

Ludwig Neidhart

Unendlichkeit im Schnittpunkt von Mathematik und Theologie



Cuvillier Verlag Göttingen
2. Auflage

Ω

Θ_0

$\mathbb{Z}_1$

∞

7

3

1

A

Ludwig Neidhart

Unendlichkeit im Schnittpunkt von Mathematik
und Theologie

2., überarbeitete Auflage

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

2., überarbeitete Aufl. - Göttingen : Cuvillier, 2008

Zugl.: Augsburg, Univ., Diss., 2005

978-3-86727-588-0

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2008

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen

Telefon: 0551-54724-0

Telefax: 0551-54724-21

www.cuvillier.de

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

2., überarbeitete Auflage, 2008

Gedruckt auf säurefreiem Papier

978-3-86727-588-0

In Memoriam Bernd Aulbach

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde von der Katholisch-Theologischen Fakultät der Universität Augsburg im Sommersemester 2005 als Dissertation angenommen. Für den Druck wurde sie noch einmal durchgesehen und hauptsächlich durch weitere Fußnoten inhaltlich geringfügig erweitert.

Das Bemühen um ein umfassendes Verständnis des Unendlichen, dem ich mich seit etwa zwanzig Jahren mehr oder weniger intensiv gewidmet habe, erfordert die Einbeziehung mehrerer Wissenschaften, vor allem der Mathematik und der Theologie, verbunden mit einer wenigstens kursorischen Behandlung der Probleme des „harten Kerns“ der Philosophie, der unter dem Namen *Metaphysik* bekannt ist. Nach den einleitenden Kapiteln 1 und 2 erfolgt daher in Kap. 3–4 zunächst ein grundlegender *philosophischer Teil* mit vorbereitenden psychologischen und ontologischen Klärungen. Daran schließt sich in Kap. 5–7 der *mathematische Teil* an, der als die Vollendung der ontologischen Grundlegung für Unendlichkeitsfragen angesehen werden kann, weil er eine Definition sowie die Einsicht in die Widerspruchsfreiheit und die wesentlichen Eigenschaften des Unendlichen ermöglicht. Dieser Teil enthält nicht nur eine Philosophie der Mathematik mit einer Diskussion der Paradoxien des Unendlichen, sondern auch eine Einführung in die moderne Mengenlehre einschließlich aller benötigten Beweise. Nach dem darauf folgenden *historischen Teil* (Kap. 8), in dem die im Laufe der Geschichte eingenommenen Standpunkte der Religion, der Philosophie und zuletzt auch der *Physik* (Kap. 8.16) zu Unendlichkeitsfragen analysiert werden, werden in Kap. 9–11 systematisch die drei großen metaphysischen Unendlichkeitsfragen behandelt: ob ein unendlicher Gott existiert, ob der Mensch eine unsterbliche Seele hat und ob Unendlichkeiten im Kosmos auftreten können. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Gottesfrage (Kap. 9), in deren Rahmen ich die klassischen Gottesbeweise untersuche und das ontologische Argument neu zu untermauern versuche. Im Schlusskapitel 12 hebe ich als Ergebnis die affirmative Antwort auf die drei vorgenannten Fragen hervor und weise auf die diese Antwort ermöglichende Widerspruchsfreiheit des Unendlichen zurück, die im mathematischen Teil begründet wurde. So zeigt sich insgesamt die zentrale Rolle des Unendlichen in Metaphysik, Mathematik und Theologie sowie seine vermittelnde Rolle zwischen Mathematik und Theologie.

Danken möchte ich an erster Stelle meinem Doktorvater, Professor Dr. theol. Dr. phil. Anton Ziegenaus, der die Idee, die vorliegende interdisziplinäre Arbeit zu schreiben, von Anfang an unterstützt und die Arbeit im weiteren Verlauf sehr gefördert hat. Sodann gilt mein besonderer Dank den beiden Mathematikern Professor Dr. Bernd Aulbach und Professor Dr. Jost-Hinrich Eschenburg. Beide haben mich während meiner mathematischen Ausbildung stark geprägt und gefördert. Professor Aulbach hat meine mathematische Diplomarbeit betreut. Er war auch am Fortgang meiner theologischen Arbeit sehr interessiert und hatte sich bereit erklärt, das Zweitgutachten für die vorliegende Arbeit zu schreiben. Nach seinem unerwarteten Tod im Januar 2005 hat Professor Eschenburg diese Aufgabe übernommen, der ebenso wie Professor Aulbach auch für die philosophisch-theologischen Fragen großes Interesse zeigte. Bedanken möchte ich mich auch bei allen anderen, die mir inhaltliche Anregungen gaben, beim Korrekturlesen halfen oder bei Computerproblemen zur Seite standen. Hier sind zu nennen die Mathematiker Prof. Dr. Gerald van Boogart, Dr. Werner Schabert, Dr. Albert Marquardt, Dr. Martin Rasmussen, Dr. Yuri Iliach, Christoph Kawan, Christian Kreuzer und Christian Moeller, der Physiker Dr. German Hammerl, die Theologen Dr. Stefan Nieborak, Leo Kropfreiter und Andreas Günther, der Historiker Dr. Franz Stuhlhofer und nicht zuletzt meine Eltern, meine Frau und mein Sohn. Schließlich möchte ich mich bei der Diözese Augsburg für die Auszeichnung der Dissertation mit dem Albertus-Magnus-Preis 2005, bei Herrn Karl Theo Holderberg für Übernahme der Druckkosten und beim Cuvillier Verlag für die engagierte verlegerische Betreuung bedanken.

Augsburg, den 15. August 2007,
Ludwig Neidhart

Vorbemerkungen

Eckige Klammern [] in Zitaten enthalten stets von mir stammende Hinweise, während *Hervorhebungen* stets auf das Original bzw. die benutzte Textausgabe zurückgehen, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird.

Die deutschen Anführungsstriche („“) werden für gewöhnliche Zitate, die französischen («») zur Zitation mathematisch-logischer Ausdrücke verwendet.¹ Daneben werden noch die griechischen Anführungsstriche («») zur gewöhnlichen Zitation griechischer Texte benutzt.

Ist bei einem fremdsprachigen Werk im Literaturverzeichnis keine deutsche Ausgabe angegeben, so handelt es sich bei deutschen Zitaten stets um *eigene Übersetzungen*. Eine (von der angegebenen deutschen Ausgabe möglicherweise abweichende) *eigene Übersetzung* liegt außerdem überall dort vor, wo ich *zusätzlich* zum deutschen auch den fremdsprachigen Text anführe.

Rechtschreibfehler in deutschen Zitaten wurden stillschweigend korrigiert, und Zitate aus älteren deutschen Werken wurden an die neue deutsche Rechtschreibung angepasst.

Wichtige Feststellungen wie Axiome, Theoreme, Definitionen usw. werden in den Abschnitten der Kapitel 2–6 fortlaufend nummeriert. Beispielsweise ist Theorem 5.10.2 auf S. 120 die zweite Feststellung dieser Art in Abschnitt 5.10.

Außerdem werden einzelne Sätze, auf die oft verwiesen wird, kapitelweise nummeriert, wobei diese Nummern am rechten Seitenrand erscheinen. Beispielsweise findet man in Kapitel 5 auf S. 120 die beiden Sätze 5.13 und 5.14 als Bestandteile von Theorem 5.10.2.

Beweise bzw. Plausibilitätsbetrachtungen beginnen immer mit dem Wort „Beweis“ bzw. „Plausibilitätsbetrachtung“ und enden mit dem Zeichen $\square$.

¹ Diese Zitate sind stets im Sinne der sog. Quasi-Zitation gemeint (vgl. QUINE, *Mathematical Logic* § 6 S. 35f): Zitiert wird, was man erhält, wenn man alle Zeichen, die für andere Zeichen (oder Zeichenverbände) stehen, durch ihre Denotate ersetzt. Steht z. B. „A“ für „Augsburg“ und „B“ für „Bamberg“, so entspricht die Quasi-Zitation «A und B» nicht „A und B“, sondern „Augsburg und Bamberg“.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iv
Vorbemerkungen	v
1 Unendlichkeit im System der Wissenschaften	1
2 Das Unendliche im Überblick	8
2.1 Zur Definition des Unendlichen	8
2.2 Arten des Unendlichen	13
2.3 Charakteristische Beispiele für das Unendliche	18
3 Theorie des Denkens	24
4 Theorie der Objekte oder Ontologie	28
4.1 Definition und Klassifikation des Seienden	28
4.2 Impossibilia	30
4.3 Pure Possibilia	31
4.3.1 Possibilia	31
4.3.2 Attribute eines Seienden	32
4.3.3 Begriffe (oder Ideen) und Fiktionen	35
4.4 Aktualitäten	37
4.4.1 Arten des Wirkens	37
4.4.2 Universen	40
4.4.3 Sachverhalte und logisches Universum	42
4.4.4 Wirkliche Attribute	45
4.4.5 Substanzen	46
4.4.6 Ausblick	48
4.5 Transzendente Gegebenheiten	49
4.5.1 Transzendentalien	49
4.5.2 Unterschiede und Identitäten	50
4.5.3 Transzendente Unendlichkeiten in jedem Seienden	53
4.5.4 Individuen und Teile	54
4.5.5 Logische Individuen und Vielheiten	55
4.5.6 Unendliche Vielheiten von Seienden	57
5 Grundlegung der Mathematik und mathematischer Zugang zur Unendlichkeit	59
5.1 Grundlagenstandpunkte	61
5.2 Objekte, Individuen, Klassen, Mengen und Unmengen	70
5.3 Extensionalitäts- und Komprehensionsaxiom	80
5.4 Endgültige Festlegung des Objektbereichs	87
5.5 Eine alternative Klassenlehre mit Begriffen als Klassen	89
5.6 Die Paradoxien der Logik und Mengenlehre	93
5.7 Elementar-allgemeine und erweiterte Mengentheorie	100
5.8 Die logische Ursprache	103
5.9 Erste Definitionen und Axiome	115
5.10 Die konstruktiven Mengenaxiome	120
5.11 Das Auswahlaxiom	152
5.12 Äquivalenzrelationen und Einführung der Fregeschen Zahlen	164
5.13 Ordnungstheorie	173
5.14 Ordinalzahlen und tiefere Sätze der Wohlordnungstheorie	190

5.15	Größenvergleich von Klassen	200
5.16	Die Grundlegung der Arithmetik	208
5.17	Mathematische Einführung der Unendlichkeit	233
5.18	Abgeschlossenheit des Endlichen und Vergleich der Potenzen	248
5.19	Das Antizirkularitätsaxiom (und Fundierungsaxiom)	253
5.20	Unendliche Mengen höherer Stufen	258
5.21	$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und die euklidische Geometrie	266
5.22	Unendlichkeitsstufen und das Kontinuumsproblem	282
5.23	Höherdimensionale Räume	286
5.24	Unendlich ferne Punkte und transfinite Räume	289
5.25	Infinitesimalien und hyperreelle Zahlen	292
5.26	Das Kontinuum als Unmenge und die surrealen Zahlen	295
5.27	Zenons Paradoxien	297
5.28	Die Ordinalzahlreihe	300
5.29	Das kumulative Mengenuniversum	305
5.30	Kardinalzahlen	316
5.31	Unerreichbare Kardinalzahlen und das Universenaxiom	327
5.32	Große Kardinalzahlen und das Reflexionsprinzip	335
5.33	Das Wesen der Zahl	340
5.34	Zusammenfassung	347
6	Der logische Rahmen	352
6.1	Syntaktik der Logik	355
6.2	Semantik der Logik	361
6.3	Exkurs: Modallogik	369
6.4	Pragmatik der Logik	373
7	Anhang: Mathematische Beweise	386
8	Die Entwicklung des Unendlichkeitsgedankens	488
8.1	Die Griechen von den Vorsokratikern bis zur Zeitenwende	488
8.1.1	Die Milesier: das Unendliche als grenzenlos ausgedehnter Ugrund	489
8.1.2	Die Pythagoräer: das Unendliche als negatives Prinzip	490
8.1.3	Die Eleaten: das unbewegte Seiende als Endliches oder Unendliches	491
8.1.4	Heraklit: die ewig bewegte, endliche Welt	493
8.1.5	Synthese: das mengenmäßig Unendliche und die unendliche Teilbarkeit	494
8.1.6	Die Sophisten: Auflösung der Logik und mit ihr des Unendlichen	497
8.1.7	Sokrates als Wiederhersteller von Logik und Ethik (Theologie)	497
8.1.8	Platon: das in der Einheit zusammengefasste Unendliche	498
8.1.9	Aristoteles: die unendliche göttliche Kraft über der ewig endlichen Welt	500
8.1.10	Epikur, Lucretius, Stoa und Skeptizismus: diesseitig-endliche Heilswege	502
8.2	Hinduismus	505
8.2.1	Das Unendliche in der hinduistischen Theologie	505
8.2.2	Das Unendliche in der hinduistischen Kosmologie	509
8.2.3	Das Unendliche in der hinduistischen Psychologie	510
8.3	Buddhismus	511
8.3.1	Das endliche Wesen des unendlichen Kosmos	511
8.3.2	Das Unendliche in der Buddhistischen Nirvana-„Theologie“	512
8.4	Chinesische Religion	513
8.4.1	Konfuzianismus und sein demütig-traditionalistischer Agnostizismus	513
8.4.2	Taoismus und sein systematischer Agnostizismus	514
8.4.3	Nichtbeachtung des Unendlichen als Form der Annäherung an dasselbe	515
8.5	Parsismus	517
8.6	Vergleich der östlichen und westlichen Religionen hinsichtlich der Unendlichkeitsfrage	518
8.7	Theologie des Alten und Neuen Testaments	521
8.7.1	Allgemeines zur Unendlichkeit Gottes	521
8.7.2	Gottes Ewigkeit	521

8.7.3	Gottes Allgegenwart und Unermesslichkeit	522
8.7.4	Gottes Allmacht, Allwissenheit und Allgüte	524
8.7.5	Die Unendlichkeit des göttlichen Wesens	526
8.7.6	Endlichkeit und Unendlichkeit der Schöpfung	528
8.7.7	Endlichkeit und Unendlichkeit des Menschen	530
8.8	Philosophie und Theologie des christlichen Altertums	533
8.8.1	Die Bezeichnung Gottes als „unendlich“	533
8.8.2	Hilarius, Basilius, Gregor von Nazianz: Gott als raum-zeitlich unendlich	538
8.8.3	Die trinitarische Unendlichkeitslehre des Marius Victorinus	538
8.8.4	Gregor von Nyssa und seine „Umwertung“ des Unendlichen	540
8.8.5	Augustinus: Gott ist „anders unendlich“ als der Raum	541
8.8.6	Die alt- und ostkirchliche Mystik: Unendlichkeit als Unbegreiflichkeit	542
8.9	Islamische und jüdische Scholastik	546
8.9.1	Unendlichkeit im Koran	546
8.9.2	Der Kalam: Verendlichung der Zeit	546
8.9.3	Die Falsafa: anfangslose Welterschaffung	548
8.9.4	Jüdische Scholastik	550
8.10	Christliche Scholastik	552
8.10.1	Früscholastik: die Unendlichkeitsmystik des Scotus Eriugena	552
8.10.2	Anselm von Canterbury und sein Gottesbegriff	552
8.10.3	Ablehnung und Rehabilitierung der Unendlichkeit Gottes	555
8.10.4	Thomas von Aquin: Systematisierung des Unendlichkeitsbegriffs	560
8.10.5	Duns Scotus: Unendlichkeit als Charakteristikum Gottes	565
8.10.6	Wilhelm v. Ockham: skeptizistische Öffnung des Unendlichkeitsbegriffs	566
8.10.7	Die Unendlichkeits-Systematik und der Infinitismus der Spätscholastik	569
8.10.8	Francisco Suárez: Synthese des scholastischen Wissens	575
8.11	Die Umbruchszeit vom Ausgang der Scholastik bis Kant	576
8.11.1	Cusanus, die Kopernikaner und Bruno: das unendliche Universum	576
8.11.2	Angelus Silesius und die Theosophie: die Unendlichkeit des Menschen	579
8.11.3	Francis Bacon, Hobbes und Hume: finitistische Tendenzen	582
8.11.4	Descartes und Malebranche: Unendlichkeit im menschlichen Geist	584
8.11.5	More, Spinoza, Newton: die räumliche Unendlichkeit Gottes	586
8.11.6	Locke: die Idee des Unendlichen	590
8.11.7	Leibniz: vorläufiger Höhepunkt des Infinitismus	591
8.11.8	Lessing: das unendliche Streben in der Vernunftreligion der Aufklärung	598
8.12	Idealismus	600
8.12.1	Berkeley und Kant: finitistischer Idealismus	600
8.12.2	Fichte, Novalis, Hegel, Schelling: idealistischer Infinitismus	605
8.13	Atheismus des 19. Jahrhunderts	614
8.13.1	Schopenhauer	614
8.13.2	Der atheistische Materialismus des 19. Jahrhunderts	615
8.13.3	Nietzsche	616
8.14	Bolzano, Cantor und die Neuscholastik	618
8.15	Die finitistisch geprägte Philosophie des 20. Jahrhunderts	625
8.15.1	Positivismus und analytische Philosophie; Scholz und Gödel	625
8.15.2	Phänomenologie; Brentano, Meinong, Husserl und seine Schüler	630
8.15.3	Der Historismus von Dilthey und Spengler	632
8.15.4	James' Pragmatismus und der neuzeitliche theologische Finitismus	634
8.15.5	Existenzialismus	635
8.15.6	Kritischer und organistischer Realismus	638
8.16	Die moderne Kosmologie, Relativitäts- und Quantentheorie	641
8.16.1	Das Olberssche Paradoxon: Beweis für nur endlich viele Sterne?	641
8.16.2	Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik: Beweis für den Weltanfang?	642
8.16.3	Das Gravitationsparadoxon: Beweis für die Endlichkeit der Materie?	642
8.16.4	Die Möglichkeit einer endlichen und doch unbegrenzten Welt	643
8.16.5	Die spezielle Relativitätstheorie und die Grenze für Geschwindigkeiten	645

8.16.6	Die gekrümmte Raumzeit der allgemeinen Relativitätstheorie	651
8.16.7	Die Gestalt des Universums	654
8.16.8	Zum Vergleich: die Hohlwelttheorie	656
8.16.9	Die zeitliche Entwicklung des Kosmos	658
8.16.10	Quantentheorie: die Endlichkeit im Kleinen	667
8.17	Aussagen des kirchlichen Lehramtes	677
8.18	Fazit	683
9	Gott	687
9.1	Einteilung und kirchliche Bewertung der Gottesbeweise	687
9.2	Teleologischer Gottesbeweis	691
9.2.1	Darstellung	691
9.2.2	Kritik	694
9.3	Kosmologischer Gottesbeweis	702
9.3.1	Die Urform des Beweises bei Platon und Aristoteles	702
9.3.2	Der Kalam-Beweis und die Beweise von Craig und Meyer	705
9.3.3	Die Kontingenzbeweise der Falsafa und des Maimonides	708
9.3.4	Die fünf Wege des Thomas von Aquin	710
9.3.5	Der ontologisch gefärbte kosmologische Beweis von Duns Scotus	711
9.3.6	Francisco Suárez	713
9.3.7	Descartes	715
9.3.8	John Locke	716
9.3.9	Samuel Clarke	717
9.3.10	Leibniz	718
9.3.11	Hegel	719
9.3.12	Die Kritik von Hume und das Kausalproblem	719
9.3.13	Isenkrahe und Swinburne: Gottesbeweise ohne strenges Kausalprinzip	721
9.3.14	Versuche zur Lösung der Probleme, insbesondere des Kausalproblems	722
9.4	Ontologischer Gottesbeweis	725
9.4.1	Grundlegung des Beweisverfahrens bei Anselm von Canterbury	725
9.4.2	Probleme des ontologischen Beweises	727
9.4.3	Duns Scotus	739
9.4.4	Descartes	740
9.4.5	Malebranche und der Ontologismus	741
9.4.6	Henry More	744
9.4.7	Spinoza	745
9.4.8	Leibniz	745
9.4.9	Hegel	747
9.4.10	Schelling	748
9.4.11	Gödel	749
9.4.12	Malcolm, Hartshorne und Plantinga	757
9.4.13	Blondel und das reflexive ontologische Argument	762
9.4.14	Seifert	762
9.4.15	Systematische Darstellung des ontologischen Arguments	764
10	Seele	776
10.1	Die Existenz einer substantiellen Seele	776
10.2	Die Verbindung von Leib und Seele	782
10.3	Die unendliche Fortdauer der Seele	784
10.4	Ontologischer Beweis für die Unvernichtbarkeit des Ich	789
10.5	Anfangslosigkeit der Seele?	793
11	Kosmos	795
11.1	Die Kantschen Antinomien	795
11.2	Endlichkeit oder Unendlichkeit der Welt?	798
11.2.1	Der Abschluss einer unendlichen Reihe von Vorgängen („tasks“)	799
11.2.2	Unendlich viele Substanzen in einem begrenzten Raum	802

11.2.3	Unendlich viele Substanzen auf unbegrenztem Raum	804
11.2.4	Unendlich große Intensität, insbesondere unendliche Geschwindigkeit	809
11.2.5	Abschließende Betrachtung	811
12	Zusammenfassung und Ausblick	812
	Symbolverzeichnis	817
	Abbildungsverzeichnis	820
	Literaturverzeichnis	821
	Index	868

1 Unendlichkeit im System der Wissenschaften

Einleitend soll die Stellung der Unendlichkeitsfrage im System der Wissenschaften erörtert werden. Unendlichkeit wird nur in solchen Wissenschaften thematisiert, die (wenigstens unter einem bestimmten Gesichtspunkt) ein allumfassendes Sachgebiet haben. Wissenschaften bzw. Disziplinen dieser Art heißen *Universalwissenschaften* bzw. *Universaldisziplinen*. Eine wissenschaftliche Disziplin ist entweder deshalb allumfassend, weil sie sehr abstrakte Eigenschaften und Sachverhalte untersucht, oder deshalb, weil sie auf vielen anderen Disziplinen aufbauend „letzte“ Fragen von übergeordnetem Interesse stellt. Universaldisziplinen der ersten Art nenne ich *Fundamentaldisziplinen* und solche der letzten Art *Gipfeldisziplinen*.

Zu den Universalwissenschaften zählt man seit jeher *Philosophie*, *Mathematik*, *Physik* und *Theologie*,¹ in neuerer Zeit aber auch *Psychologie*² und *Geschichtswissenschaft*.³ Manchmal wurden und werden auch noch weitere Wissenschaften als universal angesehen, so etwa *Logik* und *Linguistik*,⁴ *Soziologie*,⁵ *Kybernetik*, *Kognitionswissenschaft* und *Neurowissenschaft*,⁶ *Biologie*,⁷ *Anthropologie* und *Medizin*⁸ sowie *Astronomie*.⁹ Diese Wissenschaften können jedoch den zuerst genannten zugeordnet werden, namentlich der Mathematik, Physik und Psychologie.¹⁰

Philosophie

Die Philosophie betrachtet den *schlechthin* uneingeschränkten Bereich aller Dinge, und zwar hinsichtlich der allgemeinsten und fundamentalsten Bestimmungen (wie Sein, Wirken, Erkennen, Wert

-
- ¹ Bereits ARISTOTELES teilte in seiner *Metaphysik* Buch 4 Kap. 1, 1026a18–19, Ausgabe Seidl Band 1 S. 253 und Buch 11 Kap. 7, 1064b1–5, Ausgabe Seidl Band 2 S. 207 die theoretischen Wissenschaften in „Physik, Mathematik, Theologie“ ein und bezeichnete diese Wissenschaften als „Philosophien“.
- ² Vom Standpunkt des Idealismus aus sind *alle* Phänomene psychologischer Natur (siehe Abschnitt 8.12).
- ³ Diese wurde vom sog. *Historismus* hervorgehoben (siehe Abschnitt 8.15.3).
- ⁴ Logik und Linguistik haben in der *analytischen Philosophie* (siehe Abschnitt 8.15.1) die Priorität, und schon LEIBNIZ sprach von einer logischen Universalwissenschaft (siehe Fußnote 909 auf S. 591).
- ⁵ Dieser wurde erstmals im *älteren Positivismus* der Vorrang eingeräumt (siehe S. 625).
- ⁶ Die Kybernetik trat um 1950 als eine interdisziplinäre, Natur- und Geisteswissenschaften überbrückende Wissenschaft auf, welche die Theorie digitaler Rechenmaschinen ebenso umfasste wie die des Nervensystems und sozioökonomischer Prozesse; HEIDEGGER fürchtete, die Kybernetik werde auch die Philosophie ablösen (*Denken* S. 622f). Später wurden die Anliegen der Kybernetik von der sog. Kognitionswissenschaft übernommen, an deren Spitze die Neurowissenschaft (Gehirnforschung) steht (vgl. ROTH, *Gehirn*).
- ⁷ Diese spielte z. B. im *Monismus* Ernst HAECKELS (siehe S. 616) die Hauptrolle.
- ⁸ Die Anthropologie war in SCHELERS *Phänomenologie* zentral. Die Förderung der Medizin war für LEIBNIZ nächst der Tugend das Wichtigste (vgl. *Nouveaux essais* Buch 4 Kap. 1 § 12, Schriften Band 3/2 S. 485).
- ⁹ Die Astronomie nimmt z. B. nach TYCHO BRAHE, *De disciplinis*, Ausgabe Dreyer S. 174 Zl. 38f die Stelle des „Fürsten“ unter den Wissenschaften ein.
- ¹⁰ Die Logik und teilweise auch die Linguistik kann als Disziplin einer universell konzipierten *Mathematik* gelten, und soweit die Linguistik nicht zur Logik (und damit zur Mathematik) gehört, gehört sie zur *Psychologie*. Zu einer erweiterten Psychologie kann man auch die Soziologie rechnen, insofern diese nach Émile DURKHEIM das „Kollektivbewusstsein“ analysiert (*Règles*, Vorwort zur 2. Auflage S. XVIIIf und Kap. 5. II. S. 103, Ausgabe König S. 94f und 187f). Die übrigen hier genannten Wissenschaften kann man als Gipfeldisziplinen der *Physik* im Sinne einer allgemeinen Naturlehre verstehen, unter Einschluss von psychologischen und logisch-mathematischen Aspekten bei der Anthropologie, Kybernetik und Kognitionswissenschaft.

usw.), die sie mittels rational reflektierter Intuition untersucht.¹¹ Besonders hervorzuheben sind die philosophischen Disziplinen Ontologie, Theologie, Psychologie und Kosmologie, die klassischerweise unter dem Namen *Metaphysik* zusammengefasst wurden,¹² denn genau diese sind es, in denen Unendlichkeit innerhalb der Philosophie thematisiert wird. Die *Ontologie* ist die fundamentalste Disziplin: sie fragt nach dem Sein und nimmt die oberste Klassifizierung des Seienden vor. Die übrigen drei Disziplinen sind konkreter, haben aber dennoch einen Bezug auf die Gesamtheit aller Dinge:

- die *Theologie* fragt nach der höchsten Form und ersten Grundlage *allen* Seins,
- die *Psychologie* untersucht die menschliche Seele als den innersten Teil des Menschen, der sich im Erkennen und Streben auf schlechthin *alles* beziehen kann,
- die *Kosmologie* untersucht den Zusammenhang *aller* Seienden im Weltganzen.

Aber diese drei Disziplinen stehen nicht wie die Ontologie auf der „fundamentalen Seite“ des philosophischen Wissens, sondern müssen als die philosophischen Gipfel disziplinen bezeichnet werden, denn das Verständnis des Weltganzen (Kosmologie), der menschlichen Seele (Psychologie) und Gottes (Theologie) sind die letzten und eigentlichen Fragen der Philosophie.¹³

Mathematik

Die antike und mittelalterliche Mathematik hatte die von ihr untersuchten Gegenstände „Größen“ genannt.¹⁴ Demgegenüber bezeichnet die heutige Mathematik ihre Gegenstände allgemeiner als „Objekte“.¹⁵ Hier deutet sich der Anspruch der Mathematik an, eigentlich „alles“ zum Gegenstand der Betrachtung machen zu können. Ihre Aufgabe sieht sie darin, notwendige Konsequenzen aus vorausgesetzten Sachverhalten (den sog. *Axiomen*) zu ermitteln. Diese gibt sich der Mathematiker entweder willkürlich vor, oder er schöpft sie aus evidenten Tatsachen, oder er lässt sie sich von anderen Fragestellern vorgeben. So erweist sich Mathematik als ein universell einsetzbares Hilfsmittel für andere Wissenschaften. Man könnte nun versucht sein, die Mathematik dadurch herabzustufen, dass man in ihr „nur“ ein Hilfsmittel sieht. Auf der anderen Seite könnte man sie über alle anderen Wissenschaften stellen, weil sie die zentralen Gesetzmäßigkeiten betrachtet, für welche die anderen

¹¹ Zu dieser Methode vgl. HILDEBRAND, *Philosophy* S. 196–207. Was damit gemeint ist, versteht man am besten durch Abgrenzung von den Methoden der Mathematik, Mystik und Physik. Während man in der mathematischen Betrachtung von der Wirklichkeit abstrahiert, ist für die Philosophie der geistige Kontakt mit der Wirklichkeit („Intuition“) wesentlich. Diese Intuition unterscheidet sich von physikalischer Beobachtung, weil sie nicht auf körperlichen Wechselwirkungen beruht und daher nicht durch Messinstrumente verfeinert werden kann. Sie unterscheidet sich aber auch von der mystischen Kontemplation, weil sie so weit als möglich „rational“ begründet und verarbeitet wird.

¹² Nach Christian WOLFF bildet die Ontologie die „allgemeine Metaphysik“, während die drei letztgenannten Disziplinen die „spezielle Metaphysik“ ausmachen.

¹³ Ähnlich KANT, *Kritik der reinen Vernunft* B 826, Ausgabe Timmermann S. 833: „Die Endabsicht, worauf die Spekulation der Vernunft . . . zuletzt hinausläuft, betrifft drei Gegenstände: die Freiheit des Willens, die Unsterblichkeit der Seele und das Dasein Gottes“. Unter dem Eindruck der KANTSchen Vernunftkritik ist allerdings die Philosophie faktisch immer mehr von diesen metaphysischen Fragestellungen abgerückt.

¹⁴ Nach BOËTHIUS, *Arithmetica* Buch 1 Kap. 1 (Ausgabe Oosthout/Schilling S. 10 Zl. 39–42) beschäftigt sich die Arithmetik mit der „Vielheit an sich“ (*multitudo, quae per se est*) und die Geometrie mit der „unbeweglichen Größe“ (*immobilis magnitudo*). Nach GREDT, *Elementa* (Band 1 S. 194, deutsche Ausgabe S. 125f) ist der Gegenstand der Mathematik „das Ausgedehnte unter Absehung nicht bloß von der Einzelheit, sondern auch von den sinnfälligen Beschaffenheiten.“ Nach HEGEL, *Phänomenologie* Vorrede, Ausgabe Bonsiepen/Heede S. 33, Ausgabe Wessels/Claumont S. 33 ist „Zweck oder Begriff“ der Mathematik „die Größe“, und der Stoff, mit dem sie sich beschäftigt, „ist der *Raum* und das *Eins*.“ ENGELS definierte die Mathematik als „die Wissenschaft der Größen“ (ENGELS, *Dialektik der Natur* Nr. 18, MEGA-Ausgabe S. 14).

¹⁵ Vgl. z. B. POTTER, *Sets* S. 19: „Auf jedem Gebiet der Mathematik studieren wir Objekte.“

Wissenschaften „nur“ Fallbeispiele liefern.¹⁶ Beide Sichtweisen sind einseitig, beleuchten aber aus verschiedenen Perspektiven den eigentümlichen Sonderstatus der Mathematik, den sie gegenüber den anderen Wissenschaften einnimmt. Die Mathematik stellt ihre Ergebnisse aufgrund von formalen Regeln durch *Beweise* sicher, welche garantieren, dass die neuen Aussagen wahr sind, falls die gegebenen wahr sind. Die Theorie, welche die entsprechenden Regeln aufstellt und analysiert, ist die *Logik*.¹⁷ Diese kann als Disziplin der Mathematik verstanden werden, und zwar ist sie derjenige Teil der Mathematik, der ohne speziellere Voraussetzungen auskommt.¹⁸ Zusammen mit der Logik gehört auch die *Mengenlehre* zu den mathematischen Fundamentaldisziplinen. In der Mengenlehre wird die *Elementbeziehung* betrachtet, mit deren Hilfe alle anderen mathematischen Beziehungen definiert werden können. So hat die Mengenlehre in der Mathematik den gleichen Stellenwert wie die Ontologie in der Philosophie. Da die Mengenlehre die Unendlichkeit explizit behandelt, ist sie zudem für unser Thema von größter Wichtigkeit.

Physik, Psychologie und Geschichtswissenschaft

Die *Physik* betrachtet die allgemeinsten Wechselwirkungen materieller Objekte. Da das Materielle nur einen eingeschränkten Bereich des Seienden bildet,¹⁹ könnte man im Zweifel sein, ob hier eine Universalwissenschaft vorliegt. Jedenfalls ist es verfehlt, mit Frank TIPLER als „Geltungsbereich der Physik“ die „Gesamtheit der Realität“ zu beanspruchen.²⁰ Andererseits bilden jedoch die von der Physik betrachteten Objekte tatsächlich den Gesamtbereich aller Dinge, die uns in einer bestimmten Auffassungsart, nämlich durch *äußere Beobachtung* zugänglich sind. Insofern ist die Physik sicher eine Universalwissenschaft, und sie ist auf jeden Fall für alle weiteren Naturwissenschaften fundamental.²¹

Die *Psychologie* (in ihrer klassischen, auf BRENTANO zurückgehenden Form)²² betrachtet die uns durch *Innenerfahrung* zugänglichen Sachverhalte. Dieser Sachbereich ist in etwa komplementär zu dem Bereich, den die Physik untersucht. So steht die Psychologie in einem analogen Verhältnis zu den Geisteswissenschaften²³ wie die Physik zu den Naturwissenschaften.

Die *Geschichtswissenschaft* kann unter dem Aspekt der zeitlichen Entwicklung alles betrachten, was das menschliche Denken beschäftigt. So gibt es eine Geschichte der Völker ebenso wie eine Geschichte der Mathematik, der Theologie usw. Durch Einbeziehung der Geschichte stellt man auf je-

¹⁶ Vgl. die Ansicht von GAUSS, wonach die Mathematik die „Königin der Wissenschaften“ ist, die sich öfter herablässt, „den anderen Naturwissenschaften einen Dienst zu erweisen“ (WALTERSHAUSEN, *Gauss* S. 79). Die mathematische Logik kann auch auf Geisteswissenschaften, Theologie und Religionen angewendet werden (vgl. BOCHENSKI, *Religionslogik*).

¹⁷ Genauer wird die Logik in Abschnitt 6 betrachtet.

¹⁸ Vgl. RUSSELL, *Mathematische Philosophie* S. 217: „Mathematik und Logik waren, historisch gesprochen, zwei ganz getrennte Arbeitsgebiete. ... Aber beide haben sich in der modernen Zeit entwickelt. Die Logik wurde mathematischer, die Mathematik logischer. Infolgedessen ist es heute ganz unmöglich, einen Trennungsstrich zwischen beiden zu ziehen. Tatsächlich sind sie eins.“

¹⁹ Zur Klassifikation des Seienden vgl. Kapitel 4. Nicht-materielle Seiende wird auch der Materialist wenigstens als „Epiphänomene“ der Materie anerkennen müssen (vgl. Abschnitt 10.1).

²⁰ TIPLER, *Physics of Immortality* S. 32; vgl. S. 26. Diese unter heutigen Physikern weit verbreitete Ansicht (vgl. DAVIES, *Time* S. 324) bezeichnet man klassischerweise als *Materialismus*; modernere Bezeichnungen hierfür (die nicht den schlechten Ruf des Materialismus haben) sind *Naturalismus*, *Szientismus* und *Physikalismus*. TIPLERS Physikalismus geht so weit, dass er behauptet, selbst die Theologie müsse, wenn sie überleben will, „ein Teilbereich der Physik“ werden (ebd. S. 35). Zu TIPLER siehe auch S. 666.

²¹ Dies gilt besonders für die Chemie und Biologie. Die Mathematik dagegen ist eigentlich weder eine Natur- noch eine Geisteswissenschaft, sondern besitzt einen Sonderstatus.

²² Vgl. BRENTANO, *Psychologie*.

²³ Zu diesen gehören z. B. Linguistik, Pädagogik, Soziologie, Literatur- und Kunstwissenschaft. Theologie und Philosophie sind dagegen keine reinen Geisteswissenschaften, da sie sich nicht (nur) mit dem menschlichen Geist selbst und seinen Erzeugnissen beschäftigen. Ähnliches gilt m. E. auch für die Geschichtswissenschaft.

den Fall *jede* Wissenschaft auf eine breitere Grundlage. Allerdings ist die geschichtliche Entwicklung in Mathematik und Naturwissenschaften (für diese Wissenschaften selbst) nur von nebensächlichem Interesse – wichtiger ist hier der jeweils aktuelle Stand. Dagegen spielt sie in den Geisteswissenschaften und in der Theologie eine kaum zu unterschätzende Bedeutung, denn durch fortgesetzte Synthese des Gewesenen und des Neuen ergibt sich hier ein immer vollkommenerer Gehalt, wie besonders eindrucksvoll durch HEGEL betont wurde. Das gilt in besonderer Weise auch für die christliche Theologie, die einerseits auf ein historisches Offenbarungsgeschehen zurückgreift und andererseits eine durch Zeiten und Kulturen hindurchgehende, ständig anwachsende Auslegungstradition und Rezeptionsgeschichte verarbeiten muss, die selbst als ein Aspekt der Offenbarung verstanden werden kann. So ist die Theologie auf einen engen Kontakt mit der Geschichtswissenschaft angewiesen.

Theologie

Hier soll nicht von der schon erwähnten philosophischen (oder „natürlichen“) Theologie die Rede sein, die ARISTOTELES als die vornehmste der drei philosophischen Gipfeldisziplinen ansah,²⁴ sondern von der *Offenbarungs-* oder *Glaubenstheologie*. Diese unterscheidet sich von der natürlichen Theologie dadurch, dass sie die göttliche Offenbarung mit einbezieht, deren konkrete Gegebenheit sie nachzuweisen versucht und deren Sinn sie herauszuarbeiten hat. Die Theologie kann wie die Philosophie schlechthin alles thematisieren, und sie tut dies im Hinblick auf Gott als Grund und Ziel des Menschen und des Universums. So findet man in der Theologie ähnliche Disziplinen wie in der Philosophie: Der philosophischen Kosmologie entspricht die theologische *Schöpfungslehre*, der philosophischen Psychologie die theologische *Seelenlehre*, und die höchste Disziplin der Theologie ist schließlich die theologische *Gotteslehre*, welche die Theologie im eigentlichsten Sinn und zudem die hauptsächliche theologische Disziplin ist, in der Unendlichkeit thematisiert wird.

Die Glaubenstheologie früherer Jahrhunderte war überzeugt, die Gipfelwissenschaft schlechthin zu sein,²⁵ da sie sich im Besitz eines über rein menschliches Wissen hinausgehenden und es von oben integrieren könnenden metaphysischen Offenbarungswissens glaubte. Für uns Heutige hat eine solche Beschreibung den Beigeschmack von Arroganz.²⁶ Dennoch ist diese Charakterisierung nicht ganz falsch, auch wenn die heutige Theologie zu Recht betont, dass die Offenbarung in erster Linie auf das ewige Heil des Menschen hinzielt und deshalb nicht unabhängig von dieser Zielrichtung als spekulative Erkenntnisquelle angesehen werden kann.²⁷ Das zu verkündigende Heil hängt nämlich eng mit metaphysischen Fragen zusammen, so dass die Glaubenstheologie ein bleibendes Interesse an diesen Fragen haben muss.

²⁴ Vgl. Fußnote 1 auf S. 1.

²⁵ Vgl. THOMAS VON AQUIN, *Summa Theologiae* pars 1 quaestio 1 articuli 1–6, Ausgabe Busa S. 184c–186a.

²⁶ Der Grund hierfür ist die nicht immer ruhmreiche Geschichte der Theologie, die sich in der Neuzeit wiederholt zu Unrecht gegen Erkenntnisse anderer Wissenschaften gestellt hat. Einen entgegengesetzten und doch wieder ähnlichen Fehler scheinen Theologen auch heute zu begehen, wenn sie ihre Wissenschaft als eine absolut autonome verstehen, welche die Ergebnisse der übrigen Wissenschaften weder kritisiert noch benutzt. Wenn man im Zuge dieser Entwicklung den Aussagen der Theologie nur noch eine symbolische Bedeutung gibt, die weder geschichtlich noch naturwissenschaftlich angreifbar ist, so ist das ein bequemer, aber letztlich unfruchtbarer Rückzug in eine intersubjektiv nicht mehr vermittelbare Gefühlswelt.

²⁷ Vgl. DENZINGER, *Enchiridion* 4206 (*Zweites Vatikanisches Konzil*, Konstitution *Dei Verbum* Kap. 1 Nr. 6): „Durch die göttliche Offenbarung wollte Gott sich selbst und die ewigen Beschlüsse seines Willens über das Heil der Menschen kundtun“. Allerdings gilt dieses Heil selbst als übernatürlich, und so erstreckt sich die Offenbarung doch auch auf Wirklichkeiten, die dem menschlichen Geist nicht ohne Offenbarung zugänglich sind (vgl. DENZINGER, *Enchiridion* 4206: Gott offenbart seinen Willen, uns „Anteil zu geben an Gütern, die das Erkenntnisvermögen des menschlichen Geistes völlig übersteigen“; vgl. ebd. 2850–2857, 3005, 3015f, 3028, 3032, 3041; ECCLESIA CATHOLICA, *Katechismus* § 50, § ECCLESIA CATHOLICA, *Kompendium* § 4; siehe auch Fußnote 511 auf S. 775).

Zur Unendlichkeitsfrage und ihrer Systematik

Unendlichkeit wird vor allem in der mathematischen Mengenlehre und in der theologischen Gotteslehre behandelt; außerdem wird sie in der Philosophie thematisiert, und zwar einerseits in der Ontologie, die wir mit der Mengenlehre zu den Fundamentaldisziplinen rechnen können, und andererseits in den drei philosophischen Gipfeldisziplinen (Theologie, Psychologie und Kosmologie).²⁸ So konzentriert sich die Thematik der Unendlichkeit innerhalb des Systems der Wissenschaften einerseits im „Fundamentalteil“, andererseits im „Gipfelteil“ dieses Systems.

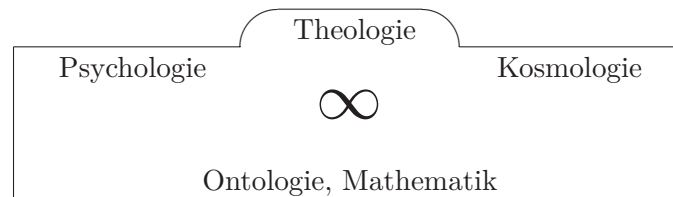


Abbildung 1.1: Unendlichkeit im Systemgebäude der Wissenschaft

Dass Unendlichkeitsfragen im „Gipfelteil“ auftauchen, welcher die letzten Fragen des Menschen behandelt, ist naheliegend. Diese Fragen lauten in etwa:

- Gibt es ein absolut Unendliches jenseits der Welt (Theologie)?
- Ist der Mensch bzw. seine Seele unendlich (Psychologie)?
- Kann die Welt selbst unendlich sein (Kosmologie)?

Warum aber tauchen Probleme des Unendlichen schon im Fundamentalteil auf? Eine auf die Ergebnisse dieser Arbeit vorgreifende Antwort wäre die, dass das Unendliche so real und wichtig ist, dass ohne dasselbe eine konsequent fundierte Wissenschaft überhaupt nicht denkbar ist. Es ergibt sich nun für unser Thema eine Zweiteilung:

1. Unendlichkeit im Fundamentalteil der Wissenschaft (Ontologie, Mathematik),
2. Unendlichkeit im Gipfelteil der Wissenschaft (Gotteslehre, Psychologie, Kosmologie).

Wenn der Titel dieser Arbeit die Unendlichkeit in den Schnittpunkt von Mathematik und Theologie verlegt, so ist mit „Unendlichkeit in der Mathematik“ eine Kurzformel für (1) gemeint und mit „Unendlichkeit in der Theologie“ eine solche für (2); es ist also mit Mathematik bzw. Theologie jeweils ein *pars nobilior pro toto* genannt.

Nach der Definition und Einteilung des Unendlichen in Kapitel 2 soll in den Kapiteln 3–7 das Unendlichkeitsproblem zunächst im Fundamentalteil der Wissenschaft betrachtet werden. Hierzu gehören Ontologie, Logik und Mengenlehre. Da idealerweise zuerst die Exposition der Methode und dann die eigentliche Theorie erfolgen sollte, müsste man die *Logik* an den Anfang stellen. Doch setzt eine anspruchsvolle Logik Grundkenntnisse über Objekte voraus. So wäre zuvor eine Erklärung der involvierten Objektklassen wünschenswert, und hierzu müsste man die *Ontologie* vor die Logik setzen. Objekte aber können sinnvollerweise nur in Bezug zum Denken klassifiziert werden, weshalb zuerst die Grundlagen der philosophischen *Psychologie* erläutert werden sollten. So ergäbe sich folgende Reihenfolge:

²⁸ Zu ergänzen wäre noch, dass Unendlichkeitsfragen auch in der Physik Erwähnung finden, was nicht verwunderlich ist, wenn man den offensichtlichen Zusammenhang dieser (inzwischen von der Philosophie emanzipierten) Wissenschaft zu der entsprechenden philosophischen Disziplin der Kosmologie betrachtet.

1. Theorie des Denkens (Anfangsgründe der philosophischen Psychologie),
2. Theorie der Objekte (Ontologie),
3. Logik,
4. Mengenlehre.

Man könnte an dieser Reihenfolge kritisieren, dass nun die eigentliche Methoden-Exposition (Logik) erst im dritten Schritt erfolgt. Aber man muss bedenken, dass die vorgeschalteten philosophischen Disziplinen keiner besonderen Methode bedürfen: Die grundlegende philosophische Theorie des Denkens und der Objekte kann und muss so präsentiert werden, dass die Darstellung intuitiv von selbst überzeugt.

Ein anderer Einwand wäre, dass eine strikte Einhaltung der Reihenfolge Logik – Mengenlehre unmöglich ist. Für eine anspruchsvollere Exposition der Logik benötigt man eine ausgebaute Theorie der natürlichen Zahlen,²⁹ und zum Beweis von Theoremen der höheren Logik braucht man eine weit über die Grundlagen hinaus entwickelte Mengenlehre.³⁰ Auf der anderen Seite wäre es auch kein Ausweg, die Mengenlehre einfach vor die Logik zu setzen, denn zumindest die Theoreme der höheren Mengenlehre sind ohne Logik nicht formulierbar, geschweige denn beweisbar. Als Ausweg bietet sich eine Art „hermeneutische Spirale“ an: Man beginne mit den Grundzügen der Mengenlehre einschließlich der Arithmetik, behandle dann die formale Logik und komme schließlich zur Mengenlehre zurück, indem man diese nun formal aus den Axiomen ableite. Die Grundlegung hätte dann folgende Struktur:

1. Theorie des Denkens (Anfangsgründe der philosophischen Psychologie),
2. Theorie der Objekte (Ontologie),
3. Inhaltliche Behandlung der Mengenlehre in Grundzügen,
4. Formale Logik,
5. Formale Behandlung der Mengenlehre aus den Axiomen.

So wäre ein zirkelfreier Aufbau der Grundlagen der Mathematik prinzipiell möglich. Bislang ist ein solcher Aufbau jedoch nirgendwo vollauf befriedigend durchgeführt worden.³¹ Die vorliegende Arbeit schließt daher eine gewisse Lücke, indem hier die Schritte (1) bis (3) im Detail durchgeführt werden. Dagegen stelle ich die formale Logik in Kapitel 6 nur in ihren Grundzügen vor und verzichte ganz auf die formale Ableitung der Mengenlehre. Die wichtigsten für die Unendlichkeitsproblematik

²⁹ Konkret braucht man z. B. die Prinzipien der Rekursion und der vollständigen Induktion, und um diese Prinzipien formulieren und beweisen zu können, muss man anscheinend bereits Grundlagen der Mengenlehre voraussetzen.

³⁰ So benötigt z. B. ein exakter Beweis für die Vollständigkeit der Aussage- oder Prädikatenlogik anspruchsvolle Hilfsmittel aus der Mengenlehre, z. B. das ZORNSche Lemma oder die Arithmetik der Ordinalzahlen.

³¹ Eine Darstellung der *gesamten* neuzeitlichen Mathematik *einschließlich* ihrer Grundlagen ist überhaupt nur zweimal versucht worden. Erstmals geschah dies in den drei Bänden der *Principia Mathematica* von RUSSELL und WHITEHEAD (1910–1913); aber dieses Werk hat aus logischer Sicht gravierende formale Mängel (siehe GÖDEL, *Russell's Mathematical Logic* S. 126, Werke Band 2 S. 120, deutsche Ausgabe S. VI) und entspricht seinem mathematischen Umfang nach nicht mehr dem heutigen Stand. Der zweite Versuch liegt in den monumentalen Werken der „Bourbaki“-Schule vor. Das unter dem Pseudonym „Nicolas Bourbaki“ erschienene Werk mit dem Titel „*Eléments de Mathématique*“ ist „in Wahrheit Produkt einer in der Geschichte der Mathematik einzigartigen Kollektivanstrengung“ einer „sich stets wieder verjüngenden Gruppe französischer Mathematiker“; es erschien „seit Ausbruch des Zweiten Weltkrieges in mehr als dreißig Bänden, sich, wie ihr Autorenteam, von Auflage zu Auflage ständig regenerierend, vielleicht bestimmt, so wenig wie die Mathematik jemals fertig zu werden“ (SCHMIDT, *Mengenlehre* S. 14). Aber BOURBAKI verzichtete auf eine philosophische Grundlegung, und zudem ist es bezeichnend, dass gerade das einführende Buch dieser Monumentalreihe, die *Théorie des ensembles*, seit langem nicht mehr neu aufgelegt wird.

relevanten Definitionen und Sätze können nämlich bereits innerhalb der Aufarbeitung der ersten drei Schritte hinreichend entwickelt werden, und für die Schritte (4) und (5) kann ich auf die zeitgenössische logisch-mathematische Fachliteratur verweisen.³²

Nach der mathematischen Grundlegung sollen die Unendlichkeitsfragen im Bereich der Gipfel-disziplinen betrachtet werden (Kapitel 9–11). Diesem Teil schicke ich das historische Kapitel 8 über die Entwicklung des Unendlichkeitsgedankens voraus, welche im Sinne der obigen Bemerkung über den Stellenwert der geschichtlichen Entwicklung (siehe S. 3–4) auch für die sachliche Thematik von Interesse ist. Bei der systematischen Ausführung der Gotteslehre (Kapitel 9) steht die Frage nach den Argumenten für Gottes Existenz im Vordergrund, die mit der Frage nach der konkreten Existenz eines absolut unendlichen Wesens identisch ist. Die anschließenden Erörterungen über die Unsterblichkeit der Seele (Kapitel 10) und die Möglichkeit eines unendlichen Kosmos (Kapitel 11) bilden den Abschluss dieser Untersuchungen.

³² Zu (4) vgl. etwa GLUBRECHT et al., *Klassenlogik*; zu (5) OBERSCHELP, *Allgemeine Mengenlehre*.

2 Das Unendliche im Überblick

2.1 Zur Definition des Unendlichen

Nach seiner Wortbedeutung meint das deutsche Wort un-endlich ebenso wie das lateinische in-finitus und das griechische ἄ-πειρος das End- oder Grenzenlose. Von Grenzen kann man nur in Bezug auf ein bestimmtes Sachgebiet reden: dabei kann es sich z. B. um einen Ort, eine Zeit, eine Menge, eine Qualität oder eine Tätigkeit handeln. Nach ISENKRAHE liegt „die Urheimat dieses Begriffs auf dem Gebiete des Ausgedehnten, insbesondere auf dem Gebiete des Räumlichen“,¹ während bei Anwendung des Begriffs auf andere Bereiche „Sinnübertragungen“ vorliegen.² Man sollte jedoch die Schlüsselrolle, die ISENKRAHE dem *räumlichen* Grenzbegriff eingeräumt hat, besser dem *vorstellungsmäßigen* Grenzbegriff zuschreiben. Denn es gibt für jedes Begrenzte neben einer *spezifischen* Art, seine Begrenztheit zu beschreiben (das örtlich Begrenzte kann man *überqueren*, das zeitlich Begrenzte *überleben* usw.) auch eine *allgemeine* Art: Jedes Begrenzte lässt sich *überschauen*. So lässt sich Begrenztheit oder Endlichkeit im Anschluss an ARISTOTELES mit klarer Erkennbarkeit oder Überschaubarkeit gleichsetzen:³ Mit diesem Ansatz lässt sich die Wortbedeutung des Unendlichen in zwei verschiedene Richtungen hin ausdeuten:

- (1) Entweder man versteht unter Unendlichkeit *absolute* Unüberschaubarkeit: Dann wäre das Unendliche unbestimmt (indefinitum) und chaotisch und daher unvollkommen.
- (2) Oder man versteht unter Unendlichkeit eine nur *für die uns bekannte Art der anschaulichen Vorstellung* geltende *relative* Unüberschaubarkeit einer an sich klar bestimmten Größe. Was derart unendlich ist, übersteigt prinzipiell unser anschauliches Vorstellungsvermögen und offenbart dadurch seine Vollkommenheit.

Wie sich im historischen Kapitel dieser Arbeit zeigen wird, hatte das Unendliche in der griechischen Philosophie die negative Bedeutung (1), wohingegen unter dem Einfluss des Neuplatonismus und des Christentums immer mehr die positive Bedeutung (2) an Bedeutung gewann, die heute bestimmend geworden ist. Ich setze daher im Folgenden diese zweite Wortbedeutung voraus.

Die Wortbedeutung gibt uns allerdings nur eine vage Vorstellung, sie ist keine exakte Definition des Unendlichen.⁴ Eine solche benötigen wir nur für das *mengenmäßig Unendliche* oder die *unendliche Menge*:⁵ Ist nämlich geklärt, was „unendlich viel“ bedeutet, so kann man die Unendlichkeit auf anderen Gebieten wie folgt erklären:

¹ ISENKRAHE, *Das Unendliche* S. 14.

² ISENKRAHE, *Das Unendliche* S. 23.

³ Vgl. ARISTOTELES, *Physica* Buch 1 Kap. 4, 187b7–8, Ausgabe Zekl Band 1 S. 20f: „Das Unendliche ist, insofern es unendlich ist, unerkennbar“ (ἡ τὸ μὲν ἄπειρον ἢ ἄπειρον ἄγνωστον).

⁴ Für räumliche Gebiete ist sogar ein feiner Unterschied zwischen Unendlichkeit und Unbegrenztheit zu beachten: Zum Beispiel handelt es sich bei einer Kreislinie und einer Kugeloberfläche um ein unbegrenztes ein- bzw. zweidimensionales Gebilde, das aber gewöhnlich nicht als „unendlich“ gilt. Damit nämlich eine Linie oder Fläche unendlich ist, muss nach gewöhnlicher Auffassung nicht die Linie bzw. Fläche selbst, sondern ihre *Länge* bzw. ihr *Flächeninhalt*, d. h. die *Zahl* der Einheitsstrecken bzw. Einheitsflächen, die darauf Platz haben, grenzenlos sein. Analog kann man auch zwischen einem unbegrenzten und einem unendlichen Raum unterscheiden, worauf erstmals RIEMANN aufmerksam gemacht hat (siehe S. 644).

⁵ Ich benutze das Wort „Menge“ hier einfach als Synonym für „Vielheit“.

- Eine unendliche Strecke ist eine Strecke, die sich aus *unendlich vielen* Einheitsstrecken (Metern) zusammensetzt.
- Eine unendliche Zeitdauer ist eine solche, die sich aus *unendlich vielen* Einheitsdauern (Sekunden) zusammensetzt.
- Auch andere physikalische Größen (Geschwindigkeiten, Helligkeiten usw.) sind unendlich, wenn sie sich aus *unendlich vielen* Einheits-Größen zusammensetzen.
- Die Unendlichkeit geistiger Größen (Wissen, Macht, Güte usw.) erklären wir schließlich entweder als *Maximum* oder, wo es sinnvoll erscheint (wie zum Teil bei Wissen und Macht) ebenfalls durch eine diesbezügliche *unendliche Menge* (siehe S. 14–15).

Wenn wir gemäß der obigen Analyse der Wortbedeutung definieren:

Eine Menge soll unendlich heißen, wenn sie (in einer anschaulichen Vorstellung der uns bekannten Art) nicht vollkommen überschaubar ist,

so müssen wir präzisieren, was mit „überschaubar“ gemeint ist. Konkret und unmittelbar wahrnehmbar? Oder auch mehr oder weniger vermittelt und abstrakt wahrnehmbar? Hier gibt es jedenfalls verschiedene *Arten* oder *Stufen* der mangelnden Überschaubarkeit und folglich auch Stufen der Unendlichkeit. Solche Stufen werden in der Mengenlehre genau beschrieben,⁶ wobei man den Mengen, die auf verschiedenen Unendlichkeitsstufen liegen, verschiedene „unendliche Kardinalzahlen“ oder „unendliche Mächtigkeiten“ zuordnet.⁷ Dabei ist *jede* unendliche Vielheit so groß, *dass wir die dazugehörigen Dinge prinzipiell in der anschaulichen Vorstellung nicht mehr konkret und unmittelbar als voneinander verschiedene Einzeldinge zugleich wahrnehmen können*. Ein Beispiel ist die Gesamtheit der Punkte, die man durch endlos fortgesetzte Halbierung einer Strecke erhält, indem man als ersten Punkt den Mittelpunkt zwischen zwei Punkten A und Ω nimmt (dieser heiße 1), als zweiten Punkt den Mittelpunkt zwischen 1 und Ω (dieser heiße 2) usw.

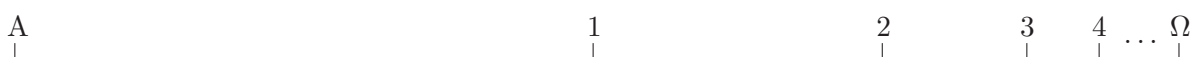


Abbildung 2.1: Fortgesetzte Halbierung einer Strecke

Die Gesamtheit dieser Punkte 1, 2, 3, 4, ... ist unendlich, da ihre anschauliche Übersichtlichkeit zumindest am rechten Ende (bei Ω) offensichtlich prinzipiell eingeschränkt ist. Aber diese Gesamtheit (die der „Menge der natürlichen Zahlen“ entspricht) besitzt nur eine Unendlichkeit der kleinsten Stufe, denn sie ist noch relativ übersichtlich, weil es sich um Punkte handelt, die alle zwischen dem Anfangs- und Endpunkt der Strecke eingeschlossen sind, und weil zudem jeder einzelne Punkt dieser Gesamtheit durch klar erkennbare Lücken von der Gesamtheit aller übrigen abgegrenzt ist. Man spricht hier von *abzählbarer Unendlichkeit*.⁸

Eine Unendlichkeit von qualitativ höherer Art besitzt offenbar die Gesamtheit *aller* Punkte einer Strecke, denn wir nehmen diese Punkte nicht direkt alle zugleich als klar voneinander abgegrenzte Einheiten wahr. Trotzdem steht uns auch diese Vielheit *vermittelt* durch die direkt wahrgenommene Strecke noch relativ klar und übersichtlich vor Augen. Man spricht von *der Unendlichkeitsstufe des Kontinuums*.⁹

⁶ Siehe S. 244–247 und S. 264–265.

⁷ Siehe Abschnitt 5.30, besonders Theorem 5.30.6 S. 318.

⁸ Siehe Definition 5.20.4 S. 259. Siehe auch S. 231–232.

⁹ Es handelt sich um eine Gesamtheit, welcher die sog. *Kontinuumsmächtigkeit* $\mathfrak{c}$, zukommt (siehe Definition 5.20.24 S. 264).

Auf eine *noch höhere* Stufe der Unendlichkeit würden wir stoßen, wenn wir eine Vielheit finden, die so groß ist, dass wir die zugehörigen Objekte auch in dieser „vermittelten“ Weise nicht mehr überschauen könnten. Eine solche Vielheit wäre *mächtiger als das Kontinuum*..

Es wird sich zeigen, dass es sogar „unendlich viele“ Stufen der Unendlichkeit gibt,¹⁰ wobei eine extrem hohe Stufe (unterhalb derer bereits unendlich viele andere Stufen liegen) dann erreicht ist, wenn die auf ihr liegenden Vielheiten (so genannte *Unmengen*) so groß sind, dass wir die zu ihnen gehörigen Dinge nicht mehr widerspruchsfrei zu einer Einheit zusammenfassen können.¹¹ Georg CANTOR nannte solche Vielheiten *inkonsistent unendlich* oder *absolut unendlich*.¹² Ob es nur eine oder mehrere Stufen auf diesem „inkonsistenten“ Niveau gibt, werden wir offen lassen müssen.¹³ Im Hinblick darauf, dass es mehrere sein könnten, sollte man zwischen „inkonsistent unendlich“ und „absolut unendlich“ unterscheiden: „inkonsistent unendlich“ sind Vielheiten, die wir nicht mehr ohne Widerspruch zusammendenken können, während „absolut unendlich“ eine schlechthin unübertreffbare Unendlichkeit meint.

Der bisher betrachtete Ansatz für eine Definition des Unendlichen hängt nun offenbar von relativ dunklen psychologischen Begriffen (Vorstellung, Anschaulichkeit usw.) ab. So stellt sich die Frage, ob es keinen exakteren Zugang gibt. Ein naheliegender Vorschlag wäre, die unendliche Menge einfach *mittels des Zahlenbegriffs* zu definieren:

Eine Menge soll „endlich“ heißen, wenn sie eine bestimmte Zahl von Elementen hat, es also eine Zahl n aus der Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$ gibt, so dass die Menge genau n Elemente hat. Andernfalls soll sie „unendlich“ heißen.

Diese Definition setzt jedoch voraus, dass geklärt ist, was „natürliche Zahlen“ sind und was es für eine Menge bedeutet, n Elemente zu haben. Beides lässt sich zufriedenstellend erklären, aber dazu ist eine nicht-triviale Vorarbeit nötig.¹⁴ Nun könnte man, getäuscht durch den alltäglichen Umgang mit Zahlen, leicht glauben, dass hier überhaupt kein Problem vorliegt. Da nämlich nach naivem Verständnis Zahlen auf das *Zählen* zurückzuführen sind, pflegt man „endlich“ mit „zählbar“ gleichzusetzen. Man setzt dabei die folgende Definition voraus:

Eine Menge soll „endlich“ heißen, wenn ihre Elemente gezählt werden können, d. h. wenn es einen Zählvorgang gibt, bei dem sämtliche zur Menge gehörigen Dinge erreicht werden. Andernfalls heiße die Menge „unendlich“ oder „unzählbar“.

Dies ist im Wesentlichen die Unendlichkeitsdefinition des ARISTOTELES, wonach das Unendliche das ist, „bei dem man unmöglich ein Ende erreichen kann“,¹⁵ oder das, was sich „im Denken nicht durchschreiten“ lässt.¹⁶ In diesem Sinn hieß es auch in der Scholastik: „infinitum transiri non potest“,¹⁷ und diese Auffassung ist noch bei KANT zu finden: „Der wahre . . . Begriff der Unendlichkeit ist: dass die sukzessive Synthesis der Einheit in Durchmessung eines Quantum niemals vollendet sein kann.“¹⁸ Problematisch ist hier jedoch, dass man in unendlicher Zeit sehr wohl unendlich viele

¹⁰ Vgl. Korollar 5.20.22 S. 264.

¹¹ Vgl. Abschnitt 5.2.

¹² Siehe S. 73.

¹³ Siehe S. 172.

¹⁴ Siehe Abschnitt 5.16.

¹⁵ ARISTOTELES, *Physica* Buch 1 Kap. 5, 204a3, Ausgabe Zekl Band 1 S. 120: «τὸ ἀδύνατον διελθεῖν».

¹⁶ ARISTOTELES, *Analytica posteriora* Buch 1 Kap. 22, 83b6–7, S. 398f: «τὰ δ'ἄπειρα οὐκ ἔστι διελθεῖν νοοῦντα.»

¹⁷ So heißt es z. B. bei THOMAS VON AQUIN, *Summa Theologiae* pars 1 quaestio 14 articulus 12 ad 2, Ausgabe Busa S. 209a: „infinitum transiri non potest, neque a finito neque ab infinito“.

¹⁸ KANT, *Kritik der reinen Vernunft* B460, Ausgabe Timmermann S. 534.

Dinge zählen kann.¹⁹ Und nicht nur das: Auch in begrenzter Zeit kann man unendlich viele Dinge zählen, wenn die Zeit zwischen zwei Zählritten immer kleiner wird. Um diese beiden Fälle auszuschließen, müsste man also sagen:

Eine Menge von Dingen ist endlich, wenn diese durch einen Zählvorgang erfasst werden können, der in einer endlich großen Zeitspanne abläuft und bei dem die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Zählritten stets gleich groß ist.

Der entscheidende Begriff ist hier die „endlich große“ Zeitspanne. Nun wollten wir jedoch die endliche Zeit gerade umgekehrt mittels des Begriffs der endlichen Menge definieren, als eine Zeitspanne, die endlich viele Zeiteinheiten umfasst. Wir kommen also nicht weiter, es sei denn, es gelänge, eine endliche Zeit zu beschreiben, *ohne* den Begriff „endlich“ zu verwenden. Eine Zeitspanne einfach dann als endlich anzusehen, *wenn sie Anfang und Ende hat*, ist keine Lösung, da es logisch nicht auszuschließen ist, dass eine Zeitspanne Anfang und Ende haben könnte, innerhalb derer dennoch unendlich viele Sekunden vergehen, ähnlich wie eine begrenzte Strecke dennoch unendlich viele Punkte besitzt. So ist unser Definitionsversuch mittels des Zählens vorläufig gescheitert.²⁰

In der Mathematik des späten 19. Jahrhunderts hat man nun wirklich weiterführende Ansätze zur Definition des mengenmäßig Unendlichen gefunden: Es wurden eine Reihe von Definitionen aufgestellt, die zumindest auf den ersten Blick sowohl von psychologischen Begriffen (wie Vorstellung und Überschaubarkeit) als auch von den Begriffen der Zeit, des Zählens und der Zahl vollständig unabhängig sind.²¹ Die wichtigste dieser Definitionen geht auf eine Tatsache zurück, auf die schon DUNS SCOTUS, ALBERT VON SACHSEN und GALILEI gestoßen waren,²² die aber erst Bernhard BOLZANO in seiner Schrift über *Paradoxien des Unendlichen* (1851) ausführlich analysiert hat: dass nämlich eine unendliche Menge A Teil einer anderen unendlichen Menge B sein kann, obgleich sich die in A und B zusammengefassten Dinge so gegenüberstellen lassen, dass jedem Ding aus A genau ein Ding aus B gegenübersteht und umgekehrt.²³ Indem sich die Bestandteile der Mengen A und B restlos zu Paaren zusammenstellen lassen, zeigt sich, dass die Mengen (in gewisser Hinsicht) gleich groß sind, *obwohl* A andererseits bloß ein Teil von B ist.²⁴ Laut BOLZANO ist dies nur ein scheinbarer Widerspruch, dessen Anschein dadurch entsteht, dass derartiges für endliche Mengen unmöglich ist.²⁵ Er nannte die Art der Gleichheit, die hier trotz des Teilseins bestehen kann, *Ähnlichkeit*. CANTOR führte dafür den Begriff der *Gleichmächtigkeit* ein; ich werde von *relationstheoretischer Gleichheit* sprechen. Nachdem nun diese von BOLZANO analysierte „paradoxe“ Eigenschaft unendlicher Mengen 1878 von Georg CANTOR als für das Unendliche *charakteristisch* erkannt worden war,²⁶ wurde sie 1887 von Richard DEDEKIND verwendet, um die Unendlichkeit formal zu *definieren*:

„Ein System S heißt *unendlich*, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist; im entgegengesetzten Falle heißt S ein *endliches* System.“²⁷

¹⁹ Das hat auch ARISTOTELES gesehen, der die Unmöglichkeit, das Unendliche zu durchlaufen an einer Stelle einschränkt, indem er sagt, dass das Unendliche nur „in endlicher Zeit“ nicht durchlaufen werden kann: ἀδύνατον τὴν ἄπειρον [γραμμὴν] διελθεῖν ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ. (*De caelo* Buch 1 Kap. 5, 272a29, Ausgabe Gigon S. 69).

²⁰ Erst nach der mathematisch exakten Einführung der natürlichen Zahlen werden wir sehen, dass und warum man durch Zählen mit natürlichen Zahlen in einem präzisen Sinn tatsächlich die Endlichkeit einer Menge feststellen kann (siehe Erklärung 5.17.8 S. 239 und Theorem 5.17.9 S. 239).

²¹ Vgl. die Zusammenstellung solcher Unendlichkeitskriterien auf S. 247.

²² Siehe Abschnitt 5.17.

²³ Vgl. BOLZANO, *Paradoxien* § 20–22 S. 28–33.

²⁴ Dieses Phänomen wird ausführlich in Abschnitt 5.17 besprochen werden.

²⁵ Vgl. BOLZANO, *Paradoxien* § 22 S. 32.

²⁶ Vgl. CANTOR, *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Ausgabe Zermelo S. 120: „Ein Bestandteil einer endlichen Mannigfaltigkeit hat immer eine kleinere Mächtigkeit als die Mannigfaltigkeit selbst; dieses Verhältnis hört gänzlich auf bei den *unendlichen* ... Mannigfaltigkeiten.“

²⁷ DEDEKIND, *Zahlen* § 5 Nr. 64 S. 13. Vgl. im mathematischen Teil Definition 5.17.1 S. 233.

Die in dieser Definition verwendeten Begriffe scheinen nun sehr präzise und rein logischer Natur zu sein. Trotzdem sind anschauliche Erklärungen hierdurch nicht überflüssig geworden. Denn zum einen sollen formale Definitionen die inhaltliche Intuition präzisieren, die wir von Unendlichkeit haben; ob eine formale Definition dies tatsächlich leistet, können wir aber nur beurteilen, wenn wir diese intuitive Vorstellung auch ohne die formale Definition beschreiben können. Zum anderen zeigt sich, dass auch die DEDEKINDSche Definition, indem sie den Mengenbegriff (hier System genannt) verwendet, einen nicht-logischen Begriff gebraucht, dessen genaue Erklärung in einer realistischen (d. h. nicht bloß formalen) Mengenlehre, wie wir sehen werden, letztlich doch wieder auf psychologische Begriffe (Denken, Abstraktion usw.) zurückgreifen muss. Allerdings gewinnt die Mengenlehre um so mehr an Überzeugungskraft, je weniger an die Anschauung und an damit verbundene psychologische Erfahrungen appelliert werden muss. Im Detail werde ich eine Grundlegung der Mengenlehre nach diesen Grundsätzen in Kapitel 5 durchführen. Es wird sich dann zeigen, dass die DEDEKINDSche Definition in einem präzisen Sinn die *Nichtzählbarkeit* einer Menge beschreibt,²⁸ was wiederum offenbar eine spezifische Form von *Nichtüberschaubarkeit* impliziert. So ist die DEDEKINDSche Definition tatsächlich eine gelungene Explikation des mengenmäßigen Unendlichkeitsbegriffs.

²⁸ Siehe Theorem 5.17.24 S. 242 im Kontext von Abschnitt 5.17.

2.2 Arten des Unendlichen

Die bedeutendsten Unterscheidungen, die in der Philosophiegeschichte hinsichtlich des Unendlichen gemacht wurden, sind die folgenden vier: diejenige zwischen extensiv-quantitativer und intensiv-qualitativer Unendlichkeit, diejenige zwischen dem aktual und dem potentiell Unendlichen, diejenige zwischen dem unendlich Großen und dem unendlich Kleinen sowie schließlich diejenige zwischen dem relativ und dem absolut Unendlichen.

Bevor ich auf diese Arten des Unendlichen eingehe, möchte ich der Vollständigkeit halber noch auf zwei weitere, für uns weniger bedeutsame Unterscheidungen hinweisen. Zum einen ist zwischen dem *Unendlichen im eigentlichen* und dem *Unendlichen im uneigentlichen Sinn* zu unterscheiden. Letzteres ist bloß das *sehr groß erscheinende Endliche*, das in hyperbolischer Redeweise oft als „unendlich“, „zahllos“, „unermesslich“ usw. bezeichnet wird.²⁹ Zum anderen spielte in der Scholastik die Unterscheidung zwischen dem *privativ Unendlichen* und dem *negativ Unendlichen* eine große Rolle.³⁰ Das privativ Unendliche ist das Mangelhafte, dem eine Grenze fehlt, die es von Natur aus abschließen und vollenden würde.³¹ Standardbeispiel ist die ungestaltete (durch keine Form begrenzte) Materie. Demgegenüber ist beim „negativ Unendlichen“ die Grenze bloß negiert, *ohne* dass dies ein Mangel wäre: Das „negativ Unendliche“ ist eine immaterielle (nicht durch die Materie limitierte) Form oder Wirklichkeit.³² Diese Unterscheidung entspricht der oben S. 8 erwähnten Unterscheidung zwischen dem *als negativ bewerteten Unendlichen* und dem *als positiv bewerteten Unendlichen*, wobei das letztere hier allerdings terminologisch mit dem „negativ Unendlichen“ zusammenfällt.³³

Extensiv-quantitative und intensiv-qualitative Unendlichkeit

Die eigentliche Unendlichkeit wird immer im Hinblick auf eine sog. *Größe* ausgesagt, wobei zwischen drei ursprünglichen Arten von Größe zu unterscheiden ist:

räumliche Ausdehnung,
zeitliche Ausdehnung und
abstrakt-mengenmäßige Ausdehnung.

Unter diesen drei Grundgrößen, auf denen alle in der Physik untersuchten Größen basieren,³⁴ ist die mengenmäßige Ausdehnung die fundamentalste, denn wir sprechen einem Raum oder einer Zeit genau dann Unendlichkeit zu, wenn die *Menge* der Einheitsräume oder Einheitsdauern, mit denen wir Raum bzw. Zeit ausmessen, unendlich ist. Außerdem kann die zeitliche und räumliche

²⁹ Zahlreiche instruktive Beispiele hierfür sind bei ANTWEILER, *Unendlich*, S. 24–29 zu finden. Vgl. auch *Apokalypse* 7,9 (die geretteten Menschen im Himmel bilden „eine große Schar, die niemand zählen kann“) und *Genesis* 15,5 (Unzählbarkeit der Sterne und der Nachkommenschaft Abrahams).

³⁰ Vgl. GREDT, *Elementa* Band 1 S. 286f, deutsche Ausgabe S. 227.

³¹ THOMAS VON AQUIN, *Summa Theologiae* pars 3 quaestio 10 articulus 3 ad 1, Ausgabe Busa S. 787b: „non habet formam quam natum est habere“.

³² THOMAS VON AQUIN, *Summa Theologiae* pars 3 quaestio 10 articulus 3 ad 1, Ausgabe Busa S. 787b: „forma vel actus non limitatus per materiam“.

³³ Der Scholastiker HEINRICH VON GENT hat freilich klar gesehen, dass das Unendliche nur dem Namen nach privativ oder negativ ist, der Sache nach aber etwas Positives: „infinitum etsi secundum impositionem et modum nominis privative aut negative dicitur, secundum rem tamen positive dicitur: quia illa negatio nobis dat intelligere verissimam affirmationem“ (HEINRICH VON GENT, *Summa Theologiae* articulus 44 quaestio 2, Ausgabe Badius Band 2 folio 14 verso). Siehe auch Fußnote 609 auf S. 554 sowie S. 558–559.

³⁴ So ist etwa die Geschwindigkeit definiert als das *Zahlenverhältnis* einer *räumlichen Größe* zu einer *zeitlichen Größe*. Aber nicht nur die offiziell als „abgeleitet“ geltenden Größen, sondern auch schon die sieben *Basisgrößen* der heutigen Physik (Länge, Zeit, Masse, Stromstärke, Temperatur, Stoffmenge, und Lichtstärke), mit denen man alle anderen physikalischen Größen beschreiben kann, sind durch Wirkungen definiert, die man letztlich allein durch *Zählung* von *zeitlichen* Prozessen und *Einheitsstrecken* beschreiben kann.

Ausdehnung nur in einem Teilbereich des Seienden auftreten, während die mengenmäßige überall, auch im Bereich des rein geistigen oder des abstrakten Seins auftritt.³⁵

Man spricht nun bei den drei Grundgrößen, wenn diese unendlich sind, von *extensiver* oder *quantitativer* Unendlichkeit. Das extensiv Unendliche ist daher einzuteilen in das räumliche, das zeitliche und das mengenmäßige (= die unendliche Menge):

Beispiel eines räumlich Unendlichen ist eine beidseitig unbegrenzte gerade Linie,
 Beispiel eines zeitlich Unendlichen ist ein anfangs- und endloser Zeitraum,
 Beispiel eines mengenmäßig Unendlichen ist die Gesamtheit aller möglichen Gedanken.

Dem extensiv Unendlichen steht das *intensiv* oder *qualitativ Unendliche* gegenüber.³⁶ Hierzu gehört jegliches Unendliche, was nicht räumlich, zeitlich oder mengenmäßig unendlich ist, z. B. unendlich große Helligkeit, Weisheit, Kraft, Güte usw. Beim intensiv Unendlichen bezieht sich das Unendlichkeitsprädikat *nicht direkt* auf eine Größe, sondern auf eine Qualität oder Tätigkeit. Doch ist auch hier ein Größenbezug festzustellen. Sehr deutlich ist dies zunächst bei den physikalischen Qualitäten erkennbar: Eine solche ist unendlich, wenn die *Anzahl* der übertroffenen physikalischen Einheiten der betreffenden Qualität unendlich ist. Z. B. ist ein *unendlich heller Gegenstand* ein solcher, dessen Helligkeit eine unendliche Menge von äquidistanten Helligkeitsstufen übertrifft, und *unendlich große Kraft* könnte man als die Fähigkeit definieren, zugleich eine unendliche Menge von gleich schweren endlichen Gewichten zu heben.

Fraglich ist, ob ein analoger Größenbezug auch bei Unendlichkeiten *geistiger Natur* vorliegt. So ist etwa „unendliches Wissen“ zwar sicher *auch*, aber *nicht allein* durch den Umfang des Gewussten (etwa die Anzahl der gewussten Sachverhalte) beschreibbar, denn es kann noch so etwas wie „unendliche Tiefe“ (etwa Klarheit und Deutlichkeit) des Verständnisses jedes einzelnen Sachverhaltes hinzukommen. Noch viel weniger als beim Wissen schiene es angemessen, „unendliche Liebe“ oder „unendliches Glück“ allein auf eine unendliche Anzahl (etwa die Anzahl der geliebten Gegenstände bzw. die Anzahl der befriedigten Wünsche) zurückzuführen. Doch gleichwohl scheint auch hier die Unendlichkeit letztlich auf eine Größe zurückführbar zu sein. Man kann nämlich geistige Güter wie Glück, Güte und Wissen *steigern* und *vermindern* und insofern *größenmäßig* vergleichen.³⁷ Nur ist die Natur dieser Größe im geistigen Bereich *anderer Art* als im physikalisch-materiellen. Der wesentliche Unterschied ist der, dass bei den physikalischen Qualitäten die Größe durch eine „Messung“ im Sinne einer *Addition oder Aneinanderreihung von Exemplaren einer Einheitsgröße* festgestellt werden kann, während es bei den Intensitäten geistiger Güter gar keine Einheiten gibt, die man aneinander fügen könnte: sonst müsste man diese auch portionsweise wieder wegnehmen und das geistige Gut dadurch zerteilen können. Wie aber Henry DEKU im Anschluss an spätantike Philosophen zu Recht betont hat, scheinen geistige Güter „durch Teilung anstatt weniger mehr zu werden“: Der Professor wird nicht ärmer an Wissen, wenn er doziert, und Güte nimmt nicht ab, sondern zu,

³⁵ Vgl. Abschnitt 5.33.

³⁶ Nach ZIEGENAUS, *Marius Victorinus* S. 231 sind die intensive und extensive Unendlichkeit die beiden Oberbegriffe, unter die man die in der griechischen Philosophie sowie bei den Kirchenvätern bis einschließlich MARIUS VICTORINUS (siehe Abschnitt 8.8.3) entwickelten Unendlichkeitskonzeptionen zunächst subsumieren kann, wobei allerdings nur der extensiven Unendlichkeit die Bezeichnung „unendlich“ beigelegt wurde. Die Tradition der intensiven Unendlichkeitsvorstellung, in der das Unendliche als „geistiges Kraft-Zentrum“ gesehen wird (ebd. S. 233), führt ZIEGENAUS bis auf PARMENIDES zurück. Die Einteilung in das intensiv und extensiv Unendliche findet man auch bei POHLE, *Unendlich* S. 239. POHLE setzt das extensiv Unendliche explizit gleich mit der „Unendlichkeit der Größe“, die er von der „Unendlichkeit des Geistes“ als einer „intensiven, inneren“ Unendlichkeit abgrenzt.

³⁷ Vgl. SCHEEBEN, *Dogmatik* Band 1 § 74 S. 531: „Unendlich ist der Gegensatz zu *endlich*. Das Ende (*finis*) ist an sich nur denkbar an einer *Größe*, zunächst der *mathematischen*, ... dann aber auch der *realen* oder *metaphysischen* Größe, d. h. ... der *inneren Vollkommenheit* der Dinge; denn auch diese Vollkommenheit gilt als Größe, inwiefern sie nach der Menge und dem Gewichte, dem Grade und Umfang ihres Inhaltes *bemessen* werden kann.“

wenn man versucht, sie anderen zuzuwenden.³⁸ So setzt sich die unendliche Größe hier nicht aus einer unendlichen Anzahl von Einheits-Intensitäten zusammen. Wenn daher nicht wenigstens teilweise ein Mengenbegriff mit der geistigen Intensität verbunden ist (wie beim Wissen die Menge des Gewussten, bei der Macht die Größe des Einflussbereichs usw.), kann die unendliche Intensität nur als Maximum aufgefasst werden. So ist unendliche Gerechtigkeit eine Gerechtigkeit *ohne Abstriche*, unendliche Liebe eine Liebe *ohne jeden* Vorbehalt, unendliche Güte die *totale* Übereinstimmung mit der Idee des Guten usw.

Wir können also zusammenfassend sagen, dass abgesehen von Fällen, in denen wir das Unendliche als Maximum definieren müssen, letztlich immer das mengenmäßig Unendliche, also die *unendliche Menge*, die *Grundlage für jegliches Verständnis des Unendlichen* bildet. Diese entscheidende Rolle des Quantitativen hat auch ARISTOTELES gesehen, wenn er sagt: „Die Begriffserklärung von ‚unendlich‘ benutzt den Begriff von Quantität, nicht von Substanz oder Qualität“.³⁹

Potentielle und aktuelle Unendlichkeit

Etwas, dessen Größe stets vermehrt werden kann, das aber dennoch immer endlich bleibt, heißt *potentiell unendlich*, während das *aktual Unendliche* die Unendlichkeit tatsächlich erreicht hat.⁴⁰ Es ergibt sich also insgesamt eine Dreiteilung: etwas kann *aktual* unendlich, oder nur *potentiell* unendlich, oder aber *noch nicht einmal potentiell* unendlich sein. Man betrachte zu diesen Unterscheidungen folgendes Beispiel:

1. Angenommen, ein heute geborener Mensch hätte ein Mittel, das Altern seiner Zellen zu stoppen, so hätte er ein *potentiell unendliches* Lebensalter, d. h. die Zahl seiner Lebensjahre wäre unendlich vermehrbar, bliebe aber zu jedem Zeitpunkt endlich.
2. Dagegen wäre das Lebensalter eines Wesens, das schon immer gelebt hat, *aktual unendlich*, und es wäre auch schon immer *aktual* unendlich gewesen.
3. Schließlich ist das Lebensalter eines heute geborenen Wesens, das notwendigerweise einmal sterben muss, *weder aktual noch potentiell unendlich*.

ARISTOTELES führt in seiner *Physik* aus, dass sowohl die Annahme der Existenz von etwas Unendlichem wie auch die Annahme, es gebe schlechthin nichts Unendliches, auf unüberwindliche Schwierigkeiten stoße, und so sei „ein Schlichter nötig“, dessen Spruch so aussehen müsse: „in bestimmtem Sinne gibt es das wohl, in einem bestimmten anderen aber nicht“.⁴¹ Die Lösung bestehe darin, dass

³⁸ Vgl. DEKU, *Infinitum* S. 272. Mathematisch gesprochen besteht zwischen den möglichen Intensitäten eines steigbaren geistigen Gutes eine Ordnungsrelation wie zwischen den Punkten einer von einem Punkt 0 ausgehenden und sich ins Unendliche erstreckenden Halbgeraden, und diesbezüglich kann man sich diese Intensitäten durchaus als Punkte auf dieser „geistigen Halbgeraden“ vorstellen. Nur ist im Gegensatz zu einer echten Halbgeraden zwischen ihren „Teilstrecken“ keine additive Kongruenzrelation definierbar.

³⁹ ARISTOTELES, *Physica* Buch 1 Kap. 2, 185b2–3, Ausgabe Zekl Band 1, S. 6f: «ὁ γὰρ τοῦ ἀπείρου λόγος τῷ ποσῷ προσχρήται, ἀλλ’ οὐκ οὐσία οὐδὲ τῷ ποιῷ».

⁴⁰ Die Begriffe des *potentiell* (ἐνεργεία, der Möglichkeit nach) und *aktual* (δυνάμει, wirklich) Unendlichen gehen auf ARISTOTELES zurück (vgl. ARISTOTELES, *Physica* Buch 3 Kap. 6, 206a16–18, Ausgabe Zekl Band 1, S. 134f). ARISTOTELES selbst weist darauf hin, dass „potentiell“ hier nicht die gewöhnliche Bedeutung hat: Gemeint ist *nicht* die Möglichkeit oder Fähigkeit, tatsächlich unendlich zu werden. Bei den Scholastikern hieß das potentiell Unendliche auch *synkategorematisch* unendlich oder unendlich *in fieri* oder *sensu diviso*, während das aktual Unendliche als *kattegorematisch* unendlich oder unendlich *in facto esse* oder *in sensu composito* hieß (vgl. MAIER, *Vorläufer Galileis* S. 157 mit Fußnote 2). Die Bezeichnungen „kategorematisch“ und „synkategorematisch“ gehen auf den Logiker Petrus Hispanus (Papst Johannes XXI., 1226–1277) zurück (vgl. DUHEM, *Les deux infinis* S. 21f). HEGEL nannte das potentiell Unendliche das *schlechte* Unendliche und das aktual Unendliche das *wahrhaft* Unendliche (vgl. HEGEL, *Enzyklopädie* (1830) § 94f, Ausgabe Bonsiepen/Lucas S. 130f, Ausgabe Nicolini/Pöggeler S. 112f).

⁴¹ ARISTOTELES, *Physica* Buch 3 Kap. 6, 206a13–14, Ausgabe Zekl Band 1, S. 135.

es kein aktual Unendliches, sondern nur ein potentiell Unendliches gibt.⁴² Gegen ARISTOTELES lässt sich einwenden, dass das potentiell Unendliche *das aktual Unendliche voraussetzt*, denn da das potentiell Unendliche das unendlich Vermehrbare ist, hat es eine aktual unendliche Eigenschaft: seine Vermehrbarkeit.⁴³ Die These, dass es nur potentiell Unendliches gibt, kann also jedenfalls nicht im absoluten Sinn festgehalten werden. Gäbe es nämlich das aktual Unendliche in keiner Weise, so auch keine unendliche Vermehrbarkeit, und folglich keine potentielle Unendlichkeit.⁴⁴

Das unendlich Kleine und das unendlich Große

Nach ARISTOTELES erhält man das Unendliche *durch Addition* oder *durch Teilung*.⁴⁵ Dementsprechend nennt man eine Größe *unendlich groß*, wenn sie durch eine unendlich oft wiederholte Addition gleicher endlicher Größen hervorgeht, und *unendlich klein*, wenn sie durch eine Teilung einer endlichen Größe in gleichartige Teile hervorgeht, die dann wieder in gleichartige Teile geteilt werden usw., wobei dieser Prozess unendlich oft wiederholt wird.⁴⁶ Sofern der betrachtete Prozess der Addition oder Teilung nur potentiell unendlich ist, ist auch die betreffende Größe nur *potentiell* unendlich groß bzw. unendlich klein, während eine Größe, die man *nach Abschluss von unendlich vielen Schritten* eines solchen Prozesses erhalten würde, *aktual* unendlich groß bzw. klein heißt.

Zum Beispiel wäre, falls die Zeit keinen Anfang hatte, die bis heute vergangene Zeit eine aktual unendliche Größe, weil dann der Prozess des Aufaddierens unendlich vieler Zeiteinheiten schon zum Abschluss gekommen wäre. Interessanter sind die aktual unendlich kleinen Größen, die man auch *Infinitesimalien* nennt. Als Beispiel für aktual unendlich kleine Strecken könnte man Punkte ansehen, da sich eine endliche Strecke in unendlich viele Punkte einteilen lässt. Jedoch schreibt man gewöhnlich den Punkten „gar keine“ Größe zu, also auch keine unendlich kleine.⁴⁷ Unter *aktual unendlich kleinen* Strecken versteht man statt dessen *unendlich kleine Teile von Strecken, die selbst wieder teilbar sind*. Auf diese geheimnisvollen Größen werden wir in Abschnitt 5.25 zurückkommen.

In einem ganz anderen Sinn pflegt man von „unendlich klein“ und „unendlich groß“ bei vermehrbaren Eigenschaften zu reden, *die ein konträres Gegenteil haben*. Hier bedeutet die Vermehrung eine Verminderung des Gegenteils und umgekehrt. Wenn z. B. die Helligkeit zunimmt, nimmt die Dunkelheit ab und umgekehrt. Liegt eine solche Eigenschaft in unendlicher Größe vor, spricht man ihrem Gegenteil unendliche Kleinheit zu. Sowohl unendliche Größe als auch unendliche Kleinheit entstehen dann also „durch Addition“: nur entsteht das unendlich Kleine durch Vermehrung der gegenteiligen Eigenschaft. Ein Beispiel sind die beiden „unendlich weit links“ bzw. „unendlich weit rechts“ gelegenen Punkte $+\infty$ („plus unendlich“) und $-\infty$ („minus unendlich“) auf der Zahlengeraden (siehe Definition 2.3.4 S. 21), die man „unendlich groß“ bzw. „unendlich klein“ nennt.⁴⁸

⁴² ARISTOTELES, *Physica* Buch 3 Kap. 6, 206a18, Ausgabe Zekl Band 1, S. 134: «λείπεται οὖν δυνάμει εἶναι το ἄπειρον.» Auch die Zahlenreihe ist für ARISTOTELES bloß potentiell unendlich (vgl. ARISTOTELES, *Physica* Buch 3 Kap. 7, 207b11-12, Ausgabe Zekl Band 1, S. 142: δυνάμει μὲν ἔστιν, ἐνεργείᾳ δ' οὐ.)

⁴³ Hierauf hat unter anderem Constantin GUTBERLET hingewiesen (GUTBERLET, *Das Unendliche*, S. 22f).

⁴⁴ Versteht man allerdings unter einer „aktual“ unendlichen Vielheit nicht bloß eine unendliche Vielheit von *zugleich daseienden*, sondern eine solche von *gleichzeitig zusammenwirkenden* Dingen, so hat die Annahme, dass eine solche Vielheit existieren kann, mit ernstzunehmenden Schwierigkeiten zu kämpfen (siehe Abschnitt 11.2).

⁴⁵ ARISTOTELES, *Physica* Buch 3 Kap. 4, 204a6–7, Ausgabe Zekl Band 1, S. 120f.

⁴⁶ Man beachte, dass diese Erklärung nur für räumliche oder zeitliche Größen sowie davon abgeleitete physikalische Größen sinnvoll ist, denn geistige Intensitäten können nicht in dieser Weise addiert oder geteilt werden.

⁴⁷ Wir werden jedoch in Abschnitt 5.25 (auf S. 292) sehen, dass die auf EUKLID zurückgehende Auffassung eines Punktes als ausdehnungslos nicht die einzige mögliche darstellt.

⁴⁸ Meist benutzt man $+\infty$ bzw. $-\infty$ nur als Symbole für den potentiell unendlichen Prozess, bei dem man über jeden Punkt hinaus immer noch weiter „nach links“ bzw. „nach rechts“ auf der Zahlengeraden fortschreitet. Man kann aber $+\infty$ und $-\infty$ auch als aktual unendlich weit vom Nullpunkt entfernte Punkte auffassen: Vgl. einerseits den kontextbezogenen Gebrauch der Symbole $+\infty$ und $-\infty$ in der Ordnungstheorie (Definition 5.13.17 auf S. 178) und andererseits die Deutung von $+\infty$ und $-\infty$ als uneigentliche surreale Zahlen in Abschnitt 5.26.

Das relativ Unendliche und das absolut Unendliche

Nach einem viel zitierten Satz THOMAS VON AQUIN kann etwas, was in einer bestimmten Beziehung unendlich ist, in anderer Beziehung endlich sein.⁴⁹ Ist dies der Fall, spricht man in der scholastischen Tradition von einem *relativ Unendlichen* (*infinitum secundum quid*), dem die *absolute Unendlichkeit* Gottes gegenübersteht (*infinitum simpliciter*).⁵⁰ Hierzu betrachte man folgende Beispiele:

1. Eine begrenzte Linie ist hinsichtlich ihrer räumlichen Erstreckung endlich, aber hinsichtlich der Menge ihrer Punkte unendlich.
2. Eine Linie mit nur einem Randpunkt erstreckt sich in der einen Richtung ins Unendliche, in der anderen ist ihre räumliche Erstreckung endlich.
3. Eine Linie ohne Randpunkt erstreckt sich zwar in beiden Richtungen ins Unendliche, nimmt aber nicht den ganzen Raum ein und ist daher als Teil des Raumes endlich.
4. Der allseitig unbegrenzte Raum ist in jeder Richtung unendlich, aber er kann in vielen anderen Hinsichten endlich sein, z. B. hinsichtlich seiner Dimensionszahl.

Versteht man nun unter dem „absolut Unendlichen“ ein solches, das in schlechthin *jeder* Beziehung unendlich ist, so erhält man allerdings einen widersprüchlichen Begriff, der für die Theologie nicht brauchbar zu sein scheint. Dass ein solches Unendliches zugleich unendlich groß und unendlich klein, unendlich hell und unendlich dunkel usw. genannt werden müsste, kann zwar aus mystischer Sicht noch als dem Gottesbegriff durchaus angemessen erscheinen,⁵¹ aber dass ein solches Unendliches auch *mengenmäßig* in jeder Beziehung unendlich wäre, ist für einen *Theisten*, für den ein Unterschied zwischen Gott und dem Universum besteht, nicht mehr akzeptabel. Denn nur die Gesamtheit aller Objekte schlechthin kann mengenmäßig in jeder Beziehung unendlich genannt werden.

So sollte man beides, sowohl das relativ Unendliche wie auch das absolut Unendliche, von vornherein auf einen bestimmten Bereich beziehen: z. B. auf den Bereich der Menge, der räumlichen Erstreckung, der Kraft usw. Auch wenn wir von der Unendlichkeit Gottes reden, gibt es hier einen ganz bestimmten Bereich, nämlich den der „Seinsmächtigkeit“.⁵² Unter dem *absolut Unendlichen* ist dann in jedem Bereich das prinzipiell nicht überschreitbare Maximum zu verstehen, unter einem *relativ Unendlichen* dagegen etwas, das (im Sinne der in Abschnitt 2.1 entwickelten Vorstellung) unendlich ist, *ohne* maximal zu sein.

⁴⁹ THOMAS VON AQUIN, *Summa Theologiae* pars 3 quaestio 10 articulus 3 ad 2, Ausgabe Busa S. 787b: „Nihil prohibet aliquid esse infinitum uno modo quod est alio modo finitum“.

⁵⁰ Vgl. GREDT, *Elementa* Band 1 S. 287, deutsche Ausgabe S. 227f. THOMAS nennt diese beiden Weisen der Unendlichkeit das Unendliche „secundum aliquid determinatum“ und das Unendliche „simpliciter quoad omnia“ (THOMAS VON AQUIN, *Summa Theologiae* pars 3 quaestio 10 articulus 3 ad 3, Ausgabe Busa S. 787c).

⁵¹ Vgl. CUSANUS, *Docta ignorantia* Buch 1 Kap. 4 Nr. 12, Ausgabe Senger S. 18: „das absolut Größte“ ist „derart frei von irgendeiner Art des Gegensatzes, dass im Größten das Kleinste koinzidiert . . . So macht es keinen Unterschied, ob man sagt: ‚Gott . . . ist Licht‘, oder ob man sagt: ‚Gott ist in so höchstem Maße Licht, dass er im geringsten Maße Licht ist‘ . . . Doch dieser Sachverhalt übersteigt all unser Denken, das auf dem Wege des Verstandes das Widersprechende nicht in seinem Ursprung zu verbinden vermag.“

⁵² Zur Seinsmächtigkeit und ihren Stufen siehe Abschnitt 4.1; konkret äußert sie sich in Macht, Wissen und Güte. Auch THOMAS VON AQUIN hat Gottes absolute Unendlichkeit auf einen bestimmten Bereich eingeschränkt (siehe S. 561–562): Im absoluten Sinn unendlich („infinitum simpliciter“) ist Gott bei ihm im Bereich des Wesens (*secundum essentiam*). Damit dürfte der Bereich der Seinsmächtigkeit gemeint sein.

2.3 Charakteristische Beispiele für das Unendliche

Die folgende Liste enthält die geläufigsten Beispiele für das Unendliche und ermöglicht zugleich einen Einblick in die wichtigsten Kategorien, in denen das Unendliche vorkommt:

1. ein (allseits oder teilweise) unbegrenzter Raum,
eine (allseits oder teilweise) unbegrenzte Ebene,
eine (auf einer oder auf beiden Seiten) unbegrenzte Linie,
2. ein Zeitraum, der anfangslos oder endlos oder beides zugleich ist,
3. die Gesamtheit der Punkte auf einem beliebigen Linien-, Flächen- oder Raumstück,
4. die Gesamtheit der Zeitpunkte in einem beliebigen Zeitraum,
5. die Gesamtheit der Teil-Linien einer Linie, die man durch endlos fortgesetzte Teilung (z. B. Halbierung) erhält, erst recht die Gesamtheit aller Linien überhaupt, die Teil einer größeren Linie oder eines Flächenstücks oder Raumstücks sind,
die Gesamtheit aller Flächen, die Teil einer Gesamtfläche oder eines Raumstücks sind,
und die Gesamtheit aller Raumstücke, die Teil eines anderen Raumstücks sind,
6. die Gesamtheit der Zeitintervalle, die man durch endlos fortgesetzte Teilung (z. B. Halbierung) eines Zeitintervalls erhalten kann,
erst recht die Gesamtheit aller Zeitintervalle, die Teil eines größeren Zeitintervalls sind,
7. die Gesamtheit der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3 \dots$,
erst recht die Gesamtheiten noch umfassenderer Zahlenbereiche,
8. die Gesamtheit aller Gedanken,
9. die Gesamtheit aller Seienden und die Gesamtheit aller Attribute eines Seienden,
10. das allvollkommene Sein: Gott.

Eine genauere Erläuterung der Beispiele 1-7 setzt ein genaueres Verständnis von Raum, Zeit und Zahl voraus, während man zum tieferen Verständnis der Beispiele 8-10 die Begriffe von Denken und Sein analysieren muss, was den Entwurf einer Erkenntnistheorie und Ontologie erforderlich macht. **Raum, Zeit, Zahl, Denken und Sein** sind jedenfalls die Bereiche, in denen uns Unendliches entgegentritt. Hier soll es vorerst genügen, das **achte Beispiel** zu erläutern. Auf dieses Beispiel stützte sich Richard DEDEKIND in seinem „Beweis“ für die Existenz einer unendlichen Gesamtheit:

„Meine Gedankenwelt, d. h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Denn wenn s ein Element von S bedeutet, so ist der Gedanke s' , dass s Gegenstand meines Denkens ist, selbst ein Element von S .“⁵³

DEDEKIND beobachtet also, dass man von einem beliebigen Gedanken s stets zu dem Gedanken s' fortschreiten kann, dessen Inhalt der Gedanke s selbst ist, dann weiter zu dem Gedanken s'' , dessen Inhalt s' ist usw. So erhält man eine endlose Folge von Gedanken $s, s', s'', s''' \dots$. Wichtig ist, dass hier von *möglichen* Gedanken die Rede ist: Gedanken, die man denken *kann* (gleichgültig, ob das jemand auch wirklich tut). Solche *mögliche* Gedanken sind nicht nichts, auch wenn sie nicht den

⁵³ DEDEKIND, *Zahlen* S. 14.

Seins-Status der *wirklichen* Dinge haben.⁵⁴ Sie bilden also eine Gesamtheit daseiender Dinge, und zwar, wie DEDEKINDS „Beweis“ zeigt, eine unendliche.

Unter dem „unbegrenzten Raum“ im **ersten Beispiel** können wir nicht ohne weiteres den *physikalischen Raum* verstehen, von dem heutige Physiker es für möglich halten, dass er in sich gekrümmt ist und ein bloß endliches Volumen hat.⁵⁵ Vielmehr verstehe ich darunter einen *vorgestellten Raum*. Wie jeder bestätigen kann, der sich einen Körper vorstellt, ist mit einer solchen Vorstellung notwendigerweise die Vorstellung eines allseitig unbegrenzten dreidimensionalen Raumes verbunden, in dem dieser Körper sich befindet.⁵⁶ Einen solchen Raum nenne ich im Anschluss an KANT einen *Anschauungsraum*.⁵⁷ KANT spricht in der Einzahl von „dem“ Anschauungsraum, doch ist es nicht notwendig, bei der Vorstellung mehrerer Körper diese in denselben vorgestellten Raum zu versetzen, denn man kann jeden vorgestellten Körper aus dem Raum eines anderen Körpers, mit dem dieser keinen Teil gemeinsam hat, „hinausdenken“ und beide Körper in einem je eigenen Raum für sich betrachten.⁵⁸ Für jeden menschlichen Beobachter ist jedoch *ein* Anschauungsraum ausgezeichnet: derjenige, von dem er selbst in seiner Vorstellung umgeben ist und in dem er alle „wirklich“ ihm begegnenden Körper lokalisiert denkt. Diesen Raum könnte man den *subjektiven Anschauungsraum* des Beobachters nennen. Nach einer konsequent durchgeführten idealistischen Philosophie müsste dieser Raum für jeden Beobachter ein anderer sein, aber man steht dann vor dem Rätsel, wie eine Begegnung zwischen verschiedenen Beobachtern möglich ist, bei der jeder im Anschauungsraum des anderen auftauchen muss. Sofern die Beobachter wirklich im gegenseitigen Austausch stehen, scheint es daher natürlicher zu sein, diese in ein und demselben *intersubjektiven Anschauungsraum* lokalisiert zu denken, welcher zu dem Körpersystem gehört, das aus *allen* Beobachtern besteht, die sich begegnen können. Beobachtergruppen, die nicht miteinander in Austausch stehen, könnten sich dagegen in verschiedenen intersubjektiven Anschauungsräumen befinden. Wie das Verhältnis der Anschauungsräume zum (wirklichen) physikalischen Raum ist, ob es überhaupt einen wirklichen Raum und wirkliche Körper gibt, kann hier offen bleiben.⁵⁹ Denn wenn wir unsere Behauptung auf Anschauungsräume beziehen, sind wir auf jeden Fall auf der sicheren Seite.

Ebenso soll unter der *Zeit* im **zweiten Beispiel** nicht ohne weiteres die *physikalische Zeit* verstanden werden, von der etwa der Physiker Stephen W. HAWKING annimmt, dass sie analog zum Raum begrenzt und in sich geschlossen ist.⁶⁰ Es sind vielmehr *vorgestellte Zeiträume* gemeint, welche den Bewegungen eines Körpers in einem Anschauungsraum zugrunde liegen. Wir können diese

⁵⁴ Vgl. Abschnitt 4.3.

⁵⁵ Vgl. hierzu Abschnitt 8.16.

⁵⁶ Man könnte einwenden, dass man sich nur einen begrenzten Teil des dreidimensionalen Raumes *konkret* vorstellen kann. Das ist richtig, aber man kann diesen Teil in der Vorstellung stets vergrößern, wobei eine Gerade bei einer solchen Vergrößerung immer gerade bleibt. Dies zeigt, dass der Raum, welcher der Vorstellung zugrunde liegt, tatsächlich der klassischen „euklidischen Geometrie“ entspricht, also nicht gekrümmt ist. Wenn daher der *physikalische* Raum ein gekrümmter Raum ist, wie er durch die allgemeinere „Riemannsche Geometrie“ beschrieben wird, müsste man sagen, dass unsere anschauliche Vorstellung nicht diesen Riemannschen Raum selbst, sondern nur dessen so genannte „Tangentialräume“ erfasst: euklidische Räume, die den Riemannschen Raum jeweils in der Nähe eines Punktes approximieren. Unsere Anschauung kann in diesem Sinne „tangential“ genannt werden.

⁵⁷ Vgl. KANT, *Kritik der reinen Vernunft* B 38, Ausgabe Timmermann S. 98: „Der Raum ist eine notwendige Vorstellung, a priori, die allen äußeren Anschauungen zum Grunde liegt“.

⁵⁸ Vgl. hierzu die Bemerkung EINSTEINS, man könne nicht von dem „Raum“ schlechthin, sondern nur von dem „zu einem Körper A gehörigen Raum“ reden (*Grundzüge der Relativitätstheorie* S. 7).

⁵⁹ KANT leugnete die Existenz eines realen Raums, gab aber die Existenz realer Körper als „Dinge an sich“ zu, während BERKELEY beides verneinte (siehe Abschnitte 8.12.1 und 11.1). Diese Positionen sind allerdings fragwürdig (siehe S. 601).

⁶⁰ Siehe S. 665.

Zeiträume in Analogie zu den Anschauungsräumen *Anschauungszeiten* nennen.⁶¹ Dass sich diese nach beiden Seiten hin als unbegrenzt denken lassen, ist anschaulich klar.

Auch das **dritte Beispiel** bedarf der Erläuterung. Wenn man mit EUKLID den Punkt definiert als etwas, „was keine Teile hat“,⁶² bleibt unklar, was gemeint ist,⁶³ und es besteht die Gefahr, sich den Punkt als etwas nicht Existierendes vorzustellen.⁶⁴ Die moderne Mathematik versucht gar nicht erst, eine Definition für die Ausdrücke Punkt, Linie und Fläche anzugeben, sondern sieht darin undefinierte Grundbegriffe mit vorgegebenen Eigenschaften.⁶⁵ Um zu entscheiden, ob unsere Beispiele für unendliche Mengen einer kritischen Betrachtung standhalten, müssen aber brauchbare Erklärungen der verwendeten Begriffe vorgelegt werden. Ich definiere den Punkt daher wie folgt.

2.3.1 Erklärung Ein (*fester*) *Punkt* in einem Anschauungsraum ist ein Ort in diesem Raum, den eine *Ecke* eines vorgestellten beweglichen Körpers (z. B. eine Pfeilspitze) einnehmen kann. Die Ecke selbst ist als Teil des beweglichen Körpers vom festen Punkt zu unterscheiden und heißt ein *beweglicher Punkt*.

Da eine Ecke ein wohldefinierter Teil des Körpers ist, muss sie auch einen wohldefinierten Platz im Anschauungsraum einnehmen, und dieser Ort – also der von der Ecke abgedeckte Platz – ist nach obiger Erklärung ein Punkt. Ähnlich definiere ich Linien und Flächen:

2.3.2 Erklärung Eine (*feste*) *Linie* in einem Anschauungsraum ist ein fester Ort in diesem Raum, den eine *Kante* eines vorgestellten beweglichen Körpers einnehmen kann. Die Kante selbst heißt *bewegliche Linie*. Eine (feste oder bewegliche) Linie heißt *geschlossen*, wenn man auf ihr in eine Richtung fortschreitend stets wieder zum Ausgangspunkt zurückkommt. Eine nicht gebogene Linie heißt *Gerade*, wenn sie nach beiden Seiten hin unbegrenzt ist, *Halbgerade* oder *Strahl*, wenn sie nach einer Seite hin unbegrenzt und nach der anderen begrenzt ist, und *Strecke*, wenn sie auf beiden Seiten begrenzt ist.

Von der Anschauung her ist nun klar, dass sich nicht nur eine unbegrenzte Linie, sondern auch bereits eine begrenzte Linie (z. B. eine Strecke) aus unendlich vielen Punkten zusammensetzt. Denn zwischen zwei Pfeilspitzen kann man in der Mitte immer noch eine weitere Pfeilspitze platzieren.

2.3.3 Erklärung Eine (*feste*) *Fläche* im Anschauungsraum ist dort ein fester Ort, den eine bewegliche Fläche einnehmen kann. Hierbei ist eine *bewegliche Fläche* die gesamte Grenze („Oberfläche“) eines vorgestellten beweglichen Körpers oder ein von einer geschlossenen Linie begrenztes Teilstück einer solchen Körperoberfläche.

Eine nicht gewölbte Fläche heißt *Ebene*, wenn sie nach allen Seiten unbegrenzt ist.

Es dürfte nun unmittelbar durch die Anschauung klar sein, dass sich jedes Flächen-, Linien- und Raumstück aus unendlich vielen Punkten zusammensetzt.

⁶¹ In Fortführung der Analogie können wir besondere Anschauungszeiten als *subjektiv* bzw. *intersubjektiv* bezeichnen.

⁶² EUKLID, *Elemente* Buch 1 Def. 1, Ausgabe Heiberg/Stamatis Band 1 S. 1, Ausgabe Thaeer S. 1.

⁶³ Auch von der Seele und von Gott wird ja behauptet, dass sie nicht aus Teilen bestehen. Dasselbe gilt für unteilbare Akte und für Zeitpunkte.

⁶⁴ Dieser Gefahr erlagen diejenigen Philosophen, welche sich die Linie nicht aus Punkten, sondern aus endlich vielen kleinsten Teilen zusammengesetzt dachten, die gerade so groß sind, dass man sie noch unterscheiden kann: z. B. BERKELEY, *Knowledge* § 124, Ausgabe Ayers S. 116, Ausgabe Klemmt S. 97 (vgl. ebd § 132, Ausgabe Ayers S. 119, Ausgabe Klemmt S. 102) und HUME, *Understanding* section 12 part 2, Ausgabe Selby-Bigge S. 156, Ausgabe Kulenkampff S. 183; siehe Fußnote 839 auf S. 584.

⁶⁵ Vgl. hierzu Abschnitt 5.21.

Was das **vierte Beispiel** betrifft, so müssen wir den Begriff des *Zeitpunktes* klären. Wenn wir einen physikalischen Zeitraum ausmessen, benutzen wir dazu eine gleichmäßige Bewegung eines Körpers im physikalischen Raum. Analog ist ein vorgestellter Zeitraum durch die Bewegung eines vorgestellten Körpers im Anschauungsraum auszumessen. So kann man etwa die gleichmäßige Bewegung einer Pfeilspitze auf einer Geraden betrachten. Die Zeit, zu welcher die Pfeilspitze einen Punkt auf der Geraden einnimmt, bezeichnen wir dann als einen Zeitpunkt innerhalb des betrachteten Zeitraums. So besteht eine Entsprechung der Zeitpunkte eines anfangs- und endlosen Zeitraums mit den Punkten einer Geraden, und ebenso eine Entsprechung der Zeitpunkte eines begrenzten Zeitraums mit den Punkten einer Strecke. Da die Gesamtheit der Punkte auf einer Geraden bzw. Strecken unendlich ist, gilt dies auch für die Gesamtheit der entsprechenden Zeitpunkte.

Im **fünften Beispiel** wird festgestellt, dass eine begrenzte Linie sich nicht nur aus unendlich vielen Punkten, sondern auch aus unendlich vielen Teil-Linien zusammensetzt. Um dies zu sehen, halbiere man eine Linie $A\Omega$ und nenne den Mittelpunkt B , dann halbiere man $B\Omega$ und nenne den Mittelpunkt C usw. Dieses Verfahren kann ohne Ende fortgesetzt werden.



Offenbar handelt es sich bei den unendlich vielen Linien AB , BC , CD , DE usw. um Teil-Linien, die sich zusammen mit dem Punkt Ω zur Gesamtlinie $A\Omega$ zusammensetzen.

Das **sechste Beispiel** ist das Zeit-Analogon zum fünften Beispiel und dürfte daher durch dieses schon hinreichend erklärt sein.

Das **siebte Beispiel** stellt uns die Aufgabe, genauer zu erklären, was Zahlen sind. Dieses Problem beschäftigt Philosophen und (philosophisch interessierte) Mathematiker bis heute.⁶⁶ Die moderne Mathematik sieht die Zahlen (ebenso wie Punkte in der Geometrie) als wesensmäßig nicht spezifizierte Objekte an, die bestimmte Axiome erfüllen. So gesehen wäre aber die Gesamtheit der Zahlen als Beispiel für die tatsächliche Existenz einer unendlichen Gesamtheit unbrauchbar. Um das Beispiel zu rechtfertigen, benötigen wir also eine reale Interpretation des Zahlenbegriffs. Eine bekannte und sehr einfache Interpretation der Zahlen ist ihre Deutung als Punkte auf der Zahlengeraden, durch welche ein unmittelbarer Bezug der Zahlen zur Geometrie hergestellt wird. Diese Interpretation hat aber auch Nachteile. Zum einen stellt sich sofort die – nicht kanonisch zu beantwortende – Frage, *welche* Gerade man als „die“ Zahlengerade ansehen will. Zum anderen ist es gerade eine Errungenschaft der modernen Mathematik, dass Zahlen *unabhängig* von der Geometrie und der geometrischen Anschauung eingeführt werden können und daher auch universeller einsetzbar sind. Eine den Ansprüchen der modernen Mathematik genügende Interpretation der Zahlen werde ich daher in Kap. 5 erörtern. Hier werde ich dagegen trotz der besagten Nachteile die (nach wie vor wichtige) geometrische Interpretation verwenden. Die folgenden Erörterungen über das Unendliche im Bereich der Zahl haben demnach unmittelbar geometrische Bedeutung, sind also letztlich als eine Fortführung und Präzisierung der Diskussion über das Unendliche im Raum zu verstehen.

2.3.4 Erklärung Eine *Zahlengerade* ist eine Gerade in einem Anschauungsraum, auf der zwei Punkte als *Nullpunkt* 0 bzw. *Einspunkt* 1 festgelegt sind, und die vollständig in gleichlange Strecken eingeteilt ist, derart dass 0 und 1 die Grenzpunkte einer dieser Strecken sind. Die Grenzpunk-

⁶⁶ Vgl. den Überblick über verschiedene Auffassungen bei FREGE, *Grundlagen der Arithmetik* § 18–28, Ausgabe Thiel S. 32–43. Siehe auch Abschnitt 5.33.

te dieser Strecken heißen *Ganzzahlpunkte* oder *ganze Zahlen* der Zahlengeraden. Wir wählen eine Zahlengerade fest aus und nennen sie die *Standard-Zahlengerade*.

Die Zahlensymbole $1, 2, 3, \dots$ sollen nun die Ganzzahlpunkte bezeichnen, die man von 0 aus in Richtung von 1 nacheinander erreicht. Diese ganzen Zahlen heißen *positiv*, die übrigen werden mit $-1, -2, -3$ usw. bezeichnet und heißen *negativ*. Als *natürliche Zahlen* bezeichnen wir die positiven ganzen Zahlen einschließlich der Zahl Null,⁶⁷ also die Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$.

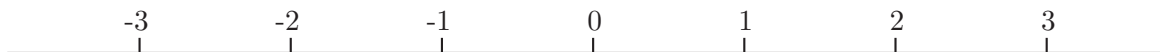


Abbildung 2.2: Zahlengerade

2.3.5 Erklärung Mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet man die Klasse⁶⁸ der ganzen Zahlen $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$, mit $\mathbb{N}$ diejenige der natürlichen Zahlen $(0, 1, 2, 3, \dots)$ und mit $\mathbb{N}^*$ diejenige der von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen $(1, 2, 3, \dots)$.⁶⁹

Da die Klasse der natürlichen Zahlen eine nicht endende Folge $0, 1, 2, \dots$ bildet, heißt sie mit Recht unendlich. Aus demselben Grund ist die Gesamtheit der negativen Zahlen $-1, -2, -3, \dots$ unendlich. Die Klasse $\mathbb{Z}$ umfasst demnach über die unendlich vielen natürlichen Zahlen hinaus noch unendlich viele weitere Zahlen und ist somit erst recht unendlich.⁷⁰ Die ganzen Zahlen bilden einen Teil einer noch umfassenderen Klasse, die man $\mathbb{Q}$ nennt:

2.3.6 Erklärung Die Klasse $\mathbb{Q}$ umfasst für jede von 0 verschiedene natürliche Zahl n und jede ganze Zahl m die so genannte Bruchzahl $\frac{m}{n}$ mit Zähler m und Nenner n .

Um diese *Bruchzahlen* (auch: *rationale Zahlen*, Quotienten) auf der Zahlengeraden zu lokalisieren, müssen wir also für jede natürliche Zahl n die unendlich vielen „ n -tel Zahlen“

$$\dots, \frac{-3}{n}, \frac{-2}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$$

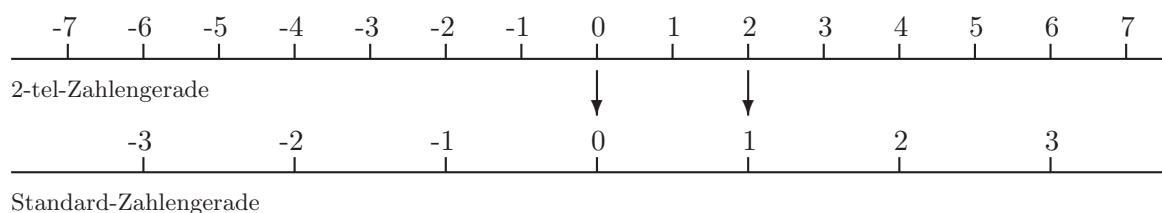
als Punkte definieren. Hierzu denke man sich eine neue Zahlengerade, die „ n -tel-Zahlengerade“, auf welcher die Strecke von 0 bis n so groß ist wie auf der Standard-Zahlengerade die Strecke von 0 bis 1, und lege sie derart auf die Standard-Zahlengerade, dass die Nullpunkte beider Zahlengeraden zusammenfallen und die 1 der Standard-Zahlengerade mit der Zahl n der n -tel-Zahlengerade koinzidiert. Im folgenden Bild ist dies für die 2-tel-Zahlengerade angedeutet:

⁶⁷ Die Mathematiker weichen in der Definition der natürlichen Zahlen voneinander dadurch ab, dass einige die Zahl 0 ausschließen, während andere sie einschließen. Die meisten Mengentheoretiker betrachten 0 als natürliche Zahl; diesen schließe ich mich an.

⁶⁸ Die genauere Erklärung des Klassen-Begriffs erfolgt später (siehe 5.2.9 S. 76). Hier genügt es, sich unter einer Klasse einfach eine „Gesamtheit“ (in der alltäglichen Bedeutung dieses Begriffs) vorzustellen.

⁶⁹ Mathematiker, welche die Null nicht als natürliche Zahl ansehen, bezeichnen mit $\mathbb{N}$ dagegen die Klasse der Zahlen $1, 2, 3, \dots$ (ohne 0). Für die Klasse der Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$ (mit 0) verwenden diese das Symbol $\mathbb{N}_0$.

⁷⁰ Hier springt die Problematik einer naiven Definition des Unendlichen als „das Grenzenlose“ ins Auge. Wenn das Unendliche das Grenzenlose ist, scheint die Klasse $\mathbb{N}$, weil sie durch weitere Zahlen ergänzt werden kann, nicht unendlich zu sein. Im diesem Sinn kann es nur eine einzige unendliche Gesamtheit geben: *die Gesamtheit von allem schlechthin*. Wäre es ein Ausweg, zu sagen, das Unendliche sei lediglich das „auf einem bestimmten Gebiet“ Grenzenlose? Dann könnte man die Klasse $\mathbb{N}$ als unendlich anerkennen, insofern sie „auf dem Gebiet“ der sich von 0 aus in Richtung von 1 erstreckenden Zahlenpunkte grenzenlos ist. Aber diese Auffassung vom Unendlichen hat mit einem neuen Einwand zu kämpfen. Es scheint nun *jede beliebige* Gesamtheit, z. B. auch die aus den Zahlen $1, 2, 3$ bestehende, unendlich zu sein: auf dem Gebiet der Zahlen von 1 bis 3 ist eben die aus $1, 2$ und 3 bestehende Gesamtheit grenzenlos, indem sie alles auf *diesem* Gebiet Bestehende uneingeschränkt umfasst. Wenn man also überhaupt mit dem Begriff der „Grenzenlosigkeit auf einem Gebiet“ arbeiten will, darf man nicht jedes beliebige Gebiet zulassen, sondern man sollte sich auf das Gebiet unserer konkret-anschaulichen Vorstellung beziehen. Während die Gesamtheit $1, 2, 3$ vollständig überschaubar ist, trifft dies auf die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen in einem prinzipiellen Sinn nicht mehr zu. – Dennoch ist diese Erklärung des Unendlichen vage, so dass für genauere Untersuchungen eine exakte Unendlichkeitsdefinition unumgänglich ist, wie sie schon in Abschnitt 2.1 vorläufig vorgestellt wurde und endgültig in Abschnitt 5.17 erörtert werden wird.



Die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ sei nun derjenige Punkt der Standard-Zahlengeraden, auf welchen in dieser Position die Zahl m der n -tel-Zahlengerade zu liegen kommt.

Man sieht nun sofort, dass (für jedes n) zwischen 0 und 1 die Bruchzahlen $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ liegen.⁷¹ Insgesamt liegen also zwischen 0 und 1 die unendlich vielen Zahlen

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \text{ usw. } ^{72}$$

Ferner ist klar, dass die 1-tel-Zahlengerade ein genaues Abbild der Standard-Zahlengerade ist, weshalb *alle ganzen Zahlen spezielle rationale Zahlen sind*: Die ganze Zahl m entspricht der Bruchzahl $\frac{m}{1}$. Die Klasse $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen stellt also eine Erweiterung der ganzen Zahlen dar. Es ist anschaulich klar, dass sich *selbst auf jeder noch so kleinen Strecke der Zahlengerade unendlich viele rationalen Zahlen befinden*. Daher scheint es auf den ersten Blick unglaublich zu sein, dass es außer den rationalen Zahlen auf der Zahlengerade noch weitere Punkte geben könnte, also solche, die von keiner Bruchzahl $\frac{m}{n}$ mit ganzzahligem m und natürlichzahligem n erfasst werden. Die ersten dieser sog. *irrationalen Zahlen* wurden von griechischen Mathematikern zur Zeit des PYTHAGORAS (um 500 v. Chr.) entdeckt.⁷³ Berühmte Beispiele sind die Zahlen $\sqrt{2}$ (die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat), die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π . So kann man die Punkte der Zahlengerade in rationale Zahlen und irrationale Zahlen einteilen. Zusammen heißen sie die *reellen Zahlen*:

2.3.7 Erklärung Mit $\mathbb{R}$ wird die Klasse *aller* Punkte der Standard-Zahlengeraden bezeichnet. Diese Punkte heißen *reelle Zahlen*, und zwar die rechts von 0 liegenden *positive* und die links von 0 liegenden *negative* reelle Zahlen. Eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist, heißt *irrational*.

Wie wir sehen werden, gibt es unendlich viele irrationale Zahlen:⁷⁴ Ähnlich wie beim Übergang von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ „unendlich viele“ negative ganze Zahlen hinzukommen, und beim Übergang von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ „unendlich viele“ Bruchzahlen, so muss man also auch $\mathbb{Q}$ wieder um „unendlich viele“ irrationale Zahlen ergänzen, um $\mathbb{R}$ zu erhalten. Dabei gibt es sogar „wesentlich mehr“ irrationale als rationale Zahlen.⁷⁵ Dies kann natürlich erst dann präzisiert und verifiziert werden, nachdem wir exakte Kriterien für den Größenvergleich unendlicher Klassen zur Hand haben werden.⁷⁶

Die **Beispiele 8–9** für Unendlichkeiten, die Gedanken, Dinge und Attribute betreffen, führen uns wieder von der Mathematik weg und stellen uns die Aufgabe, zu klären, was wir unter „Denken“ und „Sein“ verstehen. Das geschieht in den nächsten beiden Kapiteln 3 und 4.

⁷¹ $n - 1$ bezeichnet die ganze Zahl, die der Zahl n unmittelbar links benachbart ist.

⁷² Hier kommen manche Bruchzahlen mehrfach vor, z. B. ist $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Trotzdem sind es unendlich viele, da die Bruchzahlen derselben Zeile stets voneinander verschieden sind und die Zeilen immer länger werden.

⁷³ Siehe S. 59.

⁷⁴ Siehe Theorem 5.21.26 S. 276.

⁷⁵ Siehe Theorem 5.21.26 S. 276.

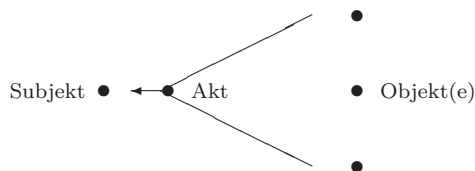
⁷⁶ Siehe Abschnitt 5.15.

3 Theorie des Denkens

Subjekt, Objekt und Akt des Erkennens

Beim *Erkennen* ist Folgendes auseinanderzuhalten:

1. das *Subjekt* des Erkennens (der Erkennende)
2. das *Objekt* oder die *Objekte* des Erkennens (das Erkannte)
3. der *Akt* des Erkennens (die Tätigkeit des Erkennens selbst)



Das *Subjekt* oder der Erkennende ist nicht das ganze *Lebewesen* mit seinem eventuell vielgliedrigen Körper, sondern der *Ausgangspunkt* des Erkenntnisaktes (und damit zusammenhängender anderer Akte). Gemeint ist das erkennende *Zentrum* des Lebewesens, das wir auch seine *Seele* oder sein *Ich* nennen können.¹

Thematisches und unthematisches Erkennen

Wenn ich etwas erkenne, nehme ich nebenbei immer noch etwas anderes wahr: den Akt des Erkennens und damit verbunden auch mich selbst (d. h. ich habe mehr oder weniger stark das *Bewusstsein*, zu erkennen und zu sein). Dieses das Erkennen des eigentlichen Objekts begleitende Erkennen heißt *unthematisches* Erkennen, im Gegensatz zu dem Erfassen des eigentlich erkannten Objekts, welches *thematisches* Erkennen heißt.² Außer dem Ich und seinem Erkenntnisakt können beim Erkennen auch andere Objekte auf unthematische Weise miterkannt werden. Wenn man im alltäglichen Leben mit „etwas“ beschäftigt ist, so ist sowohl dieses Etwas als auch das darauf bezogene Tun meist nur unthematisch gegeben und wird erst durch einen eigenen Akt des Aufmerkens zum thematischen Objekt. Man kann also das Gesamtobjekt immer in zwei Teile aufteilen: das thematisch erkannte, eigentliche *Hauptobjekt* und das unthematisch miterkannte *Nebenobjekt*.

¹ Vgl. auch Abschnitt 10.1. Nach der Lehre des THOMAS VON AQUIN umfasst das Ich des Menschen neben der Seele auch seine Körpermaterie wesensmäßig. Auf diese mit den diffizilen Fragen der Individuationstheorie zusammenhängende Schlussfolgerung sei hier nicht weiter eingegangen. Ihre Berechtigung vorausgesetzt, könnte man dennoch die Seele als den für das Selbstbewusstsein ausschlaggebenden, höheren Teil des Ich ansehen und im Sinne einer *nominatio partis nobilior pro toto* als Ich bezeichnen.

² Die Unterscheidung zwischen unthematisch und thematisch Erkanntem taucht schon bei HUSSERL auf (vgl. HUSSERL, *Ideen* § 31 S. 51) und wurde von HEIDEGGER übernommen, der unter der „Thematisierung“ eine Objektivierung versteht („Thematisierung objektiviert“) in dem Sinn, dass sich thematisierte Seiende „dem rein Entdecken ‚entgegenwerfen‘“. (HEIDEGGER, *Sein und Zeit* § 69 S. 363). Auch Dietrich VON HILDEBRAND griff diesen Begriff auf und sprach von verschiedenen Stufen der „Thematisität“ (HILDEBRAND, *Philosophy* S. 50–51).

Sinnliches und geistiges Erkennen oder Denken

Akte des Sehens, Hörens, Riechens, Schmeckens und Tastens sind deutlich voneinander verschiedene Arten des Erkennens. Sie unterscheiden sich dadurch, dass sie jeweils nur auf Objekte bestimmter Art zielen können (nämlich das Sichtbare, das Hörbare usw.) und noch „handgreiflicher“ dadurch, dass sie durch verschiedene Organe vermittelt werden. Sie haben aber die gemeinsame Eigenschaft, dass man mittels dieser Akte nicht *reflektieren*, d. h. das Erkennen als solches thematisch erkennen kann. Diese Unfähigkeit zur Reflexion ist, wie wir im Anschluss an LOCKE sagen können, charakteristisch für das so genannte *sinnliche Erkennen*.³

Im Gegensatz zu den sinnlichen Erkenntnisakten steht eine andere Art des Erkennens, das *geistige Erkennen* (auch *Verstehen* oder *Denken* genannt).⁴ Mit einem Akt geistigen Erkennens kann man das Erkennen als solches (insbesondere das eigene Erkennen und damit auch das eigene Selbst) thematisch erkennen, und daher auch wenigstens abstrakt *Erkenntnisakte jeder Art betrachten*. Aus diesem Grund kann sich ein Akt geistigen Erkennens schließlich auch auf alle Objekte richten, auf die sich andere Erkenntnisakte richten können, so dass *alles Erkennbare im Prinzip auch geistig erkennbar* (denkbar) ist, also das Denken unter allen Formen des Erkennens den größten Gegenstandsbereich hat.

Weil ein Subjekt, das geistig erkennen kann, sich selbst thematisch erkennen kann, sagt man, dass es ein *Selbstbewusstsein* oder *Ich-Bewusstsein* hat. Dagegen kann ein Subjekt, das nur sinnlich erkennen kann, sich nur unthematisch erkennen. Es hat ein *Bewusstsein*, das kein Selbstbewusstsein oder persönliches Ich-Bewusstsein im eigentlichen Sinn ist.⁵

Reflexion und fortgesetztes Erkennen des Erkennens.

Aus dem Vorhergehenden ergab sich: Ein geistig erkennendes Subjekt kann reflektieren, d. h. seinen Erkenntnisakt thematisch auf den eigenen Erkenntnisprozess richten: Ist E mein Erkenntnisakt, kann ich im reflektierenden Erkennen E selbst thematisch erkennen, wobei ich mich dazu allerdings eines *anderen* Erkenntnisaktes E' bedienen muss, dessen ich mir nur unthematisch bewusst bin, und der daher von E verschieden ist. Doch auch dem Erkenntnisakt E' kann ich mich wieder thematisch zuwenden, was durch einen dritten Erkenntnisakt E'' geschehen muss, der von E und E' verschieden ist usw. Für die sich so ergebende endlose Kette von Erkenntnisakten

$$E, E', E'', E''', \dots$$

gilt, dass der Inhalt jedes folgenden Erkenntnisaktes in dem jeweils vorhergehenden Erkenntnisakt besteht, während kein Erkenntnisakt einen der folgenden beinhaltet. Nun kann ich aber diese bereits „unendliche“ Kette der fortgesetzten Reflexionen noch weiter verlängern, was man eine „Verlängerung ins Transfinite“ nennt.⁶ Denn ich kann offenbar durch einen neuen Erkenntnisakt E_ω die ganze vorgenannte endlose Kette von Erkenntnisakten thematisch anschauen. Und diesen Erkenntnisakt E_ω erkenne ich thematisch abermals durch einen neuen Erkenntnisakt E'_ω , so dass sich ein neuer endloser „Kettenabschnitt“ von Erkenntnisakten

$$E_\omega, E'_\omega, E''_\omega, \dots$$

³ Für LOCKE sind „sensation“ und „reflexion“ die beiden wesentlichen Erkenntnisarten (siehe Abschnitt 8.11.6).

⁴ Im engeren Sinn ist Verstehen und Denken zu unterscheiden: Verstehen ist ein einfacher Akt geistigen Erkennens, Denken ist ein auf einem Akt des Verstehens aufbauender Akt, nämlich das Erfassen eines „weiterführenden“ Zusammenhangs, der ein Fortschreiten von einem Akt des Verstehens zum nächsten ermöglicht.

⁵ Man könnte von einem unterpersönlichen *Es-Bewusstsein* sprechen.

⁶ Dies hat auch der Philosoph und Logiker Gotthard GÜNTHER (1900–1984) gesehen, der jedoch im Gegensatz zur hier vorgestellten Konzeption nach der unendlichen Kette von Reflexionen nur noch eine einzige, letzte Reflexionsstufe der „totalen Selbstreflexion“ ansetzt (GÜNTHER, *Metaphysik* S. 19–43).

auftut, an den ich, sobald ich ihn als solchen erkenne, sogleich einen neuen endlosen Kettenabschnitt anhängen kann usw. Diese Überlegungen bekräftigen den Unendlichkeitsbeweis DEDEKINDS (siehe S. 18–19) und bauen ihn aus: Die Struktur des menschlichen Erkennens impliziert nicht nur eine einzige unendliche Kette, sondern unendlich viele solcher Ketten, und macht es *prinzipiell unmöglich*, die Gesamtheit *aller* möglichen Erkenntnisakte in einem einzigen Erkenntnisakt zu überschauen. Denn immer, wenn wir meinen, diese Gesamtheit mit einem Erkenntnisakt X in den Blick zu nehmen, fehlt in diesem Überblick X selbst, so dass die Gesamtheit nicht vollständig war. Es folgt also, dass die in unserem **achten Beispiel** genannte *Gesamtheit aller möglichen Erkenntnisakte* bzw. *aller möglichen Gedanken* nicht nur unendlich ist, sondern auf einer unvorstellbar hohen Stufe der Unendlichkeit liegt, indem sie nämlich völlig unüberschaubar und eigentlich unerkennbar zu sein scheint. Andererseits sprechen wir gerade eben über diese Gesamtheit und haben sie dann also doch irgendwie im Blick. Wir können aber auf diese Gesamtheit offenbar nur auf eine analoge Weise, nämlich unthematisch, nicht aber im eigentlichen Sinn (thematisch) hinschauen.

Die wesentliche Voraussetzung für diese Überlegungen ist, dass man einen Erkenntnisakt A immer nur durch einen *anderen* Erkenntnisakt B thematisch betrachten kann, nicht durch A selbst. Dies liegt an der Struktur menschlichen Erkennens, die SCHELLING in seinem *System des transzendentalen Idealismus* analysiert hat: „das Ich kann nicht zugleich anschauen und sich anschauen als anschauend“.⁷

Übermenschliche Formen des Denkens

Wenn es einen widerspruchsfreien Erkenntnisakt Ω gibt, zu dessen thematischem Objekt *alles Erkennbare* gehört, so müsste auch Ω selbst zum thematischen Objekt von Ω hinzugehören und deshalb *rein thematisch* sein. Ein solcher Erkenntnisakt (wie man ihn, falls er widerspruchsfrei möglich ist, einem allwissenden Gott zuschreiben muss), wäre also nicht nur in Bezug auf den Umfang, sondern schon von seiner Struktur her völlig andersartig als die Erkenntnisakte, die wir selbst vollziehen. Bei einem solchen übermenschlichen, rein thematischen Akt des Erkennens wäre daher die Argumentation des vorhergehenden Abschnitts, wonach stets mindestens ein Objekt außerhalb des thematischen Gesichtskreises stehen muss (nämlich der Akt selbst) nicht mehr stichhaltig, und es scheint, dass ein mit rein thematischem Denken ausgestattetes Wesen auch jegliches Unendliche vollkommen klar und deutlich erkennen könnte. Dies ist zu beachten, wenn man die Worterklärung des erkenntnismäßig nicht Begrenzbaren präzisieren will: Man muss sich dabei explizit auf Formen „unseres Denkens“ beziehen.

Denkformen

Wenn zum Inhalt eines Erkenntnisaktes A ein anderer Erkenntnisakt B gehört, so gehört der Inhalt von B auch zum Inhalt von A , d. h. A beinhaltet dann *vermittelt durch B* auch all das, was B beinhaltet. Ich nenne nun Inhalte, die A *nur* auf vermittelte Weise beinhaltet, *indirekte* Inhalte von A . Dagegen sollen Inhalte, die A entweder *ganz ohne* oder jedenfalls *nicht nur* durch Vermittlung anderer Akte beinhaltet, *direkte* Inhalte von A heißen.⁸

Für spätere Zwecke (Einführung eines realen Modells der Mengenlehre) benötigen wir nun eine Gesamtheit von momentanen (d. h. in einem Augenblick vollzogenen, nicht aus sukzessiven Akten zusammengesetzten) Erkenntnisakten mit der Eigenschaft, dass keine zwei verschiedenen Erkennt-

⁷ SCHELLING, *Idealismus* S. 106, Ausgabe Brandt/Müller S. 72.

⁸ Man beachte, dass ein direkter Inhalt von A unter Umständen *zugleich* durch einen anderen Akt B vermittelt sein kann: A sei z. B. ein Vorstellungsakt, durch den man sich einen Baum vorstellt und *daneben* einen Menschen, der den Baum anschaut, also einen Erkenntnisakt B ausübt, dessen Inhalt derselbe Baum ist. Dann kommt der Inhalt „Baum“ in dem Erkenntnisakt A sowohl direkt als auch durch B vermittelt vor.

nisakte genau denselben direkten Inhalt haben. Hierzu müssen spezielle Erkenntnisakte ausgewählt werden. Im Allgemeinen können nämlich verschiedene Erkenntnisakte denselben thematischen Inhalt auch direkt beinhalten. Das kann zunächst daran liegen, dass der *unthematische Hintergrund* beider Akte verschieden ist, oder daran, dass ein verschiedener *Subjektbezug* vorliegt (indem beide Akte von verschiedenen Subjekten oder vom selben Subjekt zu verschiedenen Zeiten vollzogen werden), oder daran, dass beide Akte durch verschiedene *Vermögen* des Subjekts ausgeübt werden (indem der eine z. B. ein sinnlicher Akt des Sehens, der andere ein geistiger Akt des Nachdenkens über das Gesehene ist). Doch können wir versuchen, bei der Betrachtung eines konkreten Erkenntnisaktes von seinem Verwurzelte sein in einem unthematischen Hintergrund, in einem Subjekt und einem bestimmten Vermögen abzusehen (zu abstrahieren), und erhalten, wenn uns diese Abstraktion gelingt,⁹ einen subjektlosen, zeitlosen und vermögensunabhängigen rein thematischen Erkenntnisakt. Genauer gesagt erhalten wir so die abstrakte „Form“ eines möglichen konkreten Erkenntnisaktes, die auch dann besteht, wenn der Akt von keinem konkreten Vermögen eines Subjekts ausgeübt wird. Solche „entwurzelten“ abstrakten Erkenntnisakte sind nicht zu verwechseln mit den im vorhergehenden Abschnitt spekulativ betrachteten übermenschlichen Erkenntnisakten, die schon auf der konkreten Ebene rein thematisch sind.

Betrachten wir nun zwei Erkenntnisakte mit demselben direkten Inhalt, die dem eben beschriebenen Abstraktionsniveau angehören, so können diese immer noch verschieden sein durch ihr Geprägtsein von nicht-inhaltlichen Merkmalen. Denn zum einen kann der Erkenntnisakt untrennbar mit Einstellungen (Absichten, Stimmungen) verwoben sein: dann werden die zum Inhalt gehörigen Objekte in bestimmter Weise angezielt (gewollt, erhofft, bestaunt, bezweifelt, gefürchtet, beurteilt, ausgesagt, befragt usw.). Ob wir überhaupt einen „neutralen“ Erkenntnisakt *ohne* solche Einstellungen ausüben können, ist zweifelhaft. Wahrscheinlich hat HEIDEGGER recht: „Verstehen ist immer gestimmtes“.¹⁰ Aber es kann möglicherweise gelingen, einen abstrakten Erkenntnisakt von solchen Gestimmtheiten zu reinigen, indem wir diese (durch weitere Abstraktion) einfach ausblenden. Zum anderen können sich die Erkenntnisakte gleichen direkten Inhalts auch durch die Art und Weise der Präsentation des Inhalts unterscheiden: Die Objekte können nämlich nicht nur anschaulich präsentiert werden, bisweilen steht uns vielmehr nur ein natürliches Symbol der Objekte anschaulich vor Augen, mittels dessen eine vermittelte Kenntnisnahme der Objekte stattfindet (imaginative Vermittlung).¹¹ Oder es ist anschaulich nur das Schriftbild eines Wortes oder auch einer komplizierten Beschreibung gegeben, wodurch wir eine vage Vorstellung der beschriebenen Objekts erlangen (signitive Vermittlung).¹² Gelingt es schließlich, auch von allen diesen nicht-inhaltlichen Merkmalen zu abstrahieren, so erhalten wir ein noch tieferes Abstraktionsniveau als zuvor, und auf diesem Niveau dürfte es gar keine zwei verschiedenen Erkenntnisakte mehr geben, die denselben direkten Inhalt haben. Für diese Erkenntnisakte schlage den Namen *Denkformen* vor:

Denkformen sind also Erkenntnisakte, die durch Abstraktion aus einem momentanen Denkakt (der uns bekannten Art) hervorgehen können, wobei von Subjekt, Zeit, Vermögen, Hintergrund, Einstellungen und Präsentationsweisen abstrahiert wird, so dass keine zwei Denkformen genau denselben direkten Inhalt haben.

⁹ Dies muss nicht immer der Fall sein, denn es kann ja Inhalte geben, die so tief in einem Subjekt verwurzelt sind, dass sie sich daraus nicht lösen lassen.

¹⁰ HEIDEGGER, *Sein und Zeit* S. 142.

¹¹ So vermittelt uns zum Beispiel eine direkt angeschaute farbige Oberfläche indirekt die Kenntnis von der Vielheit aller auf ihr befindlichen Punkte.

¹² Auf diese Weise betrachtet man die meisten Objekte der abstrakten Mathematik. Zur signitiv und imaginativ vermittelten Wahrnehmung vgl. HUSSERL, *Ideen* § 43 S. 79.

4 Theorie der Objekte oder Ontologie

Da es nichts Allgemeineres gibt als das Seiende, kann das Seiende nicht durch Rückgriff auf etwas Allgemeineres definiert, sondern nur durch Zuordnung zu einem genauso Allgemeinen (nämlich zum Denken) und durch Einteilung erläutert werden. Die geschieht im folgenden Abschnitt. Im zweiten Abschnitt werden die „transzendentalen Gegebenheiten“ welche das Seiende als solches (und darum alle Seiende) betreffen, untersucht.

4.1 Definition und Klassifikation des Seienden

Ein *Seiendes* (synonym: *Objekt*, *Gegenstand*, *Gegebenheit*, *Sache*, *Daseiendes*, *Vorhandenes*) ist etwas *Denkbares*, das heißt ein dem denkenden Betrachter gegenüberstehen Könnendes.¹ Dagegen wird man vielleicht einwenden, es sei nicht einzusehen, weshalb es nicht auch „undenkbare“ Seiende geben könnte. Wäre der Ausschluss solcher Objekte nicht eine maßlose Überschätzung des (oder gar unseres) Denkens? Dieser Einwand verliert seine Plausibilität, wenn man sich klar macht, dass man nicht nur das Begreifbare und Widerspruchsfreie, sondern auch das Widersprüchliche denken kann. Hierzu gehört z. B. auch das „Nichts“ und selbst das „Undenkbare“, und somit wirklich alles. Widersprüchliche Objekte wie etwa das „runde Viereck“ sind anscheinend immer dann unserem Denken gegeben, wenn wir ein Urteil bilden wie: „Dieses x ist ein widersprüchliches Objekt“. Denn wenn dieser Satz etwas Wahres aussagt, sollte auch etwas gegeben sein, über das etwas ausgesagt wird: eben das widersprüchliche Objekt.² Ein wichtiges Beispiel für ein widersprüchliches Objekt ist auch das Nichts; in einer wirklich umfassenden Seinskonzeption ist es unumgänglich, auch das Nichts zum „Seienden“ zu rechnen. Denn auch das „Nichts“ erlangt ja offenbar, insofern wir darüber nachdenken, ein – wenn auch widersprüchliches – „Dasein“ in unserem Denken. Und selbst „unerkennbare Objekte jenseits alles Denkbaren“ (definiert als Gegenstände, die vollkommen unerkennbar sind), erscheinen im Widerspruch zu ihrer Definition im Denken, andernfalls würden wir gar nicht über sie diskutieren können. Schon in der Frage: „Gibt es Gegenstände, die niemand denken kann?“ lenken

¹ Dieses „Prinzip universaler Intelligibilität“ hat bereits THOMAS VON AQUIN ausgesprochen: „quidquid enim esse potest, intelligi potest“ (*Summa Theologiae* Buch 2 cap. 98 nr. 9, Ausgabe Busa S. 59c). Die „Denkbarkeit“ ist auch nach dem Logiker Gotthard GÜNTHER für die klassische Logik das erste metaphysische Akzidens des Seins (vgl. GÜNTHER, *Metaphysik* S. 8).

² Diese Argumentation wurde am pointiertesten von Alexius MEINONG (siehe S. 631) in seiner *Gegenstandstheorie* (1904) vorgelegt. Ihr stellte Bertrand RUSSELL in seinem Artikel *On Denoting* (1905) die These entgegen, Sätze wie „Das runde Quadrat ist rund“ seien nicht sowohl wahr und falsch, sondern eindeutig falsch, denn sie seien zu verstehen als „Es gibt eine und nur eine Entität x , die rund und quadratisch ist, und diese Entität ist rund“ (RUSSELL, *Denoting*, Ausgabe Marsh S. 54, Ausgabe Wiehl S. 286). Ausdrücke wie „das runde Quadrat“ bezeichnen nach dieser Interpretation gar nichts, und die damit gebildeten Sätze haben nur *kontextbezogen* einen Sinn. Lange Zeit war man überwiegend der Meinung, dass MEINONG durch RUSSELL endgültig widerlegt worden sei. Seit etwa 1960 ist jedoch die Diskussion darüber, wer von beiden, RUSSELL oder MEINONG, die tiefere Einsicht besessen hat, wieder in vollem Gang; besonders von Roderick CHISHOLM (1916–1999) wurde MEINONG verteidigt (vgl. z. B. CHISHOLM, *Beyond Being* und CHISHOLM, *Meinong*). Eine „Meinong-Semantik“ scheint neben RUSSELLS Deutung ebenso annehmbar und zudem natürlicher zu sein (vgl. hierzu Josef WEHRLES Einleitung zu MEINONG, *Gegenstandstheorie* S. VIII–XXI). Denn die Existenzprämisse, die RUSSELL Sätzen wie „das runde Quadrat ist rund“ vorschaltet, scheint insofern willkürlich zu sein, als damit nicht genau das wiedergegeben wird, was der schlichte Satz, so wie er gewöhnlich formuliert wird, ausdrücken will. Zur realistischen Deutung der Impossibilia siehe auch Abschnitt 4.2 und die Überlegungen zur Bedeutung bestimmter Impossibilia auf S. 97.

wir ja bereits unsere Gedanken auf diese Gegenstände hin, „geben“ sie unseren Denken vor und zwingen sie so, zu Denk-Objekten zu werden, die gerade dadurch, dass sie gedacht werden, ihren widersprüchlichen Charakter offenbaren. Da das Denken somit die erstaunliche Eigenschaft hat, sich sogar das Udenkbare zum Objekt zu machen, kann es wirklich nichts Umfassenderes geben als das Denkbare in jenem weitesten Sinn, der auch das Udenkbare mit einschließt. So besteht also eine vollkommene Kongruenz zwischen Denken und Sein, welche die Gleichsetzung des Seienden mit dem Denkbaren rechtfertigt.

Die grundlegenden Klassen des Seienden sind nun meines Erachtens folgende:

1. **Aktualitäten** (wirkliche Objekte)
 - a) Substanzen
 - i. rein geistige Personen
 - ii. materiell-geistige Personen
 - iii. unpersönliche Bewusstseinswesen
 - iv. unbewusste Lebewesen
 - v. unbelebte Substanzen
 - b) wahre Sachverhalte
 - c) Attribute wirklicher Objekte
 - d) Universen und ihre Punkte
2. **pure Possibilien** (rein mögliche, widerspruchsfreie Objekte)
 - a) Fiktionen
 - b) Begriffe
3. **Impossibilien** (unmögliche, widersprüchliche Objekte)

Wie wir sehen werden, sind in diesem Schema die Klassen nach ihrer „Seinsmacht“ oder „Realität“ geordnet, wobei die Seinsmacht von unten nach oben hin zunimmt. Somit handelt es sich bei diesen Klassen zugleich um *Seins-Stufen*.³ Im Folgenden werden diese Stufen von unten nach oben, also beginnend mit der Stufe der Impossibilien, im Einzelnen erläutert.

³ Da die Klassen Seiende enthalten, die von ihrem Wesen her verschieden sind, aber dennoch gemeinsam haben, dass ihnen eine mehr oder weniger starke Seinsmacht innewohnt, kann man das hier vorgestellte ontologische System einen *Wesens-Pluralismus* bei gleichzeitigem *Seins-Monismus* nennen. Letztere Bezeichnung ist umso mehr gerechtfertigt, als das Sein (d. h. die Seinsmacht) allen Seienden im gleichen Sinne zuzukommen scheint, wenn auch in verschiedenem Maße (bei Gott beispielsweise, wie wir auf S. 764–765 sehen werden, im absolut unendlichem Maß), so dass man im Sinne von Duns SCOTUS sagen kann, der Seinsbegriff sei *univok* (siehe S. 162 mit Fußnote 415). Unser System unterscheidet sich also sowohl vom radikalen ontologischen Dualismus bzw. Pluralismus (der zwei bzw. mehr verschiedene Klassen von Seienden anerkennt, aber ihre Gemeinsamkeit im Sein nicht beachtet) als auch vom radikalen ontologischen Monismus (der keine objektiv bestehenden Wesensunterschiede zwischen den Seienden zulässt). Der hier zurückgewiesene *radikale ontologische* Dualismus sollte im Übrigen weder mit dem ebenfalls abzulehnenden *theologischen* Dualismus (siehe S. 677) noch mit dem durchaus plausiblen Dualismus *in der Philosophie des Geistes* (siehe Fußnoten 19 auf S. 779 und 27 auf S. 781) verwechselt werden.

4.2 Impossibilien

Die Impossibilien sind die auf S. 28–29 schon erwähnten widersprüchlichen Objekte, darunter das runde Viereck, das Nichts und das Undenkbare. Sie entstehen dadurch, dass nicht zusammenpassende, sich ausschließende Bestimmungen gewaltsam „zusammengedacht“ werden, was am klassischen Beispiel des runden Vierecks besonders deutlich wird.

Da diese Gegenstände nicht „von selbst“ zusammenstehen können, muss ihnen die Existenz (denk-unabhängiges Zusammenstehenkönnen) und erst recht die Wirklichkeit (denk-unabhängiges Wirken) abgesprochen werden. Man bezeichnet sie daher mit Recht als *unwirklich*, *nicht-existent*, und – das ist die stärkste Charakterisierung – *unmöglich*. Mit der scholastischen Philosophie spreche ich daher von *Impossibilien* (unmöglichen Objekten).

Wie ist das Verhältnis der Impossibilien zur Realität? *Realität* kann man mit Selbständigkeit und Unabhängigkeit umschreiben, *Realität im engeren Sinne* ist Selbständigkeit und Unabhängigkeit *gegenüber dem Denken* und steht der *Idealität* gegenüber, welche als Denk-Abhängigkeit bestimmt ist. Da etwas mehr oder weniger stark selbständig sein kann, sind diese Begriffe steigerungsfähig: Realität hat verschiedene Grade, wobei Grade zunehmender Realität Graden abnehmender Idealität entsprechen. Um zu betonen, dass *Realität* eine mit steigerungsfähiger Intensität versehene Größe ist, spreche ich auch von *Seinsmächtigkeit*.

Offenbar stehen Impossibilien auf der untersten Stufe der Seinsmächtigkeit oder Realität. Ich behaupte aber, dass ihre Seinsmächtigkeit nicht gleich Null ist, also ein minimales Maß von Denk-Unabhängigkeit auch hier gegeben ist. Denn Impossibilien sind nicht in jeder Beziehung reine Produkte des Denkens. Der Anteil des Denkens bei der Setzung der Impossibilien besteht darin, widersprüchliche Bestimmungen zusammenzusetzen, aber das „Ausgangsmaterial“ hierzu (z. B. „rund“ und „Viereck“ als Elemente des runden Vierecks, oder „nicht“ und „Sein“ als Elemente des Nichts = des nicht Seienden), sind dem Denken vorgegebene Elemente, werden also von ihm nicht produziert, sondern entdeckt. Ein widersprüchliches Seiendes ist also zwar *in seiner Konstitution* vollkommen vom Denken abhängig – d. h. die Zusammensetzung als solche kann nur im Denken vorkommen –, aber ungeachtet dessen ist es wie jedes Seiende *fundamentaliter*, d. h. in den Bestandteilen seiner Zusammensetzung, denk-unabhängig.

4.3 Pure Possibilien

4.3.1 Possibilien

Alle Objekte, die nicht widersprüchlich sind, heißen *widerspruchsfreie* oder *mögliche Objekte* oder *Possibilien*. Die Possibilien stehen auf einer höheren Stufe der Realität als die Impossibilien, weil sie nicht nur *fundamentaliter* (in den Bestandteilen der Zusammensetzung), sondern auch *konstitutionsmäßig* (bezüglich der ganzen Zusammensetzung) denk-unabhängig sind. Denn insofern unser Denken die „Kraft“, welche die Bestimmungen des rein möglichen Objekts zusammenhält (nämlich die Widerspruchslosigkeit) in keiner Weise *produziert* oder *erfindet*, sondern *entdeckt*, können wir auch sagen, dass wir die möglichen Objekte „im Reich der Möglichkeiten als dort feststehende Gegebenheiten als Ganzes vorfinden oder entdecken“. Die Denkunabhängigkeit der möglichen Objekte geht so weit, dass sie zweifellos im erwähnten Reich der Möglichkeit *weiterhin sein würden, wenn niemand an sie denken würde*: Denn konstitutiv für sie als Möglichkeiten ist bloß, widerspruchsfrei *gedacht werden zu können* (nicht, tatsächlich *gedacht zu werden*). Bedenkt man dies, so muss man allen Possibilien *Existenz* zuschreiben, insofern dieses Wort ein „Dasein außerhalb des tatsächlichen Denkens“ bezeichnet.

An dieser Stelle gilt es, dem skeptischen Haupteinwand gegen jede realistische Philosophie zu begegnen: Wenn das Seiende das Denkbare ist, ist es dann überhaupt möglich, dass ein Seiendes in nicht-widersprüchlicher Weise außerhalb des Denkens – unabhängig von ihm – auftritt? Als Antwort kann man darauf verweisen, dass wir unser Ich und dessen Denken selbst denkend betrachten und von anderem unterscheiden können, also offensichtlich aus uns selbst und unserem Denken gewissermaßen „heraustreten können“. *Wie* das möglich ist, bleibt zwar rätselhaft, aber die Tatsache, *dass* es möglich ist, scheint gerade eines der charakteristischen Merkmale zu sein, wodurch sich denkende Wesen von nicht-denkenden, aber dennoch erkennenden Wesen unterscheiden. Es ist also zwar nicht auf widerspruchsfreie Weise möglich, etwas zu denken, was kein Gegenstand des Denkens ist, wohl aber können wir unter Umständen einen *im* Denken vorgefundenen Gegenstand erkennen *als* von außen kommend, *als* mehr oder weniger denk-unabhängig. Und wie wir gesehen haben, ist sogar alles Seiende mehr oder weniger vom Denken unabhängig in dem Sinne, dass es nicht vollständig vom Denken produziert ist.

Die Possibilien kann man grundlegend einteilen in solche, die *wirklich* sind, d. h. *wirken*, und solche, die nicht wirken und daher als *unwirklich* bezeichnet werden können. Erstere heißen *Aktualitäten* oder Wirklichkeiten, letztere *pure Possibilien* oder reine Möglichkeiten. Einige charakteristische Beispiele für Aktualitäten sind in der Vergangenheit, Gegenwart oder Zukunft handelnde Personen und ebenso dort auftretende Körper, außerdem deren Eigenschaften und wirklich bestehende Sachverhalte. Beispiele für pure Possibilien wären einerseits Begriffe wie die Farbe „rot an sich“ und andererseits Fiktionen wie z. B. erdachte Personen und Körper, erdachte Eigenschaften und „kontingent falsche Sachverhalte“: Sachverhalte, die in Wirklichkeit zwar nicht bestehen, aber hätten bestehen können.

Um den Unterschied zwischen Aktualitäten und puren Possibilien besser zu verstehen, müsste man versuchen zu erklären, was Wirken bedeutet. *Wirken* (synonym: Tätigkeit, Aktivität) ist aber wie das Sein selbst eine *Grundgegebenheit*, ein *Urphänomen*, das man nicht vollständig auf anderes zurückführen kann. Derartige Phänomene können grundsätzlich nur erklärt werden durch Anleitungen, in welcher Richtung man zu suchen hat, um die Gegebenheit selbst wahrzunehmen; eine solche Anleitung kann etwa in der Angabe von Synonymen, Beispielen und Gegenbeispielen bestehen. In diesem Sinne kann man erklären, dass das Wirken (synonym: tätig sein, aktiv sein) darin besteht, dass das Objekt in einen höheren (kräftigen, entfalteten, bedeutsamen, Gültigkeit und Anerkennung fordernden) Seinsmodus eintritt oder in einem solchen Seinsmodus verharrt. Das Gegenteil besteht in der „kraftlosen“ Existenz, die wir unwirklichen Seienden zuschreiben. Wirken kann auch dadurch beschrieben werden, dass der Wirkende das Sein nicht nur „hat“, sondern in irgendeiner

Form auch „gibt“ (z. B. indem es das Sein sich selbst oder anderen Objekten zu erkennen oder zu spüren gibt). Beispiele für das Wirken von *Körpern* wären Äußerungen der eigenen Macht im Beeinflussen anderer Körper, indem diese z. B. beschleunigt, erwärmt, zerteilt werden usw. Beispiele für das Wirken von *Personen* wären ihr Denken und Wollen. *Eigenschaften* von Personen und Körpern wirken, indem sie andere Eigenschaften hervorrufen oder den Eigenschaftsträger erkenntlich machen (Farben machen die gefärbten Gegenstände gegenüber sinnlich erkennenden Subjekten kenntlich, Taten offenbaren den Charakter der wirkenden Person usw.), *Sachverhalte* wirken schließlich, indem sie andere Sachverhalte ermöglichen oder hervorrufen.

Nicht nur die Aktualitäten, sondern alle Objekte überhaupt haben einen wesentlichen Bezug zur Wirklichkeit (zum Wirken), aber der Unterschied ist, dass die Aktualitäten *selbst* wirken können, während die übrigen Objekte mit der Wirklichkeit nur dadurch in Berührung kommen können, dass sie als Objekte des Erkennens auftreten, so dass sie *passiv durch das Wirken* anderer Objekte (nämlich durch deren Erkennen) in einen entfalteten Seinsmodus gebracht werden, denn durch dieses Erkennen werden sie gewissermaßen „hervorgerufen“ und zur Geltung gebracht.⁴ Für jedes Objekt gibt es also ein grundlegendes „Dasein“ und einen höheren Modus der Seinsentfaltung, wobei die einen Objekte (nämlich die Impossibilia und puren Possibilia) nur dadurch in ihren höheren Seinsmodus gelangen, dass sie von *anderen* erkannt werden, während die Aktualitäten *sich von sich aus entfalten* können, was man „Wirken“ nennt. Wirken ist daher dasselbe wie *aktive* Seinsentfaltung oder Selbstentfaltung.

Kehren wir nun zu den *puren* Possibilia zurück. Diese werden, wie wir sahen, durch Denkak- te „hervorgerufen“. Dies geschieht nun entweder analytisch (d. h. indem Attribute eines schon vorhandenen Objekts isoliert betrachtet werden) oder synthetisch (d. h. indem ein Objekt durch Zusammenstellung anderer Objekte konstruiert wird). Im ersten Fall spreche ich von einem *Begriff* (oder einer *Idee*), im zweiten von einer *Fiktion*, so dass sich pure Possibilia in Begriffe und Fiktionen einteilen lassen. Zur genaueren Erklärung der Begriffe und Fiktionen sind nun allerdings einige Vorüberlegungen notwendig, die im nächsten Abschnitt erfolgen.

4.3.2 Attribute eines Seienden

Ein *konkretes Attribut* (synonym: konkretes Prädikat) eines Objekts *X* kann man definieren als ein Objekt *A*, für welches der Satz «(dieses bestimmte) *X* ist (dieses bestimmte) *A*» einen wahren Sachverhalt beschreibt.⁵ Man betrachte folgende Beispiele:

- (0) Sokrates ist Sokrates,
- (1) Sokrates ist (dieser) Mensch,
- (2) Sokrates ist (dieses) Lebewesen,
- (3) Sokrates ist (dieses) vernunftbegabt(e Seiende),
- (4) Sokrates ist (dieses) am Tag *T* nachdenkend(e Seiende),
- (5) Sokrates ist (dieses) während seiner Dialoge umhergehend(e Seiende),
- (6) Sokrates ist (dieses) von Platon verschieden(e Seiende),
- (7) Sokrates ist (dieses) am Tag *T* klüger als Platon (Seiende),
- (8) Sokrates ist (dieses) von Platon erkannt(e Seiende).

⁴ Dieses Hervorgerufenwerden ist nicht nur für Impossibilia, sondern auch für pure Possibilia gewissermaßen der einzige Weg, auf dem ihr Sein zur vollen Entfaltung kommt. Denn angenommen, es gäbe eine Farbe, die weder in der Wirklichkeit vorkommt noch jemals in der Phantasie imaginiert wird, so wäre sie zwar trotzdem aufgrund ihrer bloßen Imaginierbarkeit außerhalb des Denkens existent, existierte aber gewissermaßen nur als ein Schatten ihrer selbst. Ein ebenso schattenhaftes Dasein würden mögliche Taten führen, die weder wirklich vollbracht, noch jemals in Erwägung gezogen werden.

⁵ Diese Sätze sind streng zu unterscheiden von Sätzen der Form: «(dieses bestimmte) *X* ist (ein unbestimmtes) *B*» und «(ein unbestimmtes) *X* ist (ein unbestimmtes) *B*». Siehe hierzu Abschnitt 4.3.3.

Die mit den hier vorkommenden Prädikaten „Sokrates“, „Mensch“, „Lebewesen“ usw. gemeinten Objekte (sein Sokratessein, Menschsein, Lebewesen sein usw.) sind konkrete Attribute von Sokrates; diese sind von den eventuell gleich lautenden konkreten Attributen eines anderen Objekts zu unterscheiden. Das durch „ist“ bezeichnete Verhältnis eines Objekts zu einem seiner Attribute bedeutet nur selten die unterschiedslose Identität, die der Mathematiker mit dem Zeichen = ausdrückt (hier nur in Beispiel (0)). Meist handelt es sich um eine Beziehung ganz eigener Art, die meines Erachtens zu den Urphänomenen zählt, die nur vage beschrieben und durch Beispiele und Gegenbeispiele verdeutlicht werden können. So bedeutet «dieses X ist dieses A », dass A an der *seinsmäßigen* Konstitution des Objekts X beteiligt ist, die nichts mit der räumlichen oder zeitlichen Zusammensetzung des Objekts zu tun hat: Das Menschsein ist weder ein räumlicher noch ein zeitlicher Ausschnitt des Sokrates (wie es sein Kopf oder seine Kindheit wäre), sondern ein seinsmäßiger: ein Ausschnitt von all dem, was Sokrates eben „ist“. Ich teile nun die Attribute in vier verschiedene Arten ein:⁶

1. Einige Attribute kommen dem Objekt notwendigerweise zu, *unabhängig von seiner Entfaltung im Wirken*, und charakterisieren daher das unentfaltete Sein des Objekts. Diese nenne ich *essentielle Attribute* oder *Wesensattribute*. So gehören das Sokratessein, Menschsein, Lebewesen sein und Vernünftigsein zu den essentiellen Attributen des Sokrates (Beispiele (0) bis (3)). Die Gesamtheit der essentiellen Attribute heißt das *physische Wesen* des Objekts.⁷

2. Andere Attribute charakterisieren das, was das Objekt „über das eigene Selbst hinaus“ ist, und zwar durch seine Entfaltung im eigenen Wirken. Sie heißen *akzidentielle Attribute*. Indem Sokrates zu einer bestimmten Zeit nachdachte oder umherging (Beispiele (4) und (5)), trat er in einen höheren Seinsmodus, der auch hätte fehlen können. Daher beschreiben diese Attribute Ergänzungen, die den vollständig bestimmten Sokrates weiter ausgestalten und entfalten. Besonders deutlich ist das bei den *Wirkakten*: den akzidentiellen Attributen, die direkt den Vollzug einer Handlung aussagen (wie „nachdenken“ oder „herumlaufen“), aber auch bei den *Wirkvermögen*, welche erworbene Fähigkeiten zu diesen Akten benennen (wie „rational“ oder „geschickt“) und bei den *ausgestaltenden Akzidentien* (wie „weiß“ oder „krummnasig“).

Hier ist vorab auf ein Problem der Gotteslehre hinzuweisen. Die rationale Theologie beschreibt Gott als ein Wesen, das immer im Modus voll entfalteter Wirklichkeit existiert und somit keine akzidentiellen Attribute hat. Andererseits schreiben die Religionen Gott eine *freies Wirken* zu, so dass er hätte anders wirken können, als er tatsächlich wirkt. Müsste dann aber sein Wirken nicht doch durch akzidentielle Attribute charakterisiert sein? Nur dann, wenn man die oft gehegte Vorstellung hat, dass akzidentiellen Attribute grundsätzlich den *veränderlichen* Teil eines Objekts ausmachen, während die essentiellen das *Gleichbleibende* am Objekt charakterisieren. Demgegenüber geht nach der hier vorgestellten Konzeption nicht *jede* Veränderlichkeit, sondern nur die *Veränderlichkeit hinsichtlich der Intensität der Seinsentfaltung* auf akzidentielle Attribute zurück. Gott aber ist so zu denken, dass er notwendigerweise, was immer er tut, im Status der größten möglichen

⁶ Siehe auch Abschnitt 4.4.4.

⁷ Unter dem (oder einem) *metaphysischen Wesen* von X versteht man dagegen einen *möglichst kleinen* Teil des physischen Wesens: eine Gesamtheit M essentieller Attribute, mit der man das Objekt *definieren* kann, und zwar so, dass aus dem Vorhandensein der in M zusammengestellten Wesensattribute das Vorhandensein aller übrigen notwendig folgt und *auf möglichst leichte Weise* einsichtig gemacht werden kann. Das metaphysische Wesen ist also kurz gesagt so etwas wie ein „ausgezeichnetes Charakteristikum“ des Objekts. Beim Menschen bestünde das metaphysische Wesen aus den beiden Attributen des Vernünftigseins und des Sinnenwesenseins, wenn die klassische Definition „der Mensch ist ein vernünftiges Sinnenwesen“ zutrifft (vgl. hierzu Abschnitt 4.4.5). Im Gegensatz zur scholastischen Tradition muss man wohl sagen, dass ein und dasselbe Objekt mehrere metaphysische Wesen haben kann, da es oft mehrere „gleich gute“ Definitionen derselben Sache gibt (Beispiel: das Dreieck ist eine „zusammenhängende ebene Figur mit drei Seiten“ und auch eine solche „mit drei Ecken“). Vom physischen und vom metaphysischen Wesen ist noch das später zu behandelnde *transzendente Wesen* zu unterscheiden (siehe S. 50).

Seinsentfaltung und intensivsten Wirklichkeit ist – was er tut, tut er stets mit ganzer Kraft – und daher *fällt bei ihm die Unterscheidung zwischen essentiellen und akzidentiellen Attributen weg, ohne dass dadurch auch seine Freiheit im Sinne alternativer Wirkmöglichkeiten wegfallen müsste.*

Zum Unterschied zwischen akzidentiellen und essentiellen Attributen ist noch Folgendes zu bemerken. Zunächst scheint dieser Unterschied kein absoluter zu sein: Er hängt davon ab, welches Objekt wir als den „Träger“ betrachten wollen. Nimmt man z. B. als Attributenträger X Sokrates, so ist dessen Menschheit essentiell, während sein Schlafendsein ein akzidentielles Attribut ist. Denkt man sich aber als Träger eine neues Objekt X^+ , das *die Zusammensetzung aus Sokrates und seinem Schlafen* sein soll („schlafender Sokrates“), so wäre das Schlafendsein ein essentielles Attribut von X^+ . Geht man andererseits zur Betrachtung des *Menschseins* X^- des Sokrates über und betrachtet dieses als Träger von Attributen, so ist das Sokratessein (= Sokrates selbst) ein akzidentielles Attribut von X^- , weil es den Charakter einer verwirklichenden Entfaltung von X^- hat. Nun ist aber offenbar die Betrachtung von X^+ (Sokrates plus Zustand des Schlafens) oder von X^- (Menschheit des Sokrates allein) irgendwie willkürlich und unnatürlich: X^- hat den Charakter eines unvollständigen Seienden, während X^+ als ein willkürlich erweitertes, übervollständiges Seiendes erscheint, und X allein ist ein natürlich gegebenes, *vollständiges Seiendes*. Genauer können wir ein *vollständiges* Seiendes definieren als ein solches, das

- (1) weder ein Sachverhalt ist,
- (2) noch eine willkürliche Zusammenstellung anderer Objekte (wie „schlafender Sokrates“),
- (3) noch ein willkürlicher Ausschnitt eines anderen Objekts (wie „Sokrates’ Menschheit“).

Vollständige Objekte sind also wegen (1) keine Sachverhalte über Objekte, sondern Objekte, die Sachverhalten zugrunde liegen, und wegen (2) und (3) sind es natürliche Ausgangspunkte für Synthesen und Analysen, aber nicht deren Produkte. Ferner sind vollständige Objekte widerspruchsfrei (keine willkürliche Zusammenstellung). Dennoch müssen sie als solche noch nicht in der Wirklichkeit auftreten, können also pure Possibilia sein. Durch den Bezug auf vollständige Objekte können wir nun im absoluten Sinn von akzidentiellen und essentiellen Attributen reden: Die essentiellen Attribute vollständiger Seiender sind *essentielle Attribute im absoluten Sinn* (die man auch *Essenzen* nennt), und die akzidentiellen Attribute vollständiger Seiender *akzidentielle Attribute im absoluten Sinn* (die man auch *Akzidentien* nennt).

3. Neben akzidentiellen Attributen gibt es noch eine weitere Art von Attributen, die ebenfalls beschreiben, was das Objekt „über das eigene Selbst hinaus“ ist, aber nicht durch eigenes Wirken, sondern vermittelt durch das Erkanntsein. Diese nenne ich *jenseitige Attribute*: z. B. ist das „durch Platon Erkanntsein“ (Beispiel (8)) ein jenseitiges Attribut des Sokrates. An das „Erkanntsein“ selbst können sich noch weitere jenseitige Attribute anschließen, z. B. das „Geliebtsein“, das „Diskutiertwerden“ usw. Die jenseitigen Attribute eines Objekts X gehören nicht so sehr zu X selbst, sondern eher zu den Subjekten, die X erkennen.

4. Schließlich scheint es noch eine vierte Art von Attributen zu geben: *relative Attribute* oder *Relationen*, welche Beziehungen des Objekts zu sich selbst oder zu anderen Objekten sind (Beispiele (6) und (7)). Diese beschreiben weder das Wesen noch seine individuelle Entfaltung, sondern kennzeichnen eher den Beitrag, den das Objekt für das Wesen und die Entfaltung des Universums aller Dinge leistet. Insbesondere wäre es darum nicht angemessen, Relationen als besondere Art akzidentier Attribute zu betrachten. Zwar gibt es Relationen, die sich aus dem Wirken ergeben (wie Sokrates’ Klügersein als Platon), aber auch solche, die eher auf der essentiellen Seite des Objekts stehen, da sie ihm „notwendigerweise“ zukommen, wie etwa Sokrates’ Verschiedensein von Platon oder sein Nichtverschiedensein von sich selbst. So ist es am besten, Relationen als eine eigene Klasse von Attributen zu betrachten.

4.3.3 Begriffe (oder Ideen) und Fiktionen

Wenn man ein Objekt X möglichst „rein“ betrachten will, muss man versuchen,

1. X aus seiner eventuell existierenden raum-zeitlichen Region herauszulösen, und
2. aus X alle konkreten Attribute zu entfernen, für die das möglich ist,

so dass man wenn möglich nur noch die essentiellen Attribute von X betrachtet. Dieser Vorgang der „Abtrennung“ eines Objekts X aus seinem natürlichen Kontext ist das, was man eine *Abstraktion* oder *Ideation* nennt. Zum Beispiel kann man von einem konkreten Erkenntnisakt ausgehen, der ein Objekt x beinhaltet. Es ist dann das „ x Beinhalteten“ ein Attribut dieses Aktes. Löst man dieses Attribut von allem Beiwerk ab, erhält man als Ergebnis eine „Denkform“ (auf S. 26–27 habe ich beschrieben, was bei dieser Abstraktion im Einzelnen ausgeschaltet werden muss). Das Ergebnis einer solchen Abstraktion ist nun aber nicht, dass man wirklich nur noch X betrachtet, denn X ist in seine konkreten Attribute eingebettet, das abgetrennte oder „abstrahierte“ Objekt aber ist genau dies *nicht*, also unterscheiden sie sich. Man bekommt daher durch Abstraktion ein neues Objekt X^* , das in engem Zusammenhang mit dem alten Objekt X steht, und das man „ X an sich“ oder „den Begriff von X “ oder „die Idee von x “ nennt.

Durch Abstraktion erhebt sich also das Denken zur Schau einer neuen Klasse von Objekten, den *Begriffen* oder *Ideen* (synonym: *abstrakten Attributen* oder *abstrakten Prädikaten*). Diese stehen auf einer ganz anderen Ebene als die zuvor betrachteten, aus denen man sie abstrahiert: Es fehlt ihnen jegliche räumliche und zeitliche Dimension, sie sind vom Wirken abgeschnitten, d. h. unwirklich (und daher, falls sie widerspruchsfrei sind, pure Possibilien), aber sie repräsentieren gewisse Inhalte in Reinform. Begriffe oder Ideen zerfallen in zahlreiche interessante Unterklassen (neben abstrakten Essenzen von Substanzen wie „das Menschheit an sich“ gehören auch Zahlen, Mengen und ideale geometrische Formen dazu, ferner ideale ethische Werte wie „das Gute an sich“, ideale ästhetische Qualitäten usw.).⁸ Wie man durch Abstraktion einen Begriff erhält, so kann man durch den umgekehrten Vorgang, die *Konkretion*, von einem Begriff wieder zu einem konkreten Objekt übergehen, z. B. von der „Menschheit an sich“ zur konkreten Menschheit des Sokrates. Hier gibt es aber oft mehrere Möglichkeiten: Man kann von der Menschheit an sich auch zur konkreten Menschheit des Platon übergehen. All diejenigen Attribute, in welche ein Begriff durch Konkretion übergehen kann, heißen seine *Instanzen* oder die „unter den Begriff fallenden“ Objekte. Die Gesamtheit aller Instanzen eines Begriffs heißt sein *Umfang*. Wie die Namen *konkreter Attribute* A als Prädikate in Sätzen der Form «dieses bestimmte X ist dieses bestimmte A » auftauchen, stehen Namen von *Begriffen* B als Prädikate in Sätzen der Form «dieses bestimmte X ist ein unbestimmtes B ».⁹ Diese Sätze drücken aus, dass *eine Instanz des Begriffs* B *ein konkretes Attribut von* X *ist*. Namen für Begriffe stehen außerdem in Sätzen der Form «ein unbestimmtes B_1 ist ein unbestimmtes B_2 » sowohl an Stelle des Subjekts wie auch des Prädikats.¹⁰ Solche Sätze drücken aus, dass *alle Instanzen von* B_1 *auch solche von* B_2 *sind*.

Alle von den Begriffen verschiedenen puren Possibilien nenne ich *Fiktionen*. Diese werden im Denken nicht wie die Begriffe analytisch (nämlich durch Abstraktion), sondern synthetisch (durch Zusammenstellung) hervorgerufen. Zu den Fiktionen gehören

- falsche Sachverhalte, die hätten wahr sein können (z. B. dass Napoleon die Schlacht von Waterloo gewann) und deren konkrete Attribute,

⁸ Man beachte, dass die zu Ideen führenden Abstraktionen nicht alle von sinnlich wahrnehmbaren Substanzen ausgehen. Sie können auch von nur geistig erfassbaren Wirklichkeiten ausgehen, indem sie z. B. Aspekte des Wesens Gottes sind. Letzteres scheint etwa bei der Idee des „Guten an sich“ der Fall zu sein.

⁹ Beispiele: «Sokrates ist ein Mensch» oder «Sokrates ist ein Lebewesen».

¹⁰ Beispiel: «ein Mensch ist ein Lebewesen».

- konkrete Attribute, die ein wirkliches vollständiges Objekt hätte haben können, aber nicht wirklich hat, und
- nicht-wirkliche vollständige Objekte (z. B. Romanfiguren) und ihre konkreten Attribute.

Alle puren Possibilien sind unwirklich, können aber (in einem gewissem, nun zu klärenden Sinn) eine „Verwirklichung“ erfahren. Mit Blick auf dieses ihr Verhältnis zur Wirklichkeit kann man für die puren Possibilien verschiedene Grade der Selbständigkeit feststellen, wobei nach zunehmender Selbständigkeit geordnet zuerst die Begriffe, dann die Fiktionen kommen.

Die *Begriffe* sind so unwirklich, dass sie *als für sich bestehende Einheiten* gar nicht verwirklicht sein können, sie können nur dadurch verwirklicht sein, dass sie inhaltlich mit *anderen* wirklichen Objekten übereinstimmen, nämlich mit ihren Instanzen. Die „Verwirklichungsfähigkeit“ von Begriffen ist also eine so schwache, dass sie hierfür auf *andere* Objekte angewiesen sind, „in“ denen sie sich (durch inhaltsgleiche Repräsentanten) verwirklichen können.

Die *Fiktionen* können dagegen *für sich* verwirklicht werden. – Dies ist allerdings *nicht* so zu verstehen, dass es für eine Fiktion möglich wäre, durch eine Art „wirkliche Bewegung“ den Seins-Status des rein möglichen Objekts zu „verlassen“ und in jenen des wirklichen Objekts „überzuwechseln“. Solches ist bei keinem rein möglichen Objekt möglich, denn per Definition sind Objekte, die „irgendwann“ in der Wirklichkeit auftauchen, *wirkliche* und nicht rein mögliche Objekte. Die Fähigkeit einer Fiktion, verwirklicht zu werden, bedeutet vielmehr, dass sie *hätte wirklich sein können* (obwohl das tatsächlich nicht der Fall ist).

4.4 Aktualitäten

Das Charakteristikum von *wirklichen Objekten* oder *Aktualitäten* gegenüber den puren Possibilen ist, dass sie nicht bloß denk-unabhängig „da sind“ (= existieren), sondern denk-unabhängig „wirken“. Sie haben daher eine nunmehr vollkommene Denk-Unabhängigkeit und stehen insofern auf der Stufe eigentlicher Realität. Trotzdem kann ihre Selbständigkeit noch verschiedene Grade von Vollkommenheit haben, da ein Seiendes, das nicht vom Denken abhängt, immer noch mehr oder weniger von *anderen* Seienden abhängen kann.

4.4.1 Arten des Wirkens

Der Grundbegriff des *Wirkens* wurde schon oben S. 31–32 kurz beschrieben: Wirken ist Seinsentfaltung. Es gibt nun zwei grundlegend verschiedene Arten des Wirkens, nämlich (1) äußeres Wirken oder Wirken nach außen und (2) inneres Wirken oder Wirken nach innen. Beim *äußeren Wirken* setzt sich das Seiende dadurch in Geltung, dass es auf ein anders Seiendes einwirkt. Es „beeinflusst“ dann das andere Seiende, indem es entweder dessen Bestimmungen verändert (z. B. es bewegt, zerteilt, erwärmt, heilt, belehrt), oder diesen Bestimmungen festen Bestand verleiht (es beispielsweise an einem bestimmten Ort festhält). Auch beim *Wirken nach außen* geschieht aber eine „Seinsentfaltung“ beim Wirkenden selbst, und nicht bloß eine „Auswirkung“ auf andere Seiende.

Beim *innerem Wirken* wirken Objekte *direkt auf sich selbst* und haben daher einen stärkeren Selbstbezug als die *nur* mit äußerem Wirken ausgestatteten Objekte. Sie sind darum vollkommener (realer) als diese. Grundlegende Beispiele für inneres Wirken sind einerseits Selbstbegründung, andererseits Fortpflanzung, Erkennen und weitere Lebenstätigkeiten.

Selbstbegründung kann total oder partiell sein. *Totale Selbstbegründung* (Aseität) besteht, wo ein Seiendes sein ganzes Sein sich selbst „gibt“; Aseität kommt, wie wir sehen werden, nur Gott zu.¹¹ *Partielle Selbstbegründung* liegt vor, wo ein Seiendes sich nur teilweise das eigene Sein „gibt“. Beispiele hierfür sind die wahren Sachverhalte, deren Wahrheit von selbst einleuchtet:¹² Diese geben sich gewissermaßen ihr Wahrsein (nicht aber ihr Sein schlechthin) selbst. Eine andere Form von partieller Selbstbegründung haben sich selbst erhaltende Objekte (z. B. unzerstörbare Elementarteilchen¹³ oder die menschliche Seele¹⁴): Diese bleiben von Natur aus im Sein, d. h. ihr Fortbestehen (nicht jedoch ihr Sein schlechthin) gründet in ihnen selbst. Selbstbegründung hat beständig ein bestimmtes Maß und lässt dann keine *weiter aufbauende, erweiternde* Seinsentfaltung mehr zu. Darin liegt eine Unvollkommenheit, es sei denn, das Selbstbegründete ist gar nicht mehr erweiterbar, weil es die höchste denkbare Vollkommenheit bereits hat, also Gott ist: Dann verhindert die Selbstbegründung keine Entfaltung, sondern bewahrt alle Vollkommenheit. Wenn aber nicht die auf göttlicher Seins-Stufe stehende absolute Selbstbegründung (Aseität) gemeint ist, ist Selbstbegründung weniger vollkommen als Fortpflanzung und Erkenntnis.

Fortpflanzung ist die für organische Lebewesen charakteristische Selbstreproduktion. Das Lebewesen gibt sich selbst das Sein, allerdings nicht individuell, sondern nur der Art nach, indem es ein neues Lebewesen seiner Art hervorbringt. Die Fortpflanzung ist nun, insofern sie eine im Prinzip

¹¹ Siehe S. 770.

¹² Siehe Abschnitt 4.4.3.

¹³ Gemeint sind hier Elementarteilchen im klassischen Sinn, die als unteilbare Korpuskeln bestimmter Größe gedacht sind. Nach dem heutigen Standardmodell der Quantenmechanik müsste man sich allerdings ein Elementarteilchen eher als eine „Wahrscheinlichkeitswolke“ vorstellen, deren Größe und Dichte variabel ist (siehe Abschnitt 8.16.10 S. 669–672). Immerhin haben die Elementarteilchen auch in diesem Modell naturgesetzlich stets gleich bleibende Erhaltungsgrößen (wie Ladung und Ruhemasse), die den Teilchen daher „von sich aus“ zukommen. – Die Selbstbegründung der Elementarteilchen ist in jedem Fall relativ, weil sie bloß in einem Naturgesetz gründet, das keine logische Notwendigkeit beanspruchen kann.

¹⁴ Siehe Abschnitt 10.3.

grenzenlos fortsetzbare Erweiterung ermöglicht, vollkommener als die partielle Selbstbegründung. Aber sie ist nur eine äußerliche Erweiterung: Ein sich fortpflanzendes Objekt erweitert sich ja nur *artmäßig*, nicht *individuell*.¹⁵

Erkennen besteht darin, dass ein Subjekt sich selbst (wenigstens unthematisch) gegenübersteht, es „gibt sich“ sein eigenes Sein „vor“. Auch das Erkennen *anderer* Seiender ist inneres Wirken, denn dadurch erweitert der Erkennende den eigenen Horizont und damit auch seine Selbsterkenntnis: Vollkommene Selbsterkenntnis ist nur möglich, wenn das Selbst im Kontext und in Absetzung von möglichst vielen anderen Seienden erkannt wird. Das Erkennen ist wie Selbstbegründung eine ganz im Individuum bleibende Wirkung, die aber zugleich wie die Fortpflanzung im Prinzip grenzenlos steigerbar ist. Insofern ist sie im Vergleich mit der (partiellen) Selbstbegründung und auch mit der Fortpflanzung schlechthin vollkommener.

Als *Lebenstätigkeiten* kann man nun diejenigen inneren Wirkweisen ansehen, die entweder dem allvollkommenen Sein Gottes zukommen, oder die beschränktes Sein in einem nicht-statischen, zu immer größerer Vollkommenheit hin offenen Sinn entfalten: denn Leben ist Vollkommenheit oder Vollkommenheits-Streben.¹⁶ Die hauptsächlichen Lebenstätigkeiten sind demnach Fortpflanzung und Erkenntnis. Im weiteren Sinn gehören zu den Lebenstätigkeiten auch andere, welche im Zusammenhang mit Fortpflanzung und Erkenntnis stehen, indem sie diese Akte vorbereiten, begleiten und vervollkommen. Die mit der Fortpflanzung zusammenhängenden Lebenstätigkeiten kann man unter dem Stichwort „Selbstorganisation“ zusammenfassen. Dazu gehören z. B. die eigenständige Ausbildung einer Struktur, die Assimilation (Verwandlung von Fremdstoffen in die eigene Substanz) und die Selbstreparatur bei Teil-Destruktion.¹⁷

Mit dem Erkennen hängen Akte wie *Wollen, Fürchten, Hoffen, Lieben* und *Hassen* zusammen, die man als Akte des *inneren Strebens* zusammenfassen kann. Es handelt sich um Formen der inneren Aneignung des Erkannten und der Reaktion auf das Erkannte, so dass das innere Streben stets das Erkennen voraussetzt. Umgekehrt scheint aber auch das Erkennen ohne inneres Streben nicht möglich zu sein. Denn ein Erkennen ohne inneres Streben wäre ein uninteressiertes Wahrnehmen, das sich der Erkennende nicht wirklich aneignet, denn er wäre gar nicht „bei der Sache“, sondern vollkommen abwesend. Aber dann würde er wohl in Wahrheit auch gar nichts erkennen. Die mit dem Erkennen verbundenen Akte des inneren Strebens zeigen nun sehr klar, dass es sich beim konkreten Erkennen um innere *Aktivität* handelt, um echtes inneres *Wirken*.

Das Erkennen können wir aufgrund des oben S. 24 besprochenen Unterschieds zwischen sinnlichem und geistigem Erkennen nochmals grundlegend unterteilen. Dem sinnlichen und geistigen Erkennen entsprechen auch besondere Arten des Strebens, die man als *sinnliches Streben* und *geistiges Streben* bezeichnet. Da nämlich mit dem sinnlichen Erkennen keine volle Erkenntnis des eigenen Selbst verbunden ist, kann auch das Streben des nur sinnlich Erkennenden nicht ganz von innen her kommen, muss also teils einen fremdbestimmten Charakter haben. Demgegenüber kann bei einem rein geistigen Erkennen, das mit vollem Bewusstsein des Ich verbunden ist, auch das entsprechende Streben von diesem Ich ausgehen.

Die höchsten uns bekannten Formen inneren Wirkens sind das *geistige Erkennen* und das *geistige Streben*. Diese Wirkweisen nennt man *personal* und die sie vollziehenden Wesen heißen *Personen*.

¹⁵ In dieser Hinsicht wäre also eine Fortpflanzung, bei der das Individuum untergeht (was aber vom Begriff der Fortpflanzung her *nicht* erforderlich ist!) unvollkommener als die partielle Selbstbegründung eines seinen eigenen Fortbestand sichernden Individuums.

¹⁶ Nach WHITEHEAD, *Process* part 2 chapter 3 section 7 S. 156, Ausgabe Griffin/Sherburne S. 102, Ausgabe Holl S. 200 ist „die erste Bedeutung von ‚Leben‘ das Hervorbringen einer begrifflichen Neuheit – Neuheit des Strebens [origination of conceptual novelty – novelty of appetite].“

¹⁷ Diese Tätigkeiten gipfeln in der Fortpflanzung, welche die Selbstorganisation über das Ende der individuellen Existenz hinaus fortsetzt. Die Fortpflanzung ist als gleichsam *vollständiges* Sich-hervorbringen die höchste Art von Selbstorganisation.

Beim geistigen Streben gibt es nochmals einen wichtigen Unterschied. Manche Akte des geistigen Strebens beziehen sich auf das *Tun* (Wahl der zu ergreifenden Mittel, um etwas zu erreichen), andere aber auf das *Sein* der Person selbst (Wahl, was ich sein oder werden will, d. h. Wahl des Ziels); diese letztere Form ist das *moralische Streben* oder die *freie Selbstbestimmung*. Durch diese allerhöchste Art des uns bekannten Strebens kann die Person sich unmittelbar als Ganzes vervollkommen, aber auch umgekehrt ihre Vollkommenheit ablegen.

Der Begriff der freien Selbstbestimmung steht in engem Zusammenhang mit dem Begriffspaar des *Guten* und *Schlechten*. Man kann von „gut“ und „schlecht“ in einem relativen und in einem absoluten Sinn sprechen. Im relativen Sinn bedeutet gut dasselbe wie „zweckentsprechend“ oder „zusagend“, und was in diesem Sinne gut oder schlecht ist, hängt natürlich ganz vom Zweck bzw. Geschmack ab. Es gibt aber auch eine absolute Bedeutung von „gut“ und „schlecht“: So würde niemand eine gerechte und wahrhaftige Person im Hinblick auf diese Eigenschaften als schlecht bezeichnen. Der Begriff des (im absoluten Sinne) Guten scheint sich jedoch einer genauen Aufklärung noch weit mehr zu entziehen als vergleichbare Grundbegriffe wie Sein, Wirken und Wahrheit.¹⁸ Will man ihn „auf eine einzige Formel bringen“, so dürften SOKRATES und PLATON das Richtige getroffen haben, dass es ein dem Sein immanentes Ideal, eine objektive „Idee des Guten“ gibt, so dass man sagen kann, ein Seiendes sei in dem Maße gut bzw. schlecht, als es dieser Idee ähnlich bzw. unähnlich ist. Alle möglichen Seienden kann man nun in diese „Skala“ von Gut und Schlecht einordnen, im eigentlichsten Sinn aber nur Personen. Eine Person wird gut oder schlecht genannt, je nachdem, ob sie im sog. *moralisch guten Streben* durch freie Selbstbestimmung die Idee des Guten in sich verwirklicht oder im *moralisch bösen Streben* diese Entfaltung negiert, wobei sie dann anscheinend vollkommenheitsmäßig sogar unter ihren unentfalteten Grundzustand absinken kann.¹⁹

Durch Kombination der genannten Wirk-Arten können wir nun die im eigentlichen Sinn wirkenden Objekte einteilen. Zusätzlich gibt es noch Objekte, die nur im uneigentlichen Sinn wirken und daher Aktualitäten *neben* (und vollkommenheitsmäßig *unter*) den eigentlich aktiven Objekten sind. Unter Einbeziehung dieser Objekte erhalten wir folgende Einteilung der wirklichen Objekte:

- Auf der untersten Stufe der Aktualität stehen Objekte, deren uneigentliches Wirken nur darin besteht, das Zusammenwirken mehrerer artgleicher Aktualitäten vorzubereiten, indem sie ein wirkliches (d.h. ein das Wirken ermöglichendes, spezifizierendes oder beeinflussendes) Auseinander dieser Aktualitäten herstellen. Diese Objekte nenne ich *Universen*.
- Auf der mittleren Stufe stehen die *Attribute* eines eigentlich wirkenden Objekts. Diese hängen alle irgendwie mit dessen Wirken zusammen, indem sie beispielsweise seine Wirkmöglichkeiten vorzeichnen oder das Objekt und sein Wirken ausgestalten.
- Auf der höchsten Stufe stehen die *eigentlich wirkenden Objekte*, die das Wirken nicht vorbereiten oder ausgestalten, sondern es selbst vollziehen. Hierzu gehören einerseits die *wahren Sachverhalte*, andererseits die *Substanzen*.

Ich betrachte nun die wirklichen Objekte im Einzelnen.

¹⁸ Den irreduziblen Grundcharakter des Guten betont auch SEIFERT, indem er im Anschluss an George Edward MOORE und William David ROSS erklärt, das Gute könne „keineswegs auf etwas anderes zurückgeführt werden oder durch etwas anderes als durch sich selbst erklärt werden“ und es könne „nicht ohne die unmittelbare Erfahrung seines Inhalts verstanden werden“ (SEIFERT, *Sein* S. 108). Jedenfalls hat das Gutsein mindestens drei Aspekte: es ist erstens das anderen selbstlos Nützende oder das sich Gebende („bonum est diffusivum sui“), zweitens das objektiv (vernunftgemäß) Anstrebenswerte („bonum est, quod omnes appetunt“) und drittens das (von Nutzen und Streben unabhängig) Anerkennens-, Bewunderns- und Liebenswertes, nämlich das Heilige, Erhabene und Schöne. Gutsein in absoluter Bedeutung ist insgesamt in etwa die gemeinsame Wurzel dieser Umschreibungen.

¹⁹ Einerseits ist zwar das moralisch böse Streben genau wie das moralisch gute ein inneres Wirken der höchsten Art, so dass es insofern den Wirkenden selbständiger und damit vollkommener macht; aber andererseits ist dieses Wirken gerade der Vollkommenheit entgegengerichtet, so dass es im Endeffekt die Vollkommenheit nicht erhöht, sondern verringert. Wenn ein Mensch durch derartiges Streben unter seinen „Grundzustand“ absinkt, spricht man von „unmenschlichem“ Verhalten.

4.4.2 Universen

Ein *Universum* umfasst eine maximale Gesamtheit von Objekten, welche *Punkte* des Universums heißen und die

1. in spezifischer Weise „auseinander“ existieren (z. B. neben– oder nacheinander),
2. dadurch wirksam sein können, dass sie anderen Objekten ein Auseinander verleihen,
3. abgesehen von der Inhaltlichkeit und Wirksamkeit, die sich aus Punkt (1) und (2) ergibt, keine weitere Inhaltlichkeit und Wirksamkeit haben.

Mit der „Maximalität“ dieser Gesamtheit ist gemeint, dass es außer den Punkten keine weiteren Objekte mehr gibt, die in derselben spezifischen Weise „außerhalb“ der anderen existieren. Als *Orte* oder *Stellen* des Universums bezeichne ich sowohl einzelne seiner Punkte wie auch aus mehreren Punkten bestehende Vielheiten.²⁰ An einem Ort eines Universums kann ein Objekt dadurch *gegenwärtig* (befindlich, lokalisiert) sein, dass es mit den Punkten des Ortes koinzidiert, d. h. „zusammenfällt“. ²¹ Besteht nun der Ort aus einer Vielheit von Punkten, wird das Objekt durch die Koinzidenz mit diesem Ort offenbar seinerseits in eine Vielheit von Teilen aufgeteilt; diese Teile heißen dann *Punkte des Objekts*, und es koinzidiert jeder Punkt des Objekts mit genau einem Punkt des Ortes und umgekehrt jeder Punkt des Ortes mit genau einem Punkt des Objekts. Ein mit einem Ort koinzidierendes Objekt heißt an dem betreffenden Ort *durch Einordnung* gegenwärtig (befindlich, lokalisiert). Außer durch Einordnung kann ein Objekt an einem Ort des Universums auch *durch Wirken* gegenwärtig (befindlich, lokalisiert) sein, indem es nämlich auf ein an diesem Ort durch Einordnung gegenwärtiges Objekt wirkt oder von ihm Einwirkungen empfängt.

