Andreas Schaumann

Analytische Geometrie

thematisch angeordnete Abituraufgaben

Gymnasium Bayern

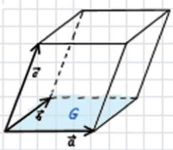
G8

zur gezielten Abiturvorbereitung

zum Üben während der 11. und 12. Klasse

basierend auf den Lernvideos von Schaumathe!

Mathe
Verstehen macht Spaß
ist aber anstrengend



Das Übungsbuch
zum Youtube-Kanal
Schaumathe!

Andreas Schaumann

Analytische Geometrie

thematisch angeordnete Abituraufgaben

Gymnasium Bayern

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Herstellung und Verlag: BoD – Books on Demand, Norderstedt

ISBN: 978-3-7557-2565-7

Der auszugsweise Abdruck der Aufgaben aus den Bayerischen Abiturprüfungen erfolgt mit freundlicher Genehmigung des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus. Sämtliche Lösungen wurden vom Autor erstellt.

Inhaltsverzeichnis

Der **Autor** unterrichtet die Fächer Mathematik und Physik am Ammersee-Gymnasium in Dießen. Er ist seit 1997 an verschiedenen bayerischen Gymnasien tätig, unterbrochen von einem sechsjährigen Aufenthalt an einer deutschen Auslandsschule.

Hinweise und Anmerkungen zum Buch nimmt er gerne entgegen. Diese bitte schicken an: schaumathe@gmx.de

Vorwort

Nach dem Buch über die Stochastik liegt hiermit das zweite Übungsbuch zur Oberstufenmathematik vor. Das grundlegende Konzept ist gleich geblieben:
Der gesamte Abiturstoff ist entlang des Lehrplans sortiert. Jedem Themengebiet ist eine Merkliste mit den essentiellen Inhalten vorangestellt, dann folgen dazu passende Abituraufgaben mit ausführlichen Lösungen. Warum das gut ist und wie du das Buch am besten einsetzt, erläutere ich in der Einführung noch genauer.

Dort wird auch beschrieben, inwiefern sich die Abituraufgaben zur Geometrie von denen zur Stochastik unterscheiden und welche Konsequenzen das in Bezug auf die Bearbeitung hat. Was aber in beiden Fällen gleich ist:

Der Erwerb eines hübschen Übungsbuches macht deine Mathematik-Performance leider noch nicht besser. Erst dessen bestimmungsgemäßer Einsatz verspricht einen gewissen Erfolg. Das geht natürlich nicht ohne Anstrengung von deiner Seite (siehe das Kleingedruckte im Umschlag), aber es wird sich lohnen!

Darauf habe ich natürlich schon im Stochastik-Vorwort hingewiesen.

Was ebenso weiterhin gilt:

Du darfst darauf vertrauen, dass sich in der Mathematik deine von dir mehr oder minder mühsam eingesetzte Übungszeit relativ schnell bezahlt machen wird.

Gerade die Möglichkeit, thematisch zielgerichtet zu üben wird dir bald eine größere Sicherheit geben. Und mit mehr Sicherheit und Durchblick macht's auch zunehmend mehr Spaß.

In diesem Sinne: Viel Spaß mit der Analytischen Geometrie!

Februar 2022 Andreas Schaumann

1 Einführung

Auch dieses Buch soll wie sein Pendant zur Stochastik drei Aufgaben auf einmal erfüllen, doch dazu später mehr. Davor wird dargestellt, was bei der Bearbeitung von Prüfungsaufgaben aus der Analytischen Geometrie besonders ist.

Da ist zunächst einmal das Anfertigen von Zeichnungen und Skizzen. Bei den Aufgabenstellungen werden seit der Einführung des G8 nur noch selten umfangreichere Zeichnungen verlangt. Ein Grund ist sicher, dass sich im Geometrie-Teil der Umfang von früher 40BE im G8 auf 20BE und seit 2021 25BE verringert hat. Können musst du es natürlich trotzdem.
Aber auch wenn keine Zeichnungen oder Skizzen explizit verlangt sind, sind viele Aufgaben ohne eine Überlegungsskizze kaum oder oft nur viel aufwändiger lösbar. In den Lösungen zu den Aufgaben habe ich deshalb überall dort, wo es mir sinnvoll erschien, Skizzen angefertigt. Sie sind bewusst so gestaltet, wie du sie auch selber zeichnen könntest. Ziel ist es, möglichst schnell einen Überblick über die Aufgabenstellung und die möglichen Lösungswege zu erhalten.

Ein weiterer Unterschied zur Stochastik ist, dass im Teil B die Teilaufgaben meist aufeinander aufbauen. Das sieht man z.B. an den gehäuft auftretenden Kontrollergebnissen. Am Anfang wird dir das noch nicht groß auffallen, weil in den Aufgaben zu den Kapiteln ja meist nur wenige isolierte Teilaufgaben vorkommen. Bei der unmittelbaren Prüfungsvorbereitung jedoch musst du das sehr genau beachten. Zur Unterstützung gibt es das Kapitel 11, in dem auf solche taktischen Überlegungen beim Bearbeiten von kompletten Aufgaben eingegangen wird.

Schließlich kommen in der Geometrie öfters als in den anderen Gebieten immer wieder einmal Grundlagenkenntnisse aus der Mittelstufe vor, die man so noch nie oder nur selten in den vorigen Prüfungsaufgaben gesehen hat. Eine Liste mit ein paar Verdächtigen findest du im Anhang (hier besteht natürlich kein Anspruch auf Vollständigkeit!).

Nun zu den drei verschiedenen Grundfunktionen des Buchs:

Einsatz als Übungsbuch

Weil die Themen wie im Lehrplan sortiert sind, kannst du das Buch auch zum Einüben des aktuellen Stoffs parallel zum Unterricht einsetzen. Zusätzliches Übungsmaterial schadet nie, außerdem siehst du gleich, was im Abitur verlangt wird und welchen Charakter die Prüfungsaufgaben so haben.
Die Aufgabenbeispiele zu den einzelnen Kapiteln sind in zunehmender Schwierigkeit sortiert. Anfangs sind die Lösungen noch sehr ausführlich, wenn sich Lösungswege wiederholen, werden sie knapper. In Kapitel 11 gehe ich noch einmal detaillierter darauf ein, wie der Umfang deiner Bearbeitung normalerweise so aussehen könnte.
Bei allen Themen kannst du dir die Grundlagen mit Hilfe der passenden Videos noch einmal in Ruhe anschauen. Beachte dabei, dass die Inhalte dort sehr komprimiert dargeboten werden. Hin und wieder wird es daher vielleicht mal angebracht sein, auf die Pause-Taste zu drücken und das bisher Dargestellte sauber zu durchdenken.
Themen, die lange zurückliegen oder die du bei der Behandlung im Unterricht nicht so ganz verstanden hast, kannst du damit noch einmal auffrischen bzw. neu erarbeiten. In diesem Sinne kann man das Buch auch als kleines Nachschlagewerk einsetzen.

Einsatz zur Stoffzusammenfassung

Apropos Nachschlagewerk:
Für die Vorbereitung auf die Prüfung musst du irgendwann alle drei Teilbereiche parat haben, was schon eine große Menge an Inhalten ist. Dafür hat sich das Anfertigen von persönlichen Kurzzusammenfassungen sehr bewährt. Nachdem das oft eine ziemlich langwierige Sache sein kann, habe ich dir als Basis für diese Kurzzusammenfassungen in jedem Kapitel die wichtigsten Inhalte in Form der „Merkliste“ zusammengestellt. Wenn du die dann noch je nach Bedarf ausdünnst oder ergänzt, solltest du gut gerüstet sein.

Einsatz zur Abiturvorbereitung

Die beste Art, sich auf die Abiturprüfung vorzubereiten, ist nach wie vor das Rechnen von alten Prüfungsaufgaben. Gerade am Anfang, wenn man sich zum ersten Mal mit den Prüfungsaufgaben eines Themengebiets beschäftigt, können die aber auch wie ein großer Berg vor einem stehen, bei dem man gar nicht so recht weiß, wo und wie man anfangen soll.
Da sollte dir dieses Buch eine große Hilfe sein. Du erhältst einen Über-

