

Herbert F. Berg

Mathematik, Statistik, Operations Research

Das mathematische Schmierbuch eines Fernstudenten

Fachbuch

BEI GRIN MACHT SICH IHR WISSEN BEZAHLT



- Wir veröffentlichen Ihre Hausarbeit, Bachelor- und Masterarbeit
- Ihr eigenes eBook und Buch - weltweit in allen wichtigen Shops
- Verdienen Sie an jedem Verkauf

Jetzt bei www.GRIN.com hochladen
und kostenlos publizieren



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Coverbild: designed by Freepik.com

Impressum:

Copyright © 2015 GRIN Verlag
ISBN: 9783656885382

Dieses Buch bei GRIN:

<https://www.grin.com/document/288094>

Herbert F. Berg

Mathematik, Statistik, Operations Research

Das mathematische Schmierbuch eines Fernstudenten

GRIN - Your knowledge has value

Der GRIN Verlag publiziert seit 1998 wissenschaftliche Arbeiten von Studenten, Hochschullehrern und anderen Akademikern als eBook und gedrucktes Buch. Die Verlagswebsite www.grin.com ist die ideale Plattform zur Veröffentlichung von Hausarbeiten, Abschlussarbeiten, wissenschaftlichen Aufsätzen, Dissertationen und Fachbüchern.

Besuchen Sie uns im Internet:

<http://www.grin.com/>

<http://www.facebook.com/grincom>

http://www.twitter.com/grin_com

Herbert F. Berg, Dipl. Kfm.(FH)

Mathematik, Statistik, Operations Research

-keine Hürden-

Das mathematische Schmierbuch

eines Fernstudenten

Vorwort zur überarbeiteten Neuauflage

Die erste Auflage hat ein gutes Echo erfahren. Gleichzeitig wurden auch die Schwächen und Fehler die beim Übertragen aus den Aufzeichnungen des Verfassers entstanden sind deutlich. Mehrfaches Korrekturlesen hat die zum Teil gravierenden Fehler nicht verhindert.

Gleichzeitig angeregt durch die berechtigte Kritik wurde auch eine neue Formattierung durchgeführt, die die einzelnen Kapitel deutlicher voneinander unterscheidet und damit nicht nur zum besseren Auffinden der Kapitel führt sondern auch gerade beim systematischen Nachschlagen Erleichterung bietet.

An dieser Stelle soll auch Dank gesagt werden an die Professoren der Hochschule Wismar die mir während meines Studiums mit viel Verständnis begegnet sind und mir die Freude an einem Studium verdeutlichten.

Dank dem Fachschaftsrat der Fernstudenten Danilo Kleefeldt der sich der Mühe unterzog und das „Schmierbuch“ einer kritischen Betrachtung unterzog, Fehler aufzeigte und Vorschläge zur Verbesserung des Inhaltes und der Gestaltung machte.

Ein besonderer Dank gilt dem Grin Verlag und seinen Mitarbeitern, für seine Bereitschaft die Neuauflage zu begleiten.

Für gemachte Fehler bitte ich um Entschuldigung. Für das kritische Aufzeigen von evtl. immer noch enthaltenen Fehlern und Verbesserungsvorschläge bin ich dankbar.

Herbert F. Berg
herbert-f@bergkarlsruhe.de

Im August 2015

Vorwort

Mathematik, Operations Research, Statistik und die in diesen Fächern zu absolvierenden Klausuren sind im Allgemeinen die großen Angsthürden aller Studenten. Bei den Fernstudenten sicherlich besonders ausgeprägt, da die Fernstudenten in der Regel nach einigen Jahren Berufsausbildung mit zeitlichem Abstand zur Schule, in der sie je nach Schulsystem auch mit Mathematik im allgemeinen und Statistik oder Operations Research im speziellen nicht tiefgehend befasst waren, große Wissenslücken in diesen Fächern haben. Die Hochschulen tragen dieser Tatsache weitgehend dadurch Rechnung, dass sie im Grundstudium vor den Fächern Statistik und Operations Research, die Vorkurse Mathematik I und Mathematik II in die Studiengänge eingefügt haben. Trotz dieser Auffrischungsbemühungen der schulmathematischen Grundkenntnisse ist es nahezu unmöglich Lücken zu schließen, wenn eben diese Lücken auf dem Fehlen von Grundlagen basieren oder diese Grundlagen durch zeitlich großen Abstand zwischen Schule und Studium verschüttet sind.

Das Lernen und Verstehen von Mathematik, Statistik und Operations Research ist vergleichbar mit dem Erlernen einer Fremdsprache.

Erinnern wir, Babys hören zunächst die Wörter und Sätze, die die Eltern in der Kommunikation mit ihnen oder der Umwelt anwenden. Sie lernen dann diese Worte nachzusprechen und deren Sinn zu erfassen bzw. sie zu Sätzen zusammen zu fügen, sinngerecht anzuwenden und im fortgeschrittenen Alter auch zu schreiben. Eine wichtige Voraussetzung bei diesem Lernen ist, das große Vertrauen das Babys in ihre Eltern haben.

Genau so ergeht es uns beim Erlernen der Mathematik, Statistik und Operations Research. Wir hören und lesen für uns unbekannte Zeichen und Formeln. Wir müssen lernen, den Sinn der Zeichen und Formeln zu verstehen und die Formeln entsprechend der gestellten Aufgaben anzuwenden. Eine wichtige Voraussetzung dabei ist auch das richtige Lesen und Interpretieren der Aufgaben.

Aber auch hier kommt es für die Lernenden, die Studenten, darauf an, den lehrenden Professor(en)innen und Dozent(en)innen zu vertrauen. Mangelnde

Kenntnisse und daraus resultierend schlechte Klausurergebnisse sind nicht die Schuld der Lehrenden, wie es oft von Studenten empfunden wird. Es gilt hier, dass der Ruf einer(s) Professor(s)in oder einer(s) Dozent(es) in durch möglichst viele gute Absolventen gestärkt und hervorgehoben wird.

„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es also bald ganz etwas anderes.“¹

Basierend auf den eigenen Erfahrungen beim Fernstudium an der Hochschule Wismar möchte der Verfasser dieser Arbeit sein persönliches Erleben beim Erlernen der „Fremdsprachen“ Mathematik, Statistik und Operations Research, weitergeben. Alle Hilfsmittel zum Lernen, können das selbständige Erarbeiten von Übungsaufgaben, das Lesen einschlägiger Fachliteratur sowie das systematische Erarbeiten des Skriptes nur unterstützen. Dabei gilt auch in engem Kontakt mit der/dem verantwortlichen Professor(s)in oder Dozent(en)in Übungsaufgaben verstehen und lösen zu lernen. Es ist nicht Ziel dieser Arbeit ein Lehrbuch zu sein oder ein solches zu ersetzen. Es kann auch kein Ersatz für Skripte, Übungsaufgaben und Vorlesungen sein. Diese Arbeit entstand aus den vielen zusammengetragenen Lernunterlagen, Notizen, verarbeiteter Literatur und Aufzeichnungen des Verfassers. Beim Zusammentragen und Übertragen aus den Schmierbüchern (Kladden) und Studienunterlagen seiner Studienzeit ist dem Verfasser das Lied:

„...hoffentlich merkt keiner den Betrug.
denn das ist alles nur geklaut,
das ist alles gar nicht meine,
das ist alles nur geklaut,
doch das weiß ich nur ganz alleine,
das ist alles nur geklaut und gestohlen,
nur gezogen und geraubt.
Entschuldigung, das hab' ich mir erlaubt.“²

eingefallen.

¹ Johann Wolfgang von Goethe

² Musikband „die Prinzen“ *Alles nur geklaut*, Text Tobias Künzel, Leipzig, September 1993.

Tatsächlich ist es so, dass jede Formel, jede Gleichung, jeder Graph und jedes Wort in der mathematischen, wissenschaftlichen Literatur schon seit Generationen in jeder erdenklichen Weise dokumentiert wurde. Ein anschauliches Beispiel dazu bietet die Formel zum **Rangkorrelationskoeffizienten R** nach Spearman³

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n * (n^2 - 1)} \text{ mit } d_i = r_g(x_i) - r_g(y_i)^4$$

$$R = 1 - \frac{6 * \sum_{i=1}^N d_i^2}{N * (N^2 - 1)} \text{ mit } -1 \leq R \leq +1^5$$

$$r_{sp} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (R_i - R'_i)^2}{(n-1)n(n+1)}^6$$

$$r_s = 1 - \frac{6 * \sum_{i=1}^n (r_i - s_i)^2}{n(n^2 - 1)}^7$$

$$P = 1 - \frac{6 * \sum D_i^2}{n^3 - n} \text{ mit } D_i = R_{gx_i} - R_{gy_i}^8$$

Alle meinen das Gleiche und kommen zum gleichen Ergebnis. Um im Vergleich des Erlernens einer Sprache zu bleiben handelt es sich hier eben um die verschiedenen Dialekte.

Das Rad wird nicht neu erfunden sondern es wird versucht das Zusammengetragene aