

**Sabri Dali**

# Das LIBOR-Market-Modell unter Berücksichtigung stochastischer Volatilitäten

Theoretische Definiton, Implementation und Kalibrierung  
des SABR-LMMs

**Masterarbeit**

# BEI GRIN MACHT SICH IHR WISSEN BEZAHLT



- Wir veröffentlichen Ihre Hausarbeit, Bachelor- und Masterarbeit
- Ihr eigenes eBook und Buch - weltweit in allen wichtigen Shops
- Verdienen Sie an jedem Verkauf

Jetzt bei [www.GRIN.com](http://www.GRIN.com) hochladen  
und kostenlos publizieren



## **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

## **Impressum:**

Copyright © 2018 GRIN Verlag  
ISBN: 9783668994706

## **Dieses Buch bei GRIN:**

<https://www.grin.com/document/494232>

**Sabri Dali**

# **Das LIBOR-Market-Modell unter Berücksichtigung stochastischer Volatilitäten**

**Theoretische Definition, Implementation und Kalibrierung des SABR-LMMs**

## **GRIN - Your knowledge has value**

Der GRIN Verlag publiziert seit 1998 wissenschaftliche Arbeiten von Studenten, Hochschullehrern und anderen Akademikern als eBook und gedrucktes Buch. Die Verlagswebsite [www.grin.com](http://www.grin.com) ist die ideale Plattform zur Veröffentlichung von Hausarbeiten, Abschlussarbeiten, wissenschaftlichen Aufsätzen, Dissertationen und Fachbüchern.

### **Besuchen Sie uns im Internet:**

<http://www.grin.com/>

<http://www.facebook.com/grincom>

[http://www.twitter.com/grin\\_com](http://www.twitter.com/grin_com)

Abschlussarbeit im Masterstudiengang  
Mathematik für Finanzen, Versicherungen und  
Management

**Das LIBOR-Market-Modell unter  
Berücksichtigung stochastischer  
Volatilitäten**

**(SABR-LMM)**

Sabri Dali

Matrikelnummer: XXXXXX

Frankfurt, 12. Juli 2019

# Zusammenfassung

Wir befassen uns in dieser Arbeit mit dem SABR-LIBOR-Market-Modell (SABR-LMM). Das SABR-LMM ist ein Zinsstrukturmodell zur Modellierung von Forward-Raten (oder Swap-Raten) und gilt als die natürliche Erweiterung des SABR- und des klassischen LIBOR oder Swap-Market-Modells. Wir wollen mit Hilfe dieses Modells die Preise von Caps, Floors und Swaptions (also von Standardinstrumenten eines Zinsmarktes) aller Laufzeiten und Strikes, d.h. für das gesamte Volatilitäts-oberfläche (Surface), mittels eines einzigen Kalibrierungsvorgangs replizieren. Beide Modelle konnten sich bereits allein stehend in der Praxis als Marktstandard in ihrem jeweiligen Anwendungsbereich etablieren. Das SABR-Modell wird für Standardinstrumente (Plain Vanilla) verwendet, während das LMM bei komplexeren Strukturen zum Einsatz kommt.

Ziel dieser Arbeit ist die vollständige theoretische Definition, Implementation sowie Kalibrierung des SABR-LMMs. Darüber hinaus soll gezeigt werden, wie dieses Modell zur Bewertung von Plain Vanilla-Zinsderivaten herangezogen wird, welche als Grundlage für die Bewertung und das Hedging von komplexeren Instrumenten dienen. Die Kalibrierung umfasst dabei insbesondere den Volatilitäts- und Korrelationsprozess. Vor allem letzteres ist kein triviales Unterfangen, da die für die Kalibrierung verwendeten Daten nur wenig bis gar keine Informationen über die in der Modellierung benötigten instantanen Korrelationen beinhalten. Die für die Kalibrierung und Anwendung des Modells benötigten Daten sind die Zinsstrukturkurve, die impliziten Cap-Volatilitäten sowie die impliziten Swaption-Volatilitäten am jeweiligen Bewertungsstichtag. Der Bewertungsstichtag soll der 01.02.2018 sein. Wir werden unsere Berechnungen auf den U.S. Dollar-Raum beschränken, in welchem das Zinsniveau günstigerweise nicht im negativen Bereich liegt. Für den Fall negativer Zinsen müssen für beide Modelle sowie für deren Zusammenführung einige Adjustierungen vorgenommen werden, da negative Zinsen in dem von uns verwendeten Modellrahmen per se ausgeschlossen sind. Die Marktdaten zum Bewertungsstichtag werden wir von Thomson Reuters<sup>®</sup> beziehen.

Wir versuchen den komplexen Modellrahmen in einer Manier darzustellen, die dem Praktiker sowie dem Theoretiker in gleichem Maße genügen möge. Bezüglich des Modellrahmens sei gesagt, dass die stochastischen Prozesse, welche den hier vorgestellten Modellen zugrunde liegen, den üblichen Bedingungen (engl. usual conditions) folgen. In Anbetracht des Umfangs dieser Arbeit müssen wir, wie an dieser Vorbemerkung bereits ersichtlich wird, eine große Palette an Vorkenntnissen voraussetzen. Es werden finanzmathematische Kenntnisse, Kenntnisse aus der stochastischen Analysis und

sonstige mathematische Grundlagen vorausgesetzt. An dieser Stelle wird auf das sehr ausführliche Werk [Shr04] von STEVEN E. SHREVE verwiesen, welches uns mit den wichtigen Werkzeugen der stochastischen Analysis ausstatten kann. Weiterhin wollen wir auch auf [Fri07] und [HDK02] verweisen, welche beide die finanzmathematischen Grundlagen darlegen und ausführlich auf Themen eingehen, die darüber hinaus gehen.

Es ist anzumerken, dass die im Laufe der Arbeit behandelten Modelle auf Basis der Theorie der Vorkrisenzeit (engl.: Pre-Crisis) vorgestellt werden. So werden Faktoren wie das Kontrahentenrisiko etc. nicht in Betracht gezogen und üben folglich keinen Einfluss auf den Modellrahmen aus. Die Entwicklung der Theorie für die Nachkrisenzeit (engl.: Post-Crisis) ist ebenfalls ein sehr interessantes und aktives Forschungsfeld. Bezüglich der Literatur, welche bereits erste Post-Crisis-Ansätze beinhaltet und vorstellt, ist hier das dreibändige Werk [AP10] von ANDERSEN und PITERBARG zu nennen sowie auf [GR15] zu verweisen.

Nach einigen einleitenden Worten werden in Kapitel 1 notwendige Grundlagen, hauptsächlich zwecks einer einheitlichen Notation, eingeführt. Kapitel 2 handelt von der Theorie sowie Implementierung des klassischen LMM. Gleiches wird in 3 für das SABR-Modell vorgestellt. Der Kern dieser Arbeit, das SABR-LMM, wird in Abschnitt 4 behandelt. Hier werden ebenfalls die generelle Theorie sowie die Theorie der Kalibrierungs- und Bewertungsprozesse vorgestellt. Weiterhin werden in Kapitel 5 die Anwendung bzw. die Ergebnisse der Kalibrierungs- und Bewertungsvorgänge präsentiert. Die Arbeit liefert damit einen ersten funktionierenden Prototypen zur Bewertung im SABR-LMM. Im letzten Abschnitt 6 wird ein ausführlicher Ausblick vorgestellt, der auf vieles, was in Anbetracht des Umfangs dieser Arbeit zu kurz gekommen ist, eingeht und Erweiterungen sowie Verbesserungsmöglichkeiten darlegt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Einführung der grundlegenden Größen . . . . .	4
1.1.1	Tenor-Struktur . . . . .	4
1.1.2	Nullkuponanleihen und Diskontfaktoren . . . . .	5
1.1.3	Forward-Raten und Forward Rate Agreements . . . . .	6
1.1.4	Caps und Floors . . . . .	7
1.1.5	Swap-Raten, Swaps und Swaptions . . . . .	9
1.2	Stochastische Prozesse und Martingalmaße . . . . .	12
1.2.1	BROWNSche Bewegung . . . . .	13
1.2.2	Martingalmaße und Numéraire . . . . .	13
1.3	Das Black-Modell . . . . .	15
1.3.1	Black76-Formel für Caps und Floors . . . . .	19
1.3.2	Black76-Formel für Swaptions . . . . .	25
1.4	Vorbereitung der Input-Daten und Bootstrapping der Caplet-Volatilitäten	27
<b>2</b>	<b>Das LIBOR-Market-Modell</b>	<b>30</b>
2.1	Theorie . . . . .	32
2.2	Volatilität . . . . .	37
2.3	Korrelation . . . . .	42
2.4	Kalibrierung der Prozesse . . . . .	46
2.5	Monte-Carlo-Simulation der Forward-Kurve . . . . .	48
2.6	Bewertung von Caps und Floors . . . . .	50
2.7	Bewertung von Swaptions . . . . .	51
2.8	Zusammenfassung . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Das SABR-Modell</b>	<b>55</b>
3.1	Theorie . . . . .	57
3.2	Variation der Modellparameter . . . . .	61
3.3	Kalibrierung und Bewertung . . . . .	65
3.4	Zusammenfassung . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Das SABR-LIBOR-Market-Modell</b>	<b>69</b>
4.1	Theorie . . . . .	71
4.2	Das HAGAN-Modell . . . . .	74
4.3	Das REBONATO-Modell . . . . .	77
4.4	Das SABR-LMM nach MERCURIO und MORINI . . . . .	79
4.4.1	Dynamiken unter verschiedenen Martingalmaßen . . . . .	80

4.4.2	Kalibrierung der Prozesse . . . . .	85
4.4.3	Monte-Carlo-Simulation der Forward-Kurve . . . . .	88
4.4.4	Bewertung . . . . .	89
4.5	Zusammenfassung . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Anwendung</b>	<b>93</b>
5.1	Kalibrierungsergebnis . . . . .	93
5.2	Monte-Carlo-Simulation . . . . .	100
5.3	Fazit . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Ausblick</b>	<b>113</b>
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>115</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>116</b>

# 1 Einleitung

In der heutigen Welt sind derivative Finanzinstrumente im Finanzsektor weit verbreitet und nicht mehr wegzudenken. Sie bergen unterschiedliche Gewinn- und Verlustpotentiale sowie Risiken verschiedenen Ausmaßes. Um diese Derivate bewerten und die verbundenen Risiken einschätzen und hedgen zu können, werden zwangsläufig Modelle benötigt, welche in der Lage sind, einen theoretischen und auf aktuellen Marktdaten basierenden Wert zu berechnen. In dieser Arbeit wollen wir uns mit einem bestimmten Teil des Finanzmarktes beschäftigen - den Märkten für Zinsderivate bzw. kurz dem sog. Zinsmarkt. Zinsderivate (engl.: interest rate derivatives) werden von vielen Marktteilnehmern verwendet, die keineswegs ausschließlich dem Finanzsektor angehören. Gemessen am Handelsvolumen machen sie einen großen Teil des Finanzmarktes aus. In allen Bereichen der Wirtschaft, wo Geld ge- und verliehen wird, wo Risiken durch Zinsschwankungen und -bewegungen vermieden werden sollen oder wo auf Zinsen und deren Volatilitäten spekuliert wird, finden Zinsderivate ihre Anwendung. Daher sind sie in den Portfolien von Groß- sowie Kleinbanken, Versicherungen, jeglichen sonstigen Finanzinstitutionen, aber auch bei privaten Unternehmen, bei denen dies vielleicht erst einmal gar nicht vermutet werden würde, anzutreffen. Die Standardinstrumente (engl.: plain vanilla instruments), welche zugleich am jeweiligen Zinsmarkt am liquidensten gehandelt werden, sind FRA's (Forward Rate Agreement), Zinsswaps (engl.: interest rate swap - IRS), Caps, Floors und Swaptions. Auf die Funktionsweise dieser Zinsderivate werden wir in dem nächsten Abschnitt 1.1 und im Laufe der Arbeit sehr genau eingehen. Diese Standardinstrumente bilden das Fundament des Zinsmarktes, während sie selbst wiederum die Nullkuponanleihe (engl.: zerobond) als Grundbaustein innehaben. Das Zurückführen bzw. Replizieren der Struktur der Zinsderivate auf Ebene der Zerobonds stellt die Grundlage für die Bewertung dieser Produkte dar. An dieser Stelle wird auf [RSM04] verwiesen, welches dieses Anliegen in einer guten logischen Art und Weise aufgreift. Das sehr ausführliche Standardwerk für Zinsderivate ist [BM06], auf welches wir im Laufe dieser Arbeit noch häufiger verweisen werden.

Die Zerobonds sind, je nach Währung, lediglich von der jeweiligen LIBOR-Rate (London Interbank Offered Rate) abhängig und dienen uns unter anderem als Diskontfaktor zum Abzinsen von in der Zukunft liegenden (erwarteten) Zahlungen. Die LIBOR-Rate beschreibt den durchschnittlichen Zinssatz, zu dem sich die bonitätsstärksten Banken der Welt von Laufzeiten bis zu einem Jahr gegenseitig unbesichert Geld leihen und verleihen. Es existieren LIBOR-Raten in fünf verschiedenen Währungen (U.S. Dollar, Euro, Britische Pfund, Schweizer Franken, Japanische Yen) zu verschiedenen Fälligkeiten. Wir werden unsere Berechnungen auf U.S. Dollar-Raten

## 1 Einleitung

beschränken. Im U.S. Dollar-Raum ist die U.S. Dollar Dreimonats Rate (USD 3 Month LIBOR) der verwendete Diskontierungsstandard. Je nach Dauer der Leihe unterscheiden sich die Zinsraten in ihrer Höhe. Dies liegt an Unterschieden in der Zinsbindungsdauer und dem damit verbundenen Risiko. In Abhängigkeit der Zeit ergibt sich eine Zinsstrukturkurve (engl.: yield curve), welche wir von Daten Providern wie Thomson Reuters oder Bloomberg bereitgestellt bekommen. Das Erstellen einer solchen Zinsstrukturkurve ist keineswegs ein triviales Unterfangen, denn die Kurve ist nicht direkt am Markt ablesbar. Vielmehr verbirgt sie sich in gehandelten Preisen von FRA's, IRS und Anleihen. Erst ein aufwendiger Bootstrap-Algorithmus in Verbindung mit Interpolationsmethoden ermöglicht den Erhalt der Kurve auf Basis der beobachteten Preise.

Da die LIBOR-Rate den Preis eines Zerobonds als einziger freier Faktor bestimmt und die Zerobonds den Grundbaustein des gesamten Zinsmarktes darstellen, basieren die Modelle zur Bewertung der Zinsderivate auf der Modellierung dieser Zinsraten bzw. Zinskurven.

Zinsderivate wurden lange Zeit lediglich für das Reduzieren von Bilanzrisiken eingesetzt. Ein Bilanzrisiko in diesem Sinne entsteht vor allem beim Verleihen von Geldern. Die Bewertung von Zinsderivaten wurde bis dato häufig mit Short-Rate-Modellen durchgeführt. Diese Modelle beschreiben die gesamte Zinskurve nur auf Basis der Short-Rate, welche als der geltende Zinssatz für eine Leihe über einen infinitesimal kleinen Zeitraum  $dt$  interpretiert werden kann. Die Short-Rate-Modelle führen mitunter zu komplexen Bewertungsformeln und hohem Kalibrierungsaufwand, da die Short-Rate keine unmittelbar am Markt beobachtbare Größe darstellt. Für die Bewertung von Europäischen Optionen wie Caps, Floors oder Swaptions etablierte sich das BLACK-Modell (auch BLACK76-Modell (B76) genannt) als Marktstandard. Dieses Modell ist eine Abwandlung des bekannten BLACK-SCHOLES-MERTON Modells und liefert einfache Bewertungsformeln für die aufgeführten Instrumente. Es modelliert die Forward-Rate bzw. Swap-Rate, welche den geometrischen Basiswert (engl.: Underlying) dieser Optionen darstellen, mit einer BROWNSchen Bewegung, welche im späteren Kontext noch genauer definiert wird, unter Anwendung von einigen Grundannahmen, z.B. die Annahmen konstanter Volatilität, auf welche wir im Abschnitt 1.3 genauer eingehen werden.

Später wurden zunehmend individuell zugeschnittene Instrumente am Markt platziert, deren Bewertung teils deutlich komplexer ist. Diese komplexen Instrumente beinhalteten Optionalitäten und Eigenschaften, wie zum Beispiel Kündigungsrechte oder pfadabhängige Auszahlungen. Außerdem hängt ihr Auszahlungsprofil und damit ihr Wert oft gleich von mehreren Punkten der Zinsstrukturkurve ab. Durch die Struktur dieser komplexen Instrumente waren Marktteilnehmer in der Lage, sich Positionen auf bestimmten Bereichen der Zinskurve oder Volatilitätsflächen (Volatilitäts-Surface) zu sichern. Für die Bewertung solch komplexer Instrumente war der Modellrahmen der Short-Rate-Modelle nicht ausreichend. Somit wurde neben multivariaten Short-Rate-Modellen eine neue Modellklasse von HEATH, JARROW

und MORTON in [HJM92] vorgestellt. Aus diesem HJM-Modell entwickelten sich die sogenannten Marktmodelle, die bis heute als Standardmodelle für das Bewerten von exotischen Instrumenten verwendet werden. Die wohl bekannteste und erste Arbeit des Marktmodells veröffentlichten BRACE, GATAREK und MUSIELA mit [BGM97]. Das LIBOR-Market-Modell (LMM) modelliert die einzelne Forward-Rate unter dem jeweiligen Martingalmaß und einer vorab bestimmten Tenor-Struktur als driftlosen stochastischen Prozess mit einer BROWNSchen Bewegung unter deterministischer Volatilität. Die Besonderheit dieses Modells ist, dass es eine mehr oder weniger direkt am Markt ablesbare Größe modelliert, was die Komplexität der Kalibrierung solcher Modelle enorm reduziert. Des Weiteren ist das LMM kompatibel mit den Bewertungsformeln des B76-Modells für Caps und Floors. Hingegen steht das Marktmodell, welches die Swap-Rate modelliert (Swap-Market-Model) gleichermaßen im Einklang mit den B76-Bewertungsformeln für Swaptions. Dies wirkt sich ebenfalls positiv auf das Modell aus, da die Bewertungsformeln des B76-Modells den Marktstandard darstellen. Die besondere Eigenschaft des LMM ist jedoch, dass es in diesem Modellrahmen auf Basis von Bedingungen der Arbitragefreiheit möglich ist, die stochastischen Prozesse aller Forward-Raten der Tenor-Struktur unter einem einzigen Martingalmaß zu modellieren. Mittels Monte-Carlo-Simulation ist es so möglich, Bewertungen für komplexe Instrumente vorzunehmen. Trotz all dieser Vorzüge dauerte es eine Weile, bis sich das LMM auf diesem Gebiet letztendlich als Marktstandard etablieren konnte. Grund dafür war die hohe Rechenintensität der Monte-Carlo-Simulationen sowie der Kalibrierungsprozesse. Erst die Verbesserung der Technik über die Zeit ermöglichte eine tägliche effiziente Nutzung dieses Modells.

Neben dem Aufkommen exotischer Instrumente konnten an den Märkten einige Eigenschaften von verschiedenen modellrelevanten Größen beobachtet werden, welche die Bewertung und vor allem die Modelle maßgebend beeinflussen und verändern sollten. Die implizite Volatilität, welche im BLACK-SCHOLES-Modellrahmen als konstant angesehen wird, weist in empirisch beobachtbaren Daten alles andere als konstante Strukturen bezüglich verschiedener Strikes und Laufzeiten auf. Die implizite Volatilität einer Europäischen Option ist diejenige Größe, die in die B76-Bewertungsformeln eingesetzt, den jeweiligen Optionspreis liefert. Sie gilt als Quotierungsstandard von Optionspreisen am Markt. Um gehandelte Optionspreise modellieren zu können, werden die Modelle unter Anderem mit Hilfe dieser beobachteten impliziten Volatilitäten kalibriert, welche daher einen besonderen Stellenwert genießen. Für die klassischen Europäischen Optionen werden bei der zweidimensionalen Ansicht der impliziten Volatilität bezüglich des Strikes der Option sogenannte „Volatilitäts-Smiles“ bzw. „-Skews“ vorgefunden. Dies führt in der dreidimensionalen Ansicht (implizite Volatilität als Funktion von Strike und Laufzeit) zu der sogenannten Volatilitätsfläche, welche sich oftmals in Form einer „Hügellandschaft“ offenbart. Um das Abbilden der gehandelten Preise mit einem bestmöglichen Fehler gewährleisten zu können, müssen sich die Modelle also auf solche Volatilitäts-Smiles kalibrieren lassen können.

Dem LIBOR-Market-Modell ist dies, aufgrund der deterministischen Volatilitäts-