blick über die für das Abitur relevanten Themen und kannst diese gezielt angehen. Zu jedem Thema findest du dann die relevantesten Prüfungsaufgaben der letzten Jahre vor, mit denen du normalerweise genug Übungsmöglichkeiten haben solltest, um in dem Bereich fit zu werden.
Falls du noch mehr rechnen willst, habe ich in allen Kapiteln noch Empfehlungen für weitere Abituraufgaben angegeben. Die Lösungen dazu kannst du z.B. im Netz unter www.abiturloesung.de finden. Dort sind auch die Angaben von sehr vielen alten Prüfungsaufgaben verfügbar (oft mit Lösungen), die jede Menge weiteres Übungsmaterial bieten.
Fehlt nur noch, dass du mit der Prüfungsvorbereitung beginnst. Das Aufgabenrechnen kann dir keiner abnehmen, die Einstiegshürde dafür sollte jetzt aber deutlich kleiner sein.
Und wie schon im Vorwort behauptet: vernünftiger Einsatz lohnt sich, wenn´s läuft macht´s Spaß!

Allgemeine Bemerkungen zur Abiturprüfung

Bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben musst du immer beachten, welche „Operatoren“ in der Aufgabenstellung verwendet werden. Darauf gehe ich bei einigen Lösungen der Aufgaben näher ein. Zusätzlich findest du im Anhang eine Operatorenliste für Mathematik, herausgegeben vom „Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen“ (IQB), das auch die Prüfungsaufgaben für den länderübergreifenden Teil erstellt. Da kannst du noch einmal nachlesen, wie genau man beim jeweiligen Operator die Antwort darstellen sollte.
Wie oben schon erwähnt, gibt es in diesem Buch auch ein eigenes Kapitel über die Taktik zur Bearbeitung von gesamten Prüfungsteilen. Zusätzlich zum Umgang mit Operatoren und Zwischenergebnissen findest du hier noch einige Tipps speziell zur Bearbeitung von Aufgaben aus der Analytischen Geometrie.

Damit aber genug der Vorrede, ran an‘s Werk, selber Rechnen macht schlau!

2 Rechnen mit Vektoren

2.1 Grundlagen

In diesem Kapitel geht es um die Grundlagen der Vektorrechnung. Dazu gehört zunächst der Umgang mit dem dreidimensionalen Koordinatensystem sowie das elementare Rechnen mit Vektoren, d.h. Addition, Subtraktion und Skalarmultiplikation.
Man muss vielleicht dazusagen: in der Mathematik ist die „Vektorrechnung" ein deutlich weiteres Feld. Vektoren sind dort Elemente eines „Vektorraums", für den bestimmte Bedingungen gelten. So könnte man z.B. auch ganzrationale Funktionen als Vektoren auffassen.
Das machen wir hier nicht. „Unser" Vektorbegriff ist geknüpft an das dreidimensionale kartesische Koordinatensystem, Vektoren werden dort repräsentiert durch Pfeile. Ein Vektor ist für uns demnach charakterisiert durch zwei Eigenschaften: seine Länge und seine Richtung.
Die Länge als „Betrag" des Vektors ist Teil dieses Kapitels. Um die Richtung kümmern wir uns dann im nächsten Kapitel, in dem die Winkel zwischen Vektoren dazukommen.
Aus der Mittelstufengeometrie begegnen uns hier hauptsächlich Dreiecke und Pyramiden, die sehr regelmäßige Teilnehmer von Abiturprüfungen sind.

Tipps für den Fernsehabend:

- *Einführung und Darstellung von Vektoren*
- *Addition von Vektoren*
- *Differenzvektor*
- *Betrag eines Vektors*
- *Skalarmultiplikation*

Was gehört auf den Merkzettel?

- Addition und Subtraktion von Vektoren, auch grafisch!

- Ganz wichtig: Vektor von A nach B („Differenzvektor“):

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}}$$

- Davon strikt zu unterscheiden, auch wenn es ähnlich aussieht: Mittelpunkt M der Strecke [AB]

$$\boxed{\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})}$$

- Betrag eines Vektors:

$$\boxed{\vec{a} \ = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

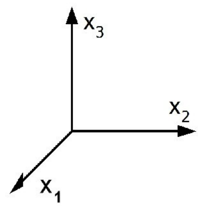
- Skalarmultiplikation: „Zahl mal Vektor“ = Vektor

2.2 Aufgaben

Beginnen wir mit Aufgaben zum Koordinatensystem. Das Zeichnen von umfangreicheren Körpern oder Figuren ins Koordinatensystem wird zwar nicht mehr so häufig verlangt wie früher, können sollte man es natürlich trotzdem.
In der ersten Aufgabe geht es neben dem Zeichnen um das Erkennen von Körpern und Teilkörpern. Wenn die entsprechenden Körper eine besondere (d.h. in der Regel eine besonders einfache) Lage im Koordinatensystem besitzen, dann darfst du das z.B. beim Ablesen von Streckenlängen auch ausnützen.

2012 Aufgabengruppe II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(10|2|0), B(10|0|8), C(10|4|3), R(2|2|0), S(2|8|0) und T(2|4|3) gegeben. Der Körper ABCRST ist ein gerades dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche ABC, der Deckfläche RST und rechteckigen Seitenflächen.



a) Zeichnen Sie das Prisma in ein kartesisches Koordinatensystem (vgl. Abbildung) ein. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Grundfläche ABC? Berechnen Sie das Volumen des Prismas. [6]

d) Die Ebene F enthält die Gerade CT und zerlegt das Prisma in zwei volumengleiche Teilkörper. Wählen Sie einen Punkt P so, dass er gemeinsam mit den Punkten C und T die Ebene F festlegt; begründen Sie Ihre Wahl. Tragen Sie die Schnittfigur von F mit dem Prisma in Ihre Zeichnung ein. [3]

e) Die Punkte A, B und T legen die Ebene H fest; diese zerlegt das Prisma ebenfalls in zwei Teilkörper. Beschreiben Sie die Form eines der beiden Teilkörper. Begründen Sie, dass die beiden Teilkörper nicht volumengleich sind. [3]

Die nächste Aufgabe ist aus dem Originaltext des A-Teils von 2018, der wegen eines unerlaubten Eindringens in einen Schultresor nicht im Abitur zum Einsatz kam. Auch hier geht es um die Anschauung im Koordinatensystem, allerdings nicht mit einer exakten Zeichnung, sondern nur mit einer Skizze.

2018 A1 Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte A(4|0|0), B(0|1|0), C(0|4|0) und D(0|0|5).

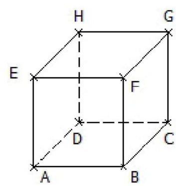
[3] a) Erläutern Sie mit Hilfe einer geeignet beschrifteten Skizze, dass sich das Volumen V der Pyramide ABCD mit dem Term $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\right) \cdot 5$ berechnen lässt.

[2] b) Die Punkte A, C und D legen die Ebene H fest. Der Flächeninhalt des Dreiecks ACD wird mit F bezeichnet, der Abstand des Punktes B von der Ebene H mit d. Zur Berechnung von d wird der Ansatz $\frac{1}{3} \cdot F \cdot d = 10$ gewählt. Begründen Sie, dass dieser Ansatz korrekt ist.

Die folgende Teilaufgabe b) könnte man mit Hilfe einer Geradengleichung (kommt erst im Kapitel 5) lösen, es geht aber auch genauso gut mit schon bekannten Mitteln.

2016 A1 Aufgabe 1

Betrachtet wird der abgebildete Würfel ABCDEFGH.
Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: D(0|0|-2), E(2|0|0), F(2|2|0) und H(0|0|0).



[2] a) Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punkts A an.

[3] b) Der Punkt P liegt auf der Kante [FB] des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts P.

Bei den nächsten Aufgaben rückt das Rechnen mit Vektoren mehr in den Vordergrund. Schwerpunkt sind die Berechnung von Seitenmitten oder Koordinaten von Punkten, die besondere Bedingungen erfüllen.

2019 A1 Aufgabe 1

Gegeben ist ein Rechteck ABCD mit den Eckpunkten A(5|-4|-3), B(5|4|3), C(0|4|3), und D.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten von D und geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke [AC] an. [3]

b) Begründen Sie, dass die Dreiecke BCM und ABM den gleichen Flächeninhalt besitzen, ohne diesen zu berechnen. [2]

2015 A1 Aufgabe 1

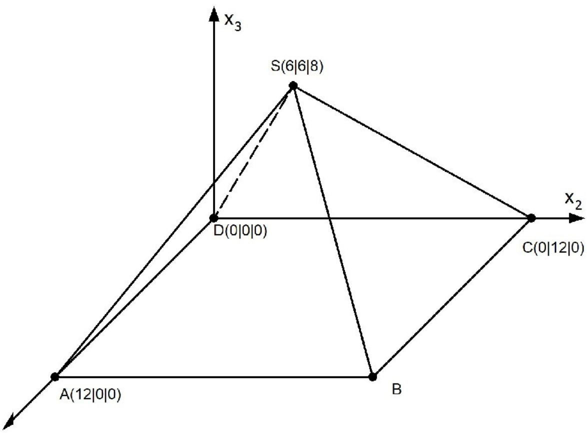
Die Gerade g verläuft durch die Punkte A(0|1|2) und B(2|5|6).

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben. [3]
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

b) Die Punkte A, B und E(1|2|5) sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunkts gibt es mehrere Möglichkeiten. [2]
Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunkts an.

2013 II Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt modellhaft einen Ausstellungspavillon, der die Form einer geraden vierseitigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat und auf einer horizontalen Fläche steht. Das Dreieck BCS beschreibt im Modell die südliche Außenwand des Pavillons. Im Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1m, d.h. die Grundfläche des Pavillons hat eine Seitenlänge von 12m.



[3] a) Geben Sie die Koordinaten des Punktes B an und bestimmen Sie das Volumen des Pavillons.

An einem Teil der südlichen Außenwand sind Solarmodule flächenbündig montiert. Die Solarmodule bedecken im Modell eine dreieckige Fläche, deren Eckpunkte die Spitze S sowie die Mittelpunkte der Kanten [SB] und [SC] sind.

[4] d) Ermitteln Sie den Inhalt der von den Solarmodulen bedeckten Fläche.

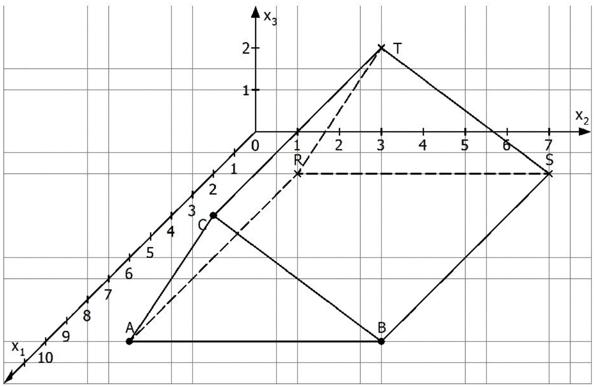
weitere Aufgaben zum Üben:

- 2011 V (G9-Abitur):
  1a) Nachweis eines gleichschenkligen Dreiecks inklusive einer 2-dimensionale Zeichnung
  2a) Streckenberechnung, gute Übung zur geometrischen Anschauung

2.3 Lösungen

Lösung zu 2012 II:

a) Beachte bei der Anfertigung einer Zeichnung, dass die Einheit der Achsen, wenn nichts anderes gesagt wird, 1cm beträgt. Die Einheit der x_1-Achse ist dagegen wegen der perspektivischen Darstellung auf eine Kästchendiagonale verkürzt. Das Prisma sieht dann so aus:



Wenn nach einer besonderen Lage im Koordinatensystem gefragt wird, dann handelt es sich meist um Parallelität zu Koordinatenachsen oder Koordinatenebenen. Diese erkennt man normalerweise an den Koordinaten. Hier sollte dir auffallen, dass alle x_1-Koordinaten den gleichen Wert 10 besitzen. Das bedeutet, dass die Grundfläche ABC parallel zur x_2x_3-Ebene liegt, wie du auch an der Zeichnung schön erkennen kannst.

Für die Volumenberechnung des Prismas ist hier schon verraten worden, dass das Dreieck ABC die Grundfläche darstellt. Das Volumen eines geraden Prismas berechnet sich bekannterweise aus $V = G \cdot h$, der bekannte Spezialfall wäre der Quader.
Die Höhe h_P des Prismas kann man aus der Zeichnung ablesen, sie entspricht der Länge von [AR] bzw. [BS] und beträgt 8. Damit muss nur noch die Grundfläche bestimmt werden. Weil du erkannt hast, dass ABC parallel zur x_2x_3-Ebene liegt, kann man hier die Höhe h_D des Dreiecks und die Länge der Grundlinie ebenfalls leicht ablesen: C liegt 3 über der Grundlinie, also ist $h_D = 3$. Von A nach B geht man 6 Schritte in x_1-Richtung, also hat die Grundlinie die Länge 6. Insgesamt ergibt sich: