

Manuel Müller

Gebietszerlegungsverfahren für zeitabhängige Probleme mit Anwendungen in der Strukturdynamik

Masterarbeit

BEI GRIN MACHT SICH IHR WISSEN BEZAHLT



- Wir veröffentlichen Ihre Hausarbeit, Bachelor- und Masterarbeit
- Ihr eigenes eBook und Buch - weltweit in allen wichtigen Shops
- Verdienen Sie an jedem Verkauf

Jetzt bei www.GRIN.com hochladen
und kostenlos publizieren



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Impressum:

Copyright © 2018 GRIN Verlag
ISBN: 9783668881419

Dieses Buch bei GRIN:

<https://www.grin.com/document/436484>

Manuel Müller

Gebietszerlegungsverfahren für zeitabhängige Probleme mit Anwendungen in der Strukturdynamik

GRIN - Your knowledge has value

Der GRIN Verlag publiziert seit 1998 wissenschaftliche Arbeiten von Studenten, Hochschullehrern und anderen Akademikern als eBook und gedrucktes Buch. Die Verlagswebsite www.grin.com ist die ideale Plattform zur Veröffentlichung von Hausarbeiten, Abschlussarbeiten, wissenschaftlichen Aufsätzen, Dissertationen und Fachbüchern.

Besuchen Sie uns im Internet:

<http://www.grin.com/>

<http://www.facebook.com/grincom>

http://www.twitter.com/grin_com

Gebietszerlegungsverfahren für zeitabhängige Probleme mit Anwendung in der Strukturdynamik

Masterarbeit

vorgelegt von Manuel Müller
am 31. Juli 2018

am Mathematischen Institut der
Universität zu Köln

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Gleichung der Strukturdynamik	5
1.1 Kinematik und Verzerrungen	5
1.2 Bilanzgleichungen und Gleichgewicht	6
1.3 Spannungsmaße und konstitutives Gesetz	8
1.4 Grundgleichungen der linearen Elastodynamik	9
1.5 Schwache Form des Gleichgewichts	11
1.6 Räumliche Diskretisierung	12
2 Zeitintegrationsverfahren	15
2.1 Newmark- β Methode	21
2.2 Alpha Schemen	23
2.2.1 HHT- α Verfahren	23
2.2.2 WBZ- α Verfahren	25
2.2.3 CH- α Verfahren	25
2.3 Einheitliches Format für die Zeitintegration	26
2.4 Vergleich der Dissipationseigenschaften	29
3 Gebietszerlegungsverfahren	32
3.1 Statisches FETI-Verfahren	33
3.1.1 FETI-Interfacebedingungen	38
3.2 Dynamisches FETI-Verfahren	41
3.3 GC-Verfahren	42
3.3.1 Stabilität der Geschwindigkeitskopplung	48
3.4 PH-Verfahren	53
3.5 BGC-Makro-Verfahren	59
4 Erweiterung auf mehr als zwei Teilgebiete	66
4.1 Betrachtung gleicher Zeitschrittweiten	66
4.1.1 GC- und PH-Methode	67
4.1.2 BGC-Makro-Methode	68

4.2	Betrachtung unterschiedlicher Zeitschrittweiten	69
4.2.1	GC-Methode	70
4.2.2	BGC-Makro-Methode	72
5	Erweiterung auf nichtlineare Systeme	74
5.1	Newton-Raphson-Verfahren	74
5.2	Kopplungsmethoden für nichtlineare Modellprobleme	76
6	Implementierung	78
6.1	Parallele Implementierung	78
6.1.1	Modifizierte PH-Methode	79
6.1.2	Kopplungspunkte der Gebietszerlegungsverfahren	80
7	Ergebnisse	83
7.1	Einmassenschwinger	83
7.1.1	Validierung der Gebietszerlegungsverfahren und weiter- führende Untersuchungen	85
7.1.2	Phasenverschiebung	91
7.1.3	Nichtlinearer Van-der-Pol-Oszillator	94
7.2	Cooksche Membran in 2D mit heterogenen Koeffizienten	99
7.3	Kragarm in 3D und Laufzeitvergleich zwischen serieller und par- alleler Implementierung	104
8	Fazit und Ausblick	109
A	Die Bibliothek MFEM	117

Einleitung

Unter Dynamik versteht man die Lehre von der Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften. Dynamische Fragestellungen lassen sich in der Natur z. B. bei der Untersuchung von Bewegungs- und Schwingungsvorgängen von komplizierten technischen Strukturen wie Fahrzeugen, Flugzeugen oder Bauwerken wiederfinden. Als dynamische Lasten sind dabei unter anderem rotierende Maschinen, Windböen, Erdbeben, Druckwellen (Explosionen) oder Aufprallkräfte zu berücksichtigen.

Obwohl die zugrundeliegenden Differentialgleichungen von Strukturproblemen weitestgehend bekannt sind, lässt sich das Verhalten der meisten Körper für gewöhnlich nicht analytisch bestimmen. Für die numerische Simulation physikalischer Problemstellungen müssen diese deshalb zunächst mit geeigneten mechanisch-mathematischen Idealisierungen abgebildet werden. In den letzten Jahrzehnten ist das Interesse nach immer besseren und effizienteren Methoden zur Untersuchung und Berechnung von physikalischen Phänomenen bedeutend gestiegen [22]. Der klassische Ansatz zur numerischen Lösung von kontinuierlichen Strukturproblemen führt über eine räumliche Diskretisierung des zugrundeliegenden Bauteils, welches über die Zeit hinweg simuliert werden soll.

Dabei ist die Finite-Elemente-Methode (FEM) heutzutage wohl das am weitesten verbreitete Näherungsverfahren zur Lösung von Variationsproblemen und Differentialgleichungen in den Ingenieurwissenschaften und der mathematischen Physik und ist deshalb ein unverzichtbares Werkzeug, um Randwertprobleme in der Strukturdynamik berechnen zu können [5]. Die Leistungsfähigkeit der Methode liegt darin begründet, dass die FEM die Vorteile besitzt, systematische Regeln für die Erzeugung stabiler numerischer Schemata bereitzustellen, und es relativ einfach ist, komplizierte zwei- und dreidimensionale Geometrien zu berücksichtigen. Die grundlegende Idee der räumlichen Diskretisierung besteht darin, den zu berechnenden Körper durch eine Kollektion von einfachen Elementen, z. B. Dreiecke oder Vierecke, möglichst genau abzubilden. Die Finite-Elemente-Methode erzeugt dann ein Gleichungssystem für Näherungswerte der unbekannten Funktion in ausgezeichneten Punkten der einzelnen Elemente [48]. Nach dem Lösen des Systems sind die Werte der Unbekannten bekannt und das statische Verhalten der Struktur kann dadurch näherungsweise beschrieben

werden.

Um die physikalische Reaktion eines Bauteils unter Belastung zusätzlich in der Zeit bestimmen zu können, werden bei der Modellierung auf numerische Integrationsverfahren, wie z. B. die bekannten Newmark Schemen [41] oder die in der Literatur immer öfter verwendeten Alpha Schemen [28, 52, 10] zurückgegriffen. Bei der Analyse von Strukturproblemen hängt die Genauigkeit der numerischen Lösung dabei bedeutend von der gewählten Diskretisierungsfeinheit und dem gewählten Zeitintegrationsverfahren ab.

Mit zunehmender Leistungsfähigkeit moderner Computer wird die detaillierte numerische Simulation von immer größeren und komplexeren Systemen möglich. Diese Entwicklung stellt ganz neue Herausforderungen an Hard- und Software, Algorithmen und Analysemethoden. Eine dieser Herausforderungen betrifft die Frage, auf welche Art und Weise die zum Teil sehr großen Gleichungssysteme, die aus der räumlichen Diskretisierung einer partiellen Differentialgleichung hervorgehen, sinnvoll und effizient gelöst werden können.

Seit den Anfängen der computerorientierten Mechanik wird deshalb versucht, die Anzahl der Unbekannten und damit den Rechen- und Speicheraufwand durch geeignete Maßnahmen zu verringern. Für die Simulation von Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden und sehr kleinen Zeitschrittweiten wird eine enorme Rechenzeit von zum Teil Tagen oder sogar Wochen benötigt. Vor allem physikalische Probleme, die aus einzelnen, aneinandergeschlossenen Komponenten oder Teilfeldern mit unter Umständen stark unterschiedlichen Eigenschaften bestehen und dynamisch modelliert werden sollen, stellen eine große Herausforderung dar [24]. In der Vergangenheit wurden physikalische Modellprobleme fast immer mit einem einzelnen Zeitintegrationsverfahren und einer einzelnen Zeitschrittweite, welche die Stabilitäts- und Genauigkeitsanforderungen aller finiten Elemente erfüllt, simuliert [6, 43].

Mit einer Zerlegung des Rechengebiets in kleinere Teilgebiete ermöglichen die in den letzten Jahrzehnten entwickelten Gebietszerlegungsverfahren den unabhängigen Einsatz von Modellierungsansätzen, Diskretisierungstechniken in Raum und Zeit, sowie Lösungsalgorithmen, die an die jeweiligen Anforderungen und speziellen Eigenschaften einzelner Teilbereiche des Gesamtgebiets optimal angepasst sind [6, 24, 43, 26]. Aufgrund der vielen Vorteile erfreuen sich diese Verfahren heutzutage großer Beliebtheit bei der Simulation von physikalischen Modellproblemen. Neben dem generell kleineren Berechnungsaufwand wird durch die Zerlegung des Rechengebiets auch die Möglichkeit einer parallelen Simulation, bei der die einzelnen Teilgebiete auf unterschiedlichen Prozessoren oder verknüpften Rechanlagen (Parallelrechner) gelöst werden, geschaffen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Theorie, der Implementierung

und dem Vergleich dynamischer Gebietszerlegungsverfahren. Diese Methoden erlauben es erstmals, die lokalen Teilgebietsprobleme mit einem eigenen Zeitintegrationsverfahren und einer eigenen Zeitschrittweite zu lösen, sodass die Stabilitätsanforderungen aller Teilgebiete optimal erfüllt werden können [24, 43, 26]. Motiviert durch den hohen Rechenaufwand von Simulationen mit sehr feinen Diskretisierungen in Raum und Zeit werden die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden parallelisiert und die Effizienzsteigerung gegenüber einer seriellen Implementierung untersucht.

Im Einzelnen gliedert sich die Arbeit in die folgenden Teilabschnitte. Zunächst werden in **Kapitel 1** die kontinuumsmechanischen Grundlagen der Strukturdynamik erläutert, die zur numerischen Simulation der hier behandelten Problemstellungen verwendet werden. Es werden die wichtigsten Definitionen eingeführt und mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode die im Raum diskretisierte Bewegungsgleichung aufgestellt.

Anschließend werden in **Kapitel 2** einige Integrationsverfahren zur zeitabhängigen Lösung der Bewegungsgleichung vorgestellt und ihre Effizienz und Eignung im Hinblick auf physikalische Anwendungen anhand einiger Kriterien analysiert. Neben den bekannten Newmark Schemen werden in diesem Kapitel vor allem die eher unbekannten Alpha Schemen betrachtet und Stabilität, Genauigkeit der numerischen Lösung und die in der Strukturdynamik wichtigen Dissipationseigenschaften untersucht. Das Kapitel wird mit der Einführung eines verallgemeinerten Zeitintegrationsverfahrens abgeschlossen, welches es ermöglicht, alle in dieser Arbeit betrachteten Methoden in einfacher Weise in Software-Implementierungen einzuarbeiten.

Kapitel 3 klassifiziert und erläutert grundsätzliche Konzepte und Strategien für die partitionierte Lösung von physikalischen Fragestellungen. Insbesondere die spezielle Klasse der nichtüberlappenden Gebietszerlegungsverfahren mit einem dualen Schurkomplementansatz wird hierbei für lineare Probleme und zwei Teilgebiete genauer betrachtet. Der bekannteste Vertreter dieser Klasse ist das FETI-Verfahren [21], welches das Grundgerüst aller weiteren in dieser Arbeit betrachteten Methoden darstellt. Um die globale Stetigkeit der Lösung zwischen den Teilgebieten zu gewährleisten, werden beim FETI-Ansatz Nebenbedingungen am Interface verlangt. Die daraus resultierenden Sprungoperatoren, die die Konnektivität zwischen den Teilgebieten beschreiben, werden ebenfalls in diesem Kapitel betrachtet und anhand eines Beispiels aufgestellt. Dabei wird insbesondere auf das Vorgehen bei Kreuzungspunkten zwischen drei oder mehr Teilgebieten genauer eingegangen.

In **Kapitel 4** werden die Algorithmen der Gebietszerlegungsverfahren auf mehr als zwei Teilgebiete erweitert. Dabei wird neben dem Fall von gleichen Zeit-

schritten in allen Teilgebieten auch der Fall von unterschiedlichen Zeitschrittweiten betrachtet und die dadurch entstehenden Probleme erläutert.

Eine Erweiterung der Gebietszerlegungsverfahren auf nichtlineare Systeme erfolgt in **Kapitel 5**. Für die Lösung der nichtlinearen Gleichungen wird dazu das Newton-Raphson-Verfahren verwendet und das Vorgehen kurz beschrieben.

Die Herausforderungen bei der Implementierung der Gebietszerlegungsverfahren werden in **Kapitel 6** erläutert. Für einen Vergleich zwischen serieller und paralleler Implementierung wird in diesem Kapitel ebenfalls eine parallele Softwarelösung vorgestellt und die Synchronisationspunkte der einzelnen Teilgebiete während einer Zeititeration untersucht.

Eine Reihe von numerischen Anwendungsbeispielen demonstriert schließlich in **Kapitel 7** die spezifische Anwendbarkeit und Leistungsfähigkeit der untersuchten partitionierten Lösungsmethoden. Vor allem das Modellproblem des Einmassenschwingers wird verwendet, um die Methoden für unterschiedliche Zeitintegrationsverfahren und Zeitschrittweiten miteinander vergleichen zu können.

Die Arbeit schließt in **Kapitel 8** mit einigen zusammenfassenden Schlussfolgerungen, grundsätzlichen Bewertungen dynamischer Kopplungsmethoden und vorhandenen Problemen, welche in zukünftigen Arbeiten zu diesem Themengebiet untersucht werden könnten. Im **Anhang** finden sich letztendlich noch einige Ausführungen zu programmtechnischen Aspekten, insbesondere zu der verwendeten Software *MFEM* [1].

1 Gleichung der Strukturdynamik

Für die Untersuchung des physikalischen Verhaltens eines Bauteils muss dieses zunächst mit einem geeigneten mathematischen Modell abgebildet werden. Deshalb werden im Folgenden kurz die kontinuumsmechanischen Grundlagen der Strukturdynamik eingeführt.

1.1 Kinematik und Verzerrungen

Die *Kinematik* ist das Teilgebiet der Physik, in dem unterschiedliche Bewegungen, also Ortsveränderungen von Körpern gegenüber einem Bezugspunkt, untersucht werden. Um diese Deformationseigenschaften eines Körpers beschreiben zu können, wird dieser in einem Gebiet Ω mit den Randbedingungen $\partial\Omega$ im dreidimensionalen euklidischen Vektorraum betrachtet. Eine Konfiguration ϕ ist als eine eindeutige Abbildung $\phi : \Omega_0 \rightarrow \Omega$ definiert, bei der jeder Punkt $\mathbf{X} \in \Omega_0$ einer *Referenzkonfiguration* auf den aktuellen Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ der *Momentankonfiguration* abgebildet wird. Oft wird als Referenzkonfiguration die Ausgangskonfiguration ($t = 0$) verwendet, jedoch ist auch der Bezug auf eine beliebige Referenzkonfiguration möglich, die sich zu keiner Zeit einstellen muss.

Referenzkonfiguration

Momentankonfiguration

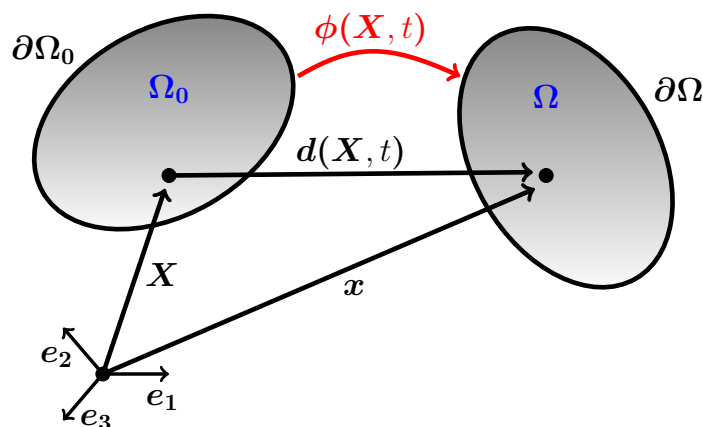


Abbildung 1.1: Kinematik eines Kontinuums.