

Stephan Reichel

---

**Experimentelle Untersuchung  
und numerische Modellierung  
transsonischer Plasmaströmungen  
unter Vakuumumgebung**

---



**Cuvillier Verlag Göttingen**  
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag



Experimentelle Untersuchung und numerische  
Modellierung transsonischer Plasmaströmungen  
unter Vakuumumgebung





# Experimentelle Untersuchung und numerische Modellierung transsonischer Plasmaströmungen unter Vakuumumgebung

Vom Fachbereich Produktionstechnik  
der  
UNIVERSITÄT BREMEN

zur Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur  
genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Stephan Reichel

Gutachter: Prof. Dr. Claus Braxmaier  
Prof. Dr.-Ing. Jochen Schein (Universität der Bundeswehr München)

Tag der mündlichen Prüfung: 17.09.2014



### **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen: Cuvillier, 2015  
Zugl.: Bremen, Univ., Diss., 2014

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2015  
Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen  
Telefon: 0551-54724-0  
Telefax: 0551-54724-21  
[www.cuvillier.de](http://www.cuvillier.de)

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

1. Auflage, 2015

Gedruckt auf umweltfreundlichem, säurefreiem Papier aus nachhaltiger Forstwirtschaft

ISBN 978-3-95404-927-1  
eISBN 978-3-7369-4927-0



# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand im Zeitraum 2008 bis 2013 am ZARM (Zentrum für angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation) an der Universität Bremen.

An dieser Stelle möchte ich mich explizit bei den Personen bedanken, ohne die diese Arbeit in dieser Form nicht möglich gewesen wäre.

Mein aufrichtiger Dank gilt der Institutsleitung unter Prof. Dr. Hans J. Rath für die hervorragenden Rahmenbedingungen und das entgegengebrachte Vertrauen.

Ebenfalls möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Claus Braxmaier für die guten Arbeitsbedingungen danken und der mir bei dieser Arbeit freie Hand gelassen hat.

Besonderer Dank gilt zudem Herrn Prof. Dr.-Ing. Jochen Schein, der sich als Zweitprüfer zur Verfügung gestellt hat.

Bedanken möchte ich mich bei Dr.-Ing. Rodion Groll, der mich stets mit seinem Rat auf dem Gebiet der numerischen Strömungsmechanik unterstützte.

Besonderer Dank gilt auch Dipl.-Ing. Ronald Mairose, der die praktischen Experimentaufbauten immer begleitete.

Bedanken möchte ich mich auch bei Dipl.-Math.techn. Fabian Fastabend und M.Sc. Torben Schadowski für die praktische Begleitung der Experimente.

Für die schnelle Bearbeitung unsere Versuchsaufbauten möchte ich mich bei der ZARM Mechanikwerkstatt bedanken. Ohne die Unterstützung von Andreas Pommerening, Volker Grönmeyer, Sonja Haase und Andy Dänke wäre schnelle Reparaturen und Änderungen am Versuchsaufbau unmöglich gewesen.

Bedanken möchte ich mich auch bei der gesamten Arbeitsgruppe Dr.-Ing. Rodion Groll, Dipl.-Math. Claudia Zimmermann und M.Math. Kristofer Leach, sowie meinem Bürokollegen Dipl.-Phys. Želimir Marojević für die gute und angenehme Zusammenarbeit.



---

Meinen Eltern danke ich dafür, dass Sie mich stets unterstützen, sowohl während meiner wissenschaftlichen Ausbildung, als auch davor.



# Nomenklatur

Symbol	Bedeutung	Wert	Einheit
$c$	Schallgeschwindigkeit		$\left[\frac{m}{s}\right]$
$c_p$	spezifische Wärmekapazität		$\left[\frac{J}{kgK}\right]$
$\delta$	Ionisationsrate		$[-]$
$e$	Elementarladung	$1,6022 \cdot 10^{-19}$	$[C]$
$\epsilon_o$	elektrische Feldkonstante	$8,8542 \cdot 10^{-12}$	$\left[\frac{As}{Vm}\right]$
$E_e$	absolute Energiedichte		$\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$
$\vec{E}_j$	elektrische Feldstärke		$\left[\frac{V}{m}\right]$
$\eta$	Ionisationsfaktor		$\left[\frac{s^3 A^2}{kg^{\frac{1}{2}} m^{\frac{9}{2}} T^{\frac{3}{4}}}\right]$
$h$	Planck Konstante	$6,6261 \cdot 10^{-34}$	$[Js]$
$\vec{j}$	elektrische Stromdichte		$\left[\frac{A}{m^2}\right]$
$k_B$	Boltzmann Konstante	$1,3806 \cdot 10^{-23}$	$\left[\frac{J}{K}\right]$
$\kappa$	Isentropenexponen		$[-]$
$\lambda_D$	Debye-Länge		$[m]$
$m$	Masse		$[kg]$
$m_e$	Masse eines Elektrons	$9,1094 \cdot 10^{-31}$	$[kg]$
$m_M$	Molekülmasse		$[kg]$
$M$	Molmasse		$\left[\frac{kg}{mol}\right]$
$\dot{m}$	Massenfluss		$\left[\frac{kg}{s}\right]$
$Ma$	Machzahl		$[-]$
$n$	Stoffmenge		$\left[\frac{1}{mol}\right]$
$n_o$	Moleküle		$\left[\frac{1}{m^3}\right]$
$n_e$	Teilchendichte		$\left[\frac{1}{m^3}\right]$
$p$	Druck		$\left[\frac{kg}{ms^2}\right]$
$\pi$	Kreiszahl	3,1416	$[-]$
$\rho$	Dichte		$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$



---

$q_1$	erste Ionisationsenergie		$\left[\frac{J}{mol}\right]$
$r$	Abstand		$[m]$
$R_o$	Universelle Gaskonstante	8,3145	$\left[\frac{J}{molK}\right]$
$R_s$	Spezifische Gaskonstante		$\left[\frac{J}{molK}\right]$
$\sigma$	elektrische Leitfähigkeit		$\left[\frac{s^3 A^2}{m^3 kg}\right]$
$\sigma_b$	Stefan-Boltzmann Konstante	$5,6704 \cdot 10^{-8}$	$\left[\frac{W}{m^2 K^4}\right]$
$\sigma_l$	Lennard-Jones-Stoßdurchmesser		$[m]$
$t$	Zeit		$[s]$
$T$	Temperatur		$[K]$
$t_c$	mittlere Zeit zwischen zwei Stößen		$[s]$
$T_v$	Spannungstensor		$\left[\frac{kg}{ms^2}\right]$
$\vec{u}$	Geschwindigkeit		$\left[\frac{m}{s}\right]$
$\phi$	elektrisches Potenzial		$[V]$
$U$	Spannung		$[V]$
$V_C$	Coulomb-Potential		$[V]$
$V_D$	Debye-Potential		$[V]$



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wissenschaftliches Vorgehen und Zielsetzung</b>	<b>11</b>
1.1	Einleitung und Motivation . . . . .	11
1.2	Zielsetzung und Vorgehen . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Transport kompressibler Medien</b>	<b>15</b>
2.1	Raketengleichung von Ziolkowskij . . . . .	15
2.2	Effizienzvergleich von Triebwerkstypen . . . . .	19
2.3	Bisherige Arbeiten . . . . .	20
2.4	Klassifikation von Transportgleichungen . . . . .	25
2.5	Massenerhaltung . . . . .	30
2.6	Die Navier-Stokes-Gleichungen für den kompressiblen Fall . . . . .	31
2.7	Erhaltung der Energie . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Einführung in die numerischen Methoden</b>	<b>43</b>
3.1	Diskretisierung einer Transportgleichung . . . . .	43
3.2	Druckkorrekturverfahren . . . . .	49
3.3	Courant Zeitschrittanpassung . . . . .	51
3.4	Adaptive Gitteranpassung . . . . .	55
3.5	Test der Gitteranpassung an einer Referenzrechnung . . . . .	56



## INHALTSVERZEICHNIS

---

<b>4</b>	<b>Numerische Modellierung einer transsonischen Strömung</b>	<b>61</b>
4.1	Vergleich der Numerik mit dem Experiment . . . . .	61
4.2	Zusammenfassung . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Physikalische Grundlagen von Plasmen</b>	<b>75</b>
5.1	Kategorisierung von Plasmen . . . . .	75
5.2	Energieinhalt eines Plasmas . . . . .	79
5.3	Physikalische Eigenschaften von Plasmen . . . . .	79
5.4	Kontinuumsmodell . . . . .	81
5.5	Numerische Modellierung . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Vakuumtechnik und Versuchsaufbauten</b>	<b>87</b>
6.1	Versuchsaufbau Ringspaltmessung . . . . .	87
6.2	Versuchsaufbau INGA I . . . . .	94
6.3	Versuchsaufbau INGA II . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Numerische Modellierung des Lichtbogentriebwerks</b>	<b>113</b>
7.1	Kaltgassimulation eines Ringspalts . . . . .	113
7.2	Kaltgassimulation Düse . . . . .	120
7.3	Einfluss der Temperatur auf den Brennkammerdruck . . . . .	121
7.4	Numerische Simulation des Lichtbogentriebwerks . . . . .	124
7.5	Traversierung der Kathode . . . . .	127
7.6	Vorteil der elektrischen Entladung . . . . .	130
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>135</b>
<b>9</b>	<b>Anhang</b>	<b>151</b>
9.1	Quellcode Numerische Modellierung . . . . .	151



## INHALTSVERZEICHNIS

---

9.2 Versuchsaufbau INGA I . . . . .	157
9.3 Versuchsaufbau INGA II . . . . .	162



### Abstract

In dieser Arbeit wird die Durchströmung eines thermoelektrischen Lichtbogentriebwerks anhand eines Experimentes und eines numerischen Modells untersucht.

Bei diesen Triebwerkstypen wird Gas zwischen zwei konzentrisch angeordneten Elektroden in einer Vakuumkammer ionisiert. In einem Versuchsaufbau werden mehrere verschieden komplexe Experimente nacheinander aufgebaut. Begonnen wird mit einem einfachen Ringspalt-Experiment, in dem das Zündverhalten der Edelgase Argon und Neon untersucht wird. Die Ergebnisse zu diesem Experiment und die sich daraus gezogenen Schlüsse für eine Weiterentwicklung des Experimentaufbaus werden in dieser Arbeit dokumentiert und dem Leser aufgezeigt. Bei der letzten gezeigten Ausbaustufe des Experiments handelt es sich um ein thermoelektrisches Lichtbogentriebwerk, dass über 30 *min* kontinuierlich mit über 600 *W* betrieben wurde, ohne zu versagen.

Parallel zum Experiment wird ein numerischer Code, eine Open-Source-Software, schrittweise weiterentwickelt, um die Experimente numerisch abbilden zu können. Hierfür werden mehrere Tests anhand der real durchgeführten Experimente durchgeführt, um die Qualität des numerischen Codes zu bewerten. Alle vorgenommenen Anpassungen im Code, als auch an den Versuchsaufbauten werden in dieser Arbeit skizziert.

Für die Simulation des thermoelektrischen Lichtbogentriebwerks wird ein Aufheizterm nach [Lin-1955] abgeschätzt. Dieser Aufheizterm wird in Kapitel 7.4 über eine Parameterstudie ermittelt. Final wird gezeigt, dass Experiment und das numerische Modell gut übereinstimmen. Auf Grund der guten Übereinstimmung der Experimente mit dem numerischen Modell kann auch die Ursache der Triebwerksabnutzung aufgezeigt werden. Der Verschleiß des Triebwerks ist am Größten, in den Bereichen, in denen die lokalen Temperaturen weit oberhalb der Schmelztemperaturen der Werkstoffe liegen.



# Kapitel 1

## Wissenschaftliches Vorgehen und Zielsetzung

### 1.1 Einleitung und Motivation

Die Raumfahrt ist in der heutigen Welt unverzichtbar, und sie wird auch in den kommenden Jahrzehnten immer wichtiger werden. Es ist mittlerweile selbstverständlich geworden über Satelliten zu kommunizieren, jederzeit aktuelle Informationen aus allen Teilen der Welt zu erhalten und seinen genauen Standort zu kennen. Auch in der Wissenschaft, bei der Erkundung unseres Sonnensystems, sowie des Universums ist die Raumfahrt unverzichtbar. Hierfür sind neue Satelliten und Raumfahrzeuge notwendig.

Begonnen hat die moderne Raumfahrt in den 30er Jahren des vergangenen Jahrhunderts. Die erste moderne Rakete (Aggregat 4) wurde in Deutschland unter der Leitung von Wernher von Braun entwickelt. Diese Rakete ist etwa  $14\text{ m}$  hoch und hat eine Gesamtmasse von  $13,5\text{ t}$ . Die A4 war als erste Rakete überhaupt in der Lage eine Gipfelhöhe von  $100\text{ km}$  Höhe zu erreichen und hat damit nach Definition der FAI (Fédération Aéronautique Internationale) die Grenze zwischen Erdatmosphäre und Weltall durchbrochen.

Die A4 verfügte bereits über eine Kreiselsteuerung (Gyroskope), die Kursabweichungen registriert und die Kurskorrektur einleitete. Als Treibstoff verwendet diese Rakete Ethylalkohol, der mit Sauerstoff unter hohem Druck in eine Brennkammer eingespritzt wurde. Auf diese Weise erreichte diese Rakete nach Brennschluss eine Endgeschwindigkeit von etwa Mach 5 ([Neufeld]). Auch nachfolgende Raketen wie die Saturn 5, die für das Apolloprogramm entwickelt wurde, das amerikanische Space-Shuttle, die russische Sojus und die europäische Ariane Rakete verfügen auch heute noch über ein sehr ähnliches Antriebskonzept ([Meschede-2005] [Bergmann-1980]). Dieses chemische Antriebs-



konzept wird auch weiterhin notwendig sein, um die Gravitation der Erde zu überwinden. Für Raumfahrzeuge auf interplanetaren Missionen, oder auf höheren Umlaufbahnen gibt es jedoch neue und effizientere Antriebskonzepte. In diesen Raumfahrzeugen werden vermehrt elektrische Triebwerke verbaut, wie in folgenden Quellen beschrieben [Brown-2004] [Feili-2012].

Elektrische Triebwerke erzeugen einen höheren spezifischen Impuls als konventionelle Verbrennungstriebwerke. Daher sind elektrische Triebwerke deutlich Treibstoffeffizienter. Während bei einem Einsatz von chemischen Triebwerken oder Kaltgasdüsen als Satellitensteuerrüden die Masse des erforderlichen Treibstoffs in etwa der Masse der gesamten Nutzlast entspricht, wird für elektrische Triebwerke lediglich ein Bruchteil des Treibstoffs benötigt. Mit einer präziseren Steuerung der Ausstoßgeschwindigkeit mittels Aufheizung des Gases und einer Verbesserung der gasdynamischen Prozesse innerhalb der Düsen Einheit kann die benötigte Treibstoffmenge nochmals reduziert werden. Bei gleichbleibendem Schub werden somit eine höhere Kapazität des Raumfahrzeugs für weitere Nutzlast, eine längere Missionsdauer, als auch eine größere Reichweite erzielt. Aus diesem Grund ist das thermofluidodynamische Verständnis der Expansionsströmung in Verbindung mit der Ionisation und elektrischen Leitfähigkeit des generierten Plasmas von höchster Bedeutung.

Die heutige Auslegung eines elektrischen Triebwerkes für ein Raumfahrzeug basiert momentan noch häufig auf Erfahrungswerten, die anhand von Experimenten gewonnen werden. Numerische Methoden, die Temperaturen, Geschwindigkeiten, Ionisationsgrad und Verschleiß verlässlich berechnen, sind momentan noch nicht vollständig entwickelt. Grund hierfür ist, dass eine Gasströmung, je nach Ionisationsgrad stark unterschiedliche Eigenschaften aufweist. Ein numerisches Modell, welches in der Lage ist, ein solches elektrisches Triebwerk zu modellieren, wäre für die Auslegung eines elektrischen Triebwerkes von großem Nutzen. Unter der Verwendung eines solchen Modells könnte beispielsweise das Design eines Triebwerkes und die im Hinblick auf Temperaturverteilungen im Triebwerk selbst optimiert werden. Dies ist eine bedeutende Fragestellung, da zu hohe Temperaturen im Triebwerk zu Verschleiß und schließlich zum Versagen führen.

## 1.2 Zielsetzung und Vorgehen

In dieser Arbeit soll die Strömung in einem elektrischen Triebwerk anhand eines Experimentes und eines numerischen Modells untersucht werden. Untersucht wird ein thermoelektrisches Lichtbogentriebwerk. Bei diesem Triebwerkstypen wird Gas zwischen zwei konzentrisch angeordneten Elektroden ionisiert. Die Temperaturen betragen weniger als  $5000C$ , weshalb sich diese Triebwerke auch für einen kontinuierlichen Betrieb eignen. Der Ionisationsgrad innerhalb der Brennkammer des Triebwerks ist eher gering. Dennoch



## KAPITEL 1. WISSENSCHAFTLICHES VORGEHEN UND ZIELSETZUNG

---

ist ein kontinuierlicher Betrieb eines solchen Triebwerkes nicht einfach, da die Betriebstemperaturen teilweise oberhalb der Schmelztemperaturen der verwendeten Materialien liegt.

Zunächst wird allgemein der Transport kompressibler Medien in Kapitel 2 vorgestellt. Die in diesem Kapitel eingeführten Gleichungen und Kenngrößen werden ebenfalls im Kapitel 7 verwendet, in dem der hier verwendete Solver vorgestellt wird. Dieser Solver wird an mehreren Stellen innerhalb dieser Arbeit getestet. So wird unter Verwendung dieses Solvers in Kapitel 4 das Ergebnis eines Hyperschall-experiments simuliert und mit Messdaten verglichen. Bei dieser ersten Untersuchung wird ein vereinfachter Basissolver verwendet. Dieser Solver beinhaltet alle Terme, die für einen kompressiblen Transport einer Strömung notwendig sind. Zusätzlich wird dieser Solver in Kapitel 7 getestet. Bei diesen Versuchen handelt es sich um Messungen, die an einem Kaltgastriebwerk durchgeführt wurden.

Parallel zu diesen Testreihen wird ein elektrisches Triebwerk als Experiment aufgebaut und getestet. Ziel ist ein Testaufbau eines elektrischen Triebwerkes, welches kontinuierlich (mehr als 30 s Dauerbetrieb) betrieben werden kann. Begonnen wird mit einem stark vereinfachten Experiment in Kapitel 6. Hierbei handelt es sich um einen einfachen Ringspalt. An diesem Ringspalt wird das Zündverhalten getestet. Der Zusammenhang von Elektrodenabstand und Gasmenge im Verhältnis zur Durchschlagsspannung ist an dieser Stelle von Interesse. Auf Basis dieser Messdaten wird schließlich das Triebwerk INGA entwickelt.

Der INGA Aufbau und die Durchführung sieht wie folgt aus. Durch einen Ringspalt wird ein Edelgas hindurchgeleitet. Zwischen dem Innen- und dem Außenring des Ringspalts wird eine Spannung von 2000 V angelegt. Wird nun ein Edelgas durch den Ringspalt hindurchgeleitet, so kommt es zu einem Spannungsdurchschlag. Nach dem Spannungsdurchschlag stellt sich im kontinuierlichen Betrieb eine Spannung von etwa 20 V ein. Der Strom wird durch ein Netzteil auf 20–30 Ampere begrenzt. Abhängig von der eingekoppelten Leistung wird das Gas aufgeheizt. Dies bedeutet eine deutlich höhere Temperatur des Gases und damit eine Volumenzunahme. Somit steigt auch der Druck im Triebwerk. Außerdem führt die höhere Temperatur zu einer höheren Schallgeschwindigkeit im Ringspalt. Dies wirkt sich positiv auf den Impuls und somit auf den Wirkungsgrad des Triebwerkes aus.

