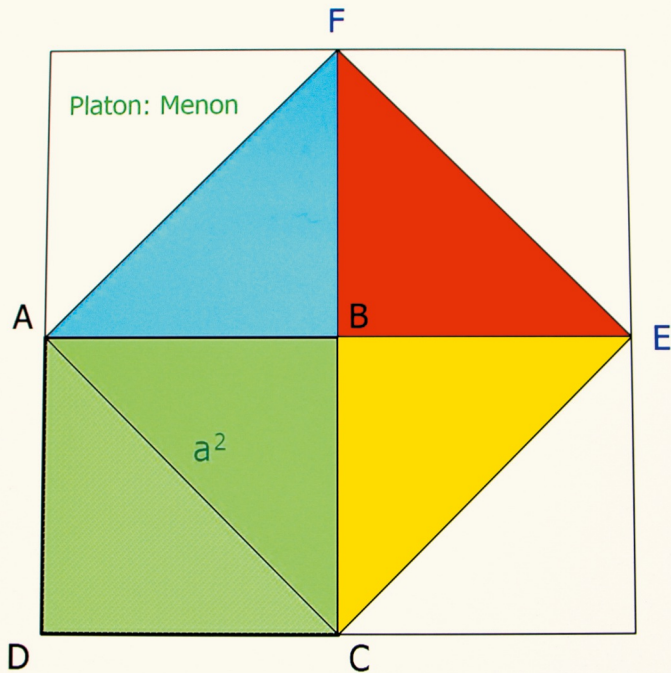


Reinhard Gobrecht

Philosophie der Mathematik

Mathematische Philosophie



Logik - Mathematik - Philosophie

Gobrecht

-

Philosophie der Mathematik

Mathematische Philosophie

Reinhard Gobrecht

Philosophie der Mathematik

Mathematische Philosophie

Die automatisierte Analyse des Werkes, um daraus Informationen insbesondere über Muster, Trends und Korrelationen gemäß § 44b UrhG („Text und Data Mining“) zu gewinnen, ist untersagt.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über www.dnb.de abrufbar.

© 2024 Reinhard Gobrecht

Internet:  www.reinhardgobrecht.de

Coverbild: Quadratverdopplung nach Platon, Menon

Herstellung und Verlag:
BoD - [Books on Demand](http://www.bod.de), Norderstedt
ISBN: 978-3-7583-5996-5

Inhaltsverzeichnis

Einführung	11
Abkürzungsverzeichnis und verwendete Symbole	16
1 Arithmetik und Zahlentheorie	19
1.1 Existieren unendlich viele Primzahlen wirklich?	19
1.2 Warum gibt es nicht messbare Größen wie $\sqrt{2}$?	21
1.3 Welche Erkenntnisse bringt uns das Pascalsche Dreieck?	23
1.4 Machen $2 + 2$ und $2 * 2$ denselben Sinn?	25
1.5 Was sind Dreieck- und Rechteckzahlen?	26
1.6 Was sind vollkommene Zahlen?	28
1.7 Wie ist die Beziehung zwischen ungeraden Zahlen und Quadratzahlen?	30
1.8 Was ist eine Mersenne-Zahl?	32
1.9 Was bedeutet Platons Zahl 5040 aus den Gesetzen?	33
1.10 Was bedeutet Wechselwegnahme?	34
1.11 Was besagt das Sieb des Eratosthenes?	36
1.12 Wie ist der Zusammenhang zwischen ungeraden Zahlen und Kubikzahlen?	38
1.13 Wieso ist die Summe einer 1. Hälfte von ungeraden Zahlen stets ein Drittel der Summe der 2. Hälfte dieser ungeraden Zahlen?	40
1.14 Woher wissen wir, wie eine Folge von Zahlen wirklich fortgesetzt wird?	42
1.15 Was kann man durch magische Quadrate erfahren?	44
2 Geometrie	46
2.1 Wieso handelt die Geometrie von den ewigen Dingen?	46

2.2 Welche tiefere Bedeutung kann man dem Dreieck zuschreiben?	48
2.3 Worin besteht die Ökonomie eines Sechsecks?	51
2.4 Kann es mehr als fünf platonische Körper geben?	53
2.5 Wie lang ist die Seite eines vom Inhalt doppelt so großen Quadrates bzgl. eines vorgegebenen Quadrates?	55
2.6 Kann man eine unendliche Gerade zu Ende gehen?	57
2.7 Warum stimmen Kreisbogen und Gerade im Unendlichen überein?	58
2.8 Was bedeuten Punkt und Linie?	59
2.9 Kann man irrationale Zahlen konstruieren?	62
2.11 Kann man binomische Formeln veranschaulichen?	66
2.12 Welchen Nutzen hat der Ähnlichkeitssatz?	68
2.13 Was ist die tiefere Bedeutung eines Kreises?	70
2.14 Warum beträgt die Winkelsumme im Dreieck 180° ?	74
2.15 Warum ist jeder Winkel im Halbkreis ein Rechter?	76
2.16 Wie schätzte Archimedes die Kreiszahl π ab?	79
2.17 Was besagt der Höhensatz des Euklid?	84
2.18 Wie alt ist der Satz des Pythagoras und wie kann man ihn beweisen?	87
2.19 Wie hängen Erscheinung und Gesetzmäßigkeit eines Kreises zusammen?	90
2.20 Wie entstehen geometrische Begriffe und wie ist ihr Bezug zur Anschauung?	93
3 Mengenlehre	95
3.1 Gibt es unendliche Mengen wirklich?	95
3.2 Kann es unendlich viele Wahrheiten geben?	97

3.3 Wann sind zwei Anzahlen gleich?	98
3.4 Welche Bedeutung hat das Schubfachprinzip?	99
3.5 Worin begründet sich die Genialität einer disjunktiven Aussage?	100
3.6 Was verrät eine Teilmengenbeziehung?	102
3.7 Ist das Ganze wirklich größer als der Teil?	104
3.8 Hat ein Intervall reeller Zahlen unendlich viele Teilpunkte?	106
3.9 Wieso kann man aufgrund des Widerspruchprinzips die Frage nach der Verschiedenheit entscheiden?	108
3.10 Kann man unendliche Kardinalzahlen vernünftig unterscheiden?	109
3.11 Was sind Mengen höherer Stufe?	112
3.12 Wozu braucht man komplexe Zahlen?	114
4 Logik und Beweis	116
4.1 Was ist das Besondere an Axiomen?	116
4.2 Wie schützt man sich vor Paradoxien?	119
4.3 Wieso kann die Schildkröte von Achilles doch überholt werden?	121
4.4 Kann es bei der Wahrheit Abstufungen geben?	123
4.5 Warum gibt es keine gehaltserweiternden Schlussweisen?	125
4.6 Ist das Beweisverfahren der Induktion realistisch?	127
4.7 Wieso gewährleistet die Logik, dass aus Wahrem nichts Falsches folgen kann?	129
4.8 Warum kann aus Falschem Beliebiges folgen?	131
4.9 Warum bringt ein unendlicher Regress Schwierigkeiten?	132
4.10 Warum kann man mit geometrischen Axiomen keine arithmetischen Wahrheiten beweisen?	133
4.11 Was zeichnet eine notwendige Wahrheit aus?	134

4.12 Welche Schwierigkeiten bringen existenzielle und universelle Urteile mit sich?	136
4.13 Warum sind für einen Beweis drei Basiselemente erforderlich?	138
4.14 Kann man von einer Summe auf die Summanden zurückschließen?	140
4.15 Kann man im Zirkel beweisen?	141
4.16 Was sollte man bei der Definition eines Begriffs beachten?	142
4.17 Warum ändert sich bei einer doppelten Verneinung der Wahrheitswert einer Aussage nicht?	143
4.18 Warum folgt das Wahre aus Beliebigen?	144
4.19 Wie kann man die prädikatenlogischen Regeln der Generalisierung und Spezialisierung rechtfertigen?	145
4.20 Was bedeutet logisch ein Dilemma?	147
4.21 Wie unterscheiden sich syntaktische und semantische Wahrheit?	149
4.22 Wie viele Kombinationen muss man betrachten, wenn man eine Wahrheitstafel erstellen will?	150
4.23 Wie unterscheiden sich Logik und sprachliche Grammatik?	152
4.24 Was ist ein Syllogismus?	153
4.25 Welchen Wahrheitsgehalt haben Aussagen mit Wahrscheinlichkeitscharakter?	155
5 Metaphysik und Mathematik	157
5.1 Was messen wir, wenn wir die Zeit messen?	157
5.2 Warum verwirklicht die Natur selbst bestimmte Zahlenfolgen?	158
5.3 Welche Bedeutung haben die Zahlen Null und Eins?	160

5.4 Sind in der Wirklichkeit des Seins Widersprüche möglich?.....	162
5.5 Gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten auch in der Wirklichkeit?	164
5.6 Was hat das Axiom der Reflexivität mit der Wirklichkeit zu tun?	166
5.7 Warum kann für Gegenstände $a = b$ nicht gelten?	168
5.8 Was bedeuten Stetigkeit und Kontinuität?	169
5.9 Was hat Konvergenz mit der Realität zu tun?	170
5.10 Was hat Logik mit Realität zu tun?	171
5.11 Können Raum und Zeit als mathematische Ordnungen verstanden werden?	173
5.12 Gehören die Zahlen zum Seienden oder zum Nichtseienden?	174
5.13 Gibt es mathematische Formen und Strukturen in der Natur?	176
5.14 Wie ist der Zusammenhang zwischen Mathematik und Naturgesetzen?	179
5.15 Warum ist das Unendliche als Unendliches zum Teil unerkenbar?.....	181
6 Erkenntnistheorie und Mathematik.....	183
6.1 Warum treibt Mathematik die Seele nach aufwärts?	183
6.2 Was war zuerst da, die Dinge oder die Zahlen?	186
6.3 Warum richtet sich der Geist nicht auf die Zahlen?	188
6.4 Wird ein mathematischer Satz von einem Mathematiker gemacht?	189
6.5 Kann es bei den ewigen Dingen Potenzialität geben?	191
6.6 Was ist das Wesen mathematischer Erkenntnis?	192

6.7 Welchen Raum nehmen die Gegenstände der Mathematik ein?	194
6.8 Was haben die Gegenstände der Mathematik mit dem Guten und Schönen zu tun?	196
6.9 Was ist die Aufgabe der Mathematik?	198
6.10 Wie eng ist die Mathematik mit der Logik verknüpft?	200
6.11 Welche Tragweite kann mathematisches oder logisches Denken haben?	202
6.12 Wie ist die Leistung der Mathematik beim Erfassen metaphysischer Dinge einzuordnen?	205
6.13 Was besagt die analytische Methode?	208
6.14 Welche Rolle spielen Absichten und Charakter beim wissenschaftlichen Arbeiten?	211
Abbildungsverzeichnis	214
Literaturverzeichnis	217

Einführung

In diesem Buch soll über Mathematik philosophisch nachgedacht werden. Das Buch behandelt Fragen, die sowohl mathematisch als auch logisch und philosophisch sind. Die Fragen werden in den einzelnen Unterabschnitten der Kapitel behandelt. Die Kapitel sind wie folgt geordnet: Es gibt neben den Kapiteln für Arithmetik und Zahlentheorie, Kapitel über Mengenlehre sowie Logik und Beweis. In all diesen Kapiteln geht es um die tiefere philosophische Bedeutung, der dort gestellten Fragen und deren Antworten. Nach diesen Kapiteln kommen zwei Kapitel, die noch tiefer in die Philosophie eindringen und Gemeinsamkeiten zwischen Mathematik und Philosophie herausstellen möchten. Im Kapitel Metaphysik und Mathematik geht es auch um metaphysische Fragen, um Fragen, die die Natur und das Sein betreffen. Im letzten Kapitel Erkenntnistheorie und Mathematik geht es eher um erkenntnistheoretische Fragen, um Fragen, die sich die Vernunft selber stellt und die für Erkenntnistheorie und Mathematik beide von Interesse sein können.

Alle gestellten und beantworteten Fragen behandeln mathematische Themen und Gegenstände. Alle Fragen haben aber philosophisches Potenzial und die Fragen können nicht allein mathematisch beantwortet werden. Manche Fragen und Antworten sollen insbesondere die Schönheit einiger mathematischen Dinge vermitteln. Diese Schönheit ist aber keine rein mathematische Schönheit, sondern auch für den Philosophen interessant. In diesem Buch geht es also einerseits um die Schönheit mancher mathematischen Dinge, aber auch um deren philosophische Bedeutung.

Das Buch wendet sich an Mathematiker, Mathematikstudenten und mathematisch Interessierte. Es wendet sich auch an Philosophen, Philosophiestudenten und philosophisch Interessierte. Es geht in diesem Buch auch darum, Gemeinsamkeiten zwischen Philosophie und Mathematik zu entdecken und aufzuzeigen.

Wenn wir z. B. die Zahlenreihe der natürlichen Zahlen betrachten, können wir feststellen, dass zwischen den Quadratzahlen die ungeraden Zahlen liegen.

$1^2 = 1$ $2^2 = 4$	Differenz 3
$2^2 = 4$ $3^2 = 9$	Differenz 5
$3^2 = 9$ $4^2 = 16$	Differenz 7
$4^2 = 16$ $5^2 = 25$	Differenz 9
$5^2 = 25$ $6^2 = 36$	Differenz 11
.... usw.	

Diese Tatsache ist eine Schönheit, die philosophische Bedeutung hat. Kein Mathematiker hat die Zahlenreihe erfunden und diese Tatsache dort eingearbeitet. Diese Tatsache kommt von der Realität, kommt vom Sein. Sie steht der menschlichen Vernunft zur Verfügung, wird von ihr erkannt aber nicht erfunden und kann sowohl mathematisch als auch philosophisch zum Nachdenken anregen.

In der Vergangenheit haben sich große Philosophen mit mathematischen und logischen Themen und Gegenständen beschäftigt. Für die griechischen Philosophen Platon und Aristoteles, waren manche Fragen, welche die Zahlen betreffen philosophische Fragen. Wie kann es z. B. sein, dass die Diagonale des einfachsten Quadrats (1 cm Kantenlänge) eine Länge besitzt, die nicht messbar ist, sondern irrational, nämlich $\sqrt{2} = 1,41421...$ cm? Ein anderes Beispiel sind die Erkenntnisse zum logischen und ontologischen Prinzip des Widerspruchs, die wesentlich auf Platon und Aristoteles zurückgehen.

Kant wollte von der mathematischen Methode und den synthetischen Urteilen lernen, um eine wissenschaftlichere Metaphysik aufzubauen. Einige seiner großen Verdienste liegen auch auf dem Gebiet der Mathematik, was z. B. die Unterscheidung der Unendlichkeit angeht, ob man diese symbolisch als ein Ding vorlegt, bzw. als Ganzes in einem teilbaren Körper oder ob man sie durchschreiten muss. Ein gewaltiger Unterschied. In der Logik untersuchte Kant z. B. die Urteile (Aussagen) und trennte sie in Vernunfturteile, wie die Deduktion und empirische Urteile, wie Induktion und Analogie sowie nach Kategorien der Quantität, Qualität, Relation und Modalität.

Nikolaus von Kues beschäftigte sich ausführlich mit der Symbolkraft der Mathematik und mit dem Unendlichen und übertrug die Erkenntnisse in die Philosophie, um einer rationalen und philosophischen Erkenntnis Gottes näher zu kommen.

Die großen Philosophen Descartes und Leibniz haben sowohl mathematische als auch philosophische Themen behandelt und auf beiden Wissensgebieten Großes vollbracht, sie waren auch Mathematiker. Denken wir z. B. an das Binärsystem oder die Infinitesimalrechnung, die von Leibniz stammt, sowohl wie große metaphysische Gedankensysteme, die auf Leibniz zurückzuführen sind, wie Begründungen für ein notwendiges Wesen, bzw. seine Monadologie. Ein großer Mathematiker und Logiker, wie Gödel, benutze sein logisches Wissen auch philosophisch, z. B. bei der Erstellung einer Gottesbegründung, eines Gottesbeweises.

Mathematik und Logik waren in der Vergangenheit auch für Philosophen von Interesse, genauso wie philosophische Fragen für Mathematiker von Interesse waren. Es gibt viele Gemeinsamkeiten in beiden Disziplinen. Die mathematische und logische Methode, die *More geometrico* nach dem Vorbild der Mathematik (z. B. nach Euklids Buch ‚Die Elemente‘) wurde bereits von Proklos benutzt. Sie war auch für Descartes und Spinoza z. B. von großer Wichtigkeit. Unendlichkeits- und Existenzfragen spielen in beiden Wissensgebieten eine nicht gerade geringe Rolle. Beide Wissensgebiete haben als Grundlage auch die Vernunft und das reine Denken. Es ist möglich über die geometrische Anschauung eines Kreises z. B. zu den Definitionen und Gesetzmäßigkeiten eines Kreises, zur Idee eines Kreises, zum Kreis an sich und damit zum reinen Denken zu gelangen, frei von Anschauung. Denken wir nur an die Methode der Anthroposophie. Die Mathematik kann eine Art Probierstein sein, der zum reinen platonischen Denken führt.

Eine Logik ist nicht zum Selbstzweck da, weil man etwa den Formalismus und die Genauigkeit innerhalb ihrer schätzt. Zu einer Logik gehört immer auch ein semantischer Anteil, der die Wahrheit definiert, aber daneben auch ein Wahrheitskriterium festlegt, wie man die Wahrheit beweisen will. Zu diesem Teil ist die philosophische Frage, was überhaupt Wahrheit ist, von Bedeutung. Daneben jedoch auch so gleich die weitere Frage, was will ich mit der definierten Logik erreichen, soll sie einen Teil der Wirklichkeit abbilden, einen Teil des Seins, wie z. B. die Aussagen und Prädikatenlogik oder soll sie Themen der Gebote, also das Sollen abbilden. Man sollte den Zweck einer Logik

kennen, der aber kein Selbstzweck sein darf. Auf der anderen Seite sollte eine wissenschaftlichere Philosophie aber auch mit einer Logik kompatibel sein und die Metaphysik sollte nicht nur zu ihrem Selbstzweck entwickelt sein, sondern logische Mutmaßung betreiben.

Mathematiker werden damit konfrontiert, Dinge zu hinterfragen: Existiert ein Grenzwert oder ein unbestimmtes Integral wirklich? Bevor man mit diesen Symbolen einfach darauf los rechnen kann, muss man sich über deren Existenz vergewissert haben. Wie kann man das Unendliche unterscheiden? Auf eine Weise kann man es unterscheiden in potenziell und aktuell, auf eine andere Weise wie Kant es getan hat, ob das Unendliche als Ganzes gegeben ist oder ob man es durchschreiten muss. Ein mathematischer Existenzbeweis kann z. B. wie im Falle, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, konstruktiv sein. Man kann ein Verfahren angeben, was schon Euklid bekannt war, mit dem man zu jeder vorgegebenen Anzahl von endlich vielen Primzahlen, eine weitere noch größere Primzahl konstruieren kann. Wenn man als Mathematiker ehrlich ist, muss man sich fragen, ob man dieses Verfahren in der Wirklichkeit zu Ende gehen kann, auch ein Computer kann es nicht. Hieran wird die Potenzialität der Unendlichkeit deutlich. Andererseits sieht sich der Mathematiker aber gezwungen die Unendlichkeit der Primzahlen für wirklich zu erklären, mithilfe des Unendlichkeitsaxioms z. B., denn eine größte Primzahl kann es nicht geben, sie erzeugt Widersprüchlichkeiten.

Philosophen werden damit konfrontiert nicht nur die philosophischen Probleme zu erkennen und bei den sehr förderlichen und unterschiedlichen Sichtweisen den Dissens in den Vordergrund zu stellen, sondern auch Gemeinsamkeiten der unterschiedlichen Sichtweisen zu bedenken. Mathematische und logische Methoden ermöglichen es die Philosophie auf Gemeinsamkeiten hin und wissenschaftlicher zu gestalten. Unterschiedliche Sichtweisen sind notwendig, man darf keine Sichtweise verschleiern und unterdrücken. Trotzdem ist es aber auch hilfreich, Gemeinsamkeiten der unterschiedlichen Sichtweisen herauszustellen. Zwischen mathematischer Logik und philosophischer Logik ist kein allzu großer Unterschied. Die Methoden der Analyse und Synthese sind sowohl für die Philosophie als auch für die Mathematik

von Bedeutung. Die Methode, die *More geometrico*, sollte in der Philosophie mehr an Bedeutung gewinnen. Eine Metaphysik, die mystisch ist, ist weniger hilfreich. Wenn die menschliche Vernunft es uns möglich macht Grenzen zu überschreiten, ist es wünschenswert dies logisch und strukturiert zu tun. Nur das was logisch möglich ist, könnte auch real Möglichkeit besitzen. Das logisch Unmögliche geschieht nicht, auch im Sein nicht.

Das vorliegende Buch soll mathematisch Interessierte und philosophisch Interessierte anregen. Es ist einerseits ein Versuch einer Philosophie der Mathematik, die dem Mathematiker Anregung geben soll für philosophische Gedankengänge, andererseits soll das Buch aber auch den Philosophen anregen, die mathematischen Methoden und Schönheiten der Mathematik näher kennen zu lernen und schätzen zu lernen. Damit soll insgesamt auch auf eine Berührzone zwischen Mathematik und Philosophie aufmerksam gemacht werden.

Platon beschreibt in seinem Dialog *Epinomis*, was passiert, wenn man die Menschheit um die Wissenschaft der Zahl beraubt. Was würde sein, wenn es keine Zahlen und damit keine Mathematik gäbe? Wenn es keine Mathematik gäbe, wäre keine Wissenschaft mehr möglich. Astronomie, Physik, Medizin und andere Wissenschaften könnten keine Berechnungen vornehmen und keine Daten auswerten. Philosophisch betrachtet würde das bedeuten, dass Weisheit und Vernunft fehlen würden. Ähnlich wie die Existenz eine Mastereigenschaft ist, ist die Mathematik eine Masterwissenschaft. Nimmt man jemanden seine Existenz, verliert er damit auch alle anderen Eigenschaften automatisch. Nimmt man der Menschheit die Mathematik, verliert sie damit automatisch alle Wissenschaftlichkeit und die Möglichkeit der vernünftigen Einsicht.

Abkürzungsverzeichnis und verwendete Symbole

Allgemeine Symbole

A, B, C, D	Abkürzung für Aussagen oder Mengen oder Ereignisse oder Eigenschaften oder Begriffe (Großbuchstaben)
a, b, c, d, e, f, g, x, y, z	Abkürzung für Gegenstände oder Begriffe (Kleinbuchstaben)
F, G, H	Abkürzung für Eigenschaften von Gegenständen oder Begriffen oder geometrische Punkte
q.e.d.	quod erat demonstrandum
w.z.z.w.	was zu zeigen war

Mathematische Symbole

-	Subtraktion
+	Addition
* oder ·	Multiplikation
:	Division
<	kleiner
>	größer
=	gleich
/=	ungleich
$\sqrt{\quad}$	Quadratwurzel
$\sqrt[n]{\quad}$	n. Wurzel
f, g, h, ...	Funktionen
a^2, b^3	Potenzen
$a_i, b_j, k, \dots$	Indizes
$\sum_{i=k}^{i=\dots} a_i$	Summe
$\prod_{i=k}^{i=\dots} b_i$	Produkt
$\lim_{n \rightarrow \dots} x_n$	Grenzwert
∞	unendlich
π	Kreiszahl pi

Logische Symbole

gdw	genau dann wenn
$\sim$	nicht
$\neg$	nicht
$\rightarrow$	impliziert (logische Folgerung)
$\leftrightarrow$	Äquivalenz
$\vee$	oder (inklusive)
oder	oder (inklusive)
$\wedge$	und
und	und
$\sqcup$	entweder oder
$\forall x$	für alle x (Allquantor)
$\exists x$	es gibt ein x (Existenzquantor)

Modalitäten

$\Box$	Modalität notwendig
$\Diamond$	Modalität möglich

Mengensymbole

$\in$	Element von
$\{ \}$	Mengenklammern
$\subset$	Teilmengenbeziehung
$\cap$	Durchschnitt von Mengen
$\cup$	Vereinigung von Mengen
$\setminus$	Differenzmenge
card	Kardinalzahl, Mächtigkeit
$ M $	Kardinalzahl, Mächtigkeit von M
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\aleph_0$	Kardinalität der natürlichen Zahlen

$\aleph_1$
 2^M

Kardinalität $> \aleph_0$
Potenzmenge von M

Geometrische Symbole

A, B, C, D, E, F
a, b, c, d, e, f,
.

AB
ab oder $a \cdot b$
 a^2 , b^2 , ...
 α , β , γ , ..

Punkte, Eckpunkte
Strecken, Geraden
Lot
Strecke AB
Rechteckfläche
Quadratflächen
Winkel

Zitatsymbole

“ bzw. << oder < bzw. ‘

Griechische Symbole

Δ , Φ

α , β , γ , δ , ε

1 Arithmetik und Zahlentheorie

1.1 Existieren unendlich viele Primzahlen wirklich?

Primzahlen sind natürliche Zahlen, die nur durch sich selbst und durch Eins teilbar sind. Also z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Man kann durch ein praktisches und konstruktives Verfahren mehr Primzahlen konstruieren, als jede vorgelegte Anzahl. Euklid formulierte in seinem Buch ‚Die Elemente‘ den Satz über unendlich viele Primzahlen in folgender Weise:

Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

Man kann nun wie folgt weitere Primzahlen konstruieren:

- (1) $2 \cdot 3 + 1 = 7 \rightarrow$ neue Primzahl 7
- (2) $2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43 \rightarrow$ neue Primzahl 43
- (3) $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1807 = 13 \cdot 139 \rightarrow$ neue Primzahl 13
- (4) $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 43 + 1 = 23479 = 53 \cdot 443 \rightarrow$ neue Primzahl 53
- (5) ...

Allgemein betrachtet, bildet man also pro Schritt immer folgenden Term:

$$z = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_i \cdots p_k + 1$$

Für die so gebildete Zahl z gibt es zwei Möglichkeiten:

- (a) z ist selbst Primzahl.
- (b) z ist ein Produkt, also zusammengesetzt. Die Zusammensetzung muss aber dann aus mindestens einem Primfaktor p bestehen mit $p \neq p_i$ (Denn $z-1$ wird durch die p_i gemessen, d. h., sie sind additiv in $z - 1$ soundsovielmal enthalten, ohne dass ein Rest entsteht; somit kann z aber nicht durch sie gemessen werden, sondern nur durch einen neuen Primfaktor.)

Bei diesem praktischen Verfahren geht man also folgendermaßen vor:

- (1) Von einer gegebenen Anzahl Primzahlen p_i bildet man das Produkt $= z - 1$.
- (2) Wenn z eine Primzahl ist, nimmt man sie im nächsten Schritt hinzu.
- (3) Wenn z zusammengesetzt ist, nimmt man den neuen Primfaktor hinzu.

Dieses Verfahren lässt sich prinzipiell fortsetzen. Die Primzahlen sind jedoch nicht der Größe nach geordnet.

Der Möglichkeit nach gibt es also unendlich viele Primzahlen, der Wirklichkeit nach muss man natürlich das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen, auch ein Computer. Da es keine größte Primzahl geben kann, wir hätten dann nur endlich viele Primzahlen, und dies Widersprüche erzeugt, ist bewiesen, dass es der Möglichkeit nach unendlich viele Primzahlen geben muss. Ausführliche Beweise findet man in der unten angegebenen Literatur.

Weiterführende Literatur:

- Euklid: Die Elemente, Buch 9, § 20
- Dietmar Herrmann: Die antike Mathematik, Nr. 11.6

1.2 Warum gibt es nicht messbare Größen wie $\sqrt{2}$?

Nicht messbare Größen, sind Größen, die nicht zu den rationalen Zahlen gehören. Sie sind irrational, man sagt auch inkommensurabel. Ihre Nachkommastellen sind nicht voraussagbar, nicht periodisch und unendlich. Es gibt kein Maß, keine Zahl, die so-und-so-oft eine inkommensurable Größe messen könnte. In der Praxis kann man natürlich irrationale Größen, nach einer gewissen Anzahl von Nachkommastellen, auf- oder abrunden und damit wieder praktisch messen; theoretisch, also genaugenommen sind sie aber nicht messbar.

Wenn man beweisen will, dass eine Größe irrational ist, kann man zuerst annehmen sie sei rational und kann dann diese Annahme zum Widerspruch führen. Das zugrundeliegende Prinzip heißt Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch, vgl. Abschnitt 5.4.

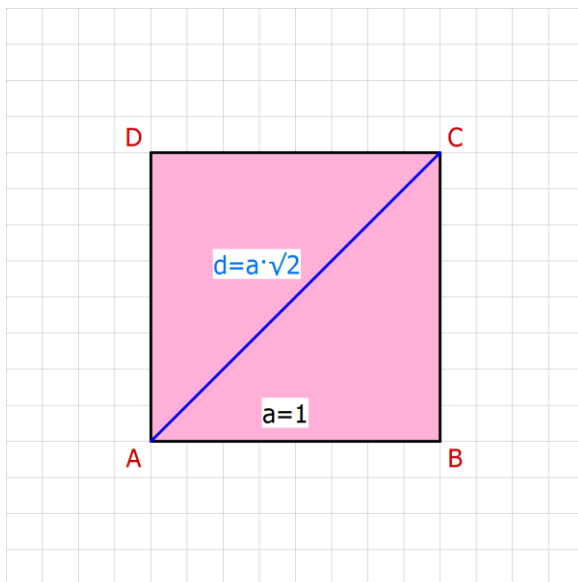


Abbildung 1.2: Quadrat mit der Kantenlänge 1 (Einheitsquadrat)

In Abbildung 1.2 sehen wir ein Quadrat mit der Kantenlänge $a = 1$ und damit mit der Diagonale $d = a \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Wir wenden nun das Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch an. Im Rahmen eines Beweises werden wir aus der Hypothese, $\sqrt{2}$ sei rational, einen Widerspruch folgern, d. h. die Aussage, dass ein und dieselbe Zahl n sowohl gerade als auch ungerade ist. Damit erreichen wir den Nachweis, dass die ursprüngliche Hypothese falsch ist.

Beweis:

Nehmen wir also an $\sqrt{2} = m / n$ mit m und n beides rationale Zahlen und der Bruch sei gekürzt, d. h. nicht beide Zahlen m , n können gerade sein.

Es gilt dann $2 = m^2 / n^2$, d. h. $m^2 = 2 n^2$. Das bedeutet m^2 ist gerade. Damit muss aber auch m gerade sein, da das Quadrat einer ungeraden Zahl ungerade ist. Als Konsequenz folgt nun aber, dass **n ungerade** ist, da nicht beide gerade sein können. Da aber m gerade ist, muss sich m^2 durch 4 teilen lassen, denn wenn $m = 2 \cdot p$, so ist $m^2 = 4 p^2$. Damit haben wir $4 p^2 = 2 n^2$ bzw. $2 p^2 = n^2$ und das bedeutet n^2 ist gerade und damit ist **n auch gerade**. Widerspruch!
q.e.d.

Aristoteles schreibt in der 1. Analytik: ‚Wenn die Diagonale kommensurabel sein soll, wären Ungerades und Gerades gleich‘. Ausführlich kann man den Beweis auch bei Euklid, Russell und Beutelspacher nachlesen.

Weiterführende Literatur:

- Aristoteles: Erste Analytik 50 a
- Euklid: Die Elemente, Buch 10, §115 a
- Bertrand Russell: Einführung in die mathematische Philosophie (Nr. 7)
- Dietmar Herrmann: Die antike Mathematik, Nr. 12.1
- Albrecht Beutelspacher: Kleines Mathematikum (Nr. 7)