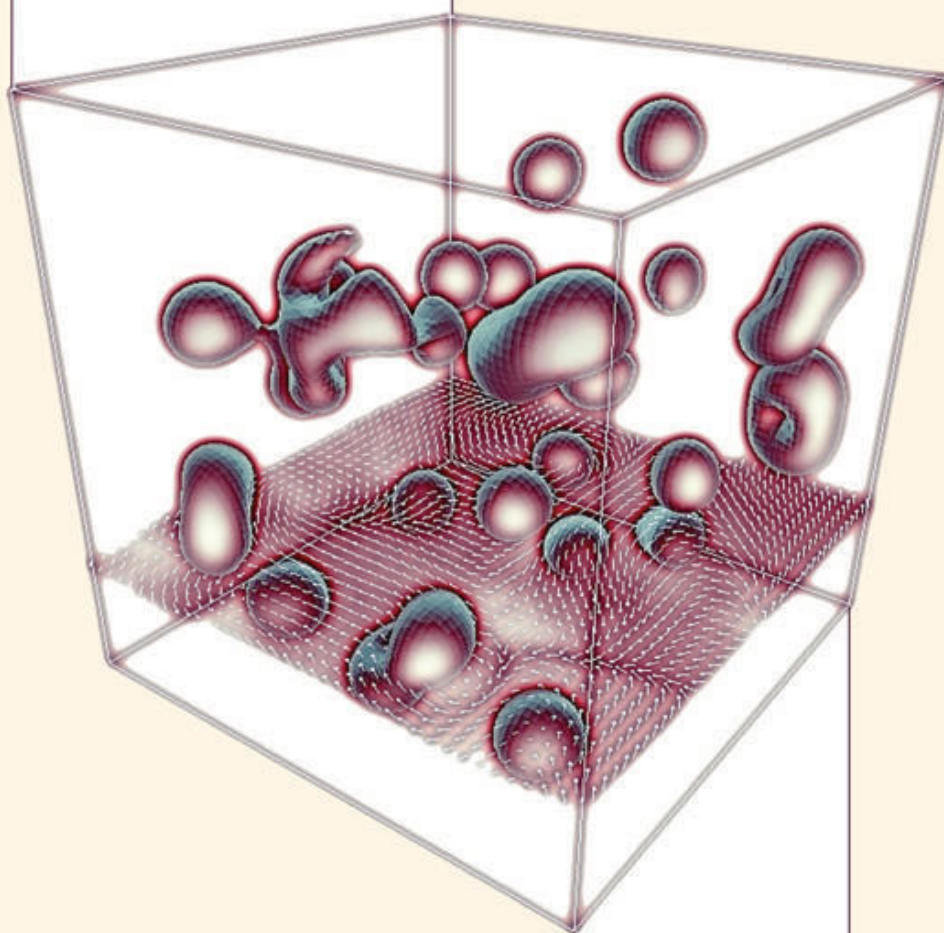


## Die Simulation des chiralen Phasenübergangs im (3+1) dimensionalen $O(4)$ Modell



Jürgen Klomfaß

Die Simulation des chiralen Phasenübergangs im  
(3+1) dimensionalen  $O(4)$  Modell

DISSERTATION  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften

vorgelegt von  
Dipl.-Phys. Jürgen Klomfaß  
geb. am 07. 08. 1971 in Stadtlohn

eingereicht beim Fachbereich Physik  
der Universität Siegen  
Siegen 2003

### **Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen : Cuvillier, 2003

Zugl.: Siegen, Univ., Diss., 2003

ISBN 3-89873-855-8

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. G. Holzwarth  
Prof. Dr. T. Fließbach

Datum der Disputation: 24. Juli 2003

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2003

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen

Telefon: 0551-54724-0

Telefax: 0551-54724-21

[www.cuvillier.de](http://www.cuvillier.de)

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

1. Auflage, 2003

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 3-89873-855-8

## Vorwort

Diese Dissertation ist Bestandteil einer Gruppenarbeit in Kooperation mit Herrn Professor Dr. G. Holzwarth<sup>1</sup>. Teile der Arbeit sind bereits vorab veröffentlicht worden [1].

Ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit lag in der graphischen Darstellung von mehrdimensionalen Skalar- und Vektorfeldern. Hierzu wurde ein umfangreiches C++ Programm unter Einbindung der graphischen Schnittstelle OpenGL<sup>2</sup> erstellt.

---

<sup>1</sup>Universität Siegen, D-57068 Siegen.

