Cengizhan Duran

Funktionen Differenzieren Integrieren

Leicht verständlich erklärt anhand von vielen Beispielen, Übungsaufgaben und Musterlösungen.

FUNKTIONEN DIFFERENZIEREN INTEGRIEREN

Leicht verständlich erklärt anhand von vielen Beispielen und ausführlich gelösten Übungsaufgaben

Cengizhan Duran

Vorwort

Das vorliegende Buch führt in die Grundlagen der Funktionen sowie Differenzial- und Integralrechnung ein. Dabei werden zahlreiche Definitionen, Beispiele sowie Übungsaufgaben behandelt.

Das Buch ist wie folgt aufgebaut:
Das erste Kapitel behandelt die grundlegendsten Funktionen und deren Eigenschaften. Es beginnt mit der Definition einer Funktion und geht auf lineare, quadratische, ganzrationale, gebrochenrationale, irrationale, Exponential-, logarithmische und trigonometrische Funktionen ein.

Das zweite Kapitel führt in die Grundlagen der Differenzialrechnung ein. Es beginnt mit der Definition des Differenzenquotienten und wird mit den Ableitungsregeln, den Tangenten- und Normalengleichungen sowie den Extrem- und Wendepunkten fortgesetzt.

Das dritte Kapitel führt in die Grundlagen der Integralrechnung ein. Es beginnt mit den Definitionen der verschiedenen Integrationsregeln und wird mit Flächenberechnungen sowie Rotationskörpern fortgesetzt.

An dieser Stelle möchte ich mich sehr bei Herrn Rainer Hebrank für das Korrekturlesen bedanken und wünsche allen Schülerinnen und Schülern viel Spaß und Erfolg beim Üben.

Cengizhan Duran

ISBN: 9783751992411

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Funktionen

1.1 Was ist eine Funktion?

Defintion 1.1.0.1: Was ist eine Funktion?

Eine **Funktion** f ist eine Zuordnungsvorschrift

$$f : x \mapsto y = f(x),$$

welche jedem $x \in D_f$ genau ein $y \in W_f$ zuordnet. Dabei bezeichnen D_f die **Definitions-** und W_f die **Wertemenge** der Funktion f.

1.2 Der Graph einer Funktion

Defintion 1.2.0.1: Der Graph einer Funktion

Die Abbildung einer Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird als **Graph** bezeichnet. Damit ist der Graph einer Funktion f als die Menge aller Punkte $P(x_0|f(x_0))$ mit $x_0 \in D_f$ von f definiert.

1.3 Lineare Funktionen (Geraden)

Defintion 1.3.0.1: Lineare Funktionen

Eine **lineare Funktion** f ist für $m, b \in \mathbb{R}$ und $D_f = W_f = \mathbb{R}$ wie folgt definiert ...

$$f(x) = mx + b.$$

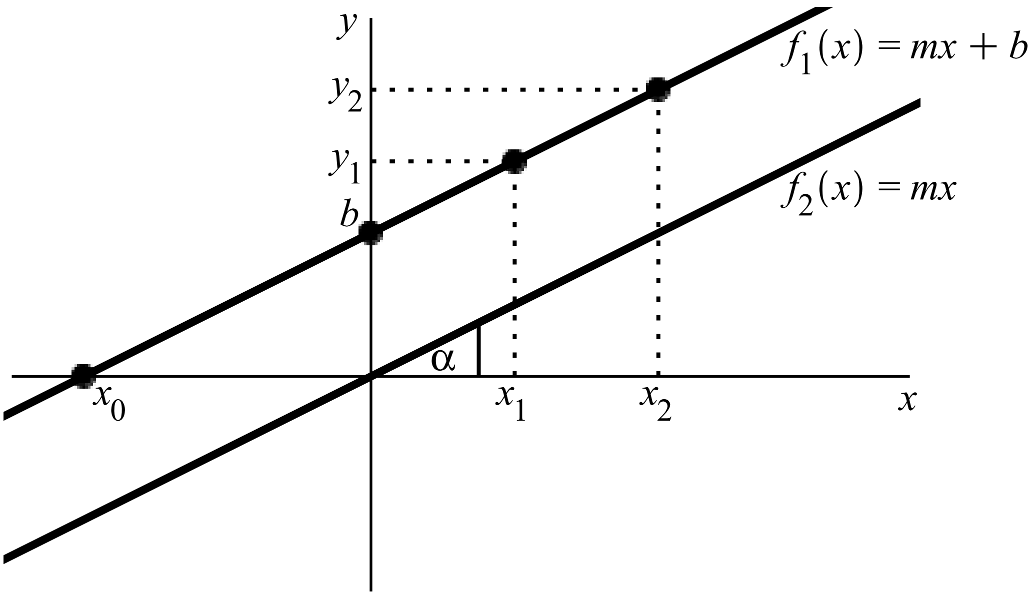

Abbildung 1.1: Lineare Funktionen

Dabei bezeichnen m die Steigung und b den y-Achsenabschnitt der linearen Funktion. Die Steigung m ist wie folgt definiert ...

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} > \ 0 \ \Rightarrow \ \textbf{steigende Gerade} \\ < \ 0 \ \Rightarrow \ \textbf{fallende Gerade} \end{cases}$$

Die Stelle $x = x_0$, an der die lineare Funktion f die x-Achse schneidet (Nullstelle), ist wie folgt definiert ...

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Eine lineare Funktion f wird auch als **proportionale Funktion** bezeichnet, wenn sie durch den Ursprung verläuft, also $\boldsymbol{b = 0}$ gilt.

Beispiel 1.3.0.1 (Proportionale lineare Funktionen) *Im Folgenden sind drei proportionale lineare Funktionen abgebildet …*

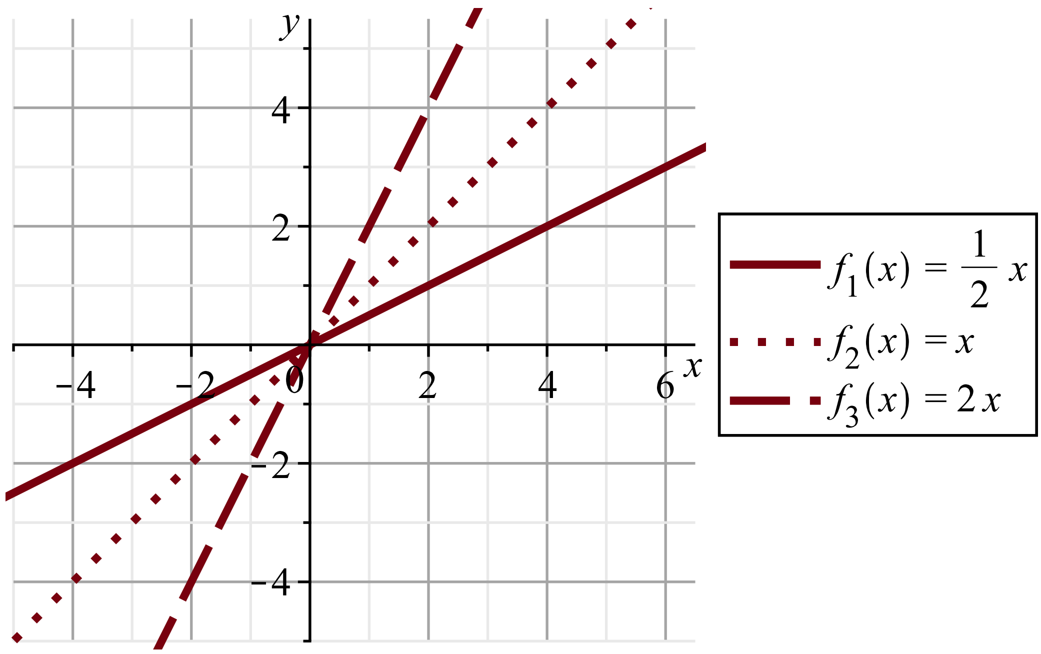

Abbildung 1.2: Beispiel - Proportionale lineare Funktionen

Beispiel 1.3.0.2 (Antiproportionale lineare Funktionen) *Im Folgenden sind drei antiproportionale lineare Funktionen abgebildet ...*

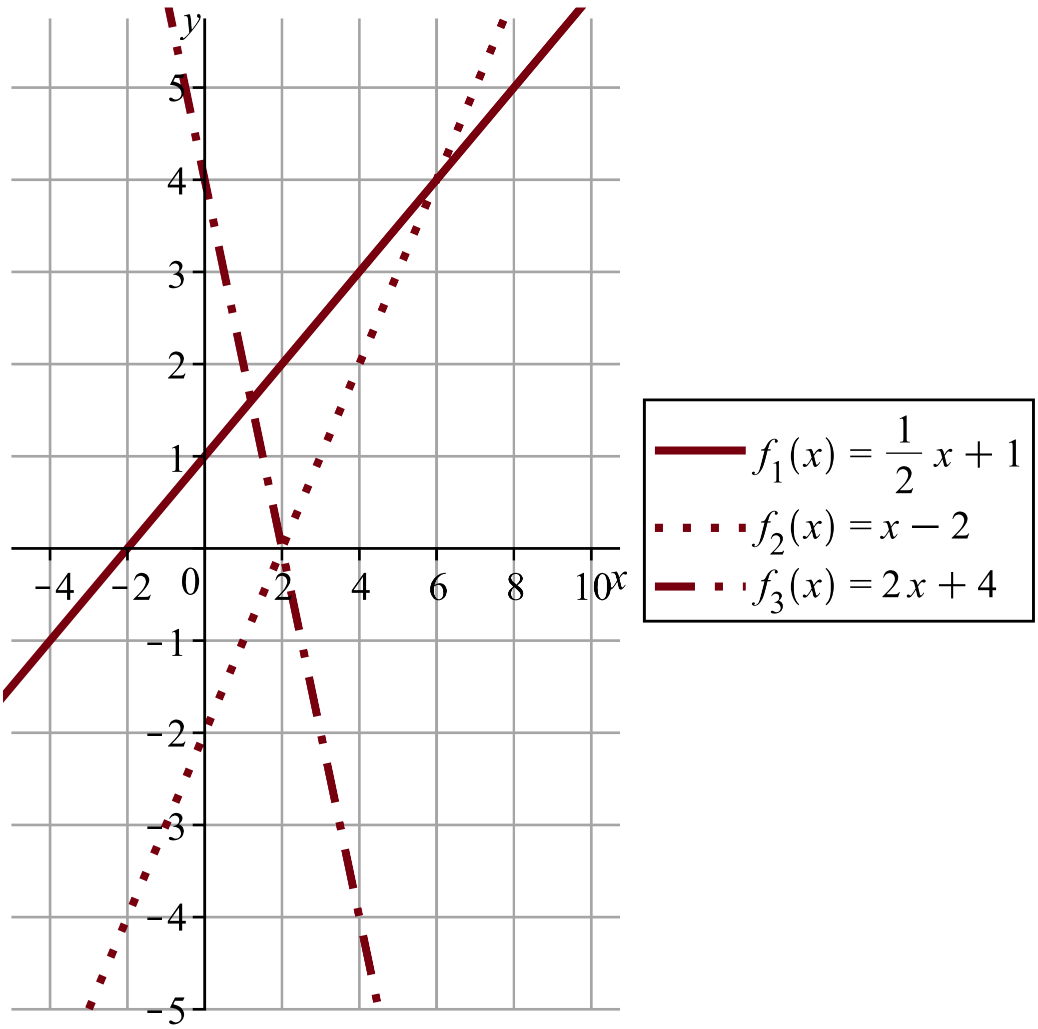

Abbildung 1.3: Beispiel - Antiproportionale lineare Funktionen

Beispiel 1.3.0.3 (Lineare Funktionsgleichung aufstellen) *Eine lineare Funktion f gehe durch die Punkte $P_1\,(-2|7)$ und $P_2\left(1\,\middle|-\frac{1}{2}\right)$. Ermittle die Funktionsgleichung von f.*

Lösung:

Schritt 1: Aufstellen der allgemeinen linearen Funktionsgleichung ...

$$f(x) = mx + b.$$

Schritt 2 Ermitteln der Funktionssteigung m ...

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}-7}{1-(-2)} \\ &= \frac{-\frac{15}{2}}{3} \\ &= -\frac{15}{6} \\ &= \underline{\underline{-\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Schritt 3: Ermitteln des y-Achsenabschnitts b (Steigung m sowie die Koordinaten eines der beiden Punkte P_1 oder P_2 in die Funktionsgleichung von f einsetzen und nach dem y-Achsenabschnitt b umstellen) ...

$$\begin{aligned} y &= mx+b \\ 7 &= -\frac{5}{2}\cdot(-2)+b \\ 7 &= 5+b \qquad |-5 \\ \Rightarrow b &= \underline{\underline{2}}. \end{aligned}$$

Damit folgt für die Funktionsgleichung von f ...

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{5}{2}x+2.}}$$

1.4 Quadratische Funktionen (Parabeln)

1.4.1 Allgemeine Form

Defintion 1.4.1.1: Allgemeine Form

Eine quadratische Funktion f in der **allgemeinen Form** ist für $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = \begin{cases} \left[\frac{4ac-b^2}{4a}; +\infty\right[& \text{für } a>0 \\ \left]-\infty; \frac{4ac-b^2}{4a}\right] & \text{für } a<0 \end{cases}$ ist wie folgt definiert ...

$$f(x) = ax^2+bx+c.$$

Für die **Nullstellen** gilt ...

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Beispiel 1.4.1.1 (Scheitelpunkt/Nullstellen) *Gegeben sei eine quadratische Funktion f durch*

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 5.$$

Bestimme den Scheitelpunkt S der quadratischen Funktion f und ermittle die Nullstellen x_1 und x_2.

Lösung:

Schritt 1: Bestimmen des Scheitelpunktes S ...

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-\mathbf{4})^2 + \mathbf{5} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S(4\,|5)}}.$$

Schritt 2: Ermitteln der Nullstellen x_1 und x_2 ...

Schritt 1: Gegebene Scheitelform in die allgemeine Form überführen ...

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 5 \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 8x + 16\right) + 5 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8 + 5 \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3}}. \end{aligned}$$

Schritt 2: Bestimmen der Parameter a, b und c ...

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 4 \\ c = -3. \end{cases}$$

Schritt 3: Ermitteln der Lösungen x_1 und x_2 ...

$$\begin{aligned} x_{1;2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-3)}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16-6}}{-1} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{-1} \\ \Rightarrow \quad x_1 &= \frac{-4 + \sqrt{10}}{-1} \approx \underline{\underline{0,8}} \\ \Rightarrow \quad x_2 &= \frac{-4 - \sqrt{10}}{-1} \approx \underline{\underline{7,2}}. \end{aligned}$$

1.4.2 Normalform

Defintion 1.4.2.1: Normalform

Eine quadratische Funktion f in der **Normalform** ist für $p, q \in \mathbb{R}$, $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = \left[q - \frac{p^2}{4}; +\infty\right[$ wie folgt definiert ...

$$f(x) = x^2 + px + q \qquad \Rightarrow \qquad \text{Scheitelpunkt } S\left(-\frac{p}{2}\bigg| -\frac{p^2}{4} + q\right)$$

Für die **Nullstellen** gilt ...

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Spezielle Formen der Normalform sind ...

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 && \Rightarrow \text{ Scheitelpunkt } S(0|0) \\ f(x) &= (x+d)^2 && \Rightarrow \text{ Scheitelpunkt } S(-d|0) \\ f(x) &= (x+d)^2 + e && \Rightarrow \text{ Scheitelpunkt } S(-d|e). \end{aligned}$$

Beispiel 1.4.2.1 (Nullstellen) *Gegeben sei eine quadratische Funktion f durch*

$$f(x) = x^2 + 6x + 9.$$

Ermittle die Nullstellen der quadratischen Funktion f.

Lösung:

Schritt 1: Bestimmen der Parameter p und q ...

$$f(x) = x^2 + 6x + 9 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} p = 6 \\ q = 9. \end{cases}$$

Schritt 2: Ermitteln der Lösungen ...

$$\begin{aligned} x_{1;2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9} \\ &= -3 \pm \sqrt{3^2 - 9} \\ &= -3 \pm \sqrt{9 - 9} \\ &= -3 \pm \sqrt{0} \\ &= -3 \pm 0 \\ \Rightarrow \quad x_{1;2} &= \underline{\underline{-3}}. \end{aligned}$$

1.4.3 Faktorisierte Form

Defintion 1.4.3.1: Faktorisierte Form

Eine quadratische Funktion f in der **faktorisierten Form** ist für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ wie folgt definiert ...

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Dabei bezeichnen x_1 und x_2 die **Nullstellen** der quadratischen Funktion f.

Beispiel 1.4.3.1 (Nullstellen) *Gegeben sei eine quadratische Funktion f durch*

$$f(x) = 2(x - 3)(x + 4).$$

Bestimme die Nullstellen der quadratischen Funktion f.

Lösung:

$$f(x) = 2(x-3)(x+4) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 3}} \text{ und } \underline{\underline{x_2 = -4}}.$$

1.5 Ganzrationale Funktionen $\boldsymbol{n}$. Grades

Defintion 1.5.0.1: Ganzrationale Funktionen $\boldsymbol{n}$. Grades

Eine **ganzrationale Funktion** f **$\boldsymbol{n}$. Grades** ist für $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert ...

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0.$$

Dabei bezeichnen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die **Koeffizienten** der ganzrationalen Funktion n. Grades.

Beispiel 1.5.0.1 (Ganzrationale Funktionen $\boldsymbol{n}$. Grades) *Im Folgenden sehen wir Funktionen n. Grades ...*

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 + x - 2 \quad \Rightarrow \quad$ *Grad der Funktion f: $n = 5$.*

b) $f(x) = 2(x-4)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad$ *Grad der Funktion f: $n = 2$.*

c) $f_t(x) = -tx^3 + \frac{1}{t}x^2 + x \quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad$ *Grad der Parameterfunktion f_t: $n = 3$.*

d) $f_t(x) = tx \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \Rightarrow \quad$ *Grad der Parameterfunktion f_t: $n = 1$.*

1.6 Gebrochenrationale Funktionen

Defintion 1.6.0.1: Gebrochenrationale Funktionen

Eine **gebrochenrationale Funktion** f ist für $v(x) \neq 0$ wie folgt definiert ...

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Dabei bezeichnen $u(x)$ und $v(x)$ ganzrationale Funktionen n. Grades (siehe Definition 1.5.0.1).
Eine gebrochenrationale Funktion f hat genau dann eine Nullstelle $x = x_0$, wenn $u(x_0) = 0$ und $v(x_0) \neq 0$ gelten.

Beispiel 1.6.0.1 (Gebrochenrationale Funktionen) *Im Folgenden sehen wir zwei Beispiele für gebrochenrationale Funktionen ...*

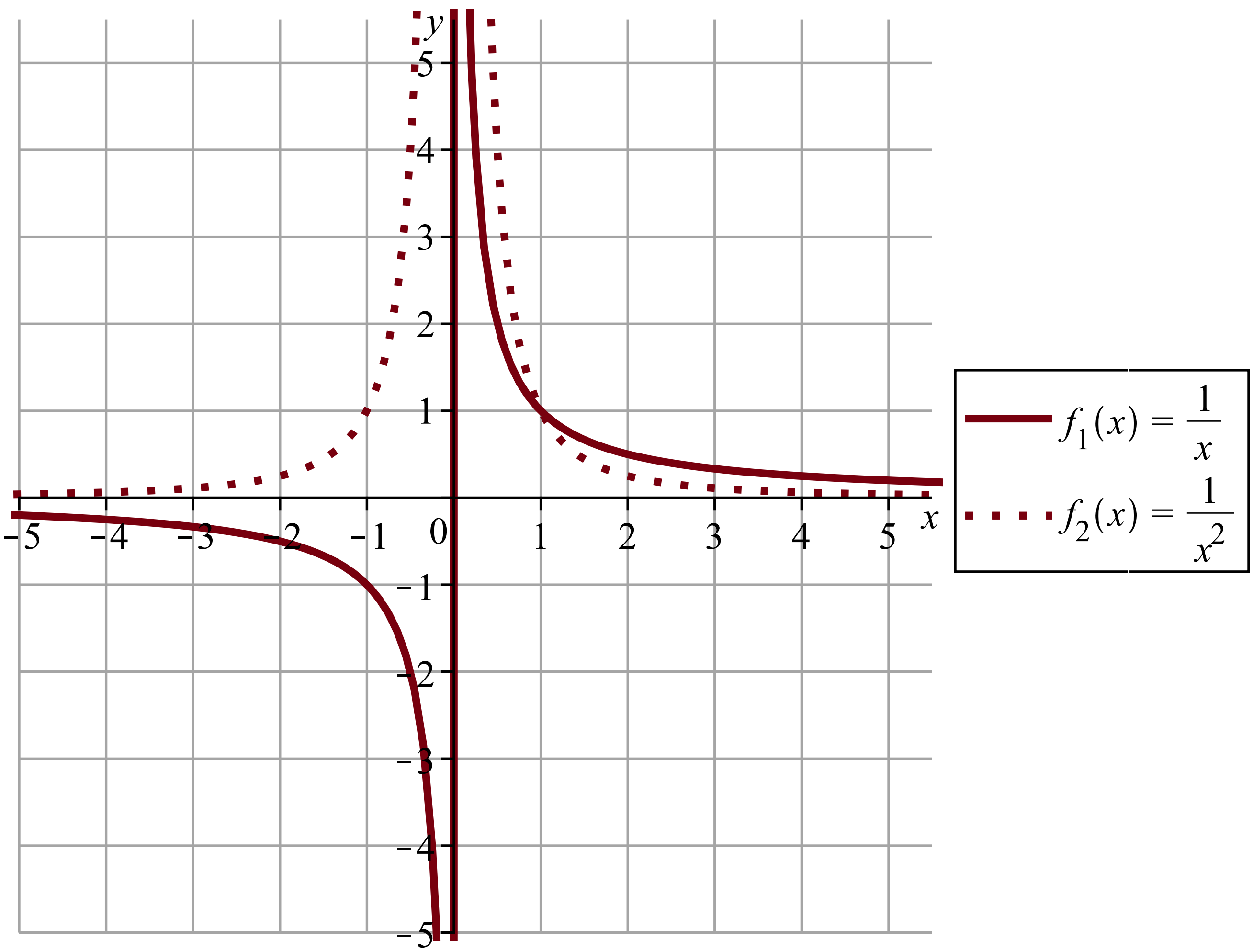

Abbildung 1.4: Beispiele - Gebrochenrationale Funktionen