Ein Universum heißt ein *zeitliches Universum*, wenn das Auseinander seiner Punkte (die dann *Zeitpunkte* heißen) durch ein *Nacheinander* begründet ist. Was ist ein Nacheinander? Man kann zunächst antworten: ein *eindimensionales Auseinander mit einer ausgezeichneten Richtung*. Doch wären auch eindimensionale Universen mit ausgezeichneter Richtung denkbar, die *kein* Nacheinander implizieren: z. B. ein Strahl mit einem Anfangs– aber keinem Endpunkt. Eine zweite Antwort wäre: Das Nacheinander ist *Veränderung*. Zumindest kann das eine ohne das andere nicht sein. Dass nämlich Veränderung ohne Nacheinander nicht sein kann, ist klar, denn Veränderung setzt ja mindestens zwei verschiedene Phasen voraus: einen Zustand „vor“ und einen „nach“ der Veränderung. Aber auch umgekehrt kann ein Nacheinander nicht ohne Veränderung sein, was allerdings etwas schwieriger einzusehen ist. Vergeht die Zeit nicht auch dann, wenn gar nichts passiert? Bei wirklich *absoluter* Veränderungslosigkeit würde ich dies verneinen. Man versuche sich einmal vorzustellen, dass alle Veränderung aufgehoben wäre. Wie könnte dann noch ein Zeitvergehen erfahrbar sein? Nicht nur würden alle Uhren stillstehen und alle körperlichen Prozesse aussetzen, es wäre auch unmöglich, in Gedanken zu zählen, was ja eine Veränderung der Gedanken wäre. Oder würde sich das Fortschreiten der Zeit dadurch bemerkbar machen, dass es „langweilig“ werden würde, immer dasselbe zu denken? Auch das nicht, denn ob das veränderungslose Dasein lang – oder kurzweilig

²⁰ Ein besonderer Ort des Universums wäre also auch die Vielheit *aller* seiner Punkte. Diese Vielheit ist aber nicht mit dem Universum selbst identisch, denn das Universum setzt (über die bloße Existenz der Punkte hinaus) noch eine Ordnung zwischen den Punkten voraus: eine spezifische Weise des Auseinander. Umgekehrt ist aber eine Ordnung des Auseinander ohne tatsächlich auseinander stehende Punkte gar nicht denkbar. Somit sind das „Universum“ und die „Vielheit seiner Punkte“ zwar verschieden, aber beide Begriffe sind untrennbar, sie sind „ineinander inbegriffen“.

²¹ Die *Koinzidenz* eines Ortspunktes mit dem Punkt eines dort befindlichen Objekts bedeutet nicht eine vollkommene Identifizierung, sondern ein Ineinandersein, welches auch aus der Berührung zweier Körperpunkte resultiert. Wenn etwa P_1 Eckpunkt eines Körpers und P_2 Eckpunkt eines anderen Körpers ist, und beide Ecken sich berühren, so stehen dabei P_1 und P_2 keineswegs nebeneinander (denn nebeneinander stehende Punkte im Raum sind ja immer durch einen positiven Abstand getrennt), sind aber auch nicht identisch (denn sie sind nach wie vor Teile verschiedener Körper), also bleibt nur übrig, dass sie *ineinander* stehen (vgl. BRENTANO, *Ens rationis*, Ausgabe Kraus S. 261: „die Möglichkeit koinzidierender Punkte, die trotz der Koinzidenz ihre Differenz und volle relative Selbständigkeit haben ... wurde und wird vielfach verkannt“).

wäre, hinge ja ganz davon ab, welchen Gemütszustand man gerade hatte, bevor alles zum Stillstand kam, denn dieser Zustand ist es, der „verewigt“ würde. So wäre anscheinend ein Zeitvergehen ohne Veränderung *schlechthin nicht mehr erkennbar*, und was grundsätzlich nicht erkennbar ist, kann auch nicht *sein*. So sind die Begriffe des Nacheinander und der Veränderung ineinander inbegriffen, und man kann die Zeit als ein Universum ansehen, in dem sich ständig etwas verändert.²² Auch in der Physik wird das Fortschreiten der Zeit durch eine bestimmte Veränderung (nämlich die Entropiezunahme) definiert.²³

Doch auch damit ist die Frage, was das Charakteristische des Nacheinander ist, noch nicht beantwortet. Denn was Veränderung ist, ist schwer zu sagen, wenn man den Begriff des Nacheinander vermeiden will. Versuchsweise könnte man aber das Nacheinander gegenüber anderen Arten des Auseinander mit Hilfe des Bewusstseins wie folgt charakterisieren. Das Nacheinander zeichnet sich dadurch aus, dass von jedem Zeitpunkt aus betrachtet

- die *zu diesem Zeitpunkt stattfindenden* Ereignisse als wirklich wahrgenommen werden,
- die *früheren* aber als unwirklich und dennoch am Aufbau der Wirklichkeit beteiligt, und
- die *späteren* Ereignisse als unwirklich und am Aufbau der Wirklichkeit unbeteiligt.

Weil sich aber eine solche Dreiteilung der Wirklichkeitsauffassung zu *jedem* Zeitpunkt zeigt, haben die Ereignisse *absolut gesehen* den gleichen Anteil an der Wirklichkeit: Sie stehen in einem eigentümlich „oberflächlichen“ Wirklichkeitsmodus, weil sich ihre Wirklichkeit nur in einem einzigen Zeitpunkt in voller Weise entfaltet, während sie von allen anderen Zeitpunkten aus gesehen verblasst und zurücktritt. Das wirkliche Sein der Ereignisse ist also so schwach, dass es nicht allseitig zum Vorschein gelangt.²⁴

Ein Universum heißt ein *räumliches Universum*, wenn das Auseinander seiner Punkte durch ein *Nebeneinander* begründet ist. Das Wesen des Nebeneinander ist viel leichter zu erklären als das des Nacheinander: Es ist ein Auseinander, bei dem es keine bevorzugte Richtung gibt und jedes eingeordnete Objekt von jedem Punkt aus gesehen denselben Wirklichkeits-Status zu erkennen gibt. Ein Beispiel für ein zeitliches Universum ist der Erlebnisstrom jedes einzelnen Subjekts, ein Beispiel für ein räumliches Universum ist ein dreidimensionaler unbegrenzter Raum.²⁵ Das Verhältnis mehrerer Universen zueinander könnte derart sein, dass ein Universum Teil eines anderen ist²⁶ oder dass sie sich überschneiden.²⁷ Sie könnten aber auch vollkommenen „auseinander“ bestehen, entweder indem sie auseinander liegende Teile eines größeren Universums sind²⁸ oder indem sie mit Punkten

²² Siehe auch Abschnitt S. 298–299.

²³ Entropie ist ein Maß für die thermodynamische Unordnung (siehe Abschnitt 8.16.2). Veränderungen hin zu immer größerer Entropie gehen in einem geschlossenen System ohne Energiezufuhr „von selbst“ vor sich und sind daher als physikalischer Maßstab für den Fluss der Zeit im Universum geeignet (vgl. PENROSE, *Computerdenken* S. 295–338). Wenn jedoch Physiker eine Entropieabnahme als Zeitumkehr betrachten, verwechseln sie den in diesem Fall nicht mehr brauchbaren physikalischen *Maßstab* der Zeit mit der Zeit selbst. Zeit würde auch dann vergehen (und zwar nach wie vor vorwärts), wenn sich das Universum bei abnehmender Entropie zusammenzöge oder wenn bloß geistige Veränderungen in einem denkenden Subjekt stattfänden.

²⁴ Zum Zeitbegriff siehe noch S. 296 (Infinitesimalstruktur der Zeit), S. 795–796 (Anfang oder Anfangslosigkeit der Zeit) und S. 768 sowie Fußnote 85 auf S. 792 (Verhältnis Gottes zur Zeit).

²⁵ Mathematisch kann man ohne Schwierigkeiten auch Universen mit weniger oder mehr als drei Dimensionen behandeln, darunter auch unendlichdimensionale Universen (siehe Abschnitt 5.23). Statt der gewöhnlichen Euklidischen Axiome könnten widerspruchsfrei auch andere Axiome in einem Raum gültig sein. Man denke hier nicht nur an die hyperbolische und elliptische Geometrie (siehe S. 278–279 mit Fußnote 681), sondern auch an die vielfältigen Möglichkeiten allgemeiner topologischer Räume. Räume, in denen Punkte unendlich weit voneinander entfernt sein können, sind ebenso denkbar wie solche, in denen unendlich kleine Strecken vorkommen (die dennoch von Punkten verschieden sind). Siehe hierzu unten S. 289–296.

²⁶ Beispiel: Unendliche Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum sind Teile dieses Raums; sie sind aber ebenso Universen wie der dreidimensionale Raum selbst, weil sie maximale Gesamtheiten einer spezifischen (nämlich ein- bzw. zweidimensionalen) Form des Nebeneinander darstellen.

²⁷ Beispiel: zwei sich schneidende Geraden.

²⁸ Beispiel: zwei parallele Geraden.

eines übergeordneten Universums ganz anderer Art koinzidieren.²⁹ Auch wären Universen denkbar, zwischen denen es überhaupt keine Verbindung gäbe (außer dadurch, dass Gott ihnen allen das Dasein gibt und um sie weiß). Es gibt nicht nur rein zeitliche und rein räumliche Universen. Das physikalische Universum nach EINSTEIN ist ein solches, in dem Raum und Zeit untrennbar miteinander verknüpft sind.³⁰ Ein ganz anderes Universum ist das im folgenden Abschnitt zu besprechende „logische Universum“.

Ein Universum, in das nur Fiktionen eingeordnet sind, ist natürlich samt seiner Punkte ebenfalls fiktiv. Ein Universum aber, in welches wirkliche Objekte eingeordnet sind, gehört ebenso wie seine Punkte zu der Aktualitäten, weil dann die eingeordneten wirklichen Objekte durch das Universum und seine Punkte „wirklich“ auseinander gehalten werden.

4.4.3 Sachverhalte und logisches Universum

Ein Sachverhalt³¹ ist ein Objekt, welches als wahr oder als falsch beurteilt werden muss, dem also einer der beiden *Wahrheitswerte* („die Wahrheit“ oder „die Falschheit“) zukommt. Wahre Sachverhalte heißen auch *bestehende* Sachverhalte oder *Wahrheiten*, falsche Sachverhalte heißen *nicht-bestehende* Sachverhalte oder *Falschheiten*. Sachverhalte sind keine Attribute von Objekten, wohl aber sind sie auf ein oder mehrere Objekte gegründet, „von denen“ sie „handeln“. Die einem Sachverhalt zugrunde liegenden Objekte können selbst auch wieder Sachverhalte sein, dann handelt es sich um einen „Sachverhalt über Sachverhalte“. Sachverhalte hängen mit Aussagen und Urteilen zusammen, sind aber nicht mit diesen identisch. Eine *Aussage* ist die sprachliche Formulierung eines Sachverhalts, und ein *Urteil* ist eine mentale Entscheidung darüber, ob ein Sachverhalt wahr oder falsch ist. So existieren Aussagen auf der sprachlichen, Urteile auf der mentalen und Sachverhalte auf der sachlichen Ebene.

Wahrheit und Falschheit

Was ist nun Wahrheit? Die klassische Definition lautet: Ein Urteil ist wahr, wenn es mit dem beurteilten Sachverhalt übereinstimmt (*adaequatio rei et intellectus*). Diese „Übereinstimmungs- oder Korrespondenztheorie“ der Wahrheit wurde von FREGE angefochten: „Wollte man etwa sagen ‚wahr ist eine Vorstellung, wenn sie mit der Wirklichkeit übereinstimmt‘, so wäre damit nichts gewonnen, denn, um dies anzuwenden, müsste man in einem gegebenen Fall entscheiden, ob eine Vorstellung mit der Wirklichkeit übereinstimme, mit anderen Worten: ob es wahr sei, dass die Vorstellung mit der Wirklichkeit übereinstimme. Es müsste also das Definierte selbst vorausgesetzt werden.“³² Dieser Einwand wäre berechtigt, wenn man durch die Definition „die Wahrheit an sich“ erklären wollte; doch erklärt sie lediglich die Wahrheit *von Urteilen*: Ein *Urteil* über einen Sachverhalt ist wahr, wenn der *Sachverhalt* «das Urteil stimmt mit dem Sachverhalt überein» wahr ist. So ist die klassische Wahrheitsdefinition nicht zirkulär, aber sie setzt voraus, dass für *Sachverhalte* bereits bekannt ist, was es für diese heißt, wahr oder falsch zu sein. Und *dies* lässt sich nicht durch eine formale Definition angeben, denn eine beliebige Definition der Form «Ein Sachverhalt ist wahr, wenn es wahr

²⁹ Zum Beispiel könnte eine Folge verschiedener rein räumlicher Universen mit den Punkten eines zeitlichen Universums koinzidieren. Umgekehrt könnte auch mit jedem Punkt eines räumlichen Universums je ein zeitliches Universum koinzidieren.

³⁰ Siehe S. 647.

³¹ Zu diesem Begriff vgl. SEIFERT, *Sein* S. 327–344 und REINACH, *Negatives Urteil* S. 115–140. Wie SEIFERT (a.a.O., S. 327f) zur Geschichte des Sachverhaltsbegriffs bemerkt, wurde dieser, aufbauend auf Ideen von THOMAS VON AQUIN und BERNHARD BOLZANO, in seiner eigentlichen Bedeutung erst von phänomenologischen Philosophen des 20. Jahrhunderts erfasst, namentlich EDMUND HUSSERL, ALEXIUS MEINONG, ADOLF REINACH, ALEXANDER PFÄNDER, HEDWIG CONRAD-MARTIUS, DIETRICH VON HILDEBRAND und ROMAN INGARDEN.

³² FREGE, *Logik* Einleitung S. 139f.

ist, dass ...» würde die Kenntnis des zu Definierenden schon voraussetzen, wie FREGE mit Recht eingewendet hat. So kann man nur versuchen, durch Umschreibungen ein stärkeres Bewusstsein davon zu wecken, was gemeint ist.³³ Eine klare Erkenntnis bezüglich der Wahrheit und Falschheit von Sachverhalten ist zunächst deren *Trennung*, die sich im *Kontradiktionsprinzip* ausspricht. Man sollte eigentlich zwei Kontradiktionsprinzipien unterscheiden, nämlich:

- (1) Ein Sachverhalt ist entweder wahr oder falsch.
- (2) Von den Sachverhalten S und «nicht S » ist stets genau einer wahr.

Prinzip (1) ist das Kontradiktionsprinzip *bezüglich des Wahrheitswertes*, Prinzip (2) dasjenige *bezüglich gegensätzlicher Sachverhalte*.³⁴ Die mathematische Logik formuliert diese Prinzipien für Aussagen statt für Sachverhalte: *Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch*, und *die Aussagen A und «nicht A » haben stets verschiedene Wahrheitswerte*. Vom Standpunkt dieser Logik aus sind beide Prinzipien pure Selbstverständlichkeiten. Man betrachtet hier nämlich Aussagen als Zeichenreihen, denen man nach festen Regeln eines von zwei Objekten 0 und 1 zuordnet, die man als Repräsentanten der beiden „Wahrheitswerte“ auffasst, und nennt eine Aussage falsch bzw. wahr, wenn man ihr 0 bzw. 1 zugeordnet hat. Dabei ordnet man der Aussage «nicht A » stets genau dann 0 bzw. 1 zu, wenn man zuvor der Aussage A das Objekt 1 bzw. 0 zugeordnet hat. Dass in dem so konstruierten System die genannten Prinzipien gelten, ist nicht verwunderlich, *weil die logische Sprache gerade so aufgebaut wird, dass sie gelten*.

Damit nun allerdings die Festlegungen einer solchen Logik überhaupt einen *wirklich* feststehenden Sinn haben, ist ein tiefer liegendes Kontradiktionsprinzip erforderlich, das auf der Sachverhaltsebene liegt. Denn bei seinen „Festlegungen“ greift der Logiker ja auf Sachverhalte von der Art zurück, *dass einer bestimmten Zeichenreihe A die 0 oder die 1 zugeordnet worden ist*. Dass aber *diese* Sachverhalte ebenfalls den beiden Kontradiktionsprinzipien unterliegen, ist eine vorgegebene *ontologische* Tatsache, welche die Logik nicht geschaffen hat, sondern voraussetzen muss.³⁵ Auf der ontologischen Ebene folgt das erste Kontradiktionsprinzip keinesfalls aus einer bloßen Analyse der Definition des Sachverhaltes,³⁶ sondern kommt erst durch eine Zusammenschau der Begriffe „Sachverhalt“, „wahr“ und „falsch“ zum Vorschein. Ebenso ist der durch «nicht S » beschriebene Sachverhalt nicht schon per Definition ein solcher, dessen Wahrheitswert nicht mit dem von S identisch ist. Die der Negation zugrunde liegende Intuition dürfte vielmehr lediglich die Beobachtung sein, dass jeder Sachverhalt S immer genau einen *artgleichen Partner* besitzt, den man mittels Negation durch «nicht S » beschreiben kann. Negiert man diesen wieder, erhält man den mit «nicht nicht S » beschreibbaren Sachverhalt, der aber nicht ein dritter Sachverhalt, sondern mit S selbst

³³ „Wahrheit ist offenbar etwas so Ursprüngliches und Einfaches, dass eine Zurückführung auf noch Einfacheres nicht möglich ist“ (FREGE, *Logik* Einleitung S. 140).

³⁴ Man kann beide Kontradiktionsprinzipien jeweils noch einteilen in den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* (bzgl. des Wahrheitswertes besagt dieser, dass jeder Sachverhalt *mindestens* einen Wahrheitswert hat, und bzgl. gegensätzlicher Sachverhalte S und «nicht S », dass *mindestens* einer dieser beiden wahr sein muss) und den *Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch* (bzgl. des Wahrheitswertes besagt dieser, dass jeder Sachverhalt *höchstens* einen Wahrheitswert hat, und bzgl. gegensätzlicher Sachverhalte S und «nicht S », dass *höchstens* einer von ihnen wahr sein kann, also *nicht beide zugleich* wahr sind).

³⁵ So wäre es für die Logik fatal, könnte der Logiker sich nicht a priori darauf verlassen, dass es einer bestimmten Aussage entweder die 1 als Wahrheitswert zugeordnet hat oder dies nicht getan hat, und dass der Sachverhalt, dass er dieser Aussage die 1 zugeordnet hat, entweder zutrifft oder nicht, d. h. entweder wahr oder falsch ist.

³⁶ Per Definition ist ein Objekt allein schon dann ein wahrer bzw. falscher Sachverhalt, wenn das Objekt als wahr bzw. falsch beurteilt werden muss – unabhängig davon, ob es womöglich *zugleich* als falsch bzw. wahr zu beurteilen wäre. Trivial ist allerdings der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, wenn er bezüglich des Wahrheitswertes ausgesprochen wird (siehe Fußnote 34): Denn dass ein Sachverhalt mindestens einen Wahrheitswert hat, gilt per Definition des Sachverhalts.

identisch ist.³⁷ S und «nicht S » sind artgleiche Sachverhalte, da sie denselben Inhalt vorgeben, dessen Bestehen einmal bejaht und einmal verneint wird. Es begründen also Bejahung und Verneinung ein „Auseinander“ artgleicher Sachverhalte, und so könnte man denken, dass Bejahung und Verneinung zwei Punkte eines Universums sind, mit denen die positiven bzw. negativen Sachverhalte koinzidieren. Das wäre richtig, wenn man jeden Sachverhalt *in objektiver Weise* als positiv oder negativ charakterisieren könnte. Doch dies scheint nicht immer zwanglos möglich zu sein.³⁸

Dagegen ist stets objektiv festgelegt, *welcher von beiden Sachverhalten der wahre und welcher der falsche ist*. Die beiden „Punkte“, welche das Auseinander der beiden Sachverhalte bewirken, sind daher nicht Bejahung und Verneinung, sondern Wahrheit und Falschheit. Diese Einsicht liegt dem zweiten Kontradiktionsprinzip zugrunde: dass nämlich die beiden artgleichen, durch S und «nicht S » beschriebenen Sachverhalte sich stets so auf die beiden Wahrheitswerte verteilen, dass stets beide Wahrheitswerte mit je einem der Sachverhalte koinzidieren. Wir haben demnach ein Universum mit nur zwei Punkten vor uns, mit denen sämtliche Sachverhalte koinzidieren, und diese beiden Punkte sind die *Wahrheitswerte* „wahr“ (oder: *die Wahrheit*, der *Wahrpunkt*) und „falsch“ (oder: *die Falschheit*, der *Falschpunkt*). Ich nenne dieses Universum das *logische Universum*. Das logische Universum ist offensichtlich weder ein zeitliches noch ein räumliches. Denn bei zeitlichen und ebenso bei räumlichen Universen haben die dort eingeordneten Objekte (absolut gesehen) denselben Wirklichkeits-Status, während sich hier *an dem einem Punkt nur wirkliche, an dem anderen aber nur unwirkliche Objekte befinden*.

Das Wirken wahrer Sachverhalte

Die Wahrheit ist gegenüber der Falschheit durch ihren Bezug zur Wirklichkeit ausgezeichnet: Nur wahre Sachverhalten geben etwas vor, was „wirklich“ der Fall ist, so dass wir wahre Sachverhalte zu den „wirklichen“ Objekten (Aktualitäten) rechnen, sie also als *wirksam* ansehen. Falsche Sachverhalte sind dagegen unwirksame Vorgaben: Fiktionen oder Impossibilien, je nachdem, ob sie hätten wahr sein können oder nicht.³⁹ Aber *wie* wirkt ein wahrer Sachverhalt? Ich sehe hier vier mögliche Wirkweisen. *Erstens* wirken alle Wahrheiten, auch zeitlose, dadurch, dass sie andere Wahrheiten *begründen*.⁴⁰ So begründet jeder wahre Sachverhalt S mindestens einen (neuen) Sachverhalt, nämlich den, *dass S wahr ist*. *Zweitens* können zeitliche Wahrheiten (d. h. Ereignisse) dadurch wirken, dass sie ein anderes Ereignis als zeitliche Folge hervorrufen. *Drittens* können auch zeitlose Wahrheiten in Verbindung mit zeitlichen in der Zeit wirken, z. B. können die Naturgesetze unseres Raum-Zeit-Kontinuums zusammen mit den Anfangsbedingungen eines Systems den weiteren zeitlichen Verlauf des Systems determinieren. *Viertens* wirken manche wahren Sachverhalte, wie schon im Abschnitt über Wirkarten (oben S. 37–39) erwähnt wurde, auf sich selbst, indem sie sich selbst in Geltung

³⁷ Dagegen sind die *Aussagen* A , «nicht A » und «nicht nicht A » drei voneinander verschiedene Aussagen, von denen die erste und die letzte äquivalent (aber nicht gleich) sind.

³⁸ Denn ob z. B. der mit « X ist gerade» beschriebene Sachverhalt positiv und der mit « X ist nicht gerade» negativ ist, hängt von der Formulierung ab, man könnte ja den ersten Sachverhalt auch durch « X ist nicht krumm» beschreiben und den zweiten durch « X ist krumm».

³⁹ Allerdings kann man nicht sagen, dass sich der Unterschied zwischen Wahrheit bzw. Falschheit in diesem verschiedenen Wirklichkeitsbezug erschöpft. Wahrheit ist nämlich auch *unabhängig vom Verhältnis zur Wirksamkeit* gegenüber der Falschheit ausgezeichnet, und zwar durch das folgende rein logische Kriterium: Ist S ein wahrer Sachverhalt, so ist « S ist wahr» ein neuer wahrer Sachverhalt; ist dagegen S ein falscher Sachverhalt, so ist « S ist falsch» keineswegs ein neuer *falscher*, sondern wieder ein neuer *wahrer* Sachverhalt. So gibt es also eine rein logisch begründete „Asymmetrie“ zwischen Wahrheit und Falschheit.

⁴⁰ Wenn ein Sachverhalt wahr ist, „weil“ ein anderer es ist, so begründet der letztere den ersten. Z. B. kann der Sachverhalt, dass die Sonne scheint, den Sachverhalt begründen, dass es hell ist. Von dieser *Begründung* ist die logische *Implikation* (*Ableitung*) zu unterscheiden, die nur schließt, dass ein Sachverhalt wahr ist, „wenn“ (nicht: „weil“) ein anderer es ist. Die Implikation ist nur ein Zusammenhang, der unsere Erkenntnis vom einen Sachverhalt zum anderen leitet, ohne dass der eine den anderen begründen müsste.

setzen: Das sind die so genannten *notwendig wahren Sachverhalte*, deren Wahrheit von selbst einleuchtet. Ein *falscher Sachverhalt* kann dagegen überhaupt nichts bewirken (so kann z. B. auch ein notwendig falscher Sachverhalt keineswegs seine eigene Falschheit begründen), denn was immer ein falscher Sachverhalt *S* zu begründen scheint, ist in Wirklichkeit das „Werk“ des wahren Sachverhalts, *dass S falsch ist*.

Zum Vollkommenheitscharakter des Wirkens von Sachverhalten ist zu sagen, dass sie nicht nur vorbereitend oder ausgestaltend am Wirken beteiligt sind wie die Universen, sondern selbst als „aktive Einheiten“ angesehen werden können. Dennoch wirken und sind sie nicht „für sich“, sondern „handeln von anderen Objekten“ und „über andere Objekte“: Sachverhalte (z. B. Ereignisse, Naturgesetze, und logische Gesetze) können nicht für sich selbst bestehen, sondern setzen (wenigstens hypothetisch) Objekte anderer Art voraus, deren Verhalten sie beschreiben, und die dann selbst „realer“ sind als diese Sachverhalte, indem sie *für sich selbst* da sind und wirken.

Wirkliche Welt und mögliche Welten

Den *notwendig wahren* Sachverhalten stehen die *kontingent wahren* Sachverhalte gegenüber: Diese könnten unter Umständen auch falsch sein, so dass ihre Wahrheit in anderen wahren Sachverhalten begründet liegt. Entsprechend gibt es *kontingent falsche* und *notwendig falsche* Sachverhalte (solche, deren Verneinung kontingent wahr bzw. notwendig wahr ist). Zwar haben alle Sachverhalte im logischen Universum ihren festen Platz, indem sie entweder mit dem Wahrpunkt oder mit dem Falschpunkt koinzidieren (also gewissermaßen „in“ der Wahrheit bzw. Falschheit sind), aber bei den notwendigen Sachverhalten ist die „Verankerung“ in ihrem Wahrheitswert noch „fester“ als bei anderen, da sie unter keinen Umständen eine andere Position hätten haben können. Die kontingenten Sachverhalten dagegen sind solcherart, dass sie widerspruchsfrei einen anderen Wahrheitswert hätten annehmen können als sie tatsächlich angenommen haben. Die Eigenschaften „notwendig“ und „kontingent“ schreiben wir auch Objekten *x* zu, die keine Sachverhalte sind, und zwar heißt *x notwendig* oder *kontingent*, wenn dies für den Sachverhalt zutrifft, *dass x wirklich ist*.

Die tatsächliche Verteilung der Sachverhalte auf die beiden Wahrheitswerte im logischen Universum kann man die *wirkliche Welt* oder die *Wirklichkeit* nennen. Da die kontingenten Sachverhalte fiktiv hätten anders verteilt sein können, gibt es mehrere (und wie man leicht einsieht: unendlich viele) fiktive Verteilungen der Sachverhalte auf die beiden Wahrheitswerte. Solche Verteilungen nenne ich *fiktive Welten*, und fasse sie mit der wirklichen Welt zu den *möglichen Welten* zusammen.⁴¹

Die Bezeichnung „Welt“ besteht hier zu Recht. Denn die Entscheidung, welche von allen möglichen Welten die wirkliche Welt (also die tatsächliche Verteilung der Sachverhalte im logischen Universum) ist, entscheidet nicht nur darüber, welche *Sachverhalte*, sondern schlechthin welche *Objekte* wirklich sind und welche nicht, so dass dadurch nicht nur der Wirklichkeits-Status aller Sachverhalte, sondern auch der aller übrigen Seienden vollständig charakterisiert ist. Denn ob *x* ein wirkliches Objekt ist oder nicht, ist ja dadurch entschieden, welcher von den beiden *Sachverhalten*, *dass x wirklich ist* und *dass x nicht wirklich ist*, der wahre ist.

4.4.4 Wirkliche Attribute

Wie auf S. 32–34 erklärt wurde, kann man die konkreten Attribute eines Objekts einteilen in jenseitige, relative, akzidentielle und essentielle. Abgesehen von den jenseitigen, die mit dem Wirken des Objekt nichts zu tun haben, hängen die konkreten Attribute eines wirklichen Objekts mit des-

⁴¹ Ihnen stehen noch die *unmöglichen Welten* gegenüber, die zu den Impossibilia gehören. Darunter sind z. B. solche, in denen notwendig wahre oder falsche Sachverhalte ihren Wahrheitswert vertauschen, oder auch solche, in denen die Kontradiktionsprinzipien nicht gelten, also Sachverhalte zugleich mit beiden Wahrheitswerten koinzidieren oder ein Sachverhalt und seine Negation denselben Wahrheitswert haben.

sen Wirken zusammen und sind daher selbst „wirklich“. Dass zunächst die *akzidentiellen* Attribute (Akzidentien) eines wirklichen Objekts mit seinem Wirken zu tun haben, ist klar, denn in diesen Attributen besteht ja gemäß der Erklärung auf S. 33 geradezu die Wirkentfaltung des Objekts.

Aber auch die *essentiellen* Attribute (Wesensattribute) sind wirkbezogen, denn da wir Objekte nur durch ihr Wirken erkennen können, nimmt jede Wesensbeschreibung auf ein Wirken Bezug. In der Tat beschreiben Wesensattribute immer eine „natürlichen Neigung“ oder „Hinordnung“ zum Wirken, indem sie „fordern“, dass ein Wirken geschehe und ein entsprechendes Wirkvermögen vorhanden sei. Beispielsweise pflegt man als eines der Wesensattribute des Menschen seine „Rationalität“ aufzuzählen. Damit kann nicht gemeint sein, dass der Mensch tatsächlich stets denken muss auch nur denken können muss, um Mensch zu sein. Menschen sind, wie WHITEHEAD sagt, „nur zeitweise rational, neigen lediglich zur Rationalität“,⁴² und genau diese natürliche Neigung oder Hinordnung ist mit der Wesenseigenschaft der Rationalität in der Definition des Menschen gemeint.⁴³ In dieser Weise also scheinen alle Wesensattribute auf das Wirken bezogen zu sein, und selbst das allgemeinste Attribut, das Sein, kann vor diesem Hintergrund als „allgemeinste Forderung zum Wirken“ gedeutet werden (die dann also auch bei unwirklichen Objekten besteht, aber unerfüllt bleibt).

Die Wesensattribute zeichnen somit ein Wirken vor, während die *Wirkvermögen*, durch welche dieses Wirken ausgeübt werden kann, ebenso wie die damit ausgeübten *Wirkakte* zu den Akzidentien zählen. Ein Wirkvermögen ist etwas, was von den Wesensattributen *gefordert* wird und daher *normalerweise* (wenn auch nicht notwendigerweise) vorhanden ist, während ein Wirkakt als ein Vollzug des Wirkvermögens nur zeitweise stattfindet. So ist beim Menschen die *Hinordnung auf das Denkenkönnen* Wesensattribut, das *tatsächliche Denkenkönnen* (*Denkvermögen*) ist bereits ein Akzidens, und darauf aufbauend ist erst recht das *tatsächliche Denken* ein Akzidens. Wesensattribute, Wirkvermögen und Wirkakte eines wirklichen Objekts sind diejenigen Attribute, die sein Wirken direkt betreffen, aber auch die übrigen betreffen es wenigstens indirekt, indem sie die Wirklichkeit seiner räumlich-zeitlichen Einordnung ausgestalten (etwa Farben, Gestalten, Töne) oder die Wirklichkeit seiner Stellung gegenüber anderen Dingen charakterisieren (die relativen Attribute).

4.4.5 Substanzen

Eine *Substanz* ist ein vollständiges Objekt, dass für sich selbst wirkt.⁴⁴ Mit „Vollständigkeit“ ist die schon im Abschnitt über Attribute (oben S. 34) beschriebene dreifache Unabhängigkeit von anderen

⁴² WHITEHEAD, *Process* part 2 chapter 2 section 5 S. 122, Ausgabe Griffin/Sherburne S. 79, Ausgabe Holl S. 159: „only intermittently rational – merely liable to rationality“.

⁴³ Deshalb kann jemand auch dann ein Mensch sein, wenn er gerade nicht denkt, oder wenn er diese Fähigkeit noch nicht voll entwickelt hat, und sogar auch dann, wenn er aufgrund von Hindernissen in seiner natürlichen Entwicklung gehemmt wird und darum die von seinem Wesen her geforderte Denkfähigkeit tatsächlich nie erlangt.

⁴⁴ Es gibt in der Philosophie verschiedene Definitionen der Substanz. Für die aristotelisch-thomistische Philosophie ist sie „das Grundwesen, dem es zukommt, für sich zu sein und nicht an einem anderen“ (GREDT, *Elementa* Band 1 S. 146, deutsche Ausgabe S. 92; vgl. Band 2 S. 120–133, deutsche Ausgabe S. 109–120). Das würde auch für fiktive vollständige Seiende zutreffen. Nach LEIBNIZ ist für die Substanz dagegen charakteristisch, ein wirkfähiges Seiendes zu sein: „un Être capable d’Action“ (LEIBNIZ, *Natur und Gnade* § 1, Schriften Band 1 S. 414; ähnlich FARRER, *Infinite* S. 245). DESCARTES definiert die Substanz als „ein Ding, dass so existiert, dass es zu seiner Existenz keines anderen Dinges bedarf“ (DESCARTES, *Principia* Teil 1 § 51, Ausgabe Buchenau S. 17; vgl. Werke Band 8/1 S. 24 Zl. 21–23, Werke Band 9/2 S. 47), was SPINOZA verschärft zu der Bestimmung, Substanz sei, „was in sich selbst ist und durch sich selbst begriffen wird“ (SPINOZA, *Ethik* Teil 1 Def. 3, Ausgabe Bartuschat S. 5). Die letzten beiden Definitionen scheinen zu weit zu gehen, weil ihnen zufolge eigentlich nur Gott eine Substanz wäre. Diese Konsequenz hat SPINOZA explizit vollzogen (*Ethik* Teil 1 Lehrsatz 14, Ausgabe Bartuschat S. 30f). Auch DESCARTES hat sie gesehen (a.a.O.), weshalb er neben der eigentlichen Substanz (= Gott) noch einen untergeordneten Substanzbegriff einführte, der geschaffene Körper und Geister zusammenfassen soll als diejenigen Dinge, „die bloß Gottes Beistand zu ihrem Dasein bedürfen“ (*Principia* Teil 1 § 52, Ausgabe Buchenau S. 18, vgl. Werke Band 8/1 S. 25 Zl. 2–3; Band 9/1 S. 47).

Objekten gemeint, dass nämlich das Objekt kein Sachverhalt, keine willkürliche Zusammenstellung anderer Objekte und kein willkürlicher Ausschnitt aus einem Objekt ist. Das „für sich Wirken“ soll schließlich den Gegensatz zum Wirken der Attribute und Sachverhalte ausdrücken, deren Wirken sich wesentlich auf andere Objekte bezieht.

Eine Substanz nenne ich *rein materiell* (oder einen *Körper*), wenn sie in ein räumliches oder raum-zeitliches Universum eingeordnet ist (das heißt dort durch Einordnung gegenwärtig ist; siehe S. 40). Materialität ist demnach dasselbe wie raumbezogene Substanzialität.⁴⁵ Ist die Substanz weder ganz noch teilweise in ein räumliches Universum eingeordnet, nenne ich sie *immateriell*, *unkörperlich* oder *geistig*, und unter einer *materiell-geistigen* Substanz verstehe ich eine solche, die nur teilweise in ein räumliches Universum eingeordnet ist.

Die vollkommenheitsmäßig untersten Substanzen sind diejenigen, die von Natur aus die in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Lebenstätigkeiten nicht ausüben können. Als mögliche Form inneren Wirkens bleibt für diese *unbelebten Substanzen* nur die partielle Selbstbegründung übrig, wie sie etwa einem Elementarteilchen in Bezug auf seine Erhaltungsgrößen zukommt.⁴⁶ Standardbeispiele für unbelebte Substanzen sind Atome, Moleküle, Minerale und Sterne. Die uns gut bekannten unbelebten Substanzen sind alle dreidimensional ausgedehnt, aber möglicherweise gibt es auch nicht-ausgedehnte (punktförmige) materielle Substanzen,⁴⁷ und auch immaterielle unbelebte Substanzen kann man nach obiger Definition nicht ausschließen.⁴⁸

Substanzen, die sich kraft inneren Wirkens selbst unbegrenzt entfalten können, heißen *Lebewesen*. Als spezifische Wirkweisen für Lebewesen wurden in Abschnitt 4.4.1 Fortpflanzung und Erkennen beschrieben, wobei sich zeigte, dass Erkenntnis schlechthin vollkommener als Fortpflanzung ist. Es ist daher sinnvoll, die von ihrem Wesen her nicht mit Erkenntnis begabten Lebewesen als *unbewusste Lebewesen* zusammenzufassen und sie nach den unbelebten Substanzen auf die nächst höhere Stufe zu stellen, die mit Erkenntnis begabten dagegen auf die übernächste. Beispiele für unbewusste Lebewesen sind wahrscheinlich die Pflanzen.

Vollkommener als die unbewussten sind die mit Erkenntnis und somit Bewusstsein ausgestatteten Lebewesen, die man *Bewusstseinswesen* nennen kann. Da nun geistiges Erkennen vollkommener ist als sinnliches (siehe S. 24–25), stehen direkt über der Stufe der unbewussten Lebewesen die *nur* mit sinnlicher Erkenntnis ausgestatteten Bewusstseinswesen, d. h. die *nichtpersonalen Bewusstseinswesen*, und über diesen dann die mit geistiger Erkenntnis ausgestatteten, die *Personen*. Beispiele

⁴⁵ Das Wesen der Materie ist umstritten. Im *Materialismus* wird jede bewusstseinsunabhängige objektive Realität als Materie bezeichnet (vgl. LENIN, *Materialismus*, Werke Band 14 S. 260 und FIEDLER et al. [Hg], *Dialektischer Materialismus* S. 66–71; vgl. auch DÜHRING, *Philosophie* S. 73); immateriell wären dann nur die Impossibilia. Für den *Thomismus* ist der Bezug zum Erkennen das Entscheidende: Immaterialität ist die „Wurzel des Erkennens“ (vgl. GRETT, *Elementa* Band 1 S. 362, deutsche Ausgabe S. 302), so dass rein materielle Körper nichterkennende Substanzen sind. Für DESCARTES ist dagegen der materielle Körper identisch mit dem räumlich Ausgedehnten (vgl. DESCARTES, *Principia* Teil 2 § 4, Werke 8/1 S. 42, Werke 9/2 S. 65, Ausgabe Buchenau S.32f), für LOCKE ist er das räumlich Ausgedehnte und zugleich mit Undurchdringlichkeit Ausgestattete (vgl. LOCKE, *Essay* Buch 2 Kap. 13 § 11, Ausgabe Yolton Band 1 S. 137, Ausgabe Brandt Band 1 S. 197). Unsere Definition umfasst als materielle Körper nicht nur ausgedehnte, sondern auch punktförmig in ein räumliches Universum eingeordnete Wirklichkeiten. Diese Definition lehnt sich an den frühen LEIBNIZ an: „Corporis ... definitio est esse in spatio“ (LEIBNIZ, *Confessio contra atheistas*, Ausgabe Erdmann S. 47). Später sah LEIBNIZ im Körper eine aus mehreren Kraftpunkten (Monaden) zusammengesetzte Substanz (LEIBNIZ, *Monadologie* § 1, Schriften Band 1 S. 414f).

⁴⁶ Vgl. Fußnote 13 auf S. 37.

⁴⁷ Manchmal wird vermutet, dass die Elementarteilchen von dieser Art sein können (siehe S. 668). Wenn man mit DESCARTES das Wesen von Materialität in der Ausdehnung sieht (siehe Abschnitt 8.11.4), müsste man solche Substanzen geistig nennen.

⁴⁸ Von dieser Art sind vielleicht die Psychonen, aus denen sich nach der Hypothese des Gehirnforschers ECCLES die Seele zusammensetzt (siehe Fußnote 38 auf S. 783). Immaterielle unbelebte Substanzen wären allerdings ausgeschlossen, wenn man mit dem Thomismus das Wesen der Materialität im Mangel an Erkenntnisfähigkeit sieht, so dass immaterielle Substanzen notwendigerweise mit Erkennen ausgestattet wären.

für nichtpersonale Bewusstseinswesen sind wahrscheinlich alle uns bisher bekannten Tiere.⁴⁹

Demgegenüber ist der Mensch eine Person. Allerdings ist sein Erkennen anscheinend (wenigstens in diesem Leben) niemals rein geistig (siehe S. 24–26) und seine thematische Selbsterkenntnis ist immer nur teilweise möglich und unvollkommen, insofern sie stets von sinnlich-unthematischem Erkennen begleitet ist. Wenn nun ein sich selbst erkennendes Wesen genau so *ist*, wie es sich *erkennt*, so kann man schließen, dass die menschliche Person kein reines, sich voll erkennendes Bewusstsein ist und dass folglich etwas Außerbewusstes zur menschlichen Person hinzugehört: ihr „Körper“, den sie als in den Raum eingeordnet erfährt. So steht die menschliche Person auf einer unteren Stufe von Personalität, man kann sie als *sinnlich-geistige* Person oder noch genauer als *materiell-sinnlich-geistige* Person bezeichnen.

Darüber hinaus kann man sich eine Person denken, die rein thematisch erkennen kann. Diese wäre mit ihrem geistigen Ich voll identisch, also reines Bewusstsein. Derartige hypothetische Personen kann man *rein-geistige Personen* oder *reine Geister* nennen. Reine Geister mit der zusätzlichen Eigenschaft, in unser Raum-Zeit-Kontinuum hinein wirken zu können, kann man mit den *Engeln* der jüdisch-christlich-islamischen Tradition identifizieren.⁵⁰

4.4.6 Ausblick

In gewisser Hinsicht ist unser Durchgang durch die Seins-Stufen nun abgeschlossen. Es wäre aber noch zweierlei zu ergänzen. Zum einen wurde noch nicht über *Gott* geredet. Gott müsste natürlich, wenn überhaupt, „ganz oben“ auf der höchsten Seinsstufe angesiedelt werden. Dies ist aber in einem eigenen Abschnitt zu erörtern (siehe Abschnitt 9.4.15). Zum anderen wurde der Begriff der *Vielheit* noch nicht erklärt. Dieser ist für unser Thema sehr wichtig, da es in erster Linie die Vielheiten sind, denen wir unter Umständen Unendlichkeit zuschreiben. Vielheiten aber können aus Seienden aller möglichen Arten „bestehen“, die dann „Bestandteile“ der Vielheit heißen. So kann eine Vielheit aus zwei wirklichen Seienden, aber auch aus einem wirklichen und einem nur möglichen bestehen, aus zwei Akzidentien ebenso wie aus zwei Punkten oder aus zwei göttlichen Personen. Diese Universalität der Vielheiten ist zusammen mit der Universalität des Denkens ein Grund für die universelle Tragweite der Mengenlehre und damit der Mathematik. Wegen ihrer alle Seins-Kategorien durchbrechenden Universalität („Transzendentalität“) gehört aber das Thema „Vielheiten“ nicht mehr zur Exposition der Klassen des Seienden, sondern ist im folgenden Abschnitt zu behandeln, der den transzendentalen Gegebenheiten gewidmet ist (siehe Abschnitt 4.5.5).

Hier sei aber noch bemerkt, dass man Vielheiten ebenfalls den beschriebenen Seinsstufen zuordnen kann, und zwar sollte man sinnvollerweise eine Vielheit immer auf die *unterste* Stufe setzen, zu der mindestens ein Bestandteil der Vielheit gehört. Wenn also z. B. auch nur ein einziger Bestandteil einer Vielheit zu den Impossibilen gehört, zählen wir darum auch die ganze Vielheit zu den Impossibilen, d. h. betrachten sie als widersprüchlich.

⁴⁹ Vgl. hierzu die Ansicht des Gehirnforschers ECCLES, wonach „Tiere, wenn sie Bewusstsein besitzen, dennoch kein Selbstbewusstsein ... haben“ (POPPER und ECCLES, *Self* S. 524). Auch POPPER schreibt Tieren nur eine „nicht-selbstbewusste Bewusstheit“ zu (ebd. S. 531; vgl. ebd. S. 589, 612f, 635, 650f und 659).

⁵⁰ Philosophisch können wir natürlich nicht die wirkliche Existenz dieser Wesen beweisen, sondern nur ihre Existenzmöglichkeit einsehen. Zumindest existieren also widerspruchsfreie Fiktionen solcher Wesen.

4.5 Transzendente Gegebenheiten

Nach der Exposition der verschiedenen Seinsstufen sollen nun die „transzendentalen Gegebenheiten“ erörtert werden, die das Seiende als solches charakterisieren.

4.5.1 Transzendentalien

Unter *Transzendentalien* versteht man Attribute, die jedem Seienden zukommen, die man also von jedem Seienden aussagen kann. In der scholastischen Tradition sind dies die folgenden:

ens (Seiendes), res (Ding), aliquid (etwas), unum (eins), verum (wahr), bonum (gut),⁵¹
und als siebtes Transzendente gilt manchmal noch das pulchrum (schön).

Jedes Seiende ist demzufolge ein Seiendes, ein Ding, ein Etwas, eins, wahr, gut und schön. Das Seiende wurde *wahr* genannt, weil es *erkennbar*, und *gut*, weil es *anstrebbar* ist. *Schönheit* wurde als „Einheit von Wahrheit und Gutheit“ definiert. Diese drei Transzendentalien nannte man wegen ihres Bezugs zum Erkennen und Wollen *relativ*, die übrigen aber *absolut*, weil sie dem Seienden unabhängig von irgendwelchen Bezügen zukommen. Ich würde nun die folgenden fünf Attribute als bedeutsame Transzendentalien ansehen.

1. *Wahrheit*. Die scholastische Philosophie hat richtig erkannt, dass alles Seiende denkbar sein muss.⁵² Dies scheint die am leichtesten einsehbare Eigenschaft aller Seienden zu sein, und verdient darum, als Transzendente aufgeführt zu werden.⁵³

2. *Gutheit*. Die scholastische Gleichsetzung von Gutheit mit „Anstrebbbarkeit durch den Willen“ scheint mir nicht hinreichend zu sein. Wie in Fußnote 4.4.1 auf S. 37 ausgeführt, umfasst Gutheit (mindestens) drei Dimensionen, nämlich neben dem Aspekt des Angestrebterwerdens auch jenen der selbstlosen Hingabe und der vom Streben unabhängigen Werthaftigkeit. Die Gutheit ist letztlich die Ähnlichkeit mit der so bestimmten *Idee des Guten*, mit der *jedes* Seiende verglichen werden kann. Daher ist Gutheit ein Transzendente.⁵⁴

3. *Macht*. Neben Wahrheit und Gutheit scheint es noch ein weiteres relatives Transzendente zu geben, das in der scholastischen Transzendentalien-Liste nicht auftaucht, nämlich Macht. Denn jedes Seiende hat, wie wir gesehen haben, eine mehr oder weniger große Macht im Sinne von Realität oder Selbständigkeit gegenüber dem Denken und anderen Seienden.

⁵¹ Vgl. SUÁREZ, *Disputationes* 3 sectio 2 § 1 Ausgabe Berton Band 1 S. 107b und GREDT, *Philosophie* Band 2 S. 11–31, deutsche Ausgabe S. 9–25.

⁵² Vgl. das von THOMAS VON AQUIN ausgesprochene Prinzip universaler Intelligibilität (Fußnote 1 auf S. 28).

⁵³ Dagegen, dass dieses Transzendente „Wahrheit“ genannt wird, könnte man allerdings einwenden, dass Wahrheit im eigentlichen Sinn nur bestimmten, nicht aber allen Seienden zugesprochen werden kann: nämlich nur den (wirklich bestehenden) Sachverhalten. Im weiteren Sinn kommt Wahrheit gewissen Urteilen und Aussagen zu, und schließlich Personen mit dem Bestreben, wahre Urteile zu fällen und auszusprechen (doch spricht man hier besser von *Wahrhaftigkeit*). Insofern aber das Denken in erster Linie auf das Erkennen von wahren Sachverhalten (Wahrheiten) hinzielt, ergibt sich ein gewisses Recht, den Begriff der Wahrheit im weitesten Sinn auf alles Denkbare auszudehnen.

⁵⁴ Man könnte einwenden, dass man auf gleiche Weise zu jedem beliebigen Objekt *X* als ein besonderes Transzendente die *X*-haftigkeit einführen könnte, weil jedes Seiende mit *X* verglichen werden kann. Das ist richtig, aber alle diese unendlich vielen *X*-haftigkeiten drücken im Wesentlichen dasselbe aus: die allgemeine Vergleichbarkeit und damit Zusammengehörigkeit der Seienden, also das, was mit dem später zu besprechenden Transzendente der *Einheit* ausgesagt wird. Mit der Gutheit dagegen ist die Ähnlichkeit der Seienden mit einer *ausgezeichneten* Idee ausgesagt, die ein *nicht-willkürlich* gewählter Maßstab für die Vollkommenheit jedes einzelnen Objekts ist.

4. *Sein und Wesen*. Für jedes Seiende trifft es zu, *dass* es in irgendeinem wenn auch noch so schwachen Sinn *das Nichtsein von sich abstößt*,⁵⁵ und dass es inhaltlich abgegrenzt ist, also *anderes Sein von sich abstößt*. Im Blick auf die erste Tatsache schreibt man dem Seienden eine das Nichtsein abstoßende Kraft zu, die man sein *Sein* nennt, und im Blick auf die zweite Tatsache eine Grenze, die man sein *Wesen* nennt.⁵⁶ Dieses Wesen ist als *transzendentes* Wesen sowohl von dem *physischen* als auch von dem *metaphysischen* Wesen des Seienden zu unterscheiden.⁵⁷ Da jedes Seiende also durch sein Sein und sein Wesen charakterisiert ist, sind die Attribute des Seins und des Wesens (genauer: des Sein-Habens und Wesen-Habens) weitere, und zwar absolute Transzendentalien.⁵⁸ Das Transzendente „Sein-Haben“ entspricht dem „ens“ (das Seiende = das Sein Habende) in der scholastischen Transzendentalien-Liste, und das „Wesen-Haben“ vielleicht dem „aliquid“ (Etwas).

5. Dass jedes Seiende ein „unum“ (eine Einheit) ist, könnte man mit Blick auf die noch zu besprechenden Vielheiten bezweifeln. Doch operiert man im Denken auch mit einer Vielheit stets so, als sei sie *ein* Etwas: Man spricht ja von *einer* Vielheit. Der Grund dafür ist, dass die Vielheit im Denken „zusammenfassbar“ wird (wenngleich dies bei inkonsistenten Vielheiten eine widersprüchliche Zusammenfassung sein kann). Sie bilden darum immer eine Einheit in einem mehr oder weniger strengen Sinn. So ist die Einheit ein Transzendente.

Die übrigen Transzendentalien der Scholastiker (Schönheit und Ding) können als überflüssig beiseite getan werden.⁵⁹ Die hauptsächlichen Transzendentalien sind somit *wahr, gut, mächtig, eins, Wesen habend und Sein habend*. Handelt es sich bei diesen Attributen um verschiedene „Teile“ des Seienden? Diesbezüglich behauptet der Thomismus, dass es eine reale Verschiedenheit von Sein und Wesen gäbe, andere leugnen dies. Um hier entscheiden zu können, müssen wir Klarheit darüber gewinnen, welche grundlegenden Klassen von Unterschieden und Identitäten es gibt.

4.5.2 Unterschiede und Identitäten

Man betrachtete in der Scholastik die folgenden Arten von Unterschieden:⁶⁰

1. reale Unterschiede,
2. rein gedankliche Unterschiede,
3. Unterschiede, die weder real noch rein gedanklich sind, nämlich:
 - a) virtuelle Unterschiede = gedankliche Unterschiede mit sachlichem Fundament, und
 - b) formale Unterschiede.

⁵⁵ Das gilt, wie wir gesehen haben, auch für das Nichts, insofern auch dieses dem Denken „gegeben“ und daher im Denken „anwesend“ sein kann.

⁵⁶ Die Lehre von Sein und Wesen geht auf ALFARABI (siehe S. 708) zurück und wurde vor allem von THOMAS VON AQUIN und FRANCISCO SUÁREZ weiterentwickelt (vgl. dazu CORETH, *Metaphysik* § 25 S. 187–194). Vgl. auch die weiterführenden Ideen von CORETH (ebd. § 24–29 S. 178–215).

⁵⁷ Zum physischen und metaphysischen Wesen siehe S. 33 mit Fußnote 7.

⁵⁸ Im Vorgriff auf die Gotteslehre könnte man einwenden, dass Gott ein unbeschränktes Sein hat und ihm daher kein Wesen zukommen könne. Doch auch Gott muss ein Wesen haben, das allerdings einzigartig ist. Das Wesen eines nicht-göttlichen, eingeschränkten Seienden erfüllt nämlich seine Aufgabe dadurch, dass es das Sein einschränkt, also die Nichtseins-ausschließende Wirkung des Seins teilweise aufhebt. Bei Gott dagegen *besteht die Wesensgrenze gegenüber den eingeschränkten Seienden gerade darin, dass eine solche Einschränkung fehlt*. Statt zu sagen, dass bei Gott das Wesen fehlt, sagt man also besser, dass hier *Sein und Wesen identisch* sind.

⁵⁹ Bei der Schönheit ist dies schon aus der Definition („Einheit von Wahrheit und Gutheit“) ersichtlich. Dasselbe gilt für den Ausdruck „Ding“, den man etwa als „Einheit von Sein und Wesen“ definieren könnte.

⁶⁰ Vgl. GREDT, *Elementa* Band 1 S. 102–104, deutsch Ausgabe S. 70–73; POHLE, *Dogmatik* Band 1 S. 74–77; SCHEEBEN, *Dogmatik* Band 1 § 73 S. 526–530; SUÁREZ, *Disputationes* 7, Ausgabe Berton Band 1 S. 250a–274b; SCHELL, *Dogmatik* Band 1 S. 245–247.

Ein *realer Unterschied* ist ein objektiver: Es liegen zwei Objekte vor. Dagegen liegt bei einem *rein gedanklichen Unterschied* eigentlich nur ein einziges Ding vor, das dadurch vervielfacht wird, dass man es durch verschiedene Gedanken erfasst, wobei dieses verschiedene Denken von der Natur der Sache her nicht erforderlich ist: z. B. dieselbe Kugel, einmal von links, einmal von rechts betrachtet. Zwischen diesen beiden Extremen sollen der virtuelle und der formale Unterschied liegen, wobei der virtuelle dem rein gedanklichen, der formale aber dem realen Unterschied näher steht. Die Thomisten treten für die Alleinberechtigung des virtuellen Unterschieds ein, während die Scotisten diesen verwerfen und durch den formalen ersetzen: Einen *virtuellen Unterschied* (*distinctio rationis cum fundamento in re*) sehen die Thomisten dort, wo – ganz wie beim rein gedanklichen Unterschied – eigentlich nur in Gedanken unterschieden wird, diese Unterscheidung aber ein „sachliches Fundament“ besitzt, d. h. der Sache angemessen ist und von ihr objektiv gefordert wird. Was dann im Objekt vorliegt, soll zwar kein objektiver *Unterschied*, wohl aber eine objektive *Unterscheidbarkeit* sein, die durch den Verstand aktualisiert wird, indem er verschiedene Begriffe bildet. Für die Scotisten liegt dagegen immer dann, wenn wir objektiv genötigt sind, ein real ungeteiltes Ding durch verschiedene Begriffe zu beschreiben, ein *formaler Unterschied* vor, denn es gibt dann im Ding selbst verschiedene „Formalitäten“ (z. B. im Menschen: seine Vernünftigkeit und Lebendigkeit).

Die Problematik des virtuellen Unterschieds liegt darin, dass unklar ist, welcher Natur das „sachliche Fundament“ der „objektiven Unterscheidbarkeit“ sein soll, wenn sich im Ding selbst *gar nichts* unterscheiden soll.⁶¹ Logisch klarer ist der „formale Unterschied“ konzipiert, wobei die scotistischen „Formalitäten“ offenbar nichts anderes sind als konkrete Attribute. Eine Schwachstelle in der scotistischen Lehre ist allerdings, dass der formale Unterschied eigentlich gar nicht wesentlich andersartig ist als der reale. Der einzige Grund zum Auseinanderhalten dieser Unterschieds-Arten soll der sein, dass es beim realen Unterschied „Dinge“ und beim formalen „Formalitäten“ sind, die sich unterscheiden. Demgegenüber sollte man doch aber erwarten, dass verschiedene *Unterschieds-Arten* wirklich *als Unterschiede*, also *in der Art ihres Unterscheidens* verschieden sind: Für die Einteilung von Unterschieden sollte es keine Rolle spielen, *was für* Objekte, sondern *wie* Objekte sich unterscheiden.

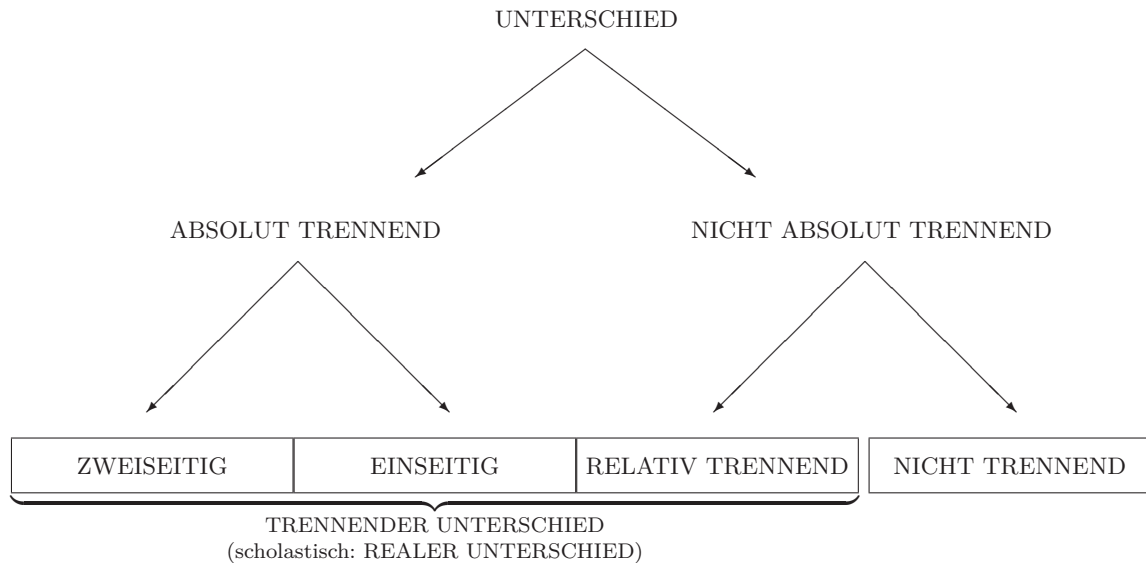
Unter diesem Aspekt wäre nun die Unterschiedslehre neu zu bedenken. Zunächst muss klargestellt werden: Objekte *A* und *B* sind entweder identisch oder verschieden; einen dritten Fall gibt es nicht. Im ersten Fall handelt es sich eigentlich nur um ein einziges Objekt, also kann man nur im zweiten Fall sinnvollerweise fragen, welcher Art der Unterschied ist. Hier sehe ich zunächst zwei wesentlich verschiedene Arten: entweder ist eines der Objekte *A* und *B* widerspruchsfrei ohne das andere denkbar, oder die Objekte sind ineinander inbegriffen (derart dass keines von ihnen widerspruchsfrei ohne das andere gedacht werden kann).

Ist mindestens eines der Objekte widerspruchsfrei ohne das andere denkbar, möchte ich von einem *absolut trennenden Unterschied* reden. Dieser zerfällt sofort in zwei Unterarten: Entweder gilt für *jedes von beiden*, dass es problemlos ohne das jeweils andere gedacht werden kann (so etwa die zwei Hälften einer Kugel), oder *nur eines* der beiden kann widerspruchsfrei ohne das andere gedacht werden (Beispiel: bei einer rot gefärbten Oberfläche kann das Rot dieser Oberfläche nicht ohne die Oberfläche, diese aber ohne das Rot gedacht werden). Im ersten Fall liegt ein *zweiseitiger*, im zweiten ein *einseitiger* absolut trennender Unterschied vor. Liegt aber *gar kein absolut trennender* Unterschied vor, sind also beide Objekte ineinander inbegriffen, kann es trotzdem noch ein grundsätzliches Gegenüber zwischen ihnen geben, zum Beispiel dann, wenn beides sich gegenüberstehende Relationen sind (so stehen sich Elternschaft und Kindschaft als Relationen gegenüber, und doch kann das eine nicht widerspruchsfrei ohne das andere gedacht werden). In diesem Fall spreche ich von einem *relativ trennenden Unterschied*. Zusammen mit dem absolut trennenden Unterschied fasse ich ihn

⁶¹ Vgl. die Beschreibung des Suárez: „ratio ... per modum distinctiorum concipit, quae distincta non sunt“ (SUÁREZ, *Disputationes* 7 sectio 1 § 6, Ausgabe Berton Band 1 S. 251b).

als *trennenden Unterschied* zusammen. Sind schließlich beide Objekte ineinander inbegriffen, *ohne* dass sie sich als Relationen gegenüberstehen, spreche ich von einem *nicht-trennenden Unterschied*. Ein Beispiel wäre das Universum und die Vielheit seiner Punkte: Eines kann nicht ohne das andere gedacht werden, und doch handelt es sich um verschiedene Realitäten (siehe Fußnote 20 auf S. 40).

Vergleicht man diese Unterschiede mit den scholastischen Begriffen, so muss der trennende Unterschied im Sinne der Scholastik als realer Unterschied bezeichnet werden, während der nicht-trennende von den Scholastikern als eine vom realen Unterschied verschiedene Art des Unterschieds aufgefasst werden würde, also – je nach Schule – als formaler oder virtueller Unterschied.



Hierbei ist der größte Unterschied der zweiseitig absolut trennende, dann kommt der einseitig absolut trennende, dann der relativ trennende, dann der nicht-trennende. Man könnte diese Liste noch durch ein uneigentliches Glied ergänzen: Hinter dem „nicht-trennenden Unterschied“ käme als noch kleinerer Unterschied der nur gedachte Unterschied (= gar kein Unterschied). Andererseits kann man den „zweiseitig absolut trennenden Unterschied“ noch einteilen durch verschiedene Stufen des *tatsächlichen Auseinander*. Der zweiseitig absolut trennende Unterschied besagt ja nur, dass Objekte vorliegen, von denen jedes ohne das andere gedacht werden kann, und dies begründet die Möglichkeit, dass die Objekte in verschiedener Weise und verschiedenem Ausmaß „auseinander“ sein können (z. B. indem sie mehr oder weniger räumlich oder zeitlich voneinander entfernt sind, oder indem sie an der Bestimmung von mehr oder weniger vielen Dingen gemeinsam beteiligt sind). Wichtig ist aber die Feststellung, dass nicht widerspruchsfrei von einem *totalen Unterschied* gesprochen werden kann: Wann immer Objekte gegeben sind, sind diese vergleichbar, das aber heißt: man kann sie vergleichend nebeneinander stellen und allein dies ist schon eine Gemeinsamkeit.

Die Arten des Unterschieds könnte man umgekehrt auch als Arten der Identität oder Gleichheit auffassen, wobei nun größere Unterschiede als kleinere Identitäten (Gleichheiten) aufzufassen sind und umgekehrt. Ich schlage diesbezüglich folgende Terminologie vor:

1. Liegt *kein* Unterschied vor, haben wir eine *unterschiedslose* Identität oder *Selbigkeit*,
2. ein *nicht-trennender* Unterschied heiße *gleichförmige* Identität,
3. ein *relativ trennender* Unterschied *differenzierte* Identität,
4. ein *einseitig absolut trennender* Unterschied heiße *inkongruente* Identität
5. ein *zweiseitig absolut trennender* Unterschied heiße *kumulative* Identität.

Nun lässt sich die Frage nach der Art des Unterschieds zwischen den Transzendentalien in ein und demselben Seienden beantworten. Da in jedem Seienden dessen Transzendentalien vorhanden sein müssen, können sie im Denken nicht widerspruchsfrei voneinander getrennt werden: Sie sind ineinander inbegriffen. Andererseits sind sie natürlich nicht unterschiedslos identisch, denn wir meinen mit Sein, Wesen, Wahrheit, Gutheit, Macht offenbar durchaus etwas je Verschiedenes. Somit waltet zwischen ihnen ein *nicht-trennender* Unterschied oder *gleichförmige* Identität. Der reale Unterschied, den der Thomismus zwischen Wesen und Sein behauptet, wäre dann also abzulehnen, aber das berechnete Anliegen der thomistischen realen distinctio, nämlich das metaphysische Gefälle zwischen Sein und Wesen zu betonen, kann ebenso auch durch den nicht-trennenden Unterschied aufgegriffen werden, besonders wenn man die Objektivität dieses Unterschieds betont.

4.5.3 Transzendente Unendlichkeiten in jedem Seienden

Der zwischen den Transzendentalien eines Seienden bestehende „kleinste“ aller Unterschiede, der nicht-trennende Unterschied, reicht aus, um eine erstaunliche Unendlichkeit im Bereich eines jeden Seienden aufzudecken. In einem Seienden S unterscheiden sich dessen Transzendentalien (Wahrheit, Gutheit, Macht, Einheit, Wesen, Sein) untereinander und natürlich auch von S . Jedes Transzendentale aber ist selbst ein Seiendes, hat also ebenfalls Transzendentalien: So gibt es ein Sein des Seins von S , ein Wesen des Seins von S , eine Wahrheit des Seins von S usw. Da dies Transzendentalien von Transzendentalien von S (also Attribute von Attributen von S) sind, nennen wir sie *Attribute zweiten Grades* von S . Die Attribute zweiten Grades von S sind natürlich wieder Seiende und haben darum ebenfalls Attribute, zu deren Kernbestand fünf transzendente Attribute gehören. Alle Attribute von Attributen von Attributen mögen *Attribute dritten Grades* heißen. Es ist nun klar, dass man auf diese Weise fortfahrend unendlich viele Grade von Attributen von S definieren kann.⁶² Insbesondere induziert jedes Seiende S die unendliche Attributenkette:

S , Sein von S , Sein des Seins von S , Sein des Seins des Seins von S ...

Diese Konsequenz hat der Thomismus trotz des behaupteten realen Unterschieds zwischen Sein und Wesen nicht gezogen. Man kann ihr aber nur entgehen, wenn man behauptet, dass Sein und Wesen selbst *keine* Seienden sind, sondern etwa „Konstitutiva“ des Seienden. Doch dann gäbe es außer Seiendem noch etwas anderes, und so wäre das Seiende nicht mehr der allgemeinste Gegenstand des Denkens, als welcher er ursprünglich konzipiert war. Eine ähnliche Kette unendlich vieler Bestimmungen wird erkennbar, wenn man beachtet, dass der Unterschied U zwischen zwei Attributen A und B eines Seienden S stets ein sowohl von A als auch von B verschiedenes Attribut zweiter Art von S ist. Weiter ist dann der Unterschied U' zwischen U und A ein Attribut dritten Grades, der Unterschied U'' zwischen U' und A ein Attribut vierten Grades usw.⁶³ So sind in einem beliebigen Seienden stets unendlich viele Attribute inbegriffen, zumindest wenn man Attribute höheren Grades mit hinzurechnet. Aber auch dann, wenn man nur mit Attributen ersten Grades rechnet, ergibt sich eine Unendlichkeit von Attributen für jedes Seiende S . Ist nämlich X ein beliebiges von S verschiedenes Seiendes, so besitzt S das Attribut des Nicht- X -Seins, und da es – wie inzwischen deutlich geworden ist – unendlich viele solche X gibt, besitzt S unendlich viele derartige Attribute.

⁶² Auf eine derartige unendlichen Reihe hat schon PLATON in seinem Dialog *Parmenides* hingewiesen, wo er PARMENIDES ausführen lässt, dass das „seiende Eine“ zunächst zwei Teile (Sein oder Seiendes und das Eine, οὐσία oder ὄν und ἔν) hat, von denen jeder Teil seinerseits wieder auf diese Zweiteilung Anspruch hat und so weiter bis ins Unendliche (PLATON, *Parmenides* Kap. 13, 142b3–143a3, Ausgabe Zekl S. 54–57). Siehe auch Abschnitt 8.1.8.

⁶³ Auch hier ist an PLATONS Dialog *Parmenides* zu erinnern (siehe Fußnote 62), wo PARMENIDES in dem „seienden Einen“ neben „Sein“ und „Eins“ als drittes noch den „Unterschied“ (ἕτερον) zwischen Sein und Eins findet und mit diesen Prinzipien die Existenz der Zahlen und unendlich vieler Seiender beweist (vgl. PLATON, *Parmenides* Kap. 13, 143b1–144a7, Ausgabe Zekl S. 56–59; siehe auch Abschnitt 8.1.8.).

4.5.4 Individuen und Teile

Ein *Individuum* ist nach der Wortbedeutung ein *Ungeteiltes*, während sich *Vielheiten* aus Teilen zusammensetzen. Nun könnte eine Vielheit zwar aus Teilen bestehen, von denen jeder wieder teilbar ist; konzeptionell einfacher sind aber sog. *wohlfundierte* Vielheiten, die sich letztlich aus *kleinsten Teilen* („Bestandteilen“) zusammensetzen, also aus Individuen bestehen. Solche Vielheiten werden zum Aufbau einer realistischen Mengenlehre benötigt. Wenn wir also die Individuen gefunden haben, stehen uns zugleich auch die wohlfundierten Vielheiten zur Verfügung. Da nun Individuen ungeteilt sein sollen, ist zunächst zu klären, was „Teile“ sind. Klare Beispiele von Teilen sind zunächst *physische Teile*, die wir wie folgt definieren können.

4.5.1 Erklärung Ein *physischer Teil* eines Objekts ist ein Inhalt des Objekts, der sich von einem anderen Inhalt desselben Objekts dadurch unterscheidet, dass einer der beiden Inhalte mit einem Ort eines Universums koinzidiert, mit dem der andere Inhalt *nicht* koinzidiert.

Z. B. sind die Punkte, Kanten, Flächen oder Teilkörper eines Körpers dessen physische Teile, weil sie stets mit Orten in einem räumlichen Universum koinzidieren, mit denen andere Punkte des Körpers nicht koinzidieren. Physische Teile eines Menschen sind ferner Leib und Seele, da ersterer immer mit einem Ort im räumlichen Universum koinzidiert, während die Seele gar nicht durch Einordnung im Raum gegenwärtig zu sein scheint. Neben physischen Teilen gibt es aber noch andere. So verteilen sich die Inhalte eines Allgemeinbegriffs nicht auf verschiedene Orte in Universen, und dennoch erschiene es unangemessen, Allgemeinbegriffe als vollkommen ungeteilt anzusehen. So wird man den „Menschen an sich“ mit Blick auf seine Charakterisierung durch eine Vielzahl von Attributen (vernunftbegabt, durch freie Entscheidungen selbstbestimmt, fortpflanzungsfähig usw.) kaum als absolut ungeteilt bezeichnen wollen. Um auch nicht-physische Teile zu erfassen, definieren wir:

4.5.2 Erklärung Ein *metaphysischer Teil* eines Objekts *X* ist eines seiner konkreten Attribute, dass von dem Objekt selbst (vom *X*-Sein) verschieden ist.

Entsprechend dieser Teil-Sorten können wir zwei Individuen-Begriffe aufstellen:

4.5.3 Erklärung Eine *physisches Individuum* ist ein Objekt ohne physische Teile, und ein *absolutes Individuum* ist ein solches, das weder physische noch metaphysische Teile hat.

Die folgenden Objekte scheinen nun am ehesten Individuen zu sein:

- (1) das Ich, erfahrbar als „ungeteiltes Bewusstseinszentrum“,
- (2) Punkte (von EUKLID geradezu definiert als das, „was keine Teile hat“),
- (3) momentan vollzogene geistige Akte (z. B. Gedanken),
- (4) einfache Begriffe (z. B. das „Rot an sich“ oder eine „Denkform“).⁶⁴

Das *Ich* (Beispiel 1) hat keine Raumteile, wohl aber ist es in die Zeit eingeordnet und hat zeitliche Teile. Daher ist es *kein* physisches Individuum im strengen Sinn.

Ein *Punkt* (Beispiel 2) hat zwar, wenn es sich um einen Punkt in einem *zeitlosen, rein euklidischen Raum* handelt (und *wenn* Euklid tatsächlich recht hat, dass Punkte unausgedehnt sind),⁶⁵ keine physischen Teile, ist also tatsächlich ein physisches Individuum. Aber er hat eine Reihe von verschiedenen Attributen: beispielsweise liegt er auf verschiedenen Geraden und Flächen. Diese relativen Attribute beschreiben nicht nur den Punkt im Verhältnis zu anderen Objekten, sondern

⁶⁴ Siehe S. 26–27.

⁶⁵ Wie wir in Abschnitt 5.25 (auf S. 292) sehen werden, scheint es Anschauungsräume zu geben, in denen dies *nicht* der Fall ist.

bestimmen sein Wesen, da seine relative Stellung zu anderen Orten im Raum für ihn selbst wesentlich ist; es handelt sich also um essentielle Relationen des Punktes.

Akte (Beispiel 3) können sowohl in den Raum als auch in die Zeit eingeordnet sein und dann sowohl Raum- wie auch Zeitteile haben. Sind es aber *geistige* Akte (wie Gedanken), so haben sie keine Raumteile, und sind es zudem *momentan vollzogene* Akte, so sind sie auch zeitlich ungeteilt und können deshalb als physische Individuen gelten. Jedoch sind Akte Akzidentien, und jedes Akzidens besitzt mindestens zwei metaphysische Teile: ein Attribut, das seinen Inhalt aussagt, und eines, das seine Zugehörigkeit zu einem Träger beschreibt.

Begriffe (Beispiel 4) gehören von vornherein keinem räumlichen oder zeitlichen Universum an und sind deshalb physische Individuen. Doch hat selbst ein so einfach erscheinender Begriff wie „Rot an sich“ immer noch metaphysische Teile. So besitzt das „Rot an sich“ etwa die Attribute des „Farbe-Seins“ und des „Qualität-Seins“, und außerdem – wie jeder Begriff – Attribute wie das „Instanzen-Haben“, das „Abstrakt-Sein“, das „Möglich-Sein“ usw.

Wenngleich also in keinem Fall ein absolutes Individuum vorliegt, können die genannten Beispiele dennoch als Musterbeispiele für „relative Individuen“ gelten. Diese Feststellung gewinnt noch mehr Gewicht, wenn es, wie es nun scheint, *überhaupt keine widerspruchsfreien absoluten Individuen gibt*. Jedes Objekt *X* hat ja nicht nur verschiedene Transzendentalien als Attribute, sondern besitzt auch für jedes beliebige Objekt *Y* die essentielle Relation des Nicht-*Y*-Seins. Da es unendlich viele verschiedene Objekte gibt, besitzt dann auch jedes von ihnen unendlich viele metaphysische Teile. Für ein „möglichst perfektes Individuum“ gibt es also nur eine einzige klare Forderung: Es muss sich um ein physisches Individuum handeln, d. h. ein Objekt, dass entweder überhaupt nicht in ein Universum eingeordnet ist, oder in einem solchen nur mit einem einzigen Punkt koinzidiert. Darüber hinaus könnte man höchstens noch fordern, dass der Unterschied zwischen seinen Attributen „möglichst gering“ ist. Der geringste Unterschied ist nun der nicht-trennende, bei dem sich das eine nicht ohne das andere denken lässt, die Attribute also „ineinander inbegriffen“ sind. Bei konkreten Attributen bedeutet dies, dass die entsprechenden Begriffe (d. h. die entsprechenden abstrakten Attribute) einander implizieren, also genau denselben Umfang haben. Aber auch die Forderung, dass *alle* konkreten Attribute ineinander inbegriffen sind, ist bei keinem einzigen Objekt erfüllt.⁶⁶

Wenn daher in der Theologie von der „Ungeteiltheit“ Gottes die Rede ist, darf man diesen Ausdruck nicht überbewerten; über die physische Ungeteiltheit hinaus kann Ungeteiltheit sinnvollerweise nur besagen, dass die *am meisten charakteristischen* Attribute eines Seienden ineinander inbegriffen sind. Dies ist für die göttlichen Attribute tatsächlich der Fall.⁶⁷

4.5.5 Logische Individuen und Vielheiten

Anknüpfend an das Ergebnis des vorhergehenden Abschnitts, dass es gar keine Individuen im absoluten Sinn gibt, scheint es nun sinnlos zu sein, von wohlfundierten, aus Individuen bestehenden Vielheiten zu reden. Dem steht jedoch entgegen, dass wir im alltäglichen Leben scheinbar ganz selbstverständlich die zusammengesetzten Teile einer Vielheit von ihren einfachen *Bestandteilen* unterschieden können. Wenn wir etwa von „fünf Menschen“ sprechen, so liegt die Antwort auf die Frage, welche Objekte in dieser Vielheit die „Individuen“ sind, auf der Hand: Jeder einzelne der fünf Menschen ist ein solcher Bestandteil. Allerdings scheint diese Antwort nur durch die Benennung der Vielheit als Vielheit der „fünf Menschen“ suggeriert zu sein. Welche Bestandteile diese Vielheit jedoch „objektiv“ hat, darf nicht von ihrer Benennung abhängen. So gesehen scheinen etwa

⁶⁶ So hat ein Objekt immer Relationen zu anderen Objekten, die nicht alle ineinander inbegriffen sein können. Außerdem sind Akzidentien und essentielle Attribut niemals ineinander inbegriffen, und selbst die Forderung, dass alle essentiellen Attribute ineinander inbegriffen sein sollen, ist unerfüllbar. Denn die allgemeineren essentiellen Attribute können stets *ohne* die darauf aufbauenden spezielleren gedacht werden.

⁶⁷ Siehe S. 773–774.

die Körperteile der Menschen noch kleinere Teile dieser Vielheit zu sein, und zu den kleinsten Teilen würde man dann am ehesten noch die Punkte rechnen können, aus denen die Körper der Menschengruppe bestehen. Doch auch ein einzelner Punkt ist (wie wir gesehen haben) noch in gewisser Weise aus Attributen zusammengesetzt, und selbst, wenn man objektive Gründe finden könnte, bei den Punkten Halt zu machen, wäre dieses Ergebnis unbefriedigend, da man ja ursprünglich eben nicht eine Vielheit *von Punkten*, sondern eben eine solche *von Menschen* betrachten wollte.

Eine weiterführende Idee ist nun folgende: Wenn wir die uns interessierenden Gegenstände, die wir gern als Individuen ansehen würden, je einzeln in einen „Behälter“ packen könnten, und diese Behälter in objektiver Weise voneinander getrennte Einheiten wären, könnten wir anstelle der „nackten“ Gegenstände die „verpackten“ Gegenstände oder noch besser die sie enthaltenden Behälter betrachten und als Individuen definieren, die stellvertretend für ihren Inhalt stehen. Diese Behälter sollten alle möglichen Arten von Objekten enthalten können, nicht nur konkrete und materielle. Nun gibt es tatsächlich „Behälter“, die Objekte *aller* möglichen Arten enthalten und zusammenfassen können. Da nämlich jedes Objekt erkennbar bzw. denkbar ist, sind *Gedanken* die Behälter, die schlechthin alles zum Inhalt haben können.

Was uns nun daran hindert, einfach jeden widerspruchsfreien Gedanken als ein Individuum anzusehen, das stellvertretend für seinen Inhalt steht, ist einerseits die Tatsache, dass verschiedene Gedanken denselben Inhalt haben können, und andererseits die Zeit- und Subjektgebundenheit der Gedanken. Wie auf S. 26–27 gezeigt wurde, kann man diese Schwierigkeiten beseitigen, indem man die konkreten Gedanken durch Denkformen ersetzt. Diese waren definiert als zeit- und subjekt-unabhängige momentane Erkenntnisakte, die so abstrakt sind, dass sie *allein durch ihren direkten Inhalt* eindeutig bestimmt sind. So können sie stellvertretend für diesen Inhalt zu stehen. Denkformen sind zudem relativ perfekte Individuen (siehe Beispiel 4 von Abschnitt 4.5.4). Ich definiere daher:

4.5.4 Erklärung *Logische Individuen* sind widerspruchsfreie Denkformen. Von jetzt sind mit „Individuen“ stets logische Individuen gemeint.

Bemerkung. *Nicht alle Objekte können mit Individuen identifiziert werden.* Es kann nämlich Inhalte geben, die sich nicht in eine widerspruchsfreie Denkform packen lassen: Diese nenne ich *nicht individualisierbar*. Ich möchte hier auf zwei verschiedene Gründe hinweisen, warum ein Objekt nicht individualisierbar sein kann. Zum einen könnte es sich um ein „zu subjektives“ Objekt handeln: um einen Inhalt, der sich gewissermaßen nur im Denken *eines ganz bestimmten* Subjekts „objektivieren“ kann. Ein solches „zu subjektives“ Objekt dürfte eigentlich jeder konkrete Erkenntnisakt und allgemeiner jedes konkrete Erlebnis einer Person sein, besonders aber ihre direkte Reflexion über sich selbst. Die Person kann zwar anderen „etwas“ über ihr subjektives Erleben mitteilen (was dann objektivierbar und mit einer Denkform identifizierbar ist), aber es scheint immer eine subjektive Komponente übrig zu bleiben, die nicht kommunikabel ist, mit der sich also die auf S. 26–27 beschriebene Abstraktion, die zu einer Denkform und somit zu einem Individuum führt, nicht durchführen lässt.

Zum Zweiten könnte das Objekt „zu kompliziert“ sein, weil man zusammen mit ihm eine „unvorstellbar große“ Vielheit von Individuen zugleich betrachten muss (sei es, dass das Objekt selbst eine solche Vielheit ist oder z. B. ein Sachverhalt über eine solche). Im Gegensatz zu den zuvor betrachteten „zu subjektiven“ Objekten können bei einem solchen Objekt zwar die zu einer Denkform notwendigen Abstraktionen durchgeführt werden, und man erhält dann also eine Denkform: Aber diese erweist sich als widersprüchlich. – Hier muss noch näher erläutert werden, was es für eine Denkform bedeutet, „widerspruchsfrei“ bzw. „widersprüchlich“ zu sein. Wenn wir an ein widersprüchliches Objekt, etwa das Nichts, denken, so kann der *Gedanke daran* selbst vollkommen klar und frei von Widersprüchen sein. Damit der Erkenntnisakt selbst widersprüchlich wird, muss also ein Widerspruch nicht im *Inhalt*, sondern in der Beziehung des *Beinhaltens* liegen. So ist ein

Erkenntnisakt nur dann widerspruchsvoll, wenn er etwas zugleich (direkt) beinhaltet und nicht beinhaltet, gleichgültig, ob dieser Inhalt *selbst* widersprüchlich ist oder nicht. Es wird sich in Abschnitt 5.2 zeigen, dass es zu einer solchen Widersprüchlichkeit dadurch kommen kann, dass ein (auch für unser abstraktes Vorstellungs- und Denkvermögen) „unvorstellbar großer“ Inhalt zum Erkenntnisobjekt wird.

Wir können die Rede von den „fünf Menschen“ jetzt wie folgt erklären. Indem wir „fünf Menschen“ sagen, betrachten wir eigentlich fünf Denkformen, von denen jede je einen dieser Menschen beinhaltet. Diese Denkformen sind fünf logische Individuen, nicht mehr und nicht weniger. – Nun legen wir den Vielheitsbegriff wie folgt fest:

4.5.5 Erklärung Eine *Vielheit* ist ein aus mehreren (logischen) Individuen unstrukturiert zusammengesetztes Objekt.

Mit dieser Definition haben wir also nicht-wohlfundierte Vielheiten, die nicht aus Individuen bestehen, aus dem Vielheits-Begriff ausgeschlossen. Das Wort „unstrukturiert“ soll besagen, dass die Vielheit *nur* aus den Individuen besteht und *nichts* darüber hinaus umfasst, insbesondere also keine Anordnung und kein Zusammenwirken dieser Individuen in die Vielheit mit eingeht. Das Axiom „Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Bestandteile“ ist daher hier *nicht* gültig, vielmehr soll die Vielheit *nichts anderes als* die reine Summe der sie konstituierenden Individuen sein. Wichtig ist auch die folgende Feststellung, die mir anschaulich klar zu sein scheint, wenn man die Begriffe richtig erfasst:

4.5.6 Vielheitsaxiom *Keine Vielheit ist Bestandteil einer anderen.*

Besteht z. B. eine Vielheit V_1 aus den Individuen a, b, c , so ist die aus a und b bestehende Vielheit V_2 zwar ein *Teil* von V_1 , aber sie gehört nicht zu den *Bestandteilen* dieser Vielheit, d. h. nicht zu den „kleinsten“ Teilen, den logischen Individuen, aus denen sie sich zusammensetzt.⁶⁸

4.5.6 Unendliche Vielheiten von Seienden

Nach unserem Durchgang durch die verschiedenen Seinsbereiche können wir uns nun der Frage zuwenden, inwieweit im Reich der Seienden unendliche Vielheiten auftreten. Den Bereich der Impossibilia möchte ich dabei ausklammern, denn man kann zwar mit einigem Recht sagen, dass es unendlich viele *Impossibilia* gibt, doch sind im Bereich der Impossibilia eindeutige Feststellungen grundsätzlich in Frage zu stellen.

Zunächst ist klar, dass es unendlich viele mögliche *pure Possibilia* gibt. Z. B. ist die Anzahl der *Fiktionen* unendlich: Es gibt mindestens ebenso viele fiktive Universen, wie es natürliche Zahlen gibt, denn zu jeder natürlichen Zahl n kann man sich z. B. eine fiktive Welt mit genau n Sternen ausdenken. Dass auch die Gesamtheit aller möglichen *Gedanken* unendlich ist, haben wir schon mit dem DEDEKINDschen Unendlichkeitsbeweis (oben S. 18–19) gesehen. Damit sind auch die von den möglichen Gedanken abstrahierten Denkformen unendlich. Da dies spezielle Begriffe sind, folgt die Unendlichkeit der *Begriffe*.

Unendlichkeit tritt aber in vielfacher Weise auch im Bereich der *Aktualitäten* auf. So hat jedes wirkliche Seiende X unendlich viele *essentielle Relationen*, denn es besitzt für jedes Objekt Y das Attribut des Nicht- Y -Seins. Erst recht sind die *Attribute höheren Grades* in X unendlich, wie

⁶⁸ Ein Einwand könnte lauten: Wenn man von „zwei Vielheiten“ spricht, hat man eine Zweiheit (also Vielheit) vor Augen, deren Bestandteile Vielheiten sind. Ich würde antworten: Man betrachtet bei einer solchen Zweiheit nicht die beiden Vielheiten nicht als solche, sondern betrachtet eigentlich zwei Denkformen (oder Begriffe), deren Inhalt (bzw. Umfang) jeweils eine der Vielheiten ist.

wir in Abschnitt 4.5.3 sahen. Ferner ist die Vielheit der *Sachverhalte* unendlich: Ist nämlich S_0 eine Wahrheit, so ist der Sachverhalt, dass S_0 wahr ist, eine weitere Wahrheit S_1 , sodann der Sachverhalt, dass S_1 wahr ist, wieder eine weitere Wahrheit S_2 usw. Aber auch auf andere Weise können wir sehen, dass es unendlich viele Sachverhalte geben muss. Ist nämlich $A, B, C, \dots$ eine beliebige unendliche Reihe von Objekten, die voneinander verschieden sind (z. B. Possibilien), lässt sich die folgende unendliche Reihe von Sachverhalten angeben: dass A nicht B ist, dass A nicht C ist, dass A nicht D ist usw. Ein ebenso klares Beispiel für eine unendliche Vielheit bilden die *Punkte*, *Strecken*, *Flächen*, *Teilräume*, *Zeitpunkte* und *Zeitintervalle* im unserem raum-zeitlichen Universum.

Die bisherigen Beispiele stammen allerdings alle aus dem Bereich der unter-substantiellen wirklichen Objekte. Ob es auch unendlich viele *Substanzen* gibt, wissen wir nicht. Ob es sie wenigstens geben kann, untersuche ich in Abschnitt 11.2. Jedenfalls ist unser **neuntes Beispiel** für Unendlichkeiten (siehe Abschnitt 2.3) nun hinreichend erläutert. Für das **zehnte Beispiel** verweise ich auf Kapitel 9, besonders Abschnitt 9.4.15.

5 Grundlegung der Mathematik und mathematischer Zugang zur Unendlichkeit

Hermann WEYL beantwortete in seiner *Philosophie der Mathematik* die Frage nach dem „Mittelpunkt“ der Mathematik mit dem Satz: Sie ist „die Wissenschaft vom Unendlichen“.¹ Wenn dies richtig ist, fällt der Mathematik für unser Thema eine entscheidende Rolle zu. Tatsächlich hatte die Mathematik im Lauf ihrer Geschichte drei Mal verstärkt mit dem Unendlichen zu ringen, was jedesmal eine Krise auslöste. Erstmals geschah dies in der griechischen Mathematik des 5. vorchristlichen Jahrhunderts durch die Entdeckung *inkommensurabler Streckenverhältnisse*, die nur durch unendliche Verfahren, etwa den nicht-abbrechenden Euklidischen Divisionsalgorithmus oder unendliche Kettenbrüche beschrieben werden können.² Der erste Entdecker, wahrscheinlich der Pythagoräer HIPPOSOS, soll nach einigen Überlieferungen aus der Sekte der Pythagoräer ausgestoßen und im Meer ertränkt worden sein, weil er diese für das griechische Denken beunruhigenden Fakten bekannt gemacht hatte.³ Die zweite Krise wurde durch die Entwicklung der Infinitesimalrechnung mit *unendlich kleinen Größen* durch LEIBNIZ und NEWTON im 17. Jahrhundert ausgelöst,⁴ und die dritte am Ende des 19. Jahrhunderts durch die Mengenlehre Georg CANTORS, in welcher erstmals *aktual unendliche Mengen* zum Gegenstand mathematischer Untersuchungen gemacht wurden.

Erst durch die CANTORSche Mengenlehre ist die Mathematik wirklich zu einer „Wissenschaft vom Unendlichen“ geworden; zuvor hatten die Mathematiker das Unendliche meist nur als eine *façon à parler* angesehen und nur die Existenz des *potentiell Unendlichen* anerkannt. Charakteristisch hierfür ist das oft zitierte Wort des „Princeps Mathematicorum“, Carl Friedrich GAUSS, in seinem Brief an SCHUMACHER vom 12. Juli 1831: „so protestiere ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine *façon à parler* ...“⁵ So hatte CANTOR anfangs fast alle Mathematiker gegen sich, darunter auch seinen ehemaligen Lehrer Leopold KRONECKER, welcher CANTORS Lehre vom Unendlichen zeitlebens bekämpfte. Aber am Ende des 19. Jahrhunderts hatte sich diese Lehre weitgehend unter den Mathematikern durchgesetzt (siehe Abschnitt 8.14). Etwa zeitgleich mit dem Aufkommen der CANTORSchen *Mengenlehre* erneuerte Gottlob FREGE die *Logik* und war bestrebt, die gesamte Mathematik (zunächst die Arithmetik) aus rein logischen Begriffen abzuleiten.

Beide Unternehmungen wurden stark erschüttert, als zu Anfang des 20. Jahrhunderts die berühmtesten Widersprüche (Antinomien, Paradoxien) in der Mengenlehre und Logik auftauchten. Diese mit dem Unendlichen zusammenhängenden Probleme, die ich später im Einzelnen erörtern

¹ WEYL, *Philosophie* S. 89. Vgl. auch MAOR, *Infinity* S. 19: „Vor allem ... gehört das Unendliche in das Reich der Mathematik, denn dort ist dieser Begriff am tiefsten verwurzelt, dort wurde er geprägt und unzählige Male neu formuliert, dort feierte er schließlich seinen größten Triumph“. Die Wurzeln des Unendlichkeitsbegriffs sind zwar eher theologisch-philosophischer Art (siehe Kapitel 8), aber WEYL und MAOR haben insofern recht, als er in der Mathematik am genauesten analysiert wurde.

² Vgl. MAINZER, *Reelle Zahlen* S. 23–27.

³ Vgl. HEATH, *History of Greek Mathematics* Band 1 S. 65; WAERDEN, *Die Pythagoräer* S. 71–73 und vor allem FRITZ, *Hippasus*.

⁴ Vgl. Abschnitt 5.25, S. 293.

⁵ GAUSS, *Werke* Band 8 S. 216. In der „Bildersprache des Unendlichen“ sieht GAUSS nur dann nichts Widersprechendes, wenn „der endliche Mensch sich nicht vermisst, etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen.“ (ebd. S. 218).

werde,⁶ schienen nicht nur das Lebenswerk CANTORS und FREGES ins Wanken zu bringen, sondern waren der Anlass, die Frage nach den Fundamenten der Mathematik überhaupt neu zu stellen: So kam es zur *dritten* oder *modernen* „Grundlagenkrise der Mathematik“.⁷ Die alte Frage nach dem Wesen der mathematischen Gegenstände, die „immer ein philosophisches Problem der ersten Größenordnung gewesen“ ist,⁸ und früher in Bezug auf „Zahlen“ gestellt wurde,⁹ musste nun im Hinblick auf Mengen, insbesondere „unendliche Mengen“, neu verhandelt werden. Hierauf basierend konnten dann verschiedene Strategien zur Vermeidung der Widersprüche entworfen werden.

Eine *theoretisch* allseits befriedigende Lösung ist bis heute nicht gefunden worden, doch haben sich im Kampf gegen die Widersprüche verschiedene Systeme der „axiomatischen Mengenlehre“ als nützlich erwiesen, welche festschreiben, dass die Mengenbildung bestimmten Prinzipien, den Axiomen, folgen muss. Dieses Vorgehen hat sich praktisch bewährt: „Seit 40 Jahren“, so heißt es z. B. in BOURBAKIS *Théorie des Ensembles* (1954), sei man im Umgang mit der axiomatischen Mengenlehre „niemals einem Widerspruch begegnet, und man ist berechtigt zu hoffen, dass sich niemals einer ergeben wird.“¹⁰ Die Zeit des „unbehelligten“ Arbeitens (heute etwa 100 Jahre) hat dazu beigetragen, dass im Bewusstsein der meisten heutigen Mathematiker die Grundlagenkrise als „verjährt“ erscheint. Die Tatsache, dass so lange kein Widerspruch aufgetaucht ist, zeigt aber bloß, dass Widersprüche, falls es sie gibt, „tiefliiegend“ in den Strukturen verborgen und darum nicht einfach zu entdecken sind. Einen tief liegenden Widerspruch ausschließen oder seine Existenz auch nur unwahrscheinlich machen kann aber die verflossene Zeit keinesfalls. Nur eine apriorisch-intuitive Begründung der Evidenz der Axiome könnte hier wirklich weiterhelfen.

Eine solche Begründung soll in diesem Kapitel erarbeitet werden. Hierbei zeige ich anknüpfend an die Ontologie einen Weg zu einer realistischen Grundlegung der Mathematik („realistische Mengenlehre“) auf, der geeignet zu sein scheint, die „Wissenschaft vom Unendlichen“ auf ein sicheres Fundament zu stellen. Während man bei einer rein mathematischen Behandlung der Mengenlehre von den Axiomen ausgeht – einigen wenigen Sätzen, die man ohne Begründung *voraussetzt* – geht es hier darum, diese Axiome zu *rechtfertigen*. Leider kann man die Axiome nicht einfach der Reihe nach abhandeln, ohne tiefer in die Mengenlehre einzudringen: Die komplizierteren dieser Axiome kann man jeweils erst formulieren, nachdem man einen gewissen Teil der Mengenlehre abgehandelt hat, der auf den einfacheren Axiomen basiert. Will man also die Axiome darstellen und begründen, so muss man parallel zu den Axiomen zugleich auch einen beachtlichen Teil der darauf basierenden Mengenlehre diskutieren. Wenn wir daher beim letzten Axiom angekommen sind, werden wir zugleich auch die fundamentalsten Theoreme der Mengen- und Zahlenlehre besprochen haben.

Meine „Beweise“ der Axiome sind Explikationen der in der Ontologie verwendeten „objekt-theoretischen“ Anschauung. Diese Beweise stehen natürlich nicht mit mathematischen Beweisen auf einer Stufe, welche als rein logische Ableitungen (zu deren Eigenart siehe Kapitel 6) ohne eine solche Anschauung auskommen. Um deutlich zu machen, welche Art von Beweis ich anwende, verwende ich das Wort „Beweis“ fortan nur für logische Ableitungen, während ich eine anschauliche Begründung als „Plausibilitätsbetrachtung“ bezeichne. Des Weiteren nenne ich Sätze, die logisch aus den Axiomen folgen, *Theoreme* (wenn es Hauptsätze der Theorie sind), *Lemmata* (wenn es Hilfssätze sind) oder *Korollare* (wenn es Folgerungen aus Theoremen sind), während ich anschaulich plausibel gemachte Sätze als *Prinzipien* bezeichne: Außer den Axiomen sind dies noch weitere Sätze, die ich zur Begründung der Axiome heranziehe. Vor der Durchführung dieser Aufgabe möchte ich jedoch im Folgenden zunächst auf die bisher eingenommenen Positionen in der Grundlegendiskussion eingehen.

⁶ Siehe Abschnitt 5.6; außerdem unten S. 81–86 sowie S. 156–163.

⁷ Die Bezeichnung „Grundlagenkrise“ stammt von Hermann WEYL (vgl. WEYL, *Grundlagenkrise*).

⁸ Günther PATZIG im Vorwort zu FREGE, *Funktion* S. 11.

⁹ Hierzu vergleiche Abschnitt 5.33.

¹⁰ S. 9: „depuis 40 ans ... on n'a jamais rencontré de contradiction, et on est fondé à espérer qu'il ne s'en produira jamais“.

5.1 Grundlagenstandpunkte

Da es sich bei den Mengen um Allgemeinbegriffe (Universalien) handelt, erinnert die „Grundlagenkrise“ zu Anfang des 20. Jahrhunderts stark an den mittelalterlichen Universalienstreit, in dem man eine realistische, konzeptualistische und nominalistische Position unterschied.¹¹ Dem Realismus entspricht in etwa der „mathematische Platonismus“, dem Konzeptualismus der „mathematische Intuitionismus“ und dem Nominalismus der sog. „Formalismus“.¹² Wesentlicher als diese Dreiteilung ist allerdings die Zweiteilung in realistische und nicht-realistische Positionen: Nach der ersten werden die mathematischen Objekte und Theoreme „entdeckt“ und bestehen unabhängig von unserem Denken, nach der zweiten werden sie „erfunden“ und sind bloß Konstruktionen des Mathematikers.¹³

A. Die *realistische* Auffassung begegnet uns vor allem in Form des sog. *mathematischen Platonismus*, ein Begriff, der 1935 von Paul BERNAYS geprägt wurde.¹⁴ Das Charakteristikum dieses Standpunkts ist nach Heinrich SCHOLZ „die Grundvoraussetzung, dass die Objekte der Mathematik ... an sich existieren, wie die platonischen Ideen. Mit Bezug auf diesen An-sich-Charakter sprechen wir von einer *platonischen Ontologie*. Für diese Ontologie existieren die unendlichen Bereiche beliebig hoher Mächtigkeit als fertig vorliegende Objekte ...“¹⁵ Es sind also zwei Aspekte für den mathematischen Platonismus charakteristisch: *Erstens* bestehen die mathematischen Objekte unabhängig von unserem Denken und *zweitens* befinden sich darunter „unendliche Mengen beliebiger Größe“.¹⁶ Die ideal-zeitlose Existenzweise der mathematischen Objekte ist nun sicher in einem anderen Sinn „real“ zu nennen als die zeitliche Existenzweise physikalischer Körper, wenngleich einige zeitgenössische Realisten diesen Unterschied in Frage stellen, indem sie den mathematischen Objekten eine Abhängigkeit von der Körperwelt zuschreiben.¹⁷ In klassischer Interpretation aber kommt den in Frage stehenden Objekten ein apriorisch-idealer Status zu¹⁸ und man kann daher statt von „realer“ auch

¹¹ Vgl. STEGMÜLLER, *Universalienproblem einst und jetzt*. Zum Nominalismus siehe auch Kap. 8.10.6, besonders Fußnote 702 auf S. 566.

¹² Vgl. STEGMÜLLER, *Metaphysik* S. 222–307; FRAENKEL et al., *Foundations* S. 331–345.

¹³ Vgl. ANTWEILER, *Unendlich* S. 2. Freilich sind die mathematischen Objekte auch im zweiten Fall real existierende Possibilia. Aber der Unterschied ist: Wenn sie nur vom Mathematiker konstruiert sind, so „existiert“ von ihnen auch nur das, was der Mathematiker konstruiert, und das sind bloß linguistische Entitäten. Das heißt: Es existieren dann möglicherweise nur die Formeln und Terme *ohne* dahinter stehende, von diesen Ausdrücken selbst verschiedene Sachverhalte und Objekte.

¹⁴ Vgl. BERNAYS, *Platonism*.

¹⁵ SCHOLZ und HASENJAEGER, *Mathematische Logik* S. 1.

¹⁶ RUCKER, *Infinity and the Mind* S. 65.

¹⁷ Der Hauptvertreter dieses „a-posteriori-Realismus“ (den man auch naturalistisch, physikalistisch oder quasi-empiristisch nennt) ist David ARMSTRONG, der als einer der Architekten des modernen Materialismus gilt. ARMSTRONG gibt zu, dass eine „zufriedenstellende diesseitige Beschreibung“ mathematischer Aussagen derzeit nicht in Sicht ist, glaubt aber dennoch, „dass es eine solche Beschreibung geben muss“ (*Naturalism* S. 39; vgl. *Scientific Realism*). Das Konzept ist also nicht wirklich ausgereift. Auch QUINES und PUTNAMS Realismus geht in diese Richtung, während MADDY für einen „Kompromiss“ zwischen diesem modernen und dem klassischen Realismus plädiert (siehe MADDY, *Realism in Mathematics* S. 28–31 und 178). Als Vorläufer des modernen a-posteriori-Realismus kann ARISTOTELES gelten, für den sich die mathematischen Gegenstände durch Abstraktion aus sinnlich wahrnehmbaren Quantitäten konstituieren (vgl. APOSTLE, *Aristotle's Philosophy* S. 3–32).

¹⁸ Diese Sicht kommt z. B. bei RUCKER, *Infinity and the Mind* zum Ausdruck: „Eine Menge ist die Form eines möglichen Gedankens“ (S. 64). „Selbst, wenn niemand eine bestimmte Menge zur Kenntnis nimmt, existiert sie doch als ein bestimmtes mögliches Denkmuster oder eine mögliche Wahrnehmung“ (S. 249). Auch Roger PENROSE nimmt diesen klassischen Standpunkt ein und beschreibt ihn eindrucksvoll: „Ich stelle mir vor, dass der Geist jedesmal, wenn er eine mathematische Idee wahrnimmt, mit der Platonischen Welt der mathematischen Begriffe in Kontakt tritt“ (PENROSE, *Computerdenken* S. 418). Diese Welt ist „nur über den Intellekt zugänglich“, existiert aber „außerhalb“ des Bewusstseins (S. 418), und die dort befindlichen Ideen sind „zeitlos“ und „gottgegeben“ (ebd. S. 95; vgl. ebd. S. 92–95, 109–113, 435, 437). Seinen Platonismus erläutert PENROSE ausführlich in *Reality* S. 11–24. Siehe auch Fußnote 36 auf S. 63.

(in genau derselben Bedeutung) von „idealer“ Existenz reden.¹⁹ So gesehen könnte man den realistischen Standpunkt auch als „mathematischen Idealismus“ bezeichnen. Der (klassisch interpretierte) platonistische Standpunkt in der Mathematik ist nicht nur der den tatsächlichen Gegebenheiten angemessenste, sondern auch der theologisch interessanteste. Denn aus der Sicht des Theismus sind die platonischen Ideen nicht „getrennt“ von Gott vorstellbar und werden daher von christlichen Denkern z. B. mit Inhalten des göttlichen Verstandes gleichgesetzt²⁰ oder in auch in anderer Weise mit Gott in Verbindung gebracht.²¹

Natürlich ist es nicht sicher, ob PLATON selbst sich zum „mathematischen Platonismus“ bekannt haben würde,²² wie auch die Einordnung anderer früherer Philosophen in diesem Zusammenhang problematisch erscheint.²³ Jedenfalls würde die realistische Grundthese wohl auch ARISTOTELES unterschrieben haben, und sie darf als die Ansicht der Mathematiker und Philosophen seit jeher gelten. Klassische Formulierungen findet man schon bei AUGUSTINUS, der im Hinblick auf die Existenz unbezweifelbarer Wahrheiten sagt: „Der Vernunftgebrauch erschafft derartiges nicht, sondern findet es“.²⁴ Wie bei AUGUSTINUS zeigt sich auch bei LEIBNIZ und KEPLER die religiöse Dimension dieses Standpunkts. LEIBNIZ war nicht nur überzeugt, dass „was wahr ist, wahr bleibt, wenn es gleich von keinem Menschen erkannt würde“,²⁵ sondern glaubte an „ewige und allgemeine Wahrheiten“, die „in allen Weltkugeln, ja in allen Zeiten, und mit einem Wort bei Gott selbst gelten müssen, von dem sie auch beständig herfließen“.²⁶ Für KEPLER sind „die mathematischen Vernunftschlüsse, nach denen die Körperwelt zu schaffen war, gleich ewig mit Gott“,²⁷ und er meinte sogar: „Die Geometrie ... ist Gott selbst (was ist nämlich in Gott, was nicht Gott selbst ist?) und hat ihm die

¹⁹ Vgl. STEIN, *Endliches und ewiges Sein* S. 114 und SEIFERT, *Sein* S. 256. Vgl. auch CANTOR, der von der „durchaus realistischen, zugleich aber nicht weniger idealistischen Grundlage“ seiner Betrachtungen sprach (CANTOR, *Punktmannigfaltigkeiten* Nr. 5 § 8, Ausgabe Zermelo S. 181).

²⁰ THOMAS VON AQUIN erklärt in der *Summa Theologiae*, dass die platonischen Ideen in der Tat existieren, und zwar „im Geist Gottes“ (in mente divina) (THOMAS VON AQUIN, *Summa Theologiae* pars 1 quaestio 15 articulus 1 corpus, Ausgabe Busa S. 210b). In quaestio 15 articulus 3 corpus, Ausgabe Busa S. 211a ist näher ausgeführt, dass es von allen Dingen, die Gott erkennt, sowohl von den geschaffenen wie auch von den bloß erschaffbaren, im göttlichen Verstand eine entsprechende Idee gibt.

²¹ So sind nach SEIFERT, *Sein* S. 217f gewisse Ideen im göttlichen Wesen verkörpert, während andere bloß „mögliche Weisen“ sind, wie dieses Wesen durch kontingente Seiende nachgeahmt werden kann.

²² Zu PLATONS Philosophie der Mathematik vgl. WEDBERG, *Plato*. Siehe auch Abschnitt 8.1.8.

²³ So hat Adolf Abraham FRAENKEL in etwas gewagter Weise PLATON und LEIBNIZ als Vorläufer des mathematischen Realismus hingestellt, und demgegenüber in ARISTOTELES und KANT die Vorläufer der (als „Idealismus“ bezeichneten) intuitionistischen Gegenposition gesehen (FRAENKEL, *Notion d'existence*). Insbesondere macht FRAENKEL den Unterschied am Existenzbegriff fest: Für die Vertreter der ersten Position soll mathematische Existenz *Widerspruchsfreiheit* („compatibilité“), für jene der zweiten Position *Konstruierbarkeit* („possibilité de construire“) bedeuten. Eine interessante Zusammenstellung von Positionen in den Grundlagenfragen der Mathematik von PYTHAGORAS bis heute ist zu finden bei HERSH, *What is Mathematics* S. 91–232.

²⁴ AUGUSTINUS, *De vera religione* Kap. 39 Zl. 48, Ausgabe Martin S. 235, Ausgabe Thimme S. 124: „Non enim ratiocinatio talia facit, sed invenit“. Ähnlich sagt AUGUSTINUS in *De doctrina christiana*, die Wahrheit logischer Zusammenhänge werde vom Menschen nicht eingerichtet, sondern wahrgenommen: „veritas connexionum non instituta, sed animadversa est ab hominibus“ (Buch 2 Kap. 32 Zl. 1f, Ausgabe Martin S. 67), und in Buch 2 von *De libero arbitrio* (Ausgabe Green S. 246 Zl. 27 – S. 264 Zl. 23, Ausgabe Perl S. 67–94) baute er diese Position zu einem „arithmetischen“ Gottesbeweis aus (siehe hierzu auch Fußnoten 241 auf S. 725 und 15 auf S. 689): Die Existenz unwandelbarer arithmetischer Wahrheiten garantiert die Existenz der „unwandelbaren Wahrheit“ an sich, und wenn es nicht etwas noch Vorzüglicheres als diese gibt, „so ist die Wahrheit selbst Gott [ipsa veritas Deus est]“ (Ausgabe Green S. 264 Zl. 1f, Ausgabe Perl S. 93). Vgl. auch *Epistula 118* Kap. 23, Ausgabe Goldbacher S. 686 Zl. 14f: „veritas utique Deus est“. Einen ähnlichen Gottesbeweis hat Robert SPAEMANN vorgetragen (siehe Fußnote 241 auf S. 725).

²⁵ LEIBNIZ, *Initia*, Ausgabe Gerhardt S. 111.

²⁶ LEIBNIZ, *Initia*, Ausgabe Gerhardt S. 115.

²⁷ KEPLER, *Harmonices Mundi* Buch 4 Kap. 1, Ausgabe Caspar S. 219: „rationes creandorum corporum mathematicas, Deo coaeternas fuisse, ... id sciunt christiani“.

Urbilder für die zu erschaffende Welt geliefert“.²⁸ BERNAYS stellte 1934 fest, dass der platonische Grundlagenstandpunkt vorherrschend sei,²⁹ und dass dies stets der natürliche Standpunkt des „working mathematician“ bleiben wird, unterliegt keinem Zweifel. Einschränkend kann man allerdings sagen, dass der typische Mathematiker unserer Tage, wie es DAVIS und HERSH treffend formuliert haben, „wochentags Realist und sonntags Formalist“ ist:³⁰ Solange er arbeitet, ist er überzeugt, es mit einer objektiven Realität zu tun zu haben; wird er aber aufgefordert, philosophisch über diese Realität Rechenschaft zu geben, zieht er es vor zu behaupten, er glaube nicht daran. Zu den modernen Verfechtern des mathematischen Platonismus gehören zunächst die Wegbereiter der modernen Logik und Mengenlehre, CANTOR³¹ und FREGE,³² dann aber auch Paul FINSLER,³³ Heinrich SCHOLZ,³⁴ Kurt GÖDEL³⁵ und Roger PENROSE.³⁶ Nach GÖDEL könnten mathematische Objekte „unabhängig von unseren Definitionen und Konstruktionen“ existieren,³⁷ und er behauptete, man habe „ebenso viel Grund, an ihre Existenz zu glauben“, wie man Grund habe, die Existenz physikalischer Körper anzunehmen.³⁸ Besonders bei CANTOR, SCHOLZ und GÖDEL zeigt sich auch die theologische Bedeutung dieser Position, wie wir in Abschnitt 8.15 sehen werden.

Für die Vertreter des mathematischen Platonismus sind die zu Anfang des 20. Jahrhunderts aufgetretenen Widersprüche kein Grund zur Abwendung von Logik und Mengenlehre in ihrer klassischen Form. Als Quelle der Widersprüche vermuten sie einige unseren „logischen Intuitionen“ bisher verborgen gebliebene Subtilitäten, die man durch einen schärferen Blick auf die Realität klarer erfassen zu können hofft.³⁹ Zur Beseitigung der Widersprüche wären dann nur kleinere Kor-

²⁸ KEPLER, *Harmonices Mundi* Buch 4, Ausgabe Caspar S. 223: „Geometria ante rerum ortum Menti divinae coaeterna, Deus ipse (quid enim in Deo, quod non sit Ipse Deus) exempla Deo creandi mundi suppeditavit“. Allerdings haben auch Denker, die weniger platonistisch eingestellt waren, die Mathematik manchmal mit Gott in Verbindung gebracht. So war GAUSS davon überzeugt, dass Zahlen „bloß unseres Geistes Produkt“ sind (Brief an BESSEL vom 9. 4. 1830, *Werke* Band 8 S. 201, *Briefwechsel* S. 497) und wollte das Unendliche aus der Mathematik verbannen (siehe S. 59), konnte aber dennoch behaupten: «Ὁ θεὸς ἀριθμίζει» – Gott rechnet (WALTERSHAUSEN, *Gauss* S. 97f). Ähnlich konnte auch der Konstruktivist und Finitist KRONECKER vom Geschäftsein der Zahlen durch Gott reden (siehe S. 341).

²⁹ Vgl. BERNAYS, *Platonism* S. 56: „le platonisme règne aujourd’hui dans la mathématique“.

³⁰ Vgl. DAVIS und HERSH, *Mathematical Experience* S. 321: „Most writers on the subject seem to agree that the typical working mathematician is a Platonist on weekdays and a formalist on Sundays.“

³¹ Siehe S. 623.

³² Für FREGE manifestieren sich die arithmetischen und logischen Wahrheiten in objektiven „Gedanken“, die neben den subjektiven „Vorstellungen“ und den wirkenden „Dingen“ der Außenwelt ein „drittes Reich“ bilden: „Was zu diesem gehört, stimmt mit den Vorstellungen darin überein, dass es nicht mit den Sinnen wahrgenommen werden kann, mit den Dingen aber darin, dass es keines Trägers bedarf, zu dessen Bewusstseinsinhalte es gehört“ (FREGE, *Der Gedanke* S. 69). Vgl. auch FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik* Band 1 Vorwort S. XVIII: „[I]ch erkenne ein Gebiet des Objektiven, Nichtwirklichen an, während die psychologischen Logiker das Nichtwirkliche ohne weiteres für subjektiv halten“.

³³ Vgl. FINSLER, *Platonischer Standpunkt*.

³⁴ Siehe S. 627–628.

³⁵ Siehe S. 628–630. Die Vereinnahmung der GÖDELSchen Unvollständigkeitssätze (siehe S. 381–385) durch den postmodernen Relativismus und den Positivismus ist ungerechtfertigt (vgl. GOLDSTEIN, *Gödel*).

³⁶ PENROSE versucht in seinem Hauptwerk *Computerdenken* nachzuweisen, dass eine algorithmisch vorgehende künstliche Intelligenz den Reichtum mathematischer Strukturen nicht erfassen kann: Diese Strukturen existieren daher in einem nur dem Geist zugänglichen Platonischen Ideenreich (siehe Fußnote 18).

³⁷ GÖDEL, *Russell’s Mathematical Logic* S. 137, *Werke* Band 2 S. 128, deutsche Ausgabe S. XIV: „Classes and concepts may, however, also be conceived as real objects, ... existing independently of our definitions and constructions.“

³⁸ GÖDEL, *Russell’s Mathematical Logic* S. 137, *Werke* Band 2 S. 128 (deutsche Ausgabe S. XIV): „It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence.“

³⁹ Vgl. GÖDEL, *Russell’s Mathematical Logic* S. 150, *Werke* Band 2 S. 138, deutsche Ausgabe S. XXVI. Siehe auch Fußnote 238 auf S. 99.

rekturen an den bisher zu naiv gebrauchten logischen oder mengentheoretischen Systemen notwendig. Die Bemühungen um solche Korrekturen waren entweder *logischer* oder *mengentheoretischer* Art, je nachdem, ob man an die FREGESche Logik oder an die CANTORSche Mengenlehre anknüpfte.

A1. Diejenigen Realisten, welche das FREGESche Vorhaben, die Mathematik auf ein *logisches* Fundament aufzubauen, weiter verfolgten, wurden *Logizisten* genannt. Hierzu rechnet man RUSSELL, WHITEHEAD, QUINE und manchmal auch CARNAP, die in der Tat logische Systeme entwickelten, welche die Mathematik zu tragen imstande waren.⁴⁰ Zur Vermeidung der Widersprüche wurden dabei verschiedene Mittel angewendet,⁴¹ für die jedoch keine allgemein akzeptierte Rechtfertigung vorgelegt werden konnte. Man kann allerdings die genannten „logizistischen“ Logiker, abgesehen von WHITEHEAD,⁴² nur mit Einschränkungen als Realisten betrachten. RUSSELL entwickelte sich vom überzeugten Realisten⁴³ zu einem mit dem Nominalismus sympathisierenden Skeptiker.⁴⁴ Ähnlich erging es QUINE.⁴⁵ Am wenigsten ist CARNAP Realist; sein Standpunkt ist ein „anti-ontologischer“, von dem aus der Streit um externe Existenz als „pseudo-theoretische Diskussion“ zurückgewiesen wird.⁴⁶ Nach MADDY gehört diese Position zum „Konventualismus“ (siehe S. 66).⁴⁷

A2. Eine andere Strategie als die Logizisten verfolgten die Begründer der axiomatischen Mengenlehre, ZERMELO und FRAENKEL, sowie später NEUMANN, BERNAYS und GÖDEL, welche die CANTORSche Mengenlehre durch eine Rückbindung an Axiome absichern wollten (siehe S. 79). Man vernachlässigte allerdings die philosophische Aufgabe einer intuitiven Begründung der Axiome. So fügte ZERMELO seinem Axiomensystem die folgende Bemerkung bei: „Die weitere, mehr philosophische Frage nach dem Ursprung und dem Gültigkeitsbereiche dieser Prinzipien soll hier noch unerörtert bleiben. Selbst die gewiss sehr wesentliche ‚Widerspruchslosigkeit‘ meiner Axiome habe ich noch nicht streng beweisen können . . . “ Eingehendere Betrachtungen zur intuitiven Absicherung der Axiome blieben auch später aus, obgleich in dieser Richtung Versuche unternommen wurden.⁴⁸

B. Wer den Realismus ablehnt, sieht die Gegenstände der Mathematik als von den Mathematikern geschaffene Gebilde an. Ansonsten aber ist die „Opposition“ gegen den mathematischen Platonismus unter sich zerstritten, was die vielen Schlagwörter wie *Nominalismus*, *Formalismus*, *Konventualismus*, *Konzeptualismus*, *Intuitionismus*, *Konstruktivismus*, *Finitismus* belegen, welche die verschiedenen Spielarten der nicht-realistischen Auffassung kennzeichnen.

⁴⁰ Vgl. RUSSELL und WHITEHEAD, *Principia Mathematica*; QUINE, *New Foundations* und *Mathematical Logic* sowie CARNAP, *Logische Syntax*.

⁴¹ Etwa RUSSELLS *Typentheorie* (siehe S. 83–84 und S. 97–98) oder QUINES „Stratifizierung“ (siehe S. 84).

⁴² Zu WHITEHEAD siehe S. 639–640.

⁴³ In *The Principles of Mathematics* (1903) hatte er noch vehement die Existenz unendlicher Klassen als beweisbar verteidigt (Kap. 43 § 337–350 S. 355–368).

⁴⁴ In den *Principia Mathematica* wird von Klassen geredet, ohne deren reale Existenz vorauszusetzen (Band 1 S. 88; siehe auch S. 78); auch wird die Frage, ob es unendliche Klassen gibt, offen gelassen als eine Frage, die legitimerweise nur auf empirischer Basis entschieden werden könne (Band 2 S. 183). Allerdings bekannte sich RUSSELL weiterhin zu Universalien (vgl. RUSSELL, *Analysis of Mind* S. 290).

⁴⁵ Vgl. QUINE, *Theories and Things*, Replik auf David Armstrong S. 220–222, ferner QUINE, *Reification* sowie QUINE und GOODMAN, *Constructive Nominalism*. Siehe auch S. 78–79 mit Fußnote 137.

⁴⁶ Vgl. FRAENKEL et al., *Foundations* S. 337f.

⁴⁷ MADDY, *Realism in Mathematics* S. 27: „conventionalist line of thought“. In der Tat sagt CARNAP: „the decisive question ist not the alleged ontological question of the existence of abstract objects, but rather the question whether the use of abstract linguistic forms . . . ist expedient and fruitful for the purposes for which sementical analyses are made“ (CARNAP, *Empiricism* S. 39).

⁴⁸ Ein Beispiel ist Hao WANGS intuitive Rechtfertigung eines „iterativen“ Mengenkonzepts (WANG, *Mathematics* S. 181–187).

B1. Unter dem mathematischen *Nominalismus* versteht man die radikalste Form der Ablehnung einer realen Existenz abstrakter mathematischer Gegenstände. Der Nominalist „anerkennt nichts anderes als seiend denn Individuen“. ⁴⁹ Zwar arbeitet er auch mit Nichtindividuen, deutet diese aber nur als „façon à parler“ oder nützliche Fiktion. ⁵⁰ HERSH nennt deshalb den eigentlichen Nominalismus *Fiktionalismus*. ⁵¹ Dieser echte Nominalismus hat aber kaum Anhänger und steht auch mit dem Grundlagenstreit am Anfang des 20. Jahrhunderts kaum im Zusammenhang. Innerhalb dieses Streits nahm vielmehr der sog. Formalismus seine Stelle ein.

B2. Für den *Formalismus* ⁵² ist Mathematik ein „Spiel mit Formeln“, ⁵³ oder drastischer ausgedrückt: ein „Spiel mit Zeichenreihen“. ⁵⁴ So steht an sich betrachtet der Formalismus „dem Nominalismus am nächsten“. ⁵⁵ Sobald man aber den formalisierten Systemen eine Interpretation und Anwendung auf irgendeinem Gebiete gibt, kann der nominalistische Gesichtspunkt nicht mehr aufrecht erhalten werden, und somit zeigt sich der Formalismus als eine „Pendeltheorie, die zwischen extremem Nominalismus und eindeutigem Platonismus hin und her pendelt“. ⁵⁶ Als führender Formalist des 20. Jahrhunderts gilt David HILBERT (1862–1943), der das erste moderne Axiomensystem der Geometrie entwarf und zusammen mit Wilhelm ACKERMANN den ersten ausgereiften, vollständigen Kalkül der Prädikatenlogik aufstellte. ⁵⁷ Hinter den HILBERTschen Bemühungen stand allerdings die Absicht, den Formalismus letztlich als sichere Methode der *inhaltlichen* Erkenntnisgewinnung einzusetzen: HILBERT wollte die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik und dann auch der transfiniten Mengenlehre beweisen; er war sogar überzeugt, dass sich auf diesem Wege durch „reine Vernunft“ alle mathematischen Probleme überhaupt klären lassen („HILBERTsches Programm“). ⁵⁸ Im Formalismus kommt ein die moderne Mathematik kennzeichnender Wesenszug zum Ausdruck, insofern diese nur „formale Strukturen“ betrachtet und die Frage nach dem „Wesen“ und der „wahren Bedeutung“ ihrer Resultate ausklammert. Dies brachte Bertrand RUSSELL treffend zum Ausdruck:

„Mathematik können wir definieren als das Gebiet, auf dem wir nie wissen, wovon wir eigentlich reden, und ob das, was wir sagen, auch wahr ist.“ ⁵⁹

Im gleichen Sinn schrieb WITTGENSTEIN:

„Alle Sätze der Logik sagen aber dasselbe. Nämlich nichts.“ ⁶⁰

⁴⁹ STEGMÜLLER, *Metaphysik* S. 150.

⁵⁰ Vgl. MADDY, *Realism in Mathematics* Kap. 5.2. S. 159–170.

⁵¹ Vgl. HERSH, *What is Mathematics* S. 179–181 und MADDY, *Realism in Mathematics* S. 159–170.

⁵² Vgl. STEGMÜLLER, *Metaphysik* S. 286–307 und EBBINGHAUS, *Mengenlehre* S. 299f.

⁵³ STEGMÜLLER, *Metaphysik* S. 299.

⁵⁴ EBBINGHAUS, *Mengenlehre* S. 203f.

⁵⁵ STEGMÜLLER, *Metaphysik* S. 299.

⁵⁶ STEGMÜLLER, *Metaphysik* S. 299.

⁵⁷ Vgl. HILBERT, *Geometrie*, und HILBERT und ACKERMANN, *Logik*; siehe auch S. 379.

⁵⁸ Dieses optimistische „Programm“ formulierte Hilbert im Jahre 1900 auf dem internationalen Mathematiker-Kongress in Paris, wo er einem Katalog von 23 offenen Fragen der Mathematik das Motto voranstellte, dass der Mathematiker alle Probleme durch reine Vernunft lösen könne, es gebe für ihn kein „ignorabimus“: „Cette conviction de la possibilité de résoudre tout problème est pour nous un précieux encouragement pendant le travail. ... Voilà le problème, cherchez-en la solution. Tu peux la trouver par le pur raisonnement. Jamais, en effet, [le] mathématicien ne sera réduit à dire: ‚Ignorabimus‘“. Man weiß heute, dass dieses Programm grundsätzlich zum Scheitern verurteilt ist, da der GÖDELSche Unvollständigkeitssatz eine vollständige Lösung aller Probleme grundsätzlich ausschließt (siehe Satz 6.4.11 auf S. 385).

⁵⁹ RUSSELL, *Mathematics and the Metaphysicians* S. 75: „Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are taking about, nor whether what we are saying is true.“

⁶⁰ WITTGENSTEIN, *Tractatus* § 5.43, Ausgabe Busch S. 71.

Aber weder RUSSELL noch WITTGENSTEIN waren Formalisten. Zum Formalisten wird man erst, wenn man die Wesensfrage nicht nur ausklammert, sondern für bedeutungslos erklärt und das wahre Wesen der Mathematik in der Form „an sich“ sieht. Doch auch dies kann, wenn man sich wie HILBERT für die Frage nach der *Widerspruchsfreiheit* dieser Formen interessiert und diese mit ihrer *inhaltlichen Erfüllbarkeit* assoziiert, der realistischen Position sehr nahe kommen. Radikalere Formalisten sehen daher in der letzteren Position – und namentlich bei HILBERT – immer noch eine Metaphysik am Werk, welcher eine „pseudoplatonische Ideologie“ zugrunde liege.⁶¹

B3. Eine andere Spielart des Nominalismus ist der *Konventualismus* (oder *Positivismus*, *Pragmatismus*), für den die Gesetze der Logik und Mathematik nur aufgrund von willkürlichen menschlichen Konventionen bestehen.⁶² Der bedeutendste Vertreter dieser Richtung war der Positivist Rudolf CARNAP (siehe auch S. 64 und unten S. 626). Als Begründer des Konventualismus gilt Jules Henri POINCARÉ (1854–1912), der allerdings die Arithmetik und Logik vom Konventualismus ausnahm, indem er deren Gesetze für notwendig ansah.⁶³

B4. Unter dem *Konzeptualismus*⁶⁴ versteht man in der Philosophiegeschichte des Mittelalters eine zwischen Realismus und Nominalismus vermittelnde Position. Als dem Konzeptualismus entsprechende Position gilt in der Philosophie der Mathematik an erster Stelle der *mathematische Intuitionismus*. Dieser Grundlagenstandpunkt geht auf den holländischen Mathematiker Luitzen Egbertus Jan BROUWER (1881–1966) zurück, als dessen Vorläufer CANTORS Gegner Leopold KRONECKER (1823–1891) gilt. BROUWER selbst sah KANT als seinen Vorläufer an. Der Intuitionismus gewann nur wenige, dafür aber hochkarätige Mathematiker und Logiker wie Emile BOREL, Henri LEBESGUE, Thoralf SKOLEM, Hermann WEYL und Arend HEYTING als Anhänger oder Sympathisanten; auch der Konventualist Henri POINCARÉ sympathisierte mit der BROUWERSchen Bewegung. Der führende Kopf des Intuitionismus ist heute der Logiker und Philosoph Michael DUMMETT.⁶⁵

BROUWER lehnte im Gegensatz zu den Logizisten die Logik als Begründung der Mathematik ganz ab, und im Gegensatz zu den Formalisten war ihm auch die Sprache nebensächlich: Mathematische Gegenstände werden ihm zufolge „durch die geistige Aktivität des Mathematikers erschaffen“, ihre Existenz muss durch eine „Konstruktion“ nachgewiesen werden,⁶⁶ die im Geist des Mathematikers, nicht auf dem Papier vollzogen wird.⁶⁷ BROUWER tendiert gewissermaßen zu einem mathematischen Solipsismus.⁶⁸ Beweise sind ihm zweitrangig, mathematische Erkenntnis muss durch eine persönliche Initiation dem Studenten vermittelt werden, der die Konstruktionen allein in sich selbst vollziehen muss.⁶⁹ Mathematik ist „mehr ein Tun denn eine Lehre“.⁷⁰ Dabei sind „alle Konstruktionen der Mathematik auf das Zählen zurückzuführen“,⁷¹ denn die Vorstellung der zum Zählen verwend-

⁶¹ Vgl. Detlef LAUGWITZ, *Sinn und Grenze der axiomatischen Methode*. Vortrag vom 13.04.1965 auf der Nürnberger Jahrestagung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, zitiert nach MESCHKOWSKI, *Wahrheit in der Mathematik* S. 94.

⁶² Vgl. MADDY, *Realism in Mathematics* S. 27.

⁶³ Vgl. FREY, *Konventualismus*. POINCARÉ sympathisierte auch mit dem Intuitionismus (siehe Fußnote 72 auf S. 67).

⁶⁴ Vgl. HÜBNER, *Konzeptualismus*, besonders S. 1098.

⁶⁵ Vgl. DUMMETT, *Metaphysics* und DUMMETT, *Intuism*.

⁶⁶ HEYTING, *Intuitionismus* S. 543.

⁶⁷ Vgl. BROUWER, *Intuitionisme en formalisme* S. 7: „Op de vraag, waar de wiskundige exactheid dan wel bestaat, antwoorden beide partijen verschillend; de intuitionist zegt: in het menselijk intellect, de formalist: op het papier.“ (zit. nach WEYL, *Philosophie* S. 83; engl. Übers. in BROUWER, *Werke* Band 1 S. 83).

⁶⁸ Vgl. FRAENKEL et al., *Foundations* S. 225. Zum philosophischen Solipsismus siehe S. 601.

⁶⁹ Vgl. FRAENKEL et al., *Foundations* S. 225.

⁷⁰ WEYL, *Grundlagenkrise* S. 17.

⁷¹ MAINZER, *Konstruktivismus* S. 1019.

ten natürlichen Zahlen bzw. die Vorstellung des sie erzeugenden Bildungsgesetzes gilt als eine der Begründung oder empirischen Bestätigung weder bedürftige noch fähige „Urintuition“ (daher der Name „Intuitionismus“). Weil nun der Mensch nicht in der Lage ist, unendlich viele Sukzessionen zugleich in seinem Geist zu vollziehen, ist klar, dass in dieser Sicht das Unendliche nur potentiell existieren kann.⁷² Wie der BROUWER-Anhänger Hermann WEYL ausführt, liegt die „tiefste Wurzel des Übels“ darin, dass „ein zum Unendlichen hin offenes Feld von Möglichkeiten . . . für ein geschlossenes Gebiet“ gehalten worden sei: darin bestehe „der Sündenfall und die Erbsünde der Mengentheorie“. ⁷³ Intuitionisten sind also zugleich Konstruktivisten und neigen daher zum Finitismus.

Das bekannteste Beispiel für die radikalen Mittel, mit denen BROUWER die Mathematik heilen wollte, ist seine Ablehnung des „tertium non datur“. Sein positivistischer Wahrheitsbegriff, der „wahr“ mit „verifizierbar“ identifiziert, führte ihn zur Ablehnung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, wonach jede sinnvolle Formel wahr oder falsch sein muss.⁷⁴ Eine der vielen seltsamen Konsequenzen daraus ist, dass dann von zwei verschiedenen reellen Zahlen keineswegs die eine immer entweder kleiner oder größer als die andere sein muss.⁷⁵ Der Intuitionismus verlangt also einen tiefgreifenden Umbau der gesamten Mathematik. Es werden nicht nur das aktual Unendliche und die Mengenlehre radikal abgelehnt, auch die klassische Logik und große Teile der klassischen Mathematik sollen aufgegeben oder vollkommen neu konzipiert werden. Dabei sind die klassischen Beweise durch kompliziertere intuitionistische zu ersetzen. Viel mehr Aufwand und viel weniger Resultate um fragwürdiger Prinzipien willen – das ist der abschreckende Eindruck, den der Intuitionismus auf die meisten Mathematiker gemacht hat. Marcel BARZIN hat diesen Eindruck treffend so umschrieben: BROUWERS Versuch, die Paradoxien zu beseitigen gleicht dem Verhalten eines Chirurgen, der, um einen eingewachsenen Nagel zu entfernen, gleich das ganze Bein amputiert.⁷⁶

B5. Es gibt außer dem Intuitionismus noch andere Spielarten des Konzeptualismus. So ist der Konzeptualismus, zu dem sich der zeitgenössische Mathematiker Heinz-Dieter EBBINGHAUS bekennt, vom Intuitionismus klar zu unterscheiden. EBBINGHAUS macht keinerlei Abstriche von der Mengenlehre in ihrem klassischen Umfang, glaubt aber, dass mathematische Konzepte nicht von vornherein „fertig“ sind, sondern sich „aus der Erfahrung über die uns umgebende Wirklichkeit“ entwickeln und „über die Kommunikation der Mathematiker untereinander zu einem immer einheitlicheren Gebrauch“ gelangen. Die Frage, „wie weit und in welchem Sinn Konzepten Realität zukommen kann“, lässt er offen.⁷⁷ Eine ähnliche Spielart des Konzeptualismus ist auch der sog. *quasi-empiristische Standpunkt* von Imre LAKATOS (1922–1973), der von HERSH als begrüßenswerte Alternative von allen „klassischen“ Grundlagenpositionen abgehoben wird.⁷⁸ Nach LAKATOS hat die Mathematik kein feststehendes Fundament: Sie nähert sich in einem dialektischen Prozess durch grundsätzlich stets fehlbare Versuche der Wahrheit an, ohne diese jemals voll erreichen zu können.⁷⁹

⁷² Die wahren Mathematiker sind auch nach POINCARÉ, *Les Mathématiques et la Logique* S. 312 „celle où l'on ne patauge pas dans l'infini actuel“ (jene, bei denen man nicht im aktual Unendlichen herumwatscht). Vgl. ebd. S. 316: „Il n'y a pas d'infini actuel“.

⁷³ WEYL, *Philosophie* S. 299f.

⁷⁴ Vgl. BROUWER, *Intuitionistische Betrachtungen* S. 2 (Collected Works S. 410). Es geht hier um den Satz vom ausgeschlossenen Dritten bezüglich des Wahrheitswertes (oben S. 43–44 mit Fußnote 34 auf S. 43), der trivialerweise gültig ist (siehe Fußnote 36 auf S. 43), wenn wir den gewöhnlichen Wahrheitsbegriff voraussetzen (den BROUWER jedoch verwirft).

⁷⁵ Vgl. DAVIS und HERSH, *Mathematical Experience* S. 369–374.

⁷⁶ Vgl. BARZIN, *Crise* S. 11.

⁷⁷ EBBINGHAUS, *Mengenlehre* S. 204–206.

⁷⁸ Er ist insbesondere vom quasi-empiristischen *Realismus* (siehe Fußnote 17 auf S. 61) zu unterscheiden.

⁷⁹ Vgl. HERSH, *What is Mathematics* S. 208–216; DAVIS und HERSH, *Mathematical Experience* S. 345–359.

B6. Der Hauptinhalt des *Konstruktivismus*⁸⁰ ist das Bestreben, Mathematik letztlich auf das Zählen (und somit die ganzen Zahlen) zurückzuführen. Von einer unendlichen Menge zu reden, sieht der Konstruktivist nur dann als legitim an, wenn jedes Element dieser Menge über ein Rechenverfahren in endlich vielen Schritten „konstruierbar“ ist. Wie wir gesehen haben, sind die Intuitionisten zugleich Konstruktivisten, aber umgekehrt muss ein Konstruktivist nicht die Metaphysik des Intuitionismus übernehmen.⁸¹ So müssen die „Konstruktionen“ keineswegs mentaler Art sein, wie es der intuitionistischen Lehre entspricht.⁸²

B7. Die Anhänger des *finitistischen* Grundlagenstandpunkts schließlich betrachten unendliche Mengen „als heikle Schöpfungen des menschlichen Geistes“, ziehen „zwischen den überblickbaren und den unüberblickbaren Gesamtheiten eine scharfe Trennungslinie“ und verlangen „für die Bildung von unüberblickbaren Gesamtheiten besondere Legitimationen“.⁸³ In diesem Sinn war Leopold KRONECKER (1823–1891) unter den modernen Mathematikern „der erste, für lange Zeit einzige und unverstandene Finitist“,⁸⁴ aber eigentlich tendieren alle Vertreter eines nicht-realistischen Standpunktes mehr oder weniger zum Finitismus. Als „Finitisten“ schlechthin wurden meist HILBERT (siehe S. 65) und seine Anhänger bezeichnet. Das ist zwar insofern berechtigt, als sie für mathematische Beweise einen vollkommen klaren, finiten Formalismus forderten,⁸⁵ aber HILBERT wollte mit diesem „finitistischen“ Formalismus die *gesamte* Mathematik *einschließlich* der transfiniten Mengenlehre weitmöglichst absichern, nach dem Motto: „Das Unendliche kann nur durch das Endliche gesichert werden“.⁸⁶ Zwar sagt HILBERT: „das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig“,⁸⁷ aber er fügt hinzu, das Unendliche sei ein „Vernunftbegriff“, der „alle Erfahrung übersteigt und durch den das Konkrete im Sinne der Totalität ergänzt wird“, es sei eine „Idee“ im KANTSchen Sinn, welcher wir „unbedenklich vertrauen dürfen in dem Rahmen, den die von mir hier skizzierte und vertretene Theorie gesteckt hat“.⁸⁸ Hiernach scheint HILBERT nicht weit von einer platonistischen Auffassung entfernt gewesen zu sein; überdies hört man eine gewisse Begeisterung für das Unendliche heraus,⁸⁹ die auch verständlich macht, warum ausgerechnet der „Finitist“ Hilbert ausrufen konnte: „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“⁹⁰

⁸⁰ Vgl. MAINZER, *Konstruktivismus*.

⁸¹ Dies betonte der Formalist Haskell Brooks CURRY (1900–1982), und er fügte hinzu: „Modern improvements of the constructivity notion have been made by persons who are primarily formalists“ (CURRY, *Foundations* S. 15).

⁸² Beispiel eines vom Intuitionismus unabhängigen Konstruktivismus ist auch der „Operationalismus“ von Paul LORENZEN (vgl. LORENZEN, *Operative Logik* und LORENZEN, *Metamathematik*).

⁸³ SCHOLZ, *Mathesis* S. 296.

⁸⁴ SCHOLZ, *Mathesis* S. 296 Fußnote 2. Vgl. zu KRONECKER auch S. 341 mit Fußnote 898 auf S. 341. Auch WITTGENSTEIN war Finitist (siehe Fußnote 394 auf S. 157). Ein zeitgenössischer Finitist ist der Koreaner JOONG FANG, der in seinem Buch *The illusory infinite – a theology of mathematics* behauptet, das aktual Unendliche sei „im Prinzip göttlich“ und daher „weit außerhalb der Reichweite von uns Sterblichen, einschließlich der Mathematiker“ (S. 20). Er lehnt daher CANTORS transfinite Arithmetik ab und meint, es handle sich dabei nicht um „geradlinige Mathematik“, sondern um eine „verkleidete Theologie“ (S. 11); CANTORS Höhenflug ins Reich des Transfiniten sei „mehr theologisch oder pathologisch als mathematisch“ gewesen (S. 178) und schon seine Grundannahmen seien nicht nur mathematisch, sondern auch philosophisch unsinnig (vgl. S. 187).

⁸⁵ Vgl. HILBERT und BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik I* § 2 S. 20–44.

⁸⁶ HILBERT, *Über das Unendliche* S. 190.

⁸⁷ HILBERT, *Über das Unendliche* S. 190; vgl. auch die kritischen Ausführungen gegen eine reale Existenz des Unendlichen ebd. S. 164f und in HILBERT und BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik I* S. 15f.

⁸⁸ HILBERT, *Über das Unendliche* S. 190.

⁸⁹ Aus dieser Begeisterung heraus scheint HILBERT auch die Idee des Unendlichen in öffentlichen Vorträgen durch sein „Hotel-Gleichnis“ populär gemacht zu haben (siehe S. 237–238).

⁹⁰ HILBERT, *Über das Unendliche* S. 170.

Mit dem sog. „strengen Finitismus“,⁹¹ der die Existenz unendlicher Mengen strikt bestreitet, hat HILBERT jedenfalls nichts zu tun, und man wird selbst unter den Intuitionisten der BROUWERSchen Schule einen solchen Finitisten kaum finden. In diese Richtung tendieren am ehesten die sog. *Ultra-Intuitionisten* um Aleksandr YESSÉNIN-VOLPIN, der es fragwürdig findet, ob die Zahl 10^{12} (eine Billion) existiert, da noch niemand bis dahin gezählt habe.⁹² Wenn aber YESSÉNIN-VOLPIN weiter sagt, er glaube zwar nicht an die „Existenz“ der natürlichen Zahlenreihe, wolle aber ihre „Möglichkeit“ im Sinne von Widerspruchsfreiheit beweisen,⁹³ so zeigt sich, dass auch dieser strengste Finitismus der Unendlichkeit noch einen gewissen Möglichkeits-Modus einzuräumen gewillt ist.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Bild. Der nominalistische *Fiktionalismus* leugnet die Existenz von Mengen, der *Formalismus* vernachlässigt die semantische Dimension der Formeln, der *Konventualismus* nimmt ihnen ihre objektive Bedeutung, der *Intuitionismus* opfert große Teile der klassischen Mathematik, der *Quasi-Empirismus* betrachtet nur ihre subjektive und praktische Seite, der *Konstruktivismus* engt Mathematik auf Konstruktionen und der *Finitismus* auf endliche Bereiche ein. Jede dieser Richtungen verkleinert also auf spezifische Weise den vom mathematischen Platonismus angenommenen Gesamtbestand der Mathematik. So ist der Platonismus ein *mathematischer Universalismus*, dem die übrigen Standpunkte als *Partikularismen* gegenüber stehen.

Zur Würdigung dieser Partikularismen kann man sagen, dass sie in dem, worauf sie positiv blicken (im Gegensatz zu dem, was sie ablehnen) wertvolle Beobachtungen und Anregungen für die Mathematik zu bieten haben. Der Formalismus ist als strenge Methode hilfreich. Fiktionalismus, Intuitionismus, Konstruktivismus und Finitismus zeigen auf, wie weit man „von unten“, d. h. ohne Rückgriff auf höhere ontologische Prinzipien kommen kann. Quasi-Empirismus und Konventualismus schließlich zeigen, wie der mathematische Forschungsbetrieb funktioniert. Doch als tragendes Fundament zur Erklärung des *Gesamtphänomens Mathematik* scheint keiner dieser Partikularismen für sich allein geeignet zu sein. Hier gibt es zum Platonismus einfach keine überzeugende Alternative. Was also nun Not tut, ist eine platonistisch-inhaltliche Begründung der Axiome der axiomatischen Mengenlehre. Diese Axiome sollten nicht als willkürliche Sätze aufgefasst werden, sondern entweder logisch evidente Tatsachen ausdrücken oder aber Sachverhalte, die durch Explikation einer nicht-logischen Anschauung evident gemacht werden können. Diese alte, auf ARISTOTELES und EUKLID zurückgehende Auffassung haben sich in neuerer Zeit auch der Logiker FREGE und der Mathematiker Felix KLEIN zu eigen gemacht, denen ich mich diesbezüglich anschließen möchte. FREGE schrieb in seinem Brief an HILBERT vom 27.12.1899: „Axiome nenne ich Sätze, die wahr sind, die aber nicht bewiesen werden, weil ihre Erkenntnis aus einer von der logischen ganz verschiedenen Erkenntnisquelle fließt“. ⁹⁴ KLEIN klagt in seiner *Elementarmathematik*, man finde

„bei solchen Leuten, die sich nur für die logische und nicht für die anschauliche oder allgemein-erkenntnistheoretische Seite der Sache interessieren, neuerdings häufig die Meinung, die Axiome seien nur willkürliche Sätze ... Ich selbst teile diesen Standpunkt keineswegs, sondern halte ihn für den Tod der Wissenschaft“. ⁹⁵

⁹¹ Vgl. MOORE, *The Infinite* S. 133-137.

⁹² Vgl. YESSÉNIN-VOLPIN, *Criticism* S. 4. Siehe auch YESSÉNIN-VOLPIN, *Programme ultra-intuitioniste*.

⁹³ „I don't really believe in the *existence* of a series containing 10^{12} – I shall prove the *possibility* of such a series“ (YESSÉNIN-VOLPIN, *Criticism* S. 5). Außerdem wollte er sogar die Konsistenz der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre beweisen: „I shall ... prove the consistency of Zermelo-Fraenkel set theory“ (ebd. S. 3).

⁹⁴ FREGE, *Briefwechsel* S. 63. FREGE nennt diese Erkenntnisquelle hier explizit die „Raumanschauung“, womit er aber wohl nicht die allgemeine Erkenntnisquelle für Axiome gemeint sein dürfte; denn es geht in dem Brief konkret um eine Kritik der Axiomatik in HILBERTS Werk über „Grundlagen der Geometrie“.

⁹⁵ KLEIN, *Elementarmathematik* S. 202.

5.2 Objekte, Individuen, Klassen, Mengen und Ummengen

Da wir den Objektbereich so groß wie möglich konzipieren wollen, fordern wir bloß, dass die Objekte durch feste Grenzen eindeutig voneinander unterscheidbar sind. Der Bereich der in der Ontologie bereits eingeführten „logischen Individuen“⁹⁶ erfüllt diese Forderung, und sie bleibt erfüllt, wenn wir diesen Bereich erweitern, indem wir zum Bereich der *Gesamtheiten von Individuen* übergehen:

5.2.1 Erklärung (Vorläufige Festlegung⁹⁷ des Objektbegriffs) Die *Objekte* der Mathematik (von jetzt an kurz: *Objekte*) seien die Gesamtheiten von Individuen (kurz: *Gesamtheiten*), nämlich:

1. die aus *mehreren* Individuen zusammengesetzten Vielheiten (kurz: *Vielheiten*),
2. die aus *einem* Individuum bestehenden Gesamtheiten, also die einzelnen *Individuen*,
3. die aus *null* Individuen bestehende Gesamtheit: das *Nichts*.

Zu den Individuen sind also die Vielheiten und das Nichts hinzugenommen. Aufgrund der eindeutigen Unterscheidbarkeit steht nun für Objekte x, y stets fest, ob sie unterschiedslos identisch sind oder nicht.⁹⁸ Das heißt: Wann immer θ_1 und θ_2 Objekte bezeichnen, sind die diese Objekte entweder ein und dasselbe Objekt, oder sie unterscheiden sich. Um Ersteres bzw. Letzteres auszudrücken, schreibt man

$$\theta_1 = \theta_2 \quad [\text{Lesart: } \theta_1 \text{ gleich } \theta_2] \quad \text{bzw.} \quad \theta_1 \neq \theta_2 \quad [\text{Lesart: } \theta_1 \text{ ungleich } \theta_2].$$

Ein Zeichenverband der Form $\theta_1 = \theta_2$ bzw. $\theta_1 \neq \theta_2$ heißt *Gleichung* bzw. *Ungleichung*.

Von den *Vielheiten von Individuen* sind die *Denkformen*⁹⁹ mit einer *Vielheit von Individuen als Inhalt* zu unterscheiden: Denkformen sind nämlich (falls sie widerspruchsfrei sind) immer einzelne Individuen. Wie es bei allen widerspruchsfreien Denkformen der Fall ist, sind auch diese durch ihren direkten Inhalt vollständig bestimmt, so dass es keine zwei von ihnen gibt, die genau den gleichen direkten *Inhalt* haben.¹⁰⁰

Doch kann es immer noch zwei Denkformen geben, welche genau dieselbe *Gesamtheit von Individuen* als direkten Inhalt besitzen: in den beiden Denkformen können nämlich die direkt beinhalteten Individuen in verschiedener Weise in ein System eingebettet sein (z. B. können die Individuen vor verschiedenem Hintergrund vorgestellt werden;¹⁰¹ sie können in der Vorstellung auf verschiedene räumliche oder zeitliche Punkte verteilt sein; sie können als Träger verschiedener Akzidentien und Sachverhalte oder als aufeinander wirkend vorgestellt werden). Sind aber *nur* die Individuen der Gesamtheit (ohne jeden Hintergrund, ohne Einbettung in ein Universum, ohne Akzidentien, Sachverhalte und Interaktionen) in der Vorstellung, so dass nur die „reine“ Gesamtheit zum direkten Inhalt gehört, spreche ich von einer *Menge*.

5.2.2 Erklärung Eine *Menge* ist eine widerspruchsfreie Denkform (somit ein Individuum), deren direkter Inhalt eine reine Gesamtheit von Individuen ist. Gehört ein Individuum zum direkten Inhalt einer Menge, so wird es ein *Element* dieser Menge genannt.

⁹⁶ Wir hatten diese Individuen beschrieben als widerspruchsfreie Denkformen, also abstrakte momentane Erkenntnisakte, die nicht etwas zugleich direkt beinhalten und nicht beinhalten (siehe Definition 4.5.4, S. 56).

⁹⁷ Bei der endgültigen Festlegung des Objektbereichs werden wir gewisse „überflüssige“ Gesamtheiten wieder entfernen (siehe Definition 5.4.2 S. 88).

⁹⁸ Zum den Arten der Identität und des Unterschieds siehe Abschnitt 4.5.2. Bei unterschiedsloser Identität liegt eigentlich nur ein einziges Objekt vor.

⁹⁹ Zu diesem wichtigen Begriff siehe S. 26–27.

¹⁰⁰ Zu direkten und indirekten Inhalten von Erkenntnisakten siehe S. 26.

¹⁰¹ Gemeint ist hier ein thematisch erfasster Hintergrund, da Denkformen schon so abstrakt sind, dass sie keinen unthematischen Hintergrund mehr haben (siehe S. 26–27).

Ernst ZERMELO stellte 1932 fest, dass die Mengenlehre „der schöpferischen Tat eines einzelnen zu verdanken“ ist: Sie ist eine „Schöpfung“ von Georg CANTOR (1845–1918), der sie während eines Zeitraums von etwa 25 Jahren, von 1874 bis 1897, in einer Reihe von Abhandlungen entwickelt hat. Nach ZERMELOS Urteil ist die Mengenlehre „seitdem zum bleibenden Besitze der Wissenschaft geworden“, so dass „alle späteren Forschungen auf diesem Gebiete“ nur noch als „ergänzende Ausführungen“ zu den Gedanken CANTORS verstanden werden können.¹⁰² Wenngleich diese Aussage nach der Entwicklung der verschiedenartigsten *formalen* Systeme der Mengenlehre (ZERMELO, FRAENKEL, RUSSELL, VON NEUMANN, BERNAYS, GÖDEL, QUINE, KELLEY, MORSE, SCOTT, ...) etwas überholt klingen könnte, so ist es doch wahr, dass die meisten *realistischen* Interpretationsversuche der Mengenlehre direkt an CANTOR anknüpfen. Auch meine Definition der Menge soll eine Explikation der CANTORSchen Definition sein, mit welcher er 1895 seine letzte Veröffentlichung zur Mengenlehre eröffnete, und die seither fast in jedem Buch der Mengenlehre zitiert wird:

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“¹⁰³

Nun müsste vor allem präzisiert werden, was „Zusammenfassung“ heißt. Verschiedene Mathematiker haben dafür die verschiedensten Vergleiche angegeben. So verglich Thoralf SKOLEM Mengen mit „Katalogen“, die ihre Elemente anführen.¹⁰⁴ Richard DEDEKIND stellte sich eine Menge vor „wie einen geschlossenen Sack“,¹⁰⁵ und von Georg CANTOR wird berichtet, dass er seine Mengenvorstellung einmal wie folgt kundgetan hat:

„Er richtete seine kolossale Figur hoch auf, beschrieb mit erhobenem Arm eine großartige Geste und sagte mit einem ins Unbestimmte gerichteten Blick:
„Eine Menge stelle ich mir vor wie einen Abgrund.““¹⁰⁶

Sehen wir von solchen Vergleichen ab, so bleibt nur übrig, die Menge als einen Begriff oder abstrakten Gedanken aufzufassen, was im Einzelnen natürlich in verschiedener Weise präzisiert werden kann. Meine Definition 5.2.2 der Menge als Denkform soll eine solche Präzisierung sein.

Das wichtigste Anliegen der Mengenlehre ist es nun, Gesamtheiten, insbesondere Vielheiten, weitestgehend wie Individuen zu behandeln. CANTOR hat es einmal so ausgedrückt: Eine Menge sei „jedes Viele, welches sich als Eines denken lässt“.¹⁰⁷ Nach dem hier vorgestellten Ansatz lässt sich dies wie folgt verstehen: Eine Vielheit oder Gesamtheit kann als Einheit betrachtet werden, wenn eine Menge existiert, welche genau die Bestandteile der Gesamtheit beinhaltet. Dann ist nämlich diese Menge (die als Denkform ein Individuum ist) ein diese Gesamtheit repräsentierendes Individuum, und so kann die Gesamtheit als „individualisiert“ gelten.¹⁰⁸ Wir können jeder Menge jeweils die zugehörige Gesamtheit ihrer Elemente gegenüberstellen, und *wenn* nun auch umgekehrt zu jeder Gesamtheit eine entsprechende Menge existiert, würde die „Entsprechung“ von Mengen und Gesamtheiten vollkommen sein. Diese Hypothese wird also durch folgendes Diagramm veranschaulicht:

¹⁰² ZERMELO, *Cantor* Vorwort S. III.

¹⁰³ CANTOR, *Transfinite Mengenlehre* § 1, Ausgabe Zermelo S. 282.

¹⁰⁴ Siehe Fußnote 610 auf S. 257.

¹⁰⁵ BERNSTEIN, *Bemerkungen* S. 449.

¹⁰⁶ BERNSTEIN, *Bemerkungen* S. 449.

¹⁰⁷ CANTOR, *Punktmannigfaltigkeiten* Nr. 5 § 1, Ausgabe Zermelo S. 204 Fußnote 1.

¹⁰⁸ Einen analogen Trick haben wir schon in Abschnitt 4.5.5 angewendet, um überhaupt Individuen zu erhalten: Wir packten Inhalte in eine Denkform. Dasselbe tun wir hier wieder mit Gesamtheiten von Individuen, und erhalten so „individualisierte“ Gesamtheiten von Individuen, die wir Mengen nennen.

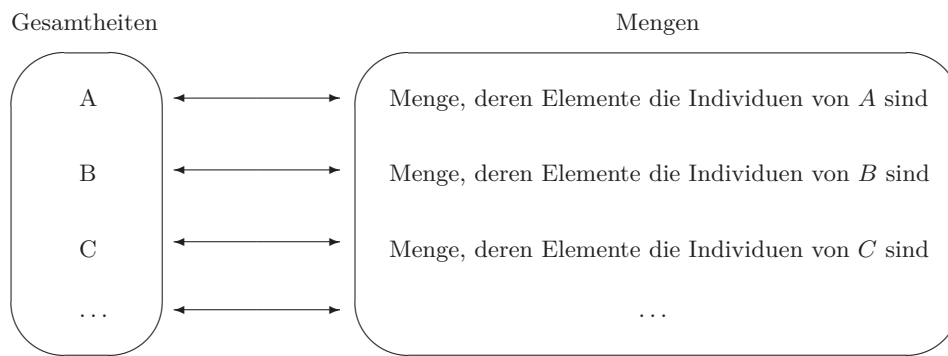


Abbildung 5.1: Gegenüberstellung der Gesamtheiten und Mengen (Erste Hypothese)

Man könnte dann dem Anliegen der Mengenlehre voll entsprechen: *Alle* Gesamtheiten könnten durch die entsprechende Menge ersetzt und dadurch „individualisiert“ werden. Existiert dagegen nicht zu jeder Gesamtheit eine entsprechende Menge, müsste es auf der Seite der Gesamtheiten „mehr“ Objekte geben, und die Situation wäre folgende:

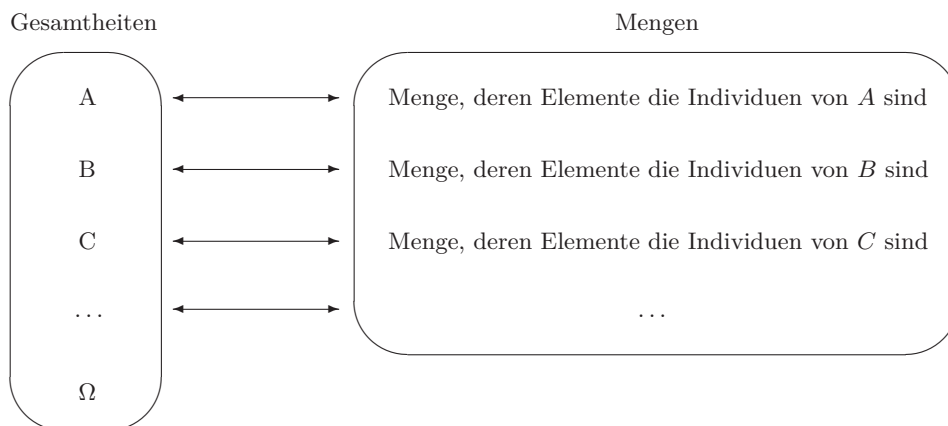


Abbildung 5.2: Gegenüberstellung der Gesamtheiten und Mengen (Zweite Hypothese)

Dies ist die wahre Situation: Es gibt Vielheiten, zu denen keine entsprechende Menge existiert, wie ich im Folgenden zeigen werde. Zu jeder Gesamtheit gibt es einen Gedanken G , der diese zum Inhalt hat (weil jedes Objekt denkbar ist). Um zu prüfen, ob es auch eine *Menge* mit diesem Inhalt gibt, muss man an G die entsprechenden Abstraktionen vornehmen und gelangt zu einem abstrakten Erkenntnisakt G^* . Wenn nun dieser widerspruchsfrei ist, ist G^* die gesuchte Menge, und andernfalls existiert keine solche (dabei kommt es auf einen Widerspruch im *Beinhalten* an, wohingegen es gleichgültig ist, ob auch ein Widerspruch im Inhalt selbst vorliegt oder nicht).¹⁰⁹ Können wir uns nun die Gesamtheit durch einen einfachen, unkomplizierten Gedanken G vor Augen stellen, ist ein solcher Widerspruch offenbar ausgeschlossen. Damit die Gesamtheit nicht individualisierbar ist, muss also G unübersichtlich kompliziert sein, und da eine Gesamtheit von Individuen nur die Summe ihrer Bestandteile ist,¹¹⁰ kann eine solche Komplexität nur auf der unüberschaubar großen Anzahl ihrer Bestandteile beruhen.

Da das Nichts zwar widersprüchlich, aber vollkommen übersichtlich ist, gibt es eine Menge, deren Inhalt das Nichts ist: Diese so genannte „leere Menge“ wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Ein Musterbeispiel

¹⁰⁹ siehe S. 56–57.

¹¹⁰ Als Gesamtheiten von Individuen gelten nach Erklärung 5.2.1: erstens das Nichts, zweitens die einzelnen Individuen und drittens die Vielheiten von Individuen. Eine Vielheit von Individuen aber ist nach unserer Erläuterung auf S. 57 nichts anderes als die Summe der Individuen, aus denen sie bestehen.

an Einfachheit bilden sodann die Gesamtheiten, die nur aus einem einzelnen Individuum bestehen, und so gibt es zu jedem Individuum x eine Menge, die nur x zum Inhalt hat, und die man mit $\{x\}$ bezeichnet. Solche Mengen heißen *einelementige Mengen* oder *Einermengen*. Ebenso überschaubar sind Gesamtheiten, die sich aus zwei verschiedenen Individuen x und y zusammensetzen, und so existiert stets eine entsprechende Menge, die man mit $\{x, y\}$ bezeichnet. Solche Mengen heißen *Zweiermengen*. So haben wir eines der elementarsten Axiome der Mengenlehre begründet: das *Axiom der Elementarmengen*.¹¹¹

5.2.3 Axiom der Elementarmengen

Es existiert eine Menge $\emptyset$ ohne Inhalt.

Zu einem Individuum x existiert stets eine Menge $\{x\}$ mit x als einzigem Element.

Zu Individuen x und y existiert stets eine Menge $\{x, y\}$ mit Elementen x und y .

Wir können die vorhergehende Betrachtung über die Zweiermengen hinaus fortsetzen, und gelangen so zu der Einsicht, dass jede endliche Vielheit von Individuen prinzipiell überschaubar ist, so dass es eine korrespondierende Menge gibt, deren Inhalt diese Individuen bilden. Die entsprechenden Mengen heißen *endliche Mengen*. Man könnte nun vermuten, dass die Grenze zwischen individualisierbaren und nicht-individualisierbaren Vielheiten gerade diejenige zwischen endlichen und unendlichen Vielheiten ist. Aber dem ist nicht so. Zwar sind unendliche Vielheiten uns nicht mehr in gleicher Weise anschaulich gegeben wie endliche, aber eine derartig „absolute“ Unübersichtlichkeit, dass sich beim Denken *logische* Widersprüche einstellen können, wird man nicht für jede unendliche Vielheit behaupten wollen. Widerspruchsfrei denkbar dürften insbesondere unendliche Gesamtheiten sein, die uns in „relativ übersichtlich zusammengefasster“ Form entgegentreten, wie z. B. die Gesamtheit der Punkte auf einer uns vor Augen stehenden begrenzten Linie, oder der „erste unendliche Teilabschnitt“ der auf S. 25–26 beschriebenen endlosen Kette von Erkenntnisakten $E, E', E'', E''', \dots$, von denen der jeweils folgende immer den vorhergehenden zum Inhalt hat. So scheint es auch für gewisse unendliche Vielheiten entsprechende Mengen zu geben, die dann *unendliche Mengen* heißen.

Mithin müssen Gesamtheiten, die nicht von einer Menge beinhaltet werden, „besonders große“ unendliche Gesamtheiten sein, nämlich im wahrsten Sinne des Wortes „unvorstellbar große“: so groß, dass ihre Bestandteile nicht mehr in einem einzigen unserer Vorstellungsakte widerspruchsfrei zusammenstehen können. Die Existenz solcher Vielheiten hat bereits CANTOR erkannt, und er nannte diese Vielheiten *inkonsistent* (nicht-zusammenstehend) oder *absolut unendlich*.¹¹² Gesamtheiten, zu denen die entsprechende Menge existiert, nannte er dagegen *konsistent*.¹¹³ Eine sehr glückliche

¹¹¹ Es wurde von ZERMELO in seinen *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* S. 263 eingeführt und postuliert (1) die Existenz einer „leeren“ Menge $\emptyset$ ohne Elemente, (2) zu jedem Individuum x die Existenz einer nur x enthaltenden Einermenge und schließlich (3) zu Individuen x, y die Existenz einer Zweiermenge, deren Elemente x und y sind. In Abschnitt 5.9 wird Teil (1) des Axioms das *Nullmengenaxiom* und Teil (3) das *Paarmengenaxiom* genannt werden. Teil (2) wird sich als entbehrlich erweisen.

¹¹² Vgl. CANTORS Brief an DEDEKIND vom 3.8.1899 (siehe Fußnote 113) und seinen Brief an JOURDAIN vom 4.11.1903 (*Briefe* S. 433).

¹¹³ Brief vom 3.8.1899 an DEDEKIND (CANTOR, *Briefe* S. 407): „Gehen wir vom Begriff einer bestimmten Vielheit . . . aus, so hat sich mir die Notwendigkeit herausgestellt, zweierlei Vielheiten . . . zu unterscheiden. Eine Vielheit kann nämlich so beschaffen sein, dass die Annahme eines ‚Zusammenseins‘ aller ihrer Elemente auf einen Widerspruch führt, so dass es unmöglich ist, die Vielheit als eine Einheit, als ‚ein fertiges Ding‘ aufzufassen. Solche Vielheiten nenne ich *absolut unendliche* oder *inkonsistente Vielheiten*. Wie man sich leicht überzeugen kann, ist z. B. der ‚Inbegriff alles Denkbaren‘ eine solche Vielheit . . . Wenn hingegen die Gesamtheit der Elemente einer Vielheit ohne Widerspruch als ‚zusammenseiend‘ gedacht werden kann, so dass ihr Zusammengefasstwerden zu ‚einem Ding‘ möglich ist, nenne ich sie eine *konsistente Vielheit* oder eine ‚Menge‘“. In der von ZERMELO herausgegebenen Ausgabe der CANTORSchen Werke ist dieses Zitat fälschlich in den Brief vom 28.07.1899 inkorporiert worden.

deutsche Bezeichnung für die inkonsistenten Vielheiten ist das Wort *Unmenge*,¹¹⁴ in dem man zwei hier einfließende Aspekte zugleich ausgedrückt sehen kann: (a) dass es sich nicht um eine Menge handelt und (b) dass es sich um eine *sehr große* Vielheit handelt:

5.2.4 Erklärung Eine *Unmenge* oder *inkonsistente Vielheit* ist eine Vielheit, die so groß ist, dass die dazugehörigen Individuen nicht in einer Menge enthalten sind.

Der Unterschied zwischen konsistenten Vielheiten, die in einer endlichen oder unendlichen Menge enthalten sind, und inkonsistenten Vielheiten oder Unmengen lässt sich am klarsten durch das unterschiedliche Verhältnis zur *Vorstellbarkeit* verdeutlichen: Während eine *endliche Vielheit* prinzipiell in einer *anschaulichen Vorstellung* vollkommen klar überschaut werden kann, und sich die Elemente einer *unendlichen Menge* (mit mehr oder weniger großen Einschränkungen bezüglich Anschaulichkeit und damit auch bezüglich Übersichtlichkeit) immer noch in einem *nicht-widersprüchlichen Vorstellungsakt* zusammenfassen lassen, ist eine *Unmenge* gänzlich *unvorstellbar*, d. h. sie kann nicht in einem einzigen widerspruchsfreien Vorstellungsakt der uns bekannten Art vollständig erfasst werden.¹¹⁵ Das Gegenüber von Gesamtheiten und Mengen lässt sich nun wie folgt veranschaulichen:

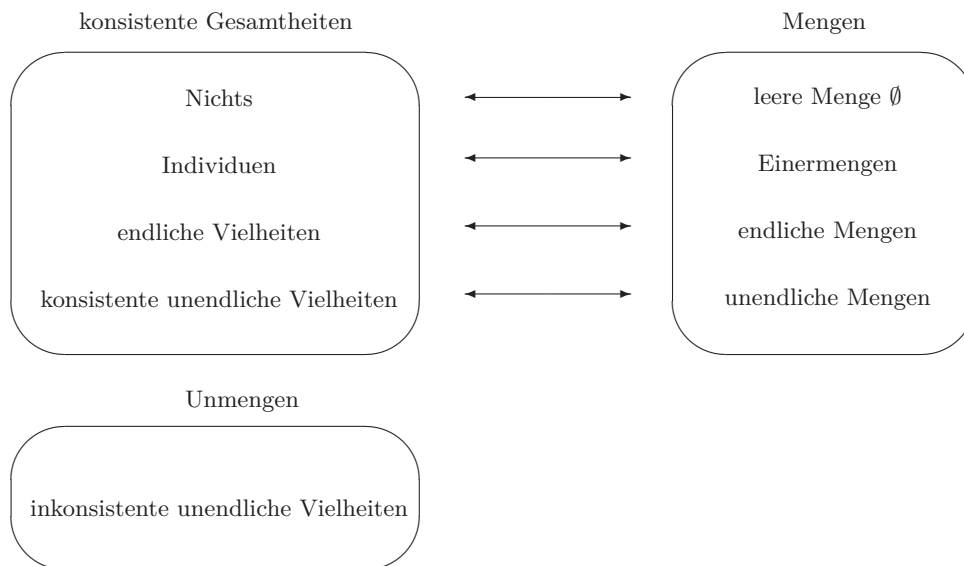


Abbildung 5.3: Gegenüberstellung der Gesamtheiten und Mengen (wahre Situation)

Um die Existenz von Unmengen plausibel zu machen, gebe ich nun ein „Verfahren“ an, mit dem sich Unmengen gedanklich „aufbauen“ lassen. Zunächst muss man sich davon überzeugen, dass zu jeder Menge M Individuen existieren, die *keine* Elemente von M sind, und die ich daher *Außenindividuen* von M nenne. Da ein Erkenntnisakt (der uns bekannten Art) sich selbst nicht thematisch beinhalten kann, kann keine Menge M Element von sich selbst sein, also ist M selbst ein Außenindividuum von M . Dieses ist nicht das einzige. Denn wie auf S. 25–26 erläutert wurde, induziert M eine unendliche Kette $M, M', M'', M''', \dots$ weiterer Erkenntnisakte, von denen jeder den vorhergehenden beinhaltet, während der vorhergehende keinen der folgenden beinhaltet. So beinhaltet M keinen der Erkenntnisakte M', M'', M''' , die widerspruchsfrei sind, weil sie nur ein einziges Individuum

¹¹⁴ Dieser Begriff taucht bereits 1930 in ZERMELOS Artikel über *Grenzzahlen und Mengenbereiche* (S. 29 und 47) auf. Vgl. auch KLAUA, *Mengenlehre* § 19.4 S. 327–331.

¹¹⁵ Wir erfassen Unmengen nur im abstrakten Denken durch Begriffe, die uns eine *Gemeinsamkeit* ihrer Bestandteile vor Augen führen, ohne dass damit eine vorstellungsmäßige Repräsentation der Vielheit verbunden ist (siehe auch S. 90).

enthalten. So handelt es sich – wenn wir diese Erkenntnisakte abstrakt genug denken – um *unendlich viele Mengen und damit Individuen, die nicht in M enthalten sind*. Damit gibt es unendlich viele Außenindividuen von M . Nun zu dem Verfahren:

5.2.5 Verfahren zur Bildung von Unmengen *Man wähle zu jeder Menge M ein Außenindividuum von M und bilde eine Vielheit $\mathcal{V}$, die mindestens diese ausgewählten Außenindividuen umfasst. Dieses $\mathcal{V}$ ist dann eine Unmenge.*

Plausibilitätsbetrachtung. Ich nehme das Gegenteil an und führe es zum Widerspruch. ANGENOMMEN, $\mathcal{V}$ wäre *keine* Unmenge. Dann gibt eine Menge $\mathcal{M}$, die alle Individuen von $\mathcal{V}$ beinhaltet, insbesondere auch alle ausgewählten Individuen. Da wir zu *jeder* Menge ein Außenindividuum ausgewählt haben, ist unter den ausgewählten Individuen auch ein Außenindividuum i von $\mathcal{M}$. Nun muss dieses i einerseits (weil $\mathcal{M}$ *alle* ausgewählten Individuen beinhaltet) ein Element von $\mathcal{M}$ sein, aber andererseits kann i (als Außenindividuum von $\mathcal{M}$) natürlich *kein* Element von $\mathcal{M}$ sein. Damit haben wir einen Widerspruch. Also war die ANNAHME falsch, und die Vielheit $\mathcal{V}$ ist eine Unmenge. $\square$

Dieses Verfahren liefert offensichtlich nicht nur eine, sondern unendlich viele Unmengen $\mathcal{V}$, denn zu jeder Menge gibt es jeweils unendlich viele Möglichkeiten, ein Außenindividuum auszuwählen. Wenn man zu jeder Menge M als Außenindividuum M selbst wählt, ist die Vielheit der so ausgewählten Individuen offenbar die „Vielheit aller Mengen“, d. h. die Vielheit, die sich aus sämtlichen Mengen zusammensetzt. Diese bezeichne ich mit $\mathbb{M}$. Das Verfahren zeigt also, dass $\mathbb{M}$ selbst eine Unmenge ist, und ebenso, dass jede Vielheit, die noch umfassender als $\mathbb{M}$ ist, eine Unmenge sein muss. Unter den Vielheiten, die noch umfassender als $\mathbb{M}$ sind, ist natürlich an erster Stelle die Vielheit zu nennen, die sich *aus allen Individuen überhaupt* zusammensetzt. Man bezeichnet diese Vielheit mit $\mathbb{D}$.¹¹⁶ So hat sich gezeigt:

Die Vielheiten $\mathbb{M}$ und $\mathbb{D}$ sind Unmengen.¹¹⁷ (5.1)

5.2.6 Konsistenz und Inkonsistenz Die vorstehenden Ausführungen lassen sich wie folgt zusammenfassen: Ein Objekt (insbesondere eine Vielheit) x heißt *konsistent*, wenn es eine x beinhaltende Menge gibt, also eine widerspruchsfreie Vorstellung von x möglich ist; andernfalls heißt x *inkonsistent*. Inkonsistente Vielheiten heißen auch *Unmengen*, da sie „unvorstellbar groß“ sind und keine entsprechende Menge existiert.

Das Nichts, jedes Individuum, jede endliche und manche unendliche Vielheit ist konsistent. Die Vielheit $\mathbb{M}$ aller Mengen ist ebenso wie die Vielheit $\mathbb{D}$ aller Individuen eine Unmenge.

Es kommt nun alles darauf an, einsichtige Prinzipien zu finden, wonach sich von der Konsistenz (oder Inkonsistenz) einer Vielheit auf die Konsistenz (bzw. Inkonsistenz) anderer Vielheiten schließen lässt. Man kann nämlich sagen, dass *fast alle Axiome der Mengenlehre solche Prinzipien sind*. Da Inkonsistenz in der „zu großen Komplexität“ einer Vielheit begründet ist, ist die Wahrheit der folgenden beiden Prinzipien leicht einzusehen, die wir später zu entsprechenden Axiomen umformulieren werden:¹¹⁸

5.2.7 Teilprinzip Die Vielheit $\mathcal{V}$ sei „kleiner“ als die Vielheit $\mathcal{W}$. Das soll heißen: Alle zu $\mathcal{V}$ gehörenden Individuen gehören auch zu $\mathcal{W}$, so dass $\mathcal{V}$ ein Teil von $\mathcal{W}$ ist. Dann gilt:

¹¹⁶ Diese Bezeichnung verwendet zum Beispiel OBERSCHELP, *Allgemeine Mengenlehre* Def. 4.4 S. 36. Der Buchstabe $\mathbb{D}$ soll an „Ding“ oder „Definitions-bereich“ oder engl. „domain“ erinnern.

¹¹⁷ Später leite ich diesen Satz nochmals formal aus den Axiomen ab (siehe Theorem 5.10.12 S. 123).

¹¹⁸ Siehe Axiome 5.10.5 und 5.10.57.

- (a) Wenn $\mathcal{V}$ inkonsistent ist, so ist erst recht die „größere“ Vielheit $\mathcal{W}$ inkonsistent.
 (b) Wenn $\mathcal{W}$ konsistent ist, so ist erst recht die „kleinere“ Vielheit $\mathcal{V}$ konsistent.

5.2.8 Ersetzungsprinzip Wählt man für jedes Individuum einer konsistenten Vielheit $\mathcal{V}$ irgend ein Individuum (zulässigerweise auch dasselbe Individuum) als „Partner“ aus, so ist die Vielheit $\mathcal{W}$ aller ausgewählten Partner ebenfalls konsistent.

Das Ersetzungsprinzip ist plausibel, weil die Vielheit $\mathcal{W}$ anschaulich entweder „genauso groß“ ist wie $\mathcal{V}$ (nämlich dann, wenn man jeweils für verschiedene Individuen von $\mathcal{V}$ immer auch *verschiedene* Partner gewählt hat), oder sie ist sogar „kleiner“ als $\mathcal{V}$ (nämlich dann, wenn man in wenigstens einem Fall für verschiedene Individuen aus $\mathcal{V}$ ein und denselben Partner ausgesucht hat). Ist also $\mathcal{V}$ konsistent, so auch das „kleinere“ oder „gleich große“ $\mathcal{W}$.

Die „konsistenten Gesamtheiten“ sind nun eigentlich überflüssig, da wir sie durch die entsprechenden *Mengen* ersetzen können. Entfernen wir die konsistenten Gesamtheiten aus unserem Objektbereich, so verbleiben dort nur noch Individuen und inkonsistente Vielheiten (Unmengen). Unter diesen Objekten stimmen nun die Mengen und die Unmengen darin überein, dass sie als Zusammenfassungen von Individuen angesehen werden können. Daher ist es sinnvoll, sie unter einem neuen Begriff, dem Klassenbegriff, zusammenzufassen:

5.2.9 Erklärung Eine *Klasse* ist ein Objekt, das entweder eine Menge oder eine Unmenge ist. Unmengen sollen auch *echte Klassen* heißen.¹¹⁹

In diesem Klassenbegriff kommen also zwei recht disparate Dinge zusammen: Mengen und (inkonsistente) Vielheiten.¹²⁰ Zum richtigen Verständnis dieses Begriffs ist Folgendes zu beachten:

1. Alle Klassen, auch die Unmengen, sind widerspruchsfreie Objekte. Zwar ist unsere Vorstellung von einer Unmenge ein widersprüchlicher Erkenntnisakt,¹²¹ aber die Unmenge selbst ist widerspruchsfrei, und zwar einfach deshalb, weil sämtliche ihrer Bestandteile widerspruchsfrei existieren und sie als Vielheit nichts weiter ist als bloß die Summe dieser Bestandteile.¹²²
2. Es ist jede Klasse *entweder* eine Menge *oder* eine Unmenge, *aber nicht beides*. Denn Unmengen sind inkonsistent, während Mengen (weil sie Individuen sind) konsistent sind. Da eine Klasse (gemäß der ersten Bemerkung) widerspruchsfrei ist, kann sie aber nicht zugleich konsistent und inkonsistent sein.
3. Zwischen Gesamtheiten und Klassen besteht eine genaue Entsprechung, insbesondere entspricht jeder Gesamtheit G eine Klasse G^* : für konsistente Gesamtheiten ist G^* die entsprechende Menge, und für inkonsistente Gesamtheiten ist G^* identisch mit G .

5.2.10 Erklärung Die *Elemente* einer Klasse C sind

- im Fall, dass C eine Menge ist, die von dem Erkenntnisakt C beinhalteten Individuen,

¹¹⁹ So gibt es also für das Wort *Unmenge* zwei Synonyme: *inkonsistentes Objekt* und *echte Klasse*. Unmengen werden deshalb als „echte“ Klassen bezeichnet, weil sie es sind, die den Klassenbegriff erforderlich machen, denn ohne sie könnte man sich ja mit dem Mengenbegriff allein begnügen.

¹²⁰ Eine ähnliche Dichotomie des Klassenbegriffs tauchte 1903 in Bertrand RUSSELLS *Principles of Mathematics* auf, wo RUSSELL die „Klassen als Eines“ (classes as one) von den „Klassen als Vieles“ (classes as many) unterschied (§ 74 S. 76f und § 79 S. 80). Erstere entsprechen den Mengen, letztere den (konsistenten und inkonsistenten) Vielheiten. Ich vereinige in meinem Klassenbegriff Klassen von beiden Arten, schließe aber die *konsistenten Vielheiten* aus, weil diese bereits durch Mengen repräsentiert werden.

¹²¹ Denn ihr direkter Inhalt ist einerseits diese ganze Unmenge, andererseits aber haben wir gesehen, dass die Unmenge gar nicht als Ganze zum Inhalt der Vorstellung werden kann. Sie ist also zugleich direkter Inhalt und ist es nicht, und so haben wir einen Widerspruch.

¹²² Siehe S. 57.

- im Fall, dass C eine Unmenge ist, die Individuen, aus denen C besteht.

Für beliebige Objektbezeichnungen x, y schreibt man

$$x \in y \text{ bzw. } x \notin y$$

als Abkürzung für «es gilt bzw. gilt nicht, dass x Individuum, y Klasse und x Element von y ist». Der Zeichenverband $x \in y$ heißt eine *Elementformel*. Als Lesarten sind gebräuchlich: « x ist Element von y », « x ist in y enthalten», « y enthält x », « x liegt in y ».

Ich schließe nun diesen Abschnitt mit einigen historischen Bemerkungen zum Klassen- und Mengenbegriff ab. Der *Klassenbegriff* taucht erst in der neuzeitlichen Logik auf.

LEIBNIZ definierte eine Klasse als ein „kleineres Ganzes“ (d. h. Teil eines größeren Ganzen), dessen Bestandteile eine gemeinsame Eigenschaft haben, wobei die Bestandteile verschiedener Klassen stets verschieden sind.¹²³ Klassen in diesem Sinn sind offenbar die Glieder der *Einteilung* eines Ganzen.¹²⁴

Eine dem modernen Klassenverständnis näher kommende Konzeption entwickelte George BOOLE (1815–1864), für den der Klassenbegriff eine zentrale Rolle spielt.¹²⁵ Klassen werden nach BOOLE konstituiert durch die Dinge (things oder individuals), die von einem Begriffswort repräsentiert werden.¹²⁶ Für BOOLE existiert auch eine Klasse, die *alle* Individuen enthält, ebenso wie eine solche, die *nichts* enthält. Erstere bezeichnet er mit 1 und nennt sie „the Universe“,¹²⁷ letztere bezeichnet er mit 0 und nennt sie „Nothing“.¹²⁸ Sowohl bei LEIBNIZ wie auch bei BOOLE hängen also Klassen eng mit Begriffen zusammen.

Für FREGE (1848–1925) ist eine Klasse der *Umfang* eines Begriffs, der aber dennoch am Begriff haften und daher keine bloße „Sammlung oder Gesamtheit von Individuen“ sein soll.¹²⁹ Diese Position ist eine merkwürdige „Zwischenstellung“ zwischen der Gleichsetzung von Klassen mit Begriffen und ihrer „kollektiven“ Deutung als bloße Gesamtheiten.¹³⁰

Die kollektive Auffassung vertrat vor allem Ernst SCHRÖDER (1841–1902). Als Klassen wollte SCHRÖDER nämlich auch „ganz willkürlich zusammengesetzte“ und „zusammengewürfelte“ aner-

¹²³ „Classis rerum est totum minus, constans ex rebus convenientibus in certo tertio, tanquam partibus; sic tamen ut reliquae classes contineant res contradistinctas.“ (LEIBNIZ, *Ars combinatoria* Definitio 14 S. 9).

¹²⁴ In diesem Sinn wird der Klassenbegriff in der Mathematik heute nur noch gebraucht, wenn von „Äquivalenzklassen“ die Rede ist (dazu siehe Abschnitt 5.12).

¹²⁵ Als Begründung für die Wichtigkeit der „Logic of class“ gibt BOOLE in *Logic of Reasoning* (Werke Band 1 S. 213) an: „the conception of classes seems to be involved in all other scientific conceptions“ (ebd. S. 214). Vgl. auch BOOLE, *Calculus of Logic* Werke Band 1 S. 125.

¹²⁶ Vgl. BOOLE, *Laws of Thought* Kap. 2 Abschnitt 6 S. 28, Werke Band 2 S. 31: „By a class is usually meant a collection of individuals, each of which a particular name or description is applied“, wobei BOOLE explizit die Fälle zulassen will, in denen zu einer Klasse nur ein einziges oder gar kein Ding oder alle Dinge gehören. Vgl. auch BOOLE, *Logic and Reasoning* Werke Band 1 S. 212.

¹²⁷ Vgl. BOOLE, *Laws of Thought* Kap. 3 Abschnitt 13 S. 48, Werke Band 2 S. 52f: „... the class represented by 1 must be ‚the Universe‘“, in dieser Klasse finden wir „all the individuals that exist in any class.“ Vgl. BOOLE, *Mathematical Analysis* S. 15, Werke Band 1 S. 60: „Let us employ the symbol 1, or unity, to represent the Universe, and let us understand it as comprehending every conceivable class of objects whether actually existing or not“.

¹²⁸ Vgl. BOOLE, *Laws of Thought* Kap. 3 Abschnitt 13 S. 47, Werke Band 2 S. 52: „... the symbol 0 represent[s] Nothing. In accordance with a previous definition, we may term Nothing a class.“

¹²⁹ FREGE, *Kritische Beleuchtung* S. 451. Ebd. S. 455 sagt FREGE, es sei verfehlt, „den Umfang des Begriffes als Klasse ... auf die Einzeldinge zu stützen“. Er bestehe nicht so aus den unter ihn fallenden Gegenständen „wie ein Wald aus Bäumen“, sondern habe „an dem Begriff selbst und nur an diesem seinen Halt“.

¹³⁰ Gegen die kollektive Auffassung machte FREGE darauf aufmerksam, dass die Vertreter dieser Auffassung mit einelementigen und leeren Klassen arbeiten, die es bei dieser Auffassung aber eigentlich nicht geben dürfte (vgl. FREGE, *Kritische Beleuchtung*, besonders S. 427, 444f und 451–453).

kennen.¹³¹ Dieser Auffassung schloss sich auch Giuseppe PEANO (1858–1932) an, der unter einer Klasse eine „Anhäufungen von Seienden“ verstand.¹³²

Bertrand RUSSELL (1872–1970) unterschied 1903, wie schon in Fußnote 120 auf S. 76 erwähnt, zwischen zwei Arten von Klassen: „class as many“ (Vielheiten) und „class as one“ (begriffsartige Einzeldinge). Seit 1906 bekannte sich RUSSELL jedoch zur nominalistischen „Keine-Klassen-Theorie“.¹³³ Ihr zufolge sind Klassenbezeichnungen für sich genommen sinnlos; sie haben nur im Kontext von Formeln eine Bedeutung.¹³⁴ QUINE behauptete aber zu Recht, dass RUSSELL wider Willen die Klassen als reale abstrakte Objekte nicht vollkommen eliminiert, sondern bloß durch abstrakte Eigenschaften ersetzt hat,¹³⁵ denn in einer sinnvollen Formel steht die Klassenbezeichnung für eine Eigenschaft.¹³⁶ So können RUSSELLS Klassen also als Begriffe im realistischen Sinn gedeutet werden.

Wie der späte RUSSELL, wollte auch Willard Van Orman QUINE (1908–2000) in nominalistischer Weise abstrakte Objekte möglichst vermeiden, musste aber zugeben, dass Mathematik und Naturwissenschaften bislang nicht ohne die Annahme solcher Objekte auskommen.¹³⁷ QUINE arbeitete sowohl mit den nur nominellen, objektiv nicht existierenden Klassen im Sinne RUSSELLS, die er *virtuelle Klassen* nannte,¹³⁸ als auch mit *realen Klassen*,¹³⁹ welche als echte Universalien existieren.¹⁴⁰ Diese teilte er ein in solche, die Elemente anderer Klassen sein können, und solche, die das nicht können und die er „äußerste Klassen“ (ultimate classes) nannte.¹⁴¹ Erstere sind in unserer Terminologie Mengen, letztere Unmengen.¹⁴² Während er sich die realen Klassen (also Mengen und Unmengen) als reale abstrakte Eigenschaften vorstellte,¹⁴³ sollte es sich bei den virtuellen Klassen um eine reine „façon à parler“ handeln, und zwar war für QUINE eine Formel wie « a ist Element der Klasse aller x mit Eigenschaft F » nur eine andere Schreibweise für « a hat die Eigenschaft

¹³¹ Vgl. SCHRÖDER, *Algebra der Logik* Band 1 S. 100.

¹³² PEANO, *Arithmetices Principia Logicae* notationes Kap. 4 S. 27f: „Signo K significatur classis, sive entium aggregatio.“

¹³³ RUSSELL, *Difficulties* S. 45–47 sowie S. 53, Fußnote (Note, added on February 5th, 1906): „I now feel hardly any doubt that the no-classes theory affords the complete solution of all the difficulties“. Vgl. RUSSELL und WHITEHEAD, *Principia Mathematica* Einl. Kap. III(2) S. 72, deutsche Ausgabe S. 103: Klassen sind „nur konventionelle Zeichen der Symbolik oder Sprache, nicht echte Gegenstände“.

¹³⁴ „The symbols of classes ... are ... incomplete symbols: their *uses* are defined, but they themselves are not assumed to mean anything at all.“ (RUSSELL und WHITEHEAD, *Principia Mathematica* S. 71, deutsche Ausgabe S. 103). Bei den Formeln, in denen Klassenbezeichnungen Ψ sinnvoll werden, handelt es sich in erster Linie um Elementformeln $x \in \Psi$, die einer Sachverhaltsbeschreibung gleichkommen, in der x eine Eigenschaft Ψ zugeschrieben wird. Dass man jede Formel φ gleichwertig durch eine Formel $x \in \Psi$ ersetzen kann, ist der Inhalt des RUSSELLschen *Reduzibilitätsaxioms* (vgl. RUSSELL, *Theory of Types* Kap. 5 S. 80–83; RUSSELL und WHITEHEAD, *Principia Mathematica* S. 55–60, deutsche Ausgabe S. 80–86).

¹³⁵ „Russell’s contextual definition of class names ... does not dispense with abstract entities, but only eliminates so-called classes in favor of properties“ (QUINE, *Mathematical Logic* S. 121 Fußnote 1).

¹³⁶ Siehe Fußnote 134.

¹³⁷ „One may prefer to regard abstractions as fictions or manners of speaking ... Such a nominalistic program presents extreme difficulty, if much of standard mathematics and natural science is to be really analyzed ... If a nominalistic theory ... should be achieved, we may gladly accept it ...; meanwhile, however, we have no choice but to admit those abstract entities“ (QUINE, *Mathematical Logic* S. 121).

¹³⁸ Vgl. QUINE, *Set Theory* Teil 1 Kap. 1 Nr. 2, deutsche Ausgabe S. 12–16.

¹³⁹ Vgl. QUINE, *Set Theory* Teil 1 Kap. 2, deutsche Ausgabe S. 21–35.

¹⁴⁰ Vgl. QUINE, *Reification* Nr. 3 S. 114, deutsche Ausgabe S. 110. Ontologisch sind es für ihn Aggregate oder rein extensionale Attribute (vgl. *Set Theory and its Logic*, Einführung, deutsche Ausgabe S. 1f).

¹⁴¹ Vgl. QUINE, *Set Theory* Einführung, deutsche Ausgabe S. 3 und Teil 3 Kap. 13 Nr. 42 S. 219–227.

¹⁴² Vgl. QUINE, *Set Theory* S. 3: „Klassen, die Elemente sein können, werden Mengen genannt. Die übrigen sind gelegentlich ‚eigentliche Klassen‘ genannt worden; ich nenne sie lieber *äußerste Klassen* (ultimate classes), in Anspielung darauf, dass sie ihrerseits nicht wieder Elemente von weiteren Klassen sein können“.

¹⁴³ Genauer sind es „properties in abstraction from any differences which are not reflected in differences of instances“ (QUINE, *Mathematical Logic* S. 120f.).

F ». ¹⁴⁴ Wieso kann man diese Klasse nicht als Bezeichnung für ein reales Objekt, nämlich für die abstrakte Eigenschaft F ansehen? Der Grund dafür ist, dass es in QUINES logischem System zu Widersprüchen führen würde, wenn man derartige Klassen als Werte von „gebundenen“ Variablen (d. h. von solchen, die zum Quantifizieren verwendet werden) zulässt, und nach QUINES Ansicht heißt Sein, Wert einer Variablen zu sein („to be is to be the value of a variable“). ¹⁴⁵ Doch wenn eine Quantifikation ausgeschlossen ist, heißt dies meines Erachtens nicht, dass die Objekte nicht existieren, sondern nur, dass sich die ontologische Eigenart dieser Objekte einer logisch einwandfreien Quantifikation widersetzt. QUINES virtuelle Klassen können und sollten also ebenso wie seine realen Klassen als reale abstrakte Objekte (nämlich als Begriffe) verstanden werden.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Klassenauffassungen zwischen einer begriffsmäßigen Auffassung und einer Auffassung, wonach Klassen bloße Vielheiten oder Gesamtheiten von Seienden sind, hin- und herschwanken. In meinem obigen Klassenbegriff ist beides integriert: Unmengen sind reine Gesamtheiten, Mengen aber spezielle Begriffe.

Der *Mengenbegriff* geht ganz auf CANTOR zurück, ¹⁴⁶ der sich Mengen als begrifflich-mentale Zusammenfassungen vorstellte. Echte Klassen dagegen, die sich nicht zu Einheiten zusammenfassen lassen, hat CANTOR aus der Mengenlehre ausgeschlossen. Auch in der klassischen, durch Ernst ZERMELO 1908 und Adolf Abraham FRAENKEL 1922 formulierten axiomatischen Mengenlehre, die man nach den Initialen von ZERMELO und FRAENKEL als **ZF**-Mengenlehre bezeichnet, ¹⁴⁷ kommen keine umfassenderen Gesamtheiten als Mengen vor.

Eine fast ebenso weit verbreitete, mit ZF konkurrierende Mengenlehre, die mit Klassen arbeitet, wird nach den Initialen ihrer Erfinder John VON NEUMANN, Paul BERNAYS und Kurt GÖDEL als **NBG**-Mengenlehre bezeichnet. Erstmals hat VON NEUMANN in seinen Axiomensystemen von 1925 und 1928 eine Mengenlehre vorgestellt, in denen Gesamtheiten vorkommen, die „größer“ sind als Mengen. Für diese Gesamtheiten und die Mengen benutzte er aber noch nicht die gemeinsame Bezeichnung „Klassen“, sondern sprach von „Bereichen“. ¹⁴⁸ Erst 1930 wurde dann der Klassenbegriff explizit von BERNAYS in die Mengenlehre eingeführt. ¹⁴⁹ Im System von BERNAYS gibt es zu jeder Menge auch eine Klasse mit genau denselben Elementen. In dieser Form hat sich das System nicht allgemein durchgesetzt; die gewöhnlich akzeptierte Form von NBG formulierte GÖDEL 1940. ¹⁵⁰ Nach GÖDEL gibt es eigentlich nur einen Grundbegriff, nämlich den der Klasse, und die Mengen stellen sich als ganz bestimmte Klassen heraus. Mengen sind die „kleineren“ Klassen, und sie zeichnen sich gegenüber Nichtmengen dadurch aus, dass sie als Elemente anderer Klassen auftreten können. Diese Charakteristik trifft auch auf die Klassen und Mengen zu, die ich oben definiert habe.

¹⁴⁴ Vgl. QUINE, *Set Theory* S. 12.

¹⁴⁵ QUINE, *On what there is* S. 15; deutsche Ausgabe S. 22.

¹⁴⁶ Siehe S. 71.

¹⁴⁷ Vgl. ZERMELO, *Grundlagen der Mengenlehre und Grenzzahlen und Mengenbereiche* sowie FRAENKEL, *Cantor-Zermelosche Mengenlehre* und schließlich FRAENKEL, *Mengenlehre* § 16 S. 271–312.

¹⁴⁸ Vgl. NEUMANN, *Eine Axiomatisierung* § 4 S. 45 und NEUMANN, *Die Axiomatisierung* II.2 S. 354.

¹⁴⁹ Nach FELGNER [HG], *Mengenlehre* Einleitung S. 5 stellte Bernays „sein System bereits 1930 in seinen Vorlesungen in Göttingen vor“. Er publizierte es in sieben Teilen von 1937 bis 1954 unter dem Titel *A System of Axiomatic Set Theory* in *The Journal of Symbolic Logic* (siehe Literaturverzeichnis).

¹⁵⁰ GÖDEL, *Consistency* S. 3–7, Werke Band 2 S. 35–39.