<sup>2</sup>OpenGL ist ein eingetragener Markenname der Silicon Graphics Inc. Eine Dokumentation von OpenGL und ein Leitfaden zur Programmierung findet man in [115].

## abstract

The rapidly expanding fireball in relativistic heavy-ion collision experiments performed or planned at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) or at CERN Large Hadron Collider (LHC) provide a source of coherent pions. It is expected that the transient existence of a disoriented chiral condensate (DCC) leads to anomalous fluctuations in the multiplicities of emitted charged or neutral pions. Numerical simulations of the chiral phase transition in the (3+1)-dimensional  $O(4)$  model are used to calculate the emission rates for neutral and charged pions. Starting from chirally symmetric random initial configurations, the evolutions of the chiral field towards the true vacuum with spontaneously broken symmetry follow purely dissipative dynamics. The model stabilizes topological textures interpreted as baryons and antibaryons which are formed together with domains of DCC during the roll-down phase. The classically evolving field acts as a source for the emission of pions and  $\sigma$ -mesons. It is found that the presence of stabilizing textures prevents sufficiently rapid growth of DCC-domain size. The radii of aligned disoriented domains reaches values of about 1 fm, so observability of anomalous tails in the abundance ratios is unlikely. However, the transient formation of growing DCC domains causes sizable broadening of the distributions  $P(f)$  for the fraction  $f$  of neutral pions as compared to the statistical widths of generic sources.

## Zusammenfassung

Bei den Schwerionen-Kollisionsexperimenten, wie sie am BNL Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) durchgeführt werden oder wie sie am CERN Large Hadron Collider (LHC) geplant sind, entsteht ein rasch expandierender Feuerball, welcher als Quelle für die Emission von Pionen dient. Es wird erwartet, dass die vorübergehende Ausbildung eines chiral disorientierten Kondensats (DCC) zu Anomalien in den Multiplizitäten der emittierten neutralen Pionen führt. Mit numerischer Simulation des chiralen Phasenübergangs im  $(3+1)$ -dimensionalen  $O(4)$  Modell, wird die Möglichkeit für das Auftreten dieser Anomalien untersucht. Ausgehend von einer chiral symmetrischen heißen Anfangskonfiguration folgt die Entwicklung des chiralen Feldes, bei der Relaxation zum physikalischen Vakuum, einer rein dissipativen Dynamik. Das Modell stabilisiert die zusammen mit den chiral disorientierten Domänen entstehenden topologischen Strukturen, welche als Baryonen und Antibaryonen interpretiert werden können. Das sich klassisch entwickelnde Feld dient als Quelle für die Emission von Pionen und  $\sigma$ -Mesonen. Es stellt sich heraus, dass das Wachstum der disorientierten Domänen durch die Anwesenheit stabiler Texturen gebremst wird. Die Radien ausgerichteter Domänen betragen zum Zeitpunkt der Pionenemission nur ca. 1 fm, was die Beobachtung der gesuchten Anomalien unwahrscheinlich macht. Dagegen zeigen unsere Simulationen, dass die vorübergehende Ausbildung sehr vieler und im Laufe der Zeit anwachsender Domänen, eine spürbare Verbreiterung der Verteilungsfunktion  $P(f)$  ( $f$ : Anteil der neutralen Pionen) erwarten lässt.



## Inhaltsverzeichnis

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| Kapitel 1. Einleitung                                      | 1   |
|                                                            | 1   |
| Kapitel 2. Phänomenologische Lagrangedichten               | 11  |
| 1. Das lineare $O(N+1)$ $\sigma$ -Modell                   | 11  |
| 2. Das chirale $SU(2)_L \times SU(2)_R$ $\sigma$ -Modell   | 14  |
| 3. Topologische Solitonen                                  | 15  |
| 4. Das Skyrme-Modell                                       | 17  |
| 5. Das chirale $O(4)$ Modell                               | 18  |
| Kapitel 3. Die zeitabhängige Ginzburg-Landau Gleichung     | 21  |
| 1. Der Übergang zu dimensionslosen Größen                  | 23  |
| 2. Die Bewegungsgleichungen                                | 24  |
| 3. Die Gitterdiskretisierung                               | 26  |
| Kapitel 4. Die topologische Ladung                         | 29  |
| 1. Der eindimensionale Fall                                | 30  |
| 2. Der zweidimensionale Fall                               | 31  |
| 3. Der dreidimensionale Fall                               | 32  |
| Kapitel 5. Statische Soliton-Lösungen                      | 39  |
| 1. Der Hedgehog-Ansatz                                     | 40  |
| 2. Die Erzeugung der Multisolitonen                        | 49  |
| 3. Die topologischen Solitonen des chiralen $O(4)$ Modells | 58  |
| 4. Die Energie statischer Solitonen                        | 62  |
| Kapitel 6. Die Simulation des chiralen Phasenübergangs     | 67  |
| 1. Domänenwachstum nach einem Sudden Quench                | 68  |
| 2. Temperaturabhängige Feldentwicklung                     | 82  |
| 3. Teilchen Emission und DCC-Signal                        | 88  |
| Kapitel 7. Zusammenfassung                                 | 97  |
| Literaturverzeichnis                                       | 101 |





