. 8)

Der Kerngedanke des Grundvorstellungskonzepts, das hier aus Platzgründen nicht ausführlich dargestellt werden kann, lautet in etwa so: Im Unterricht und in der Förderung soll der Erwerb mathematischer Begriffe und Verfahrensweisen angeregt werden, indem konkrete Handlungen an geeigneten Materialien zu gedanklichen Operationen umgebaut werden. Die auf Handlungen bezogenen Vorstellungen der Lernenden werden entwickelt und mit mathematischen Inhalten verbunden.

Malle (1999, S. 69) formuliert die mit dem Grundvorstellungskonzept verbundene Zielvorstellung so: „Schüler sollen Inhalte nicht auf einer unverständenen verbalen oder symbolischen Ebene nachplappern können, sondern sich darunter etwas vorstellen können.“

Wartha (2011, S. 10) nennt diese Beispiele für Grundvorstellungen:

Grundvorstellungen zu Zahlen

- Natürliche Zahl als Anzahlangabe einer Menge (Kardinalzahlaspekt)
- Natürliche Zahl als Beschreibung einer Position (Ordinalzahlaspekt)
- Bruch als Anteil, Bruch als Operator
- Prozentsatz als Anteil

Grundvorstellungen zu Operationen

- Addieren als Hinzufügen, Zusammenfassen
- Subtrahieren als Wegnehmen, Vergleichen, Ergänzen
- Multiplizieren als Vervielfachen, Kombinieren, Strecken/Stauchen
- Dividieren als Verteilen, Aufteilen, Rückgängigmachen der Multiplikation

Grundvorstellungen zu Strategien

- Subtrahieren natürlicher Zahlen schrittweise über den Zehner
- Addieren von Brüchen über Finden einer gemeinsamen Unterteilung
- Multiplizieren von Zehnerzahlen über Analogiebildung
- Bestimmen eines Prozentwertes über eine Operatorkette oder einen Dreisatz

Handlungsbezogene Vorstellungen werden als „primäre Grundvorstellungen“ bezeichnet (vom Hofe 2014). Bei der Erweiterung des Zahlbegriffs von den natürlichen Zahlen auf die ganzen Zahlen und die Bruchzahlen werden zunehmend „sekundäre Grundvorstellungen“ benötigt, weil beim Rechnen mit negativen Zahlen oder mit Brüchen einfache handlungsbezogene Vorstellungen nicht mehr tragfähig sind. Sekundäre Grundvorstellungen werden nach dem Grundvorstellungskonzept u. a. am Zahlenstrahl entwickelt. Der Zahlenstrahl bzw. die Zahlengerade erlaubt eine umfassende, über den Bereich der natürlichen Zahlen hinausgehende, Darstellung von Zahlen und Rechenoperationen. Die Darstellung von Zahlen und Rechenoperationen am Zahlenstrahl ist abstrakter als eine gegenständliche Darstellung mit konkretem Material, sie knüpft aber an anschauliche Erfahrungen an.

Der Zahlenstrahl ist die beim Anfangspunkt Null beginnende lineare Darstellung von Zahlen. Die Zahlengerade ist der in den negativen Bereich verlängerte Zahlenstrahl. Die Terminologie ist in der Mathematikdidaktik uneinheitlich. Auch „Zahlenstrich“ oder „leerer Zahlenstrich“ sind gebräuchliche Bezeichnungen.

Dieses Buch möchte dazu beitragen, dass Lernende jedes Alters und in jeder Lernsituation sich mit „wirklichem Verständnis“ mit Bruchzahlen auseinanderzusetzen und Brüche, Dezimalzahlen und Prozentangaben in „selbstthätiger Auffassung“ darstellen können. Das Rechnen mit Bruchzahlen übernehmen heute, anders als vor 150 Jahren, die überall verfügbaren elektronischen Rechner. Dem sicheren Beherrschen von Rechenmethoden muss im Unterricht und in der Förderung heute viel weniger Zeit gewidmet werden, es geht vielmehr um den verständigen Umgang mit Taschenrechner, Smartphone und Computer. Der Aufbau von Grundvorstellungen zu den Bruchzahlen ist deshalb heute zweifelsohne die zentrale Aufgabe jedes Unterrichts und jeder Förderung.

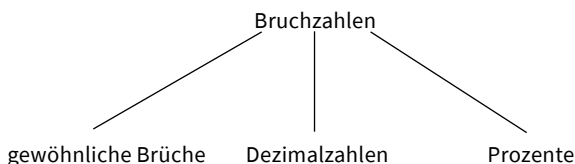


Infokasten 2: Brüche, Bruchzahlen, rationale Zahlen

Brüche und Bruchzahlen bezeichnen Größen, die entstehen, wenn das Ganze (beim Rechnen die Zahl 1) unterteilt wird. In der Zähler-Nenner-Schreibweise gibt die Zahl unter dem Bruchstrich (der Nenner) an, in wie viele gleich große Teile das Ganze geteilt wurde. Die Zahl über dem Bruchstrich (der Zähler) gibt an, wie viele von diesen Teilen in diesem Fall gemeint sind. $\frac{3}{4}$ bedeutet also, das Ganze wird in vier gleich große Teile geteilt, drei von diesen vier Teilen bilden die Bruchzahl.

