

Gunther Kraut

Aus der Reihe: e-fellows.net stipendiaten-wissen

e-fellows.net (Hrsg.)

Band 1625

Hyperbolische Strukturen in Kreisversionsfraktalen

Diplomarbeit

BEI GRIN MACHT SICH IHR WISSEN BEZAHLT



- Wir veröffentlichen Ihre Hausarbeit, Bachelor- und Masterarbeit
- Ihr eigenes eBook und Buch - weltweit in allen wichtigen Shops
- Verdienen Sie an jedem Verkauf

Jetzt bei www.GRIN.com hochladen
und kostenlos publizieren



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Impressum:

Copyright © 2007 GRIN Verlag
ISBN: 9783668075801

Dieses Buch bei GRIN:

<https://www.grin.com/document/309286>

Gunther Kraut

Aus der Reihe: e-fellows.net stipendiaten-wissen

e-fellows.net (Hrsg.)

Band 1625

Hyperbolische Strukturen in Kreisinversionsfraktalen

GRIN - Your knowledge has value

Der GRIN Verlag publiziert seit 1998 wissenschaftliche Arbeiten von Studenten, Hochschullehrern und anderen Akademikern als eBook und gedrucktes Buch. Die Verlagswebsite www.grin.com ist die ideale Plattform zur Veröffentlichung von Hausarbeiten, Abschlussarbeiten, wissenschaftlichen Aufsätzen, Dissertationen und Fachbüchern.

Besuchen Sie uns im Internet:

<http://www.grin.com/>

<http://www.facebook.com/grincom>

http://www.twitter.com/grin_com

Technische Universität München

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Hyperbolische Strukturen in Kreisinvensionsfraktalen

Diplomarbeit

von

Gunther Arno Kraut

Abgabetermin: 18. Juni 2007

„Ich weiß, dass ich nicht weiß.“

Sokrates

Danksagung

Mein Dank gilt Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert für die gute Betreuung dieser Diplomarbeit. Die fruchtbaren Diskussionen haben sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Zudem hat er mich ermutigt, in diesem interessanten Gebiet meine Diplomarbeit zu schreiben, und er hat die besondere Geduld aufgebracht, die für die Einführung eines Finanz- und Wirtschaftsmathematikers in die Geometrie nötig war.

An Céline Schöne ein herzliches Dankeschön für das Korrekturlesen und die wertvollen Hinweise. Meiner Familie ein großes Dankeschön für die Unterstützung und die Ausdauer beim Anhören vieler Erzählungen über Kreisinversonen und Fraktale.

Meiner Freundin Susanne gilt ein ganz besonderer Dank für die fachlichen und persönlichen Ratschläge, die Unterstützung und den übermäßigen Verzicht auf mich. Dieser Dank lässt sich kaum in Worte fassen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Grundlagen	4
2.1	Überblick über den \mathbb{CP}^1	4
2.2	Die Kreisinverson	10
3	Das Programm zur Kreisinverson	20
3.1	Technische Umsetzung der Kreisinverson	20
3.2	Die PostScript-Ausgabe: Ein Ausflug in den \mathbb{RP}^2	29
4	Suchalgorithmen	36
4.1	Der Suchbaum und Grundlagen der Suche	36
4.2	Tiefensuche-Algorithmen	41
4.3	Abbruchkriterien	43
4.4	Sondersuche HinHer	46
5	Das Inversion-7-3-Fraktal	50
5.1	Vorstellung des Inversion-7-3-Fraktals	50
5.2	Die Transformationsgruppe	53
5.3	Pflasterung der hyperbolischen Kreisscheibe in Abhängigkeit von r_m	61
5.4	Ausblick: Dualität und Schnittwinkel	69
	Literaturverzeichnis	76
A	Programmcode Kreisinverson im \mathbb{CP}^1	77
B	Programmcode Suchalgorithmus	84
B.1	Auswahl des Suchalgorithmus	84
B.2	Suche mit Schleifen	85
B.3	Suche mit Schleifen ohne Unterfunktionen	86
B.4	Rekursive Suche	87
B.5	Sondersuche HinHer	88
B.6	Eigene Suchalgorithmen	90
C	Graphische Ausgaben des Suchalgorithmus	91

D	Maple-Worksheet: Ein Gleichungssystem	94
E	Lösungen von Gleichungssystemen	97
F	3-7-Pflasterung durch G_7	101

Abbildungsverzeichnis

1.1	Iteriertes Funktionensystem aus acht Kreisinversonen	2
1.2	Das gleiche iterierte Funktionensystem erzeugt verschiedene Muster.	2
2.1	Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen (vgl. [RG07, Kap. 15])	7
2.2	Stereographische Projektion [Wik06]	9
2.3	Die Kreisinverson: Ursprung und Bildpunkt	10
2.4	Beweis von Satz 2.33	13
2.5	Die Kreisinverson in der Ebene [MSW02, S. 55]	14
2.6	Inverson eines durch den Spiegelungskreismitelpunkt verlaufenden Kreises	15
2.7	Inverson einer durch den Spiegelungskreismitelpunkt verlaufenden Gerade	16
2.8	Orthogonale Kreise sind Fixkreise.	17
3.1	Achtfache iterative Kreisinverson	20
3.2	Klassische Konstruktion des Kreismitelpunktes aus drei Kreispunkten	30
3.3	Ausgabe mit und ohne Fuzzy-Operator	34
3.4	Abwechselnde Inverson an zwei Spiegelungskreisen, 1000 Iterationen	35
4.1	Die Baumstruktur der Transformationsgruppe	37
4.2	Zoomfunktionen im Vergleich	40
4.3	Die Arbeitsweise des Tiefensuche-Algorithmus	42
4.4	Beispiel für die Leistungsfähigkeit des Tiefensuche-Algorithmus	48
5.1	Notation Inversion-7-3-Fraktal	50
5.2	Muster in der Fraktalpunktmenge des Inversion-7-3-Fraktals	51
5.3	Der Orbit von C_{horiz} unter der Transformationsgruppe	52
5.4	Pflasterungen und Kreisketten	53
5.5	Die Inverson eines Punktes an einem Kreis in euklidischen Koordinaten	54
5.6	Die Inverson eines Kreises an einem Kreis in euklidischen Koordinaten	55
5.7	Das Inversion-7-3-Fraktal für verschiedene Radien	60
5.8	Reguläres Siebeneck in der hyperbolischen Kreisscheibe C_{horiz}^\bullet	62
5.9	Basis- und Fundamentaldreiecke	65
5.10	Die 3-7-Pflasterung im Muster des Inversion-7-3-Fraktals	66
5.11	$\text{orb}(C_m)_{\mathbf{G}_{7,m}}$ für $r_m \approx 1,4370$	69
5.12	$\text{orb}(C_m)_{\mathbf{G}_{7,m}}$ für $r_m \approx 2,0283$ – Schattenkreise in der Fraktalpunktmenge	70
5.13	$\text{orb}(C_{horiz})_{\mathbf{G}_{7,m}}$ für $r_m \approx 3,4173$ – Duale Kreise	70
5.14	$\text{orb}(C_m)_{\mathbf{G}_{7,m}}$ für $r_m \approx 2,6025$ – Keine Schattenkreise	71

5.15	$\text{orb}(C_1, \dots, C_7)_{\mathbf{G}_{7,m}}$	71
5.16	Schnittwinkel	72
5.17	Zyklen für $r_m \approx 2,6025$	73
5.18	Analog zum Inversion-7-3-Fraktal konstruierte Fraktale	74
C.1	Der Suchalgorithmus an acht Spiegelungskreisen	91
C.2	Der Suchalgorithmus an acht Spiegelungskreisen, veränderter Radius	92
C.3	Der Suchalgorithmus an acht Spiegelungskreisen, starker Zoom	92
C.4	Der Suchalgorithmus an vier der vorherigen acht Kreise	93
C.5	Kreisketten im scheinbaren Chaos	93
F.1	Die 3-7-Pflasterung wird durch $\text{orb}(C_1, \dots, C_7)_{\mathbf{G}_7}$ sichtbar.	101