# KAPITEL 1

## Einleitung

Ursprung aller Materie in unserem Universum ist nach dem Standardmodell der Kosmologie, der Urknalltheorie, eine nahezu unendlich heiße und dichte Singularität. Dieser sich zunächst explosionsartig ausdehnende Materiezustand, in dem alle Teilchen, Antiteilchen und Eichbosonen im thermodynamischen Gleichgewicht standen, durchlief mit abnehmender Temperatur und Dichte eine Folge von Phasenübergängen<sup>1</sup>:

- $T = 10^{29}$  K,  $t = 10^{-35}$  s  
*GUT-Transformation:*  
Abkopplung der starken von der elektroschwachen WW;  
d.h. die stark wechselwirkenden Quarks reagieren kaum  
noch mit Leptonen.
- $k_B T = 100$  GeV,  $t = 10^{-12}$  s  
*Der elektroschwache Phasenübergang:*  
Entkopplung von schwacher und elektromagnetischer  
Wechselwirkung.
- $k_B T = 150$  MeV,  $t = 10^{-6}$  s  
*Der Confinement-Phasenübergang:*  
Die Hadronisierung setzt ein; d.h. aus den vorher freien  
Quarks und Gluonen bilden sich Hadronen.

Als das junge Universum also ca.  $1\mu\text{s}$  alt war, ist dessen Temperatur durch fortlaufende Expansion auf ca. 150 MeV gefallen, was der typischen Energieskala der Hadronenanregungen entspricht. Die zuvor freien Quarks und Gluonen (*Deconfinement*) gingen Bindungszustände in Form von Baryonen und Mesonen ein (*Confinement*), wobei die hadronische Welt geformt wurde, so wie wir sie heute noch vorfinden. Die theoretische Entschlüsselung sowie die experimentelle Nachahmung dieses Phasenübergangs ist eine der größten Herausforderungen gegenwärtiger Physik.

**Ultrarelativistische Schwerionenkollisionen.** Ultrarelativistische Schwerionenkollisionen eröffnen die Möglichkeit, die Eigenschaften und das

---

<sup>1</sup>Für eine etwas ausführlichere Diskussion hierzu siehe [2].

Verhalten hadronischer Materie bei extrem hohen Temperaturen und Energiedichten zu studieren. Die Erzeugung eines Phasenübergangs zwischen dem Confinement und dem Deconfinement bildet einen Schwerpunkt der Experimente, welche seit dem Jahr 2000 am RHIC<sup>2</sup> durchgeführt werden und welche im europäischen Zentrum für Nuklearforschung (CERN) geplant<sup>3</sup> sind. Bei diesen Experimenten werden schwere Kerne wie z.B.  $Pb^{208}$  oder  $Au^{197}$  auf relativistische Geschwindigkeiten (bis zu 100 GeV/Nukleon, RHIC) beschleunigt und dann zur (zentralen) Kollision gebracht. Dabei durchdringen sich die beiden kollidierenden Kerne gegenseitig<sup>4</sup> und hinterlassen im Schwerpunktsystem einen rasch expandierenden zylindersymmetrischen oder auch sphärischen Bereich hochangeregten Vakuums, den sogenannten *Feuerball* [3] (Abb. 1.1). Die nuklearen Bruchstücke, welche sich in Gestalt von lorentzkontrahierten Pfannkuchen annähernd mit Lichtgeschwindigkeit voneinander entfernen (Abb. 1.1.b-d), enthalten im Wesentlichen alle Baryonen der ursprünglichen Kerne. Von besonderem Interesse ist die zentrale Region im Zwischenraum (Abb. 1.1.b), also das hochangeregte Vakuum, da diese Region dem heißen Vakuum des frühen Universums ähnelt. Fluktuationen des Farbfeldes innerhalb dieser heißen Zone wandeln zunächst, durch Produktion von Quark-Antiquark Paaren, die Kollisionsenergie in Teilchen um. Anschließend lösen Sekundärkollisionen eine sich kaskadenförmig verstärkende Flut von weiteren Quarks und Gluonen aus (Abb. 1.1.c). Bei den dabei herrschenden Temperaturen und Teilchendichten können die Quarks keine gebundenen Zustände eingehen. Es kommt vorübergehend (für einen äußerst kleinen Zeitraum von  $\sim 10^{-23}$  s) zur Ausbildung eines Quark-Gluon-Plasma (QGP), wobei der Übergang von der hadronischen Materie zum QGP derselbe ist wie der Confinement-Phasenübergang des frühen Universums, nur in umgekehrter Richtung.

Aufgrund des anfänglich sehr hohen Druckes im Innern dieser heißen Plasma-Blase expandiert das System sehr rasch, kühlt sich dabei adiabatisch ab und erreicht erneut die kritische Temperatur für den QCD-Phasenübergang. Die Hadronisierung setzt ein und es werden eine große Anzahl von Teilchen, größtenteils Pionen, aber auch einige schwere Baryon-Antibaryon-Paare, erzeugt und anschließend emittiert (Abb. 1.1.d). Über deren Nachweis versucht man einen Einblick in die komplexe innere Struktur des QCD-Vakuums zu erlangen.

---

<sup>2</sup>Wertvolle Informationen zum Relativistic Heavy Ion Collider findet man auf der RHIC-Homepage unter <http://www.bnl.gov/RHIC/>.

<sup>3</sup>Der Large Hadron Collider (LHC) soll im Jahr 2007 seinen Betrieb aufnehmen ( $\sqrt{s} \approx 5.5$  TeV/Nukleon.) .

<sup>4</sup>Oberhalb von 14 GeV/Nukleon ist das gegenseitige vollständige Abbremsen der kollidierenden Nukleonen nicht mehr möglich [4].

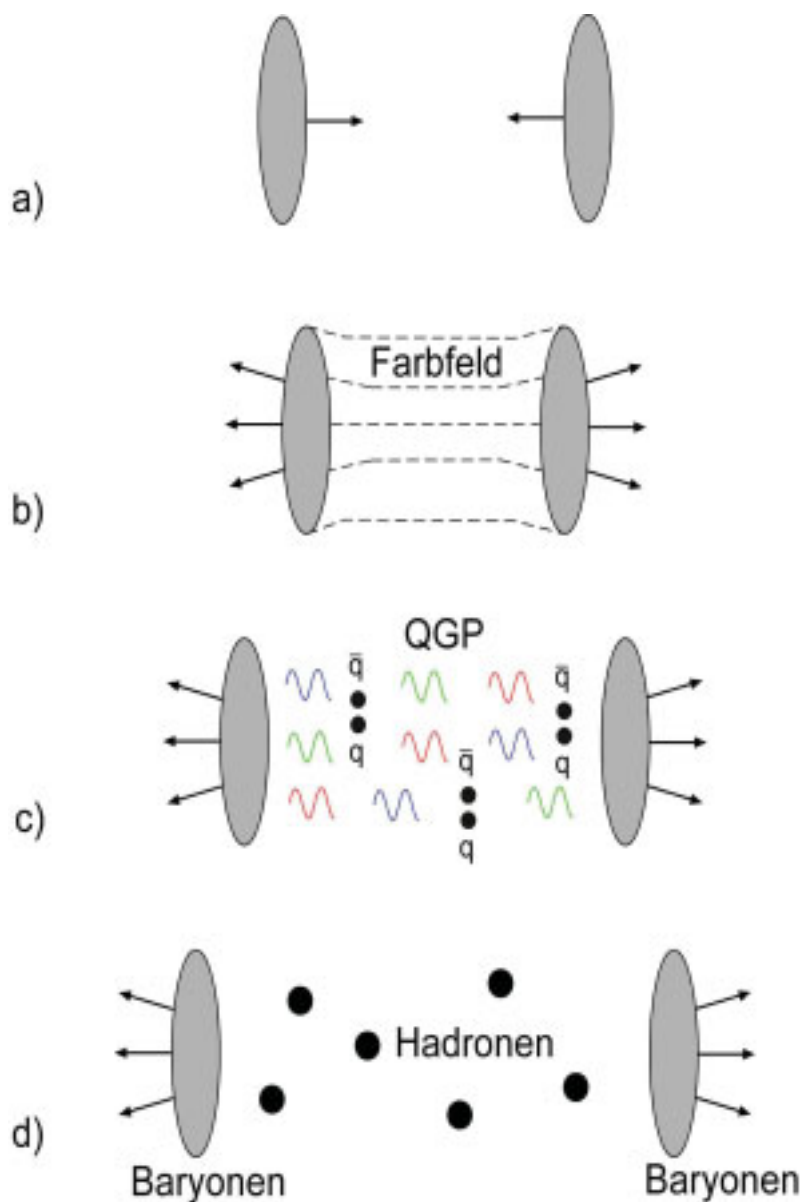


ABBILDUNG 1.1. Die vier Stadien einer Schwerionenkollision [2, 4].

Eine der aufregendsten theoretischen Herausforderungen bei der Untersuchung von Materie extrem hoher Energiedichten liegt in der Entschlüsselung der chiralen Symmetrie, verbunden mit dem Verständnis des Prozesses, welcher den Quarks ihre Massen verleiht.

**Was ist chirale Symmetrie?.** Im Bereich geringer Energie- und Teilchendichten schließen sich die Quarks und Gluonen zu farbneutralen Objekten, den Hadronen, zusammen. Prominente Vertreter dieser Gattung sind z.B. die aus drei (Konstituenten-) Quarks bestehenden Nukleonen, mit einer Masse von ca. 900 MeV, so dass man einem einzelnen, in einem Nukleon eingeschlossenen (Konstituenten-) Quark, eine effektive Masse von

ca. 300 MeV zuschreiben kann. Der größte Teil dieser Masse wird von einer Wolke aus Gluonen und virtuellen Quark-Antiquark-Paaren getragen; d.h. die effektive Quarkmasse ergibt sich aus der Wechselwirkung der Quarks einerseits untereinander und andererseits mit dem sie umgebenden Vakuum. Die effektive Masse eines Quarks schrumpft mit abnehmender Entfernung zu einem zweiten Quark oder Antiquark, mit dem es in Verbindung steht [5, 6]. Man geht heute davon aus, dass die bei den Kollisionsexperimenten erreichten Energie- und Teilchendichten so groß sind, dass die Massen der beiden leichtesten Quarkflavours nahezu verschwinden<sup>5</sup>.

Masselose Quarks besitzen eine Chiralität, d.h. sie sind rechts- bzw. linkshändig (siehe z.B. [7], S. 4-6). Diese Chiralität ist eine fundamentale Symmetrie der QCD. So faktorisiert die Lagrangedichte der QCD,  $\mathcal{L}_{QCD}$ , im Falle von verschwindenden Quarkmassen ( $m_u \sim m_d \sim 0$ ) in einen linkshändigen und einen rechtshändigen Term, d.h. sie ist chiral symmetrisch, bzw. invariant unter den durch

$$(1.1) \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L + u_R \\ d_L + d_R \end{pmatrix} \longrightarrow U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}; \quad U_{R,L} \in SU(2)$$

definierten *chiralen Transformationen*. Hier bezeichnen  $u_{L,R}$ ,  $d_{L,R}$  die links- bzw. rechtshändigen Quarkfelder. Gruppentheoretisch wird diese Invarianz durch die Symmetriegruppe  $\mathcal{G} = SU(2)_L \times SU(2)_R$ , welche isomorph zur  $O(4)$  Gruppe ist, beschrieben.

**Spontane Symmetriebrechung.** Da einerseits die chirale Symmetrie im Teilchenspektrum nicht beobachtet wurde, man also keine chirale Entartung der Hadronen gefunden hat, und andererseits sich die Hadronen einteilen lassen als entartete Repräsentanten der Isospingruppe  $SU(2)_I$ , dies ist die Untergruppe von  $\mathcal{G}$  für die  $U_L = U_R$  gilt, geht man davon aus, dass der Grundzustand die globale chirale Symmetrie  $\mathcal{G}$  der Lagrangedichte spontan bricht.

Das Prinzip der spontanen Symmetriebrechung ist weit verbreitet in der Natur und tief verwurzelt in vielen Teilbereichen der modernen Physik. Dabei erfolgt die Transformation zwischen zwei Systemen unterschiedlicher Symmetrie im Allgemeinen durch einen Phasenübergang. Man denke hierbei z.B. an einen Ferromagneten, bei dem die Spins oberhalb der Curie-Temperatur keinerlei Ordnung aufweisen (Phase A), sich aber unterhalb dieser Temperatur (auch in Abwesenheit äußerer Magnetfelder)

---

<sup>5</sup>Die Idee, dass die Materie bei extrem hohen Teilchendichten, wie man sie z.B. in Neutronensternen oder in der ersten Phase des expandierenden Universums vorfindet, aus schwach wechselwirkenden Quarks und Gluonen besteht, geht auf eine Arbeit von Collins und Perry [8] zurück.