Im Gegensatz zu den uns vertrauten natürlichen Zahlen gibt es zu jeder Bruchzahl unendlich viele Brüche, die den gleichen Wert darstellen. Durch feinere Unterteilung entstehen z. B. aus Vierteln Achtel, Zwölftel, Sechzehntel, Hundertstel usw. Die Brüche $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$ und $\frac{75}{100}$ haben also den gleichen Wert wie $\frac{3}{4}$, sie kennzeichnen den gleichen Anteil vom Ganzen. Diese Brüche sind also unterschiedliche Darstellungen derselben Bruchzahl. Dezimalzahlen und Prozente sind ebenfalls Bruchzahlen, sie stellen Bruchzahlen dar, die in der Zähler-Nenner-Schreibweise den Nenner Zehn, Hundert, Tausend ... haben. $\frac{75}{100} = 0,75 = 75\%$.

Der Begriff Bruchzahl wird als Oberbegriff für gewöhnliche Brüche (Zähler-Nenner-Schreibweise), Dezimalzahlen (Kommenschreibweise) und Prozente (durch das %-Zeichen als Hundertstelbrüche gekennzeichnet) verwendet.



Bruchzahlen ihrerseits sind ein Teil der rationalen Zahlen. Alle rationalen Zahlen, die größer als Null sind, also einen positiven Wert haben, werden als Bruchzahlen bezeichnet.

Wenn geeignete Grundvorstellungen zu Zahlen und Rechenoperationen vorhanden sind, gelingt den Lernenden die Darstellung dieser mathematischen Inhalte auf verschiedenen Repräsentationsebenen. Mithilfe geeigneter Grundvorstellungen können die Lernenden z. B. die Zahl $\frac{1}{3}$ am „Pizzamodell“ veranschaulichen, sie können die Zahl 0,42 mit Mehrsystemblöcken darstellen oder 40 % von einem bestimmten Eurobetrag am Zahlenstrahl ermitteln, ohne auf Formeln für die Prozentrechnung zurückzugreifen. Anders herum bedeutet dies: Wenn junge Menschen im Mathematikunterricht, in der Förderung oder in einer Lerntherapie lernen, Brüche, Dezimalzahlen und Prozente am Kreis, am Zahlenstrahl, mit geeignetem didaktischen Material oder in einer anderen Weise darzustellen, hilft ihnen dies wahrscheinlich beim Aufbau von Grundvorstellungen. Der Aufbau von Grundvorstellungen ist in jedem Fall eine eigenständige Leistung der jungen Menschen, die einige Anstrengung und Zeit benötigt.

Die Idee für dieses Buch ist in der Arbeit mit arbeitslosen jungen Menschen (17 bis 24 Jahre) entstanden, die sich auf eine berufliche Ausbildung vorbereitet haben. Ich habe sie dabei unterstützt, fehlende schulische Grundlagen nachzuarbeiten und sich auf Einstellungstests und die Anforderungen einer beruflichen Ausbildung vorzubereiten. Die jungen Menschen waren Teilnehmerinnen und Teilnehmer eines Projekts zur beruflichen Eingliederung. Sie hatten alle einen Schulabschluss (zu einem erheblichen Teil sogar Realschulabschluss, Fachabitur oder Abitur). Ihnen fehlte aber mathematische Grundbildung, wie sie die Betriebe für die Vergabe einer Ausbildungsstelle voraussetzen (Näheres zu dem Projekt und zum mathematischen Lernstand der Teilnehmerinnen und Teilnehmer siehe Eckstein 2016). Ein zentrales Problem der jungen Leute und somit Schwerpunkt meiner Arbeit waren fehlende Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. Dies führte dazu, dass die jungen Leute bei Einstellungstests eklatant versagten. Tabelle 1 zeigt einige typische Fehllösungen, wie ich sie immer wieder beobachten konnte.

Um den jungen Menschen zu helfen, tragfähige Zahlvorstellungen zu Brüchen, Dezimalzahlen und Prozenten aufzubauen, habe ich Arbeitsschritte erprobt, die in der mathematikdidaktischen Literatur beschrieben sind. Ich musste keineswegs „das Rad neu erfinden“, sondern konnte aus dem Vollen schöpfen. Dieses Buch ist das Ergebnis mehrjähriger Recherchearbeit und praktischer Erprobung. Es stellt verschiedene Ideen, Modelle und Ansätze zusammenhängend vor.