

**Merle Baumgart**

**Fehler und Schwierigkeiten von Lernenden  
aus der Sekundarstufe I bei der Bearbeitung  
mathematischer Probleme**

**Masterarbeit**

# BEI GRIN MACHT SICH IHR WISSEN BEZAHLT



- Wir veröffentlichen Ihre Hausarbeit, Bachelor- und Masterarbeit
- Ihr eigenes eBook und Buch - weltweit in allen wichtigen Shops
- Verdienen Sie an jedem Verkauf

Jetzt bei [www.GRIN.com](http://www.GRIN.com) hochladen  
und kostenlos publizieren



## **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

## **Impressum:**

Copyright © 2018 GRIN Verlag  
ISBN: 9783668820357

## **Dieses Buch bei GRIN:**

<https://www.grin.com/document/445075>

**Merle Baumgart**

**Fehler und Schwierigkeiten von Lernenden aus der  
Sekundarstufe I bei der Bearbeitung mathematischer  
Probleme**

## **GRIN - Your knowledge has value**

Der GRIN Verlag publiziert seit 1998 wissenschaftliche Arbeiten von Studenten, Hochschullehrern und anderen Akademikern als eBook und gedrucktes Buch. Die Verlagswebsite [www.grin.com](http://www.grin.com) ist die ideale Plattform zur Veröffentlichung von Hausarbeiten, Abschlussarbeiten, wissenschaftlichen Aufsätzen, Dissertationen und Fachbüchern.

### **Besuchen Sie uns im Internet:**

<http://www.grin.com/>

<http://www.facebook.com/grincom>

[http://www.twitter.com/grin\\_com](http://www.twitter.com/grin_com)

# Masterarbeit

Fehler und Schwierigkeiten von Lernenden aus der  
Sekundarstufe I bei der Bearbeitung mathematischer  
Probleme

**Abgabe:** 11.08.2018

**Vorgelegt von:** Merle Baumgart

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Einleitung</b> .....	<b>5</b>
<b>1. Theoretische Grundlagen</b> .....	<b>6</b>
1.1. Begriffsbestimmungen .....	6
1.1.1. Probleme und Problemlösen.....	6
1.1.2. Problemaufgaben und Routineaufgaben .....	6
1.2. Problemkategorien.....	7
1.3. Modelle des Problemlösens .....	8
1.3.1. Verlaufsmodell nach Pólya (1949) .....	9
1.3.2. Komponentenmodell nach Schoenfeld (1985).....	10
1.3.2.1. Heuristische Vorgehensweisen.....	11
1.3.2.2. Heuristische Hilfsmittel .....	13
<b>2. Problemlösen unter didaktischen Aspekten</b> .....	<b>15</b>
2.1. Problemlösen im Kontext von Lehren und Lernen.....	15
2.2. Ansatzpunkte und Methoden zur Förderung der Problemlösekompetenz.....	18
<b>3. Fehler und Schwierigkeiten beim Problemlösen als Ansatzpunkt</b> .....	<b>23</b>
3.1. Begriffsbestimmung Fehler .....	23
3.2. Fehlerarten nach Geering (1995) .....	24
3.3. Fehler im Mathematikunterricht .....	27
<b>4. Präzisierte Zielstellung der empirischen Fallstudie</b> .....	<b>28</b>
<b>5. Methodologisches Vorgehen</b> .....	<b>29</b>
5.1. Auswahl der Versuchspersonen .....	29
5.2. Auswahl der Probleme .....	31
5.3. Schülergemäße Lösungsmöglichkeiten .....	34
5.3.1. Schafweide einzäunen .....	34
5.3.2. Schneemänner schmelzen.....	37
5.4. Auswahl der Methoden .....	40
5.5. Erhebung der Daten / Durchführung.....	42

5.6. Weiterverarbeitung der Daten .....	43
5.7. Auswertung der Daten .....	45
<b>6. Analyse der Fehlerquellen beim Problemlöseprozess - Problem 1 .....</b>	<b>48</b>
6.1. Ausführliche Analysen.....	50
6.1.1. Zum Bearbeitungsgang von Irma .....	50
6.1.2. Zum Bearbeitungsgang von Kai.....	53
6.1.3. Zum Bearbeitungsgang von Franka.....	56
6.1.4. Zum Bearbeitungsgang von Finn.....	59
6.2. Überblick über weitere Problembearbeitungen .....	62
6.2.1. Zum Bearbeitungsgang von Alina .....	62
6.2.2. Zum Bearbeitungsgang von Kevin.....	64
6.2.3. Zum Bearbeitungsgang von Paula.....	66
6.2.4. Zum Bearbeitungsgang von Eduard .....	68
<b>7. Analyse der Fehlerquellen beim Problemlöseprozess - Problem 2 .....</b>	<b>69</b>
7.1. Ausführliche Analysen.....	69
7.1.1. Zum Bearbeitungsgang von Irma.....	69
7.1.2. Zum Bearbeitungsgang von Kai.....	71
7.1.3. Zum Bearbeitungsgang von Franka.....	74
7.1.4. Zum Bearbeitungsgang von Finn.....	77
7.2. Überblick über weitere Problembearbeitungen .....	80
7.2.1. Zum Bearbeitungsgang von Alina .....	80
7.2.2. Zum Bearbeitungsgang von Kevin.....	82
7.2.3. Zum Bearbeitungsgang von Paula.....	83
7.2.4. Zum Bearbeitungsgang von Eduard .....	84
<b>8. Zusammenfassung und mögliche didaktische Bedeutung der Befunde .....</b>	<b>85</b>
8.1. Hauptbefunde der empirischen Untersuchung .....	85
8.1.1. Zielstellung 1 .....	87
8.1.2. Zielstellung 2.....	92
8.1.3. Vorläufige didaktische Überlegungen.....	93
8.2. Weitere bedeutsame Befunde in Bezug auf Lehren und Lernen .....	95
<b>9. Fazit und Ausblick .....</b>	<b>97</b>

<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>100</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b> .....	<b>103</b>
<b>Anhang</b> .....	<b>105</b>
I. Transkript (Beispiele) und Aufzeichnungen der Versuchspersonen .....	105
II. Einverständniserklärungen (Musterbriefe).....	126

## Einleitung

---

*„Der Erwerb von Problemlösekompetenz ist eine der zentralen Forderungen der KMK-Bildungsstandards an einen zeitgemäßen Mathematikunterricht [...]“<sup>1</sup>*

Das Problemlösen im Mathematikunterricht gewinnt seit einiger Zeit immer mehr an Bedeutung. Ausgehend von Ergebnissen internationaler Vergleichsstudien, wie TIMSS und PISA, setzte die Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung 1997 neuartige Ziele für den Mathematikunterricht fest. Von großer Bedeutung ist nun nicht nur die Einbettung vielseitig offener und komplexer Aufgaben in den Unterricht. Im Vordergrund soll der Erwerb der allgemein mathematischen Kompetenzen (Lernstrategien und Lerntechniken) stehen, die für alle Ebenen des mathematischen Arbeitens relevant sind. Diese Kompetenzen und damit auch die hier vordergründig betrachtete Problemlösekompetenz befähigen Schülerinnen und Schüler dazu, die neuen Lernanforderungen bewältigen zu können.<sup>2</sup>

Diese Fallstudie wird die Bearbeitung von Problemen einer ausgewählten Lerngruppe untersuchen und feststellen, inwiefern und in welchen Situationen diese Schülerinnen und Schüler Fehler machen oder Schwierigkeiten haben. Das Ziel ist es diese Fehler und Schwierigkeiten mit Hilfe ausgewählter Methoden zu identifizieren und Unterrichtsmaßnahmen zu entwickeln, die diesen Fehlern vorbeugen und somit die Schülerinnen und Schüler beim Problemlöseprozess unterstützen. Bei der Lerngruppe handelt es sich um acht ausgewählte Schülerinnen und Schüler der achten Jahrgangsstufe einer Gesamtschule in Braunschweig.

Im Folgenden wird zunächst ein wissenschaftlicher Rahmen gesetzt. Die Bedeutung der Problemlösekompetenz im Mathematikunterricht und des Umgangs mit Problemen und deren Bearbeitung sowie die damit verbundenen Fehler und Schwierigkeiten stehen dabei im Vordergrund. Diese theoretische Grundlage ist auch für die Auswertung am Ende der Fallstudie von Bedeutung. Es folgt eine detaillierte Beschreibung des Vorgehens, sodass dieses auch für Außenstehende transparent wird. Nachdem die Analysen der Problembearbeitungen durchgeführt wurden, wird diese Arbeit durch die zusammenfassende Auswertung der Analysen und einen Ausblick abgerundet.

---

<sup>1</sup> Bruder & Collet 2011: S. 20.

<sup>2</sup> Vgl. NKM 2012.

# 1. Theoretische Grundlagen

---

## 1.1. Begriffsbestimmungen

### 1.1.1. Probleme und Problemlösen

Allgemein wird mit dem Problemlösen das Überführen eines Zustandes in einen anderen Zustand gemeint, bei dem vordergründig ist, eine Barriere überwinden zu müssen. Im Mathematikunterricht wird das Problemlösen zur Anforderungssituation, sodass dem Lernenden beim mathematischen Problemlösen eine Aufgabe oder Situation vorliegt, die von ihm zunächst als schwierig, ungewohnt oder sogar unlösbar wahrgenommen wird.<sup>3</sup>

Ein auf den Mathematikunterricht bezogenes Problem bedeutet für die Lernenden im Allgemeinen eine subjektiv schwierige Anforderungssituation, die zunächst nicht ohne weiteres lösbar ist und von dem Lernenden eine für ihn neue Herangehensweise erfordert. Gleichzeitig stehen den Problemen im Mathematikunterricht jedoch die Routineaufgaben gegenüber, sodass die Abgrenzung von Problemaufgaben zu diesen notwendig wird.<sup>4</sup>

### 1.1.2. Problemaufgaben und Routineaufgaben

Im Folgenden wird der Unterschied von Aufgaben und Problemen so bestimmt, dass in der nachfolgenden Arbeit nur zwischen Problemaufgaben und Routineaufgaben unterschieden werden muss.

Eine Problemaufgabe stellt im Mathematikunterricht eine Situation dar, die mit einer besonderen Anforderung an den Lernenden verbunden ist und von diesem (subjektiv) als kognitiv schwierig eingestuft wird. Für den Lernenden kann dieses Problem entweder spontan nicht bewältigbar oder schlicht ungewohnt sein, sodass eine individuell neue Lösung erforderlich wird.<sup>5</sup>

Routineaufgaben sind hingegen, wie der Name schon sagt, Aufgaben, bei denen ein Lösungsverfahren bereits bekannt und betraut ist. Für den Schüler oder die Schülerin ist bei einer Routineaufgabe keine Barriere zu überwinden und die Lösung der Aufgabe stellt in der Regel keine außergewöhnliche Schwierigkeit dar. Der Lernende kann bei diesen Aufgaben meist auf Erfahrungen zurückgreifen und bekannte Lösungswege und Mittel nutzen.<sup>6</sup>

---

<sup>3</sup> Vgl. Bruder & Collet 2011: S. 11.

<sup>4</sup> Vgl. Bruder & Collet 2011: S. 11.

<sup>5</sup> Vgl. Heinrich, Bruder & Bauer 2015: S. 279 f.

<sup>6</sup> Vgl. Heinrich, Bruder & Bauer 2015: S. 279 f.

Zusammengefasst ist eine Problemaufgabe in Bezug auf den Mathematikunterricht als eine „*individuell schwierige Aufgabe*“<sup>7</sup> zu betiteln, bei der eine Barriere zu überwinden ist. Routineaufgaben allgemein sollen im Gegensatz dazu eine „*Aufforderung zum Lernhandeln*“<sup>8</sup> bedeuten und vom Lernenden mit Hilfe bekannter Lösungswege ohne Schwierigkeiten lösbar sein.<sup>9</sup>

## 1.2. Problemkategorien

Generell lassen sich mathematische Probleme in verschiedene Kategorien unterteilen. Zunächst, historisch betrachtet, in gelöste und ungelöste Probleme, wobei sich die gelösten Probleme auf Problemlöseprozesse beziehen, die sich über einen längeren Zeitraum erstrecken. Die dabei gelösten Probleme beziehen sich zum Einen auf bisher ungelöste Probleme und somit neue bisher unentdeckte Lösungen und zum Anderen auf neue Lösungswege für Probleme die bereits gelöst sind. Die Definition eines Problems wird demnach erweitert um die Beschreibung einer Situation, die für Schülerinnen und Schüler eine mathematische Schwierigkeit darstellt. Schemata, Regeln, Formeln oder Verfahren, welche die Schülerinnen und Schülern normalerweise beim Lösen von Aufgaben im Mathematikunterricht anwenden, müssen beim Problemlösen durch Kreativität und logisches Denken ergänzt werden.<sup>10</sup>

Um mathematische Probleme zu kategorisieren, werden unterschiedliche Verhaltensweisen, welche das jeweilige Problem ansprechen, betrachtet. Damit verbunden sind auch viele Lernziele, die mit Hilfe der verschiedenen Problemtypen in den Vordergrund gebracht werden können. Um die Auswahl geeigneter Problemstellungen für den Mathematikunterricht zu erleichtern, werden diese in verschiedene Typen unterteilt. Bei der Auswahl eines Problems sollte daher besonders auf den Zusammenhang von Problemtyp und Lernziel geachtet werden.<sup>11</sup>

Nach Pólya (1979) und Kratz (1988) lassen sich Problemaufgaben nach der Art der dominierenden mathematischen Tätigkeit in folgende Typen einteilen<sup>12</sup>:

- *Bestimmungsaufgaben*: Bei diesen Problemaufgaben steht das Berechnen von Zahlen und Größen im Vordergrund. Außerdem zählt zu diesem Aufgabentyp auch das Konstruieren von Figuren, Größen und Körpern sowie das Bestimmen von unterschiedlichen Fällen, die zur Lösung einer Aufgabe entscheidend sind.

---

<sup>7</sup> Heinrich, Bruder & Bauer 2015: S. 279.

<sup>8</sup> Heinrich, Bruder & Bauer 2015: S. 279.

<sup>9</sup> Vgl. Heinrich, Bruder & Bauer 2015: S. 279 f.

<sup>10</sup> Vgl. Heinrich, Bruder & Bauer 2015: S. 281.

<sup>11</sup> Vgl. Heinrich, Bruder & Bauer 2015: S. 281.

<sup>12</sup> Die Autoren verwenden die Begriffe Aufgabe und Problem synonym. Wenn bei den nachfolgenden Ausführungen von einer Aufgabe die Rede ist, ist im Kontext dieser Arbeit eine Problemaufgabe gemeint.

- *Entscheidungsaufgaben*: Zu dieser Kategorie zählen Problemaufgaben, bei denen bewiesen oder überprüft werden muss. Auch die Bestimmung ob eine Aufgabe richtig und vollständig ist, zählt dazu.

- *Entdeckungsaufgaben*: Bei diesem Problemaufgabentyp handelt es sich um das Aufstellen von Vermutungen oder das Entdecken neuer Informationen und Interpretationen in Bezug auf den gegebenen Sachverhalt.

Auch formal- psychologisch ist es möglich Problemaufgaben zu unterscheiden. Dietrich Dörner (1976) hat eine Kategorisierung vorgenommen, welche besonders in der Mathematikdidaktik großen Einfluss genommen hat. Seine Unterscheidungen beziehen sich zum Einen auf die Klarheit der Ziele, zum Anderen auf den Bekanntheitsgrad der Lösungsmittel. Darauf aufbauend erweiterte Kleineberg (1979) in Anlehnung an Lenné (1969) die Ausführungen von Dörner (1976) und spricht von „(produktiven) Aufgaben“,<sup>13</sup> die er in drei Typen unterteilt<sup>14</sup>:

- *Entschlüsselungsaufgaben*: Problemaufgaben dieser Kategorie bauen auf bekannten Mitteln auf und fordern den Lernenden auf diese so zu kombinieren, dass ein logisches Ergebnis entsteht.

- *Geschlossene Denkaufgaben*: Hier sind nur die Hilfsmittel zur Lösungsfindung unbekannt und müssen geschickt gewählt werden. Es gibt dabei jedoch eine klare Problemstellung und ein festes Ziel.

- *Offene Denkaufgaben*: Bei diesem Problemtyp handelt es sich um Bearbeitungsprozesse mit offenem Ende. Der Zielzustand ist demnach unbekannt und für das Individuum selbst gestaltbar. Für den Lernenden besteht die Herausforderung darin, die bereits bekannten Faktoren geschickt zu kombinieren, um zu einem Ergebnis zu gelangen.

Für die Durchführung dieser Fallstudie werden vorrangig geschlossene Problemaufgaben, genauer geschlossene Bestimmungsaufgaben genutzt. Genauere Erläuterungen dazu finden Sie unter „Auswahl der Probleme“ in Kapitel 5.2.<sup>15</sup>

### 1.3. Modelle des Problemlösens

Für die Beschreibung von Problemlöseprozessen gibt es in der Literatur verschiedene Modelle. Eines der bekanntesten ist das Verlaufsmodell von Pólya, welches sich ausschließlich mit der Theorie zur Ausbildung eines Ablaufs beim Problemlösen beschäftigt. Ergänzend lässt sich hier das Komponentenmodell von Schoenfeld nutzen, da in diesem

---

<sup>13</sup> Heinrich, Bruder & Bauer 2015: S. 282.

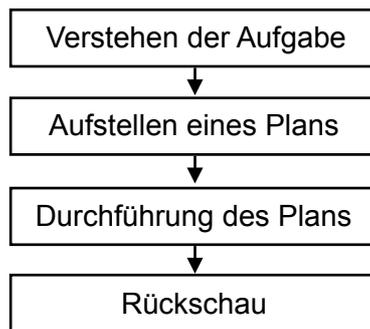
<sup>14</sup> Auch hier werden die Begriffe Aufgabe und Problem synonym verwendet.

<sup>15</sup> Aus Platzgründen werden die Ausführungen der beschriebenen Problemaufgabentypen nicht durch Beispiele ergänzt.

Modell auch qualitative Aspekte zur Beschreibung von Problemlöseaktivitäten berücksichtigt werden.<sup>16</sup>

### 1.3.1. Verlaufsmodell nach Pólya (1949)<sup>17</sup>

Nach dem ungarischen Mathematiker George Pólya werden beim Lösen von mathematischen Problemen vier aufeinander aufbauende Phasen durchlaufen.



**Abbildung 1:** Verlaufsmodell nach Pólya (1949).

Zunächst geht es um das „*Verstehen der Aufgabe*“<sup>18</sup>, wobei die Schülerinnen und Schüler die Bedingungen und Anforderungen des vorliegenden Problems herausarbeiten und erkennen. Das „*Ausdenken eines Plans*“<sup>19</sup> schließt daran an und beinhaltet den Entwurf von Ideen und Lösungsstrategien, die zur Lösung des Problems führen, sodass diese beim „*Ausführen des Plans*“<sup>20</sup> in allen Einzelheiten umgesetzt werden können. Nach der Durchführung des Plans wird der Problemlöseprozess laut Pólya durch eine „*Rückschau*“<sup>21</sup> und einen Ausblick abgeschlossen.<sup>22</sup>

Zu den einzelnen Phasen des Problemlösens äußert Pólya einige Fragen, die sich von dem Schüler oder der Schülerin während des Problemlösens gestellt werden können.

Beispielsweise könnte nach gesuchten und gegebenen Angaben und Werten der Problemaufgabe gefragt werden, um das Ziel der Aufgabe besser zu durchdringen. Während ein Plan zur Lösung des Problems gesucht wird, ist es möglich, nach verwandten Aufgaben und Problemen zu fragen um Ähnlichkeiten auf das aktuelle Problem zu übertragen. Wichtig scheint nach Pólya auch die ständige Überprüfung der eigenen Durchführung, sodass die Richtigkeit und Vollständigkeit des abschließenden Ergebnisses gesichert wird. Die Rückschau auf den Problemlöseprozess soll es dem Lernenden ermöglichen,

<sup>16</sup> Vgl. Pólya 1949.

<sup>17</sup> Pólya spricht in seinem Werk vorwiegend von Aufgaben, gemeint sind damit jedoch nach der Definition in dieser Arbeit Problemaufgaben.

<sup>18</sup> Pólya 1949: S. 19.

<sup>19</sup> Pólya 1949: S. 22.

<sup>20</sup> Pólya 1949: S. 26.

<sup>21</sup> Pólya 1949: S. 28.

<sup>22</sup> Vgl. Pólya 1949: S. 18-32.