



IST DOCH LOGISCH...

WAS ICH SCHON IMMER EINMAL
VERSTEHEN WOLLTE

Kurt-Georg
Wegner

Ist doch logisch. . .

Der Autor

1954 erblickte ich in Elmshorn, einer holsteinischen Kleinstadt in der Nähe von Hamburg, das Licht der Welt. Aufgewachsen bin ich auf dem Lande, in einer Nachbargemeinde meiner Geburtsstadt. In der ländlichen Volksschule, wie sie damals hieß, absolvierte ich meine ersten vier Schuljahre, besuchte dann von 1964 bis 1972 ein Gymnasium in meiner Geburtsstadt und legte dort die Abiturprüfung ab.



Von 1972 bis 1978 absolvierte ich ein Studium der Fächer Mathematik und Physik an der Kieler Universität, das ich 1972 mit dem Staatsexamen für das höhere Lehramt abgeschlossen habe.

In und um Elmshorn war ich danach knapp vier Jahrzehnte lang an verschiedenen Gymnasien und Gesamtschulen als Mathematik- und Physiklehrer tätig, seit den Neunziger Jahren auch mit dem Fach Informatik.

Seit meiner Pensionierung im Jahre 2016 beschäftige ich mich gerne mit fachlichen und fachmethodischen Fragestellungen, insbesondere aus der Mathematik und der Informatik.

Mit einigen meiner gelungensten Ergebnisniederschriften zu diesen Themenkreisen wage ich jetzt den Schritt zur Veröffentlichung. In diesem Sinne stellt der vorliegende Band ein Erstlingswerk dar.

Ich bedanke mich für Ihr Interesse und wünsche Ihnen eine angenehme und interessante Lektüre.

Mögliche Fragen, Anmerkungen und Kritik erbitte ich unter wegner@wegezumathe.de.

Ist doch logisch . . .

Was ich schon immer einmal verstehen wollte!

Kurt-Georg Wegner

1. Auflage, Mai 2023

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über www.dnb.de abrufbar.

© 2023 Kurt-Georg Wegner, 1. Auflage Mai 2023

Foto auf Seite 2:

© 2023 *Susann Prüß*, mit frdl. Genehmigung

Graphisches Motiv für den Buchumschlag:

© *virtosmedia / de.123rf.com*

Herstellung und Verlag:

BoD, [Books on Demand](https://www.bod.de), Norderstedt

ISBN: 978-3-7578-4100-3

Die Informationen in diesem Buch habe ich mit größter Sorgfalt erstellt. Dennoch kann ich Fehler nicht ganz ausschließen. Autor und Verlag übernehmen keine juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für eventuell verbliebene Fehler und deren Folgen. Für Hinweise auf Fehler bin sehr dankbar.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	9
2 Elemente und Gesetze der Aussagenlogik	13
2.1 Aussagen und Wahrheitswerte	13
2.2 Aussageverknüpfungen, logische Terme	17
2.3 Gegenaussage, Negation, Verneinung	19
2.4 UND - Verknüpfung zweier Aussagen, Konjunktion	21
2.5 ODER - Verknüpfung zweier Aussagen, Disjunktion	22
2.6 Tautologien, Kontradiktionen, logische Gesetze	24
2.7 Äquivalenzen als Aussageverknüpfungen	27
2.8 Logische Gesetze und Äquivalenzen	29
2.9 Logische Gesetze für Konjunktionen und Disjunktionen	31
2.9.1 Idempotenzgesetze	32
2.9.2 Kommutativgesetze	33
2.9.3 Assoziativgesetze	33
2.9.4 Distributivgesetze	37
2.9.5 Die <i>de Morgan'schen</i> Gesetze	41
2.10 Alle denkbaren Verknüpfungen zweier Aussagen	44
2.11 Die Antivalenz, Entweder - ODER	47
2.12 Die Äquivalenz, im Zsh. mit Konj. und Disj.	49
2.13 Alle zweiwertigen logischen Aussageverknüpfungen	51

3	Logisches Schlussfolgern, Implikationen und Äquivalenzen	53
3.1	Die Implikation	56
3.1.1	Die Implikation und die Wahrheitswertetabelle	57
3.1.2	Implikation und Kausalität, direkter Beweis	65
3.1.3	Der <i>indirekte Beweis durch Widerspruch</i>	68
3.1.4	Mehrstufige Implikationen, Transitivität	71
3.2	Die <i>Die Kontraposition</i> der Implikation	73
3.2.1	<i>Hinreichende</i> und <i>notwendige</i> Bedingungen	75
3.2.2	Der <i>indirekte Beweis durch Kontraposition</i>	78
3.3	Die <i>Gegenaussage</i> , die <i>Negierung</i> der Implikation	79
3.4	Die Umkehrung der Implikation	83
3.4.1	Weitere Implikationen zweier Elementaraussagen	85
3.5	Die Implikation in der Umgangssprache	88
3.5.1	» <i>Nur-Formulierungen</i> « notwendiger Bedingungen	89
3.5.2	<i>Verneint formulierte notwendige Bedingungen</i>	90
3.5.3	Formulierungen mit » <i>keine(r), niemals, Niemand</i> «	91
3.6	Die Äquivalenz, unter dem Blickwinkel der Kausalität	92
3.6.1	Die Implikation und die Äquivalenz	92
3.6.2	Genau dann wenn	92
3.6.3	Hinreichende und notwendige Bedingungen	95
3.6.4	Dann und nur dann...	96
3.6.5	Die Äquivalenz, formuliert mit der Verneinung	98
4	Logisches Folgern, anwendungsbezogen	101
4.1	Zurück zur Einleitung	101
4.2	Logische Aufgaben und Rätsel	103
4.2.1	Eine problematische Einladung	103
4.2.2	Ein Lügnerproblem	105
4.2.3	Ein weiteres Lügnerproblem	107
4.2.4	Ein Hauptgewinn	107
4.2.5	Ein (un)gelöster Kriminalfall	110
4.2.6	Ein weiterer Kriminalfall	113

4.2.7 Und ein letzter Kriminalfall	114
5 Danke	117
Stichwortverzeichnis	119

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Ist doch logisch..., was sollte auch unklar sein? Zumindest die alltäglichen logischen Fragen unseres Alltags, die lösen wir doch im Handumdrehen. Wir meinen zumindest, diese intuitiv zu beherrschen. Was also sollte es sein, was ich immer mal verstehen wollte? Ich beabsichtige ja nicht, in Mathematik zu promovieren!

Im Alltag begegnen uns häufig Fragestellungen, bei denen aus einer Voraussetzung (*»Prämisse«*) eine logisch korrekte Schlussfolgerung (*»Konklusion«*) gezogen werden soll. Beispiel:

*Wenn alle Verkehrsteilnehmer alle Verkehrsregeln beachten,
so folgt daraus,
dass keine Verkehrsunfälle passieren.*

Zweifellos ist dies eine logisch korrekte Folgerung. Andernfalls wäre jede Verkehrsregel sinnlos, ja sogar absurd!

Stellen wir jetzt einmal die Frage, was wir denn logisch folgern können, wenn von der *Verneinung der Prämisse*, ihrem logischen Gegenteil ausgegangen wird. *»Alle Verkehrsteilnehmer beachten alle Verkehrsregeln«* soll also eine falsche Aussage sein!

Wird es, als logische Folge, weiterhin keine Verkehrsunfälle geben, oder doch Verkehrsunfälle, viele oder wenige?

Gelingt es Ihnen, liebe Leserin, lieber Leser, diese Frage mit gewohnter

intuitiver Sicherheit zu beantworten? Ich behaupte zumindest, Ihre Stirn wird jetzt ein paar Runzeln mehr haben!

Sollte dies (noch) nicht der Fall sein, könnten wir in unserem Beispiel »*das Pferd von hinten aufzäumen*«. Wir könnten nach der logischen Folge fragen, die sich ergibt, wenn wir die ursprüngliche Folgerung, also das Nichtauftreten von Unfällen, als richtig voraussetzten. Interessant ist auch die Frage, was aus der *Verneinung* der ursprünglichen Folgerung logisch folgt.

Und wem es immer noch nicht reicht, der kann sich gerne an der Frage versuchen, welche der beiden Bedingungen für die jeweils andere »*notwendig*« oder »*hinreichend*« ist, oder beides oder auch keines von beiden!

Es liegt mir fern, logische Gesetze und Zusammenhänge als undurchdringbares und verwirrendes Gedankengebäude darzustellen. Die letzten Bemerkungen sollen lediglich verdeutlichen, dass der Umgang mit Logik nicht intellektuell unterschätzt werden sollte, dass ein rein intuitiver Umgang mit Logik oftmals nicht ausreicht zum Verständnis.

Für das logisch richtige Folgern und Argumentieren gibt es feste, sogar formalisierte Gesetze, mathematischen Sätzen sehr ähnlich und vergleichbar. Diese Gesetze gelten sogar *unabhängig* von Inhalten, die in den Aussagen logisch behandelt werden. Um auch in weniger übersichtlichen Situationen korrekt zu folgern, müssen genau diese Gesetze streng beachtet werden, was wiederum die Kenntnis und das Verständnis derselben erfordert.

Wen ich also durch meine letzten Ausführungen etwas verwirrt, ratlos oder nachdenklich gestimmt habe, der fühle sich ausdrücklich ermuntert und eingeladen, die Lektüre fortzusetzen und dabei Kenntnisse über logische Gesetzmäßigkeiten zu erlernen oder Vorkenntnisse

darüber zu wiederholen und zu vertiefen.

Das Ziel dieses Buches ist die Darstellung der wichtigsten Gesetze der Aussagenlogik, ihrer Beweise, ihrer Interpretation und ihrer Veranschaulichung durch geeignete Beispiele. Dabei soll vor allem eine *ausführliche verständliche Darstellung* im Vordergrund stehen. Eine zu große Komplexität versuche ich daher zu vermeiden, ohne dabei eine kompromisslose Klarheit der Begriffe zu vernachlässigen.

Nach aufmerksamer Lektüre sollten auch die in dieser Einleitung beispielhaft aufgeworfenen Fragestellungen einer klaren und unzweideutigen Beantwortung zuzuführen sein. Einstweilen überlasse ich es Ihnen selber, liebe Leserin, lieber Leser, diese Antworten in Eigenverantwortung zu entwickeln. Dies kann und soll gerne *während der Lektüre* geschehen, auch in mehreren Schritten, soweit der jeweilige inhaltliche Fortschritt dies ermöglicht.