Der Versuchsaufbau INGA I wird weiter entwickelt zu INGA II, da der INGA I sehr störanfällig ist und das Ziel des kontinuierlichen Betriebes mit diesem Versuchsaufbau nicht erreicht wurde. Durch die Verwendung von hochwertigeren Materialien im Brennkammerbereich und Veränderungen an der Geometrie ist es mit diesem modifizierten Versuchsaufbaues möglich den Dauerbetrieb zu realisieren und die Geometrie für Parameterstudien schnell zu ändern (modular aufgebautes Triebwerk).

Zusätzlich zum Experiment wird in dieser Arbeit parallel ein numerischer Code entwickelt, welcher die strömungsmechanischen Zustände im Triebwerk abbildet. Um diese



## KAPITEL 1. WISSENSCHAFTLICHES VORGEHEN UND ZIELSETZUNG

---

technischen Prozesse zu optimieren, müssen die kompressiblen und elektrischen Transportgrößen hoch komplexen Strömungsvorgänge innerhalb der Düsengeometrie so präzise wie möglich modelliert werden. Genutzt wird hierfür ein Ersatzmodell, das in dieser Arbeit genau beschrieben und getestet wird. Die Modellierung erfolgt in Form einer 3D-Simulation, welche die Strömungs-, Thermo- und Elektrodynamik innerhalb der transsonischen Düse abbildet. Zur Verifizierung der numerischen Ergebnisse werden die experimentell gewonnenen Daten verwendet. Bei diesen Daten handelt es sich einerseits um Kaltgasmessungen, an unterschiedlichen Triebwerksgeometrien, die im Kapitel 6 gezeigt werden. Die Messergebnisse des INGA II Aufbaus werden genutzt um zwei Faktoren ( $\zeta$  und  $\eta$ ) zu bestimmen. Diese beiden Faktoren beeinflussen im numerischen Modell maßgeblich die Aufheizung des Gases.

Abschließend werden in dieser Arbeit die experimentellen Ergebnisse mit den numerischen verglichen. In Kapitel 8 wird die Arbeit nochmals zusammengefasst und ein Ausblick geboten.



## Kapitel 2

# Transport kompressibler Medien

In der Strömungsmechanik wird allgemein die Finite Volumen Methode (FVM) verwendet. Hierbei werden Erhaltungsgleichungen für die Masse, den Impuls und der Energie, in Form von partiellen Differentialgleichungen definiert, denen Erhaltungssätze zugrunde liegen. Die für das verwendete Modell zugrunde liegenden Erhaltungsgleichungen werden in den folgenden Unterkapiteln vorgestellt. Dabei wird auf mehrere Literaturstellen zurückgegriffen. Die hier beschriebenen Methoden sind ebenfalls in [Ferziger-1997], [Oertel-2009], [Spurk-2007] und [Noll-1993] zu finden.

Ziel der Strömungsmechanik ist es, das Verhalten von Fluiden abzubilden und vorherzusagen. Als Fluide bezeichnet man allgemein Gase und Flüssigkeiten, weil die meisten physikalischen Gesetze und Zusammenhänge sowohl für Gase, als auch für Flüssigkeiten gelten. Die Stoffdaten unterscheiden sich nur quantitativ. Als Fluid bezeichnet man allgemein eine Substanz die einer beliebig langsamen Scherung keinen Widerstand entgegen setzt.

### 2.1 Raketengleichung von Ziolkowskij

Um den Wirkungsgrad eines Triebwerkes bewerten zu können ist es sinnvoll einen Blick auf die Raketengleichung zu werfen. Die Gleichung beschreibt die grundlegende Gesetzmäßigkeit für Antriebe, die Schub durch kontinuierlichen Ausstoß von Treibmasse erzeugen. Es handelt sich um eine einfache Impulsbilanz. In dieser Gleichung wird die Endgeschwindigkeit einer Rakete ( $v$ ), mit der Startmasse ( $M_v$ ) und der Masse des Treibstoffs ( $M_t$ ) ins Verhältnis gesetzt. Die Ausströmgeschwindigkeit des abgebrannten Treibstoffs aus der Düse ist ( $v_e$ ).