

Cengizhan Duran

Funktionen Differenzieren Integrieren

Leicht verständlich erklärt anhand von vielen Beispielen, Übungsaufgaben und Musterlösungen.

FUNKTIONEN DIFFERENZIEREN INTEGRIEREN

Leicht verständlich erklärt anhand von vielen
Beispielen und ausführlich gelösten Übungsaufgaben

Cengizhan Duran

Vorwort

Das vorliegende Buch führt in die Grundlagen der Funktionen sowie Differenzial- und Integralrechnung ein. Dabei werden zahlreiche Definitionen, Beispiele sowie Übungsaufgaben behandelt.

Das Buch ist wie folgt aufgebaut:

Das erste Kapitel behandelt die grundlegendsten Funktionen und deren Eigenschaften. Es beginnt mit der Definition einer Funktion und geht auf lineare, quadratische, ganzrationale, gebrochenrationale, irrationale, Exponential-, logarithmische und trigonometrische Funktionen ein.

Das zweite Kapitel führt in die Grundlagen der Differenzialrechnung ein. Es beginnt mit der Definition des Differenzenquotienten und wird mit den Ableitungsregeln, den Tangenten- und Normalengleichungen sowie den Extrem- und Wendepunkten fortgesetzt.

Das dritte Kapitel führt in die Grundlagen der Integralrechnung ein. Es beginnt mit den Definitionen der verschiedenen Integrationsregeln und wird mit Flächenberechnungen sowie Rotationskörpern fortgesetzt.

An dieser Stelle möchte ich mich sehr bei Herrn Rainer Hebrank für das Korrekturlesen bedanken und wünsche allen Schülerinnen und Schülern viel Spaß und Erfolg beim Üben.

Cengizhan Duran

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen	6
1.1 Was ist eine Funktion?	6
1.2 Der Graph einer Funktion	6
1.3 Lineare Funktionen (Geraden)	7
1.4 Quadratische Funktionen (Parabeln)	10
1.4.1 Allgemeine Form	10
1.4.2 Normalform	12
1.4.3 Faktorierte Form	13
1.5 Ganzrationale Funktionen n . Grades	13
1.6 Gebrochenrationale Funktionen	14
1.7 Irrationale Funktionen	16
1.8 Exponentialfunktionen	16
1.9 Logarithmische Funktionen	17
1.10 Trigonometrische Funktionen	18
1.11 Besondere Eigenschaften von Funktionen	21
1.11.1 Symmetrie	21
1.11.2 Schnittpunkte einer Funktion mit den Koordinatenachsen	22
1.11.3 Asymptoten	24
1.12 Übungsaufgaben	29
2 Differenzialrechnung	32
2.1 Der Differenzenquotient	32
2.2 Ableitungsregeln	33
2.2.1 Faktorregel	33
2.2.2 Summenregel	34
2.2.3 Produktregel	34
2.2.4 Quotientenregel	35
2.2.5 Kettenregel	36
2.3 Grundlegende Ableitungsfunktionen	37
2.4 Bestimmen der Tangenten-/Normalengleichung	38
2.4.1 Bestimmen der Tangentengleichung	38
2.4.2 Bestimmen der Normalengleichung	40
2.5 Bestimmen von Extrem- und Wendepunkten	42
2.5.1 Bestimmen von Extrempunkten	42

2.5.2 Bestimmen von Wendepunkten	46
2.6 Übungsaufgaben	48
3 Integralrechnung	53
3.1 Integrationsregeln	53
3.1.1 Faktorregel	53
3.1.2 Summenregel (Linearität)	54
3.1.3 Substitutionsregel	55
3.1.4 Regel zur partiellen Integration	56
3.2 Grundlegende Stammfunktionen	57
3.3 Flächenberechnungen	58
3.3.1 Flächenberechnungen zwischen dem Graphen und der x -Achse	58
3.3.2 Flächenberechnungen zwischen zwei Graphen	64
3.4 Rotationskörper	67
3.4.1 Rotationskörper (Rotation um die x -Achse)	67
3.4.2 Rotationskörper (Rotation um die y -Achse)	69
3.5 Übungsaufgaben	71
A Lösungen der Übungsaufgaben	75
A.1 Lösungen: Funktionen	75
A.2 Lösungen: Differenzialrechnung	101
A.3 Lösungen: Integralrechnung	132
Abbildungsverzeichnis	146
Stichwortverzeichnis	148

Kapitel 1

Funktionen

1.1 Was ist eine Funktion?

Defintion 1.1.0.1: Was ist eine Funktion?

Eine **Funktion** f ist eine Zuordnungsvorschrift

$$f : x \mapsto y = f(x),$$

welche jedem $x \in D_f$ genau ein $y \in W_f$ zuordnet. Dabei bezeichnen D_f die **Definitionsmenge** und W_f die **Wertemenge** der Funktion f .

1.2 Der Graph einer Funktion

Defintion 1.2.0.1: Der Graph einer Funktion

Die Abbildung einer Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird als **Graph** bezeichnet. Damit ist der Graph einer Funktion f als die Menge aller Punkte $P(x_0|f(x_0))$ mit $x_0 \in D_f$ von f definiert.

1.3 Lineare Funktionen (Geraden)

Defintion 1.3.0.1: Lineare Funktionen

Eine **lineare Funktion** f ist für $m, b \in \mathbb{R}$ und $D_f = W_f = \mathbb{R}$ wie folgt definiert ...

$$f(x) = mx + b.$$

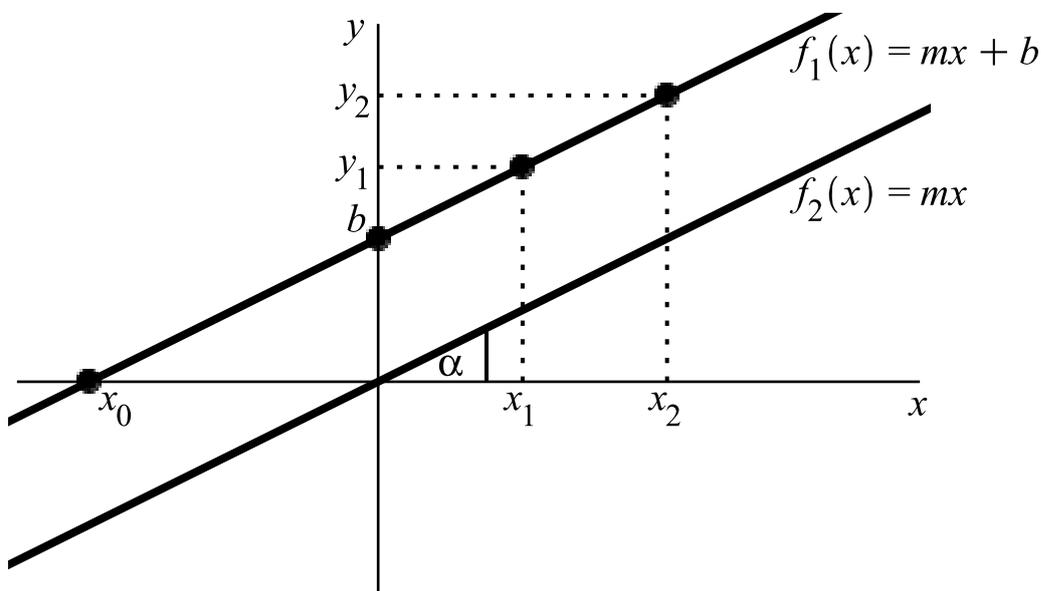


Abbildung 1.1: Lineare Funktionen

Dabei bezeichnen m die Steigung und b den y -Achsenabschnitt der linearen Funktion. Die Steigung m ist wie folgt definiert ...

$$m = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{steigende Gerade} \\ < 0 \Rightarrow \text{fallende Gerade} \end{cases}$$

Die Stelle $x = x_0$, an der die lineare Funktion f die x -Achse schneidet (Nullstelle), ist wie folgt definiert ...

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Eine lineare Funktion f wird auch als **proportionale Funktion** bezeichnet, wenn sie durch den Ursprung verläuft, also $b = 0$ gilt.

Beispiel 1.3.0.1 (Proportionale lineare Funktionen) *Im Folgenden sind drei proportionale lineare Funktionen abgebildet ...*

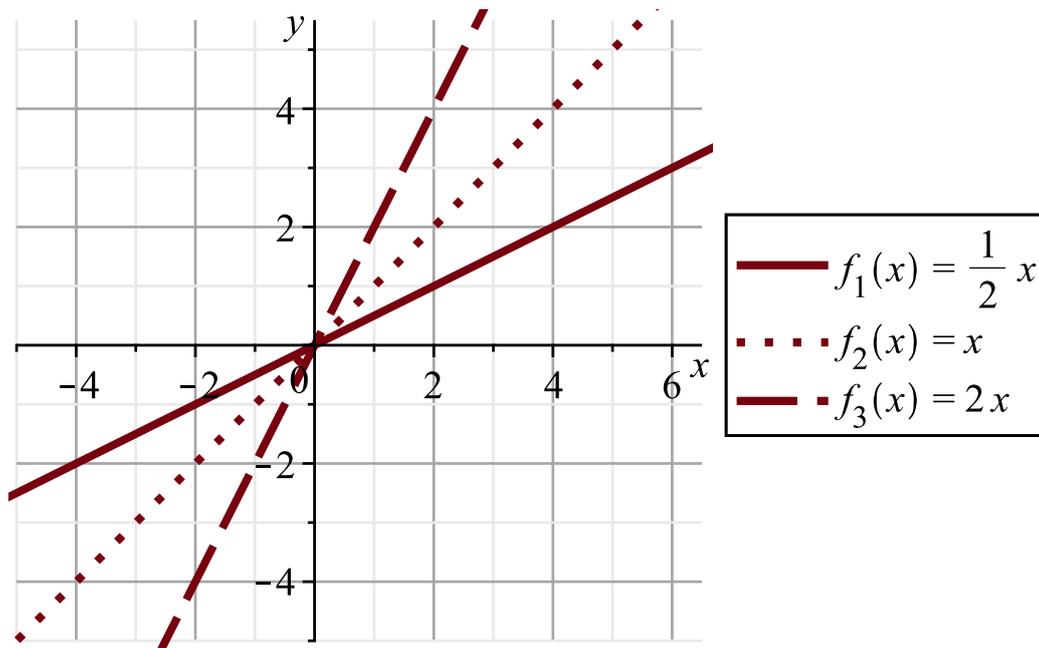


Abbildung 1.2: Beispiel - Proportionale lineare Funktionen

Beispiel 1.3.0.2 (Antiproportionale lineare Funktionen) *Im Folgenden sind drei antiproportionale lineare Funktionen abgebildet ...*

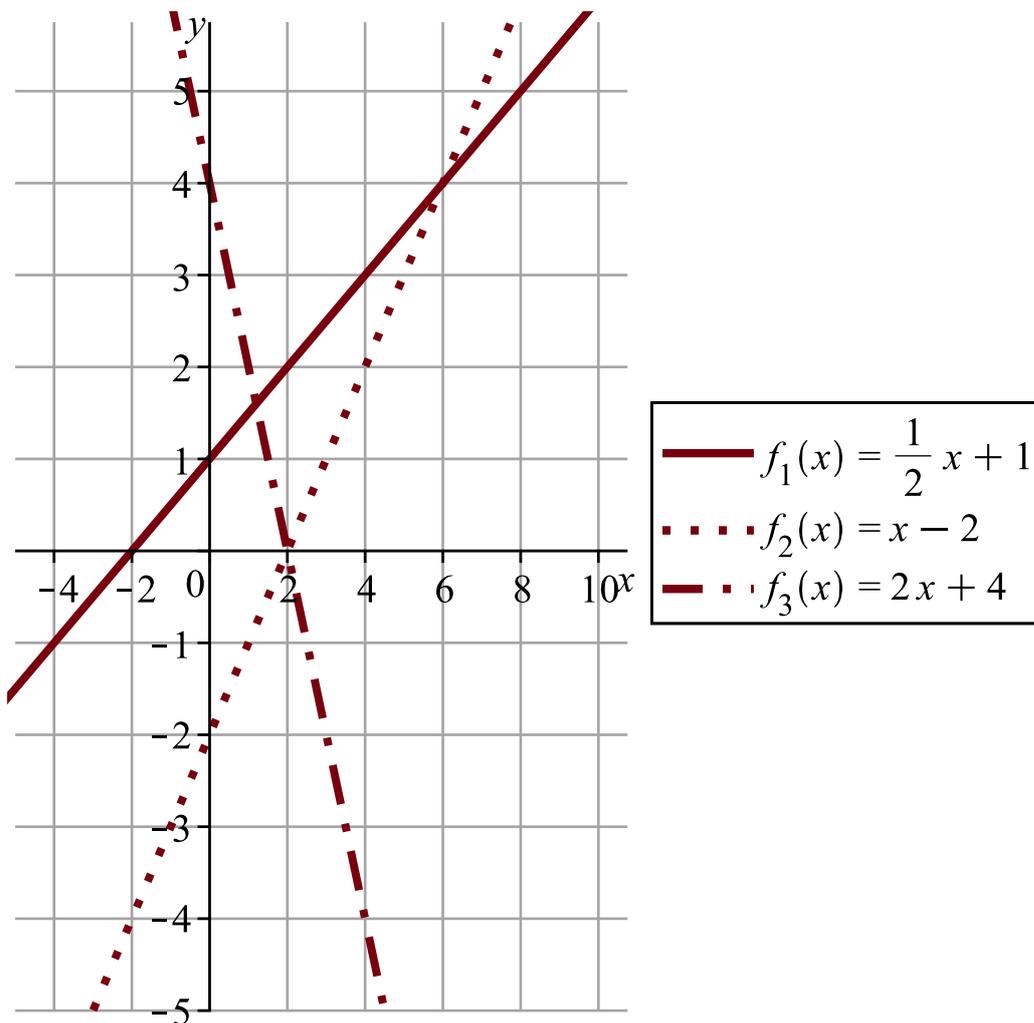


Abbildung 1.3: Beispiel - Antiproportionale lineare Funktionen

Beispiel 1.3.0.3 (Lineare Funktionsgleichung aufstellen) *Eine lineare Funktion f gehe durch die Punkte $P_1(-2|7)$ und $P_2(1|-\frac{1}{2})$. Ermittle die Funktionsgleichung von f .*

Lösung:

Schritt 1: Aufstellen der allgemeinen linearen Funktionsgleichung ...

$$f(x) = mx + b.$$

Schritt 2 Ermitteln der Funktionssteigung m ...

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{-\frac{1}{2} - 7}{1 - (-2)} \\
 &= \frac{-\frac{15}{2}}{3} \\
 &= -\frac{15}{6} \\
 &= -\frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

Schritt 3: Ermitteln des y -Achsenabschnitts b (Steigung m sowie die Koordinaten eines der beiden Punkte P_1 oder P_2 in die Funktionsgleichung von f einsetzen und nach dem y -Achsenabschnitt b umstellen) ...

$$\begin{aligned}
 y &= mx + b \\
 7 &= -\frac{5}{2} \cdot (-2) + b \\
 7 &= 5 + b && | -5 \\
 \Rightarrow b &= \underline{2}.
 \end{aligned}$$

Damit folgt für die Funktionsgleichung von f ...

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{5}{2}x + 2.}}$$

1.4 Quadratische Funktionen (Parabeln)

1.4.1 Allgemeine Form

Defintion 1.4.1.1: Allgemeine Form

Eine quadratische Funktion f in der **allgemeinen Form** ist für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,

$$D_f = \mathbb{R} \text{ und } W_f = \begin{cases} \left[\frac{4ac - b^2}{4a}; +\infty \right] & \text{für } a > 0 \\ \left[-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a} \right] & \text{für } a < 0 \end{cases} \text{ ist wie folgt definiert ...}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Für die **Nullstellen** gilt ...

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Beispiel 1.4.1.1 (Scheitelpunkt/Nullstellen) Gegeben sei eine quadratische Funktion f durch

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 5.$$

Bestimme den Scheitelpunkt S der quadratischen Funktion f und ermittle die Nullstellen x_1 und x_2 .

Lösung:

Schritt 1: Bestimmen des Scheitelpunktes S ...

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S(4|5)}}.$$

Schritt 2: Ermitteln der Nullstellen x_1 und x_2 ...

Schritt 1: Gegebene Scheitelform in die allgemeine Form überführen ...

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 5 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16) + 5 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8 + 5 \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3.}} \end{aligned}$$

Schritt 2: Bestimmen der Parameter a , b und c ...

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 4 \\ c = -3. \end{cases}$$

Schritt 3: Ermitteln der Lösungen x_1 und x_2 ...

$$\begin{aligned} x_{1;2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-3)}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 6}}{-1} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{-1} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{-4 + \sqrt{10}}{-1} \approx \underline{\underline{0,8}} \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{-4 - \sqrt{10}}{-1} \approx \underline{\underline{7,2}}. \end{aligned}$$

1.4.2 Normalform

Definition 1.4.2.1: Normalform

Eine quadratische Funktion f in der **Normalform** ist für $p, q \in \mathbb{R}$, $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = \left[q - \frac{p^2}{4}; +\infty \right[$ wie folgt definiert ...

$$f(x) = x^2 + px + q \quad \Rightarrow \quad \text{Scheitelpunkt } S\left(-\frac{p}{2} \mid -\frac{p^2}{4} + q\right)$$

Für die **Nullstellen** gilt ...

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Spezielle Formen der Normalform sind ...

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 && \Rightarrow \text{Scheitelpunkt } S(0|0) \\ f(x) &= (x + d)^2 && \Rightarrow \text{Scheitelpunkt } S(-d|0) \\ f(x) &= (x + d)^2 + e && \Rightarrow \text{Scheitelpunkt } S(-d|e). \end{aligned}$$

Beispiel 1.4.2.1 (Nullstellen) Gegeben sei eine quadratische Funktion f durch

$$f(x) = x^2 + 6x + 9.$$

Ermittle die Nullstellen der quadratischen Funktion f .

Lösung:

Schritt 1: Bestimmen der Parameter p und q ...

$$f(x) = x^2 + 6x + 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p = 6 \\ q = 9. \end{cases}$$

Schritt 2: Ermitteln der Lösungen ...

$$\begin{aligned} x_{1;2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9} \\ &= -3 \pm \sqrt{3^2 - 9} \\ &= -3 \pm \sqrt{9 - 9} \\ &= -3 \pm \sqrt{0} \\ &= -3 \pm 0 \\ \Rightarrow x_{1;2} &= \underline{\underline{-3}}. \end{aligned}$$

1.4.3 Faktorisierte Form

Defintion 1.4.3.1: Faktorisierte Form

Eine quadratische Funktion f in der **faktorisierten Form** ist für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ wie folgt definiert ...

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Dabei bezeichnen x_1 und x_2 die **Nullstellen** der quadratischen Funktion f .

Beispiel 1.4.3.1 (Nullstellen) Gegeben sei eine quadratische Funktion f durch

$$f(x) = 2(x - 3)(x + 4).$$

Bestimme die Nullstellen der quadratischen Funktion f .

Lösung:

$$f(x) = 2(x - 3)(x + 4) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 3}} \text{ und } \underline{\underline{x_2 = -4}}.$$

1.5 Ganzrationale Funktionen n . Grades

Defintion 1.5.0.1: Ganzrationale Funktionen n . Grades

Eine **ganzrationale Funktion f n . Grades** ist für $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert ...

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0.$$

Dabei bezeichnen a_0, a_1, \dots, a_n die **Koeffizienten** der ganzrationalen Funktion n . Grades.

Beispiel 1.5.0.1 (Ganzrationale Funktionen n . Grades) Im Folgenden sehen wir Funktionen n . Grades ...

$$a) f(x) = \frac{1}{2}x^5 + x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 + x - 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Grad der Funktion } f: n = 5.$$

$$b) f(x) = 2(x - 4)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Grad der Funktion } f: n = 2.$$

$$c) f_t(x) = -tx^3 + \frac{1}{t}x^2 + x \quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Grad der Parameterfunktion } f_t: n = 3.$$

$$d) f_t(x) = tx \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \text{Grad der Parameterfunktion } f_t: n = 1.$$

1.6 Gebrochenrationale Funktionen

Defintion 1.6.0.1: Gebrochenrationale Funktionen

Eine **gebrochenrationale Funktion** f ist für $v(x) \neq 0$ wie folgt definiert ...

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Dabei bezeichnen $u(x)$ und $v(x)$ ganzrationale Funktionen n . Grades (siehe Definition 1.5.0.1).

Eine gebrochenrationale Funktion f hat genau dann eine Nullstelle $x = x_0$, wenn $u(x_0) = 0$ und $v(x_0) \neq 0$ gelten.

Beispiel 1.6.0.1 (Gebrochenrationale Funktionen) *Im Folgenden sehen wir zwei Beispiele für gebrochenrationale Funktionen ...*

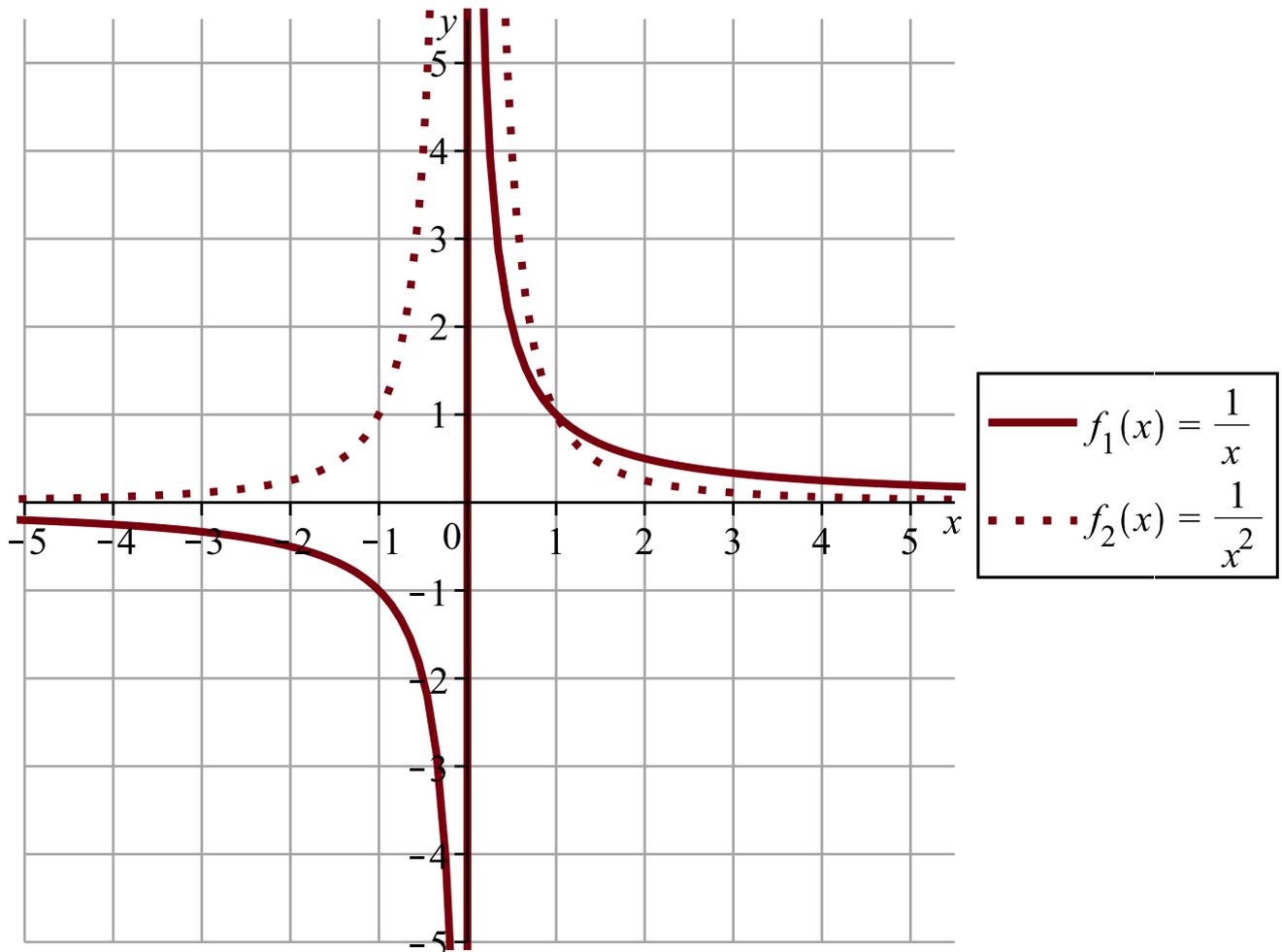


Abbildung 1.4: Beispiele - Gebrochenrationale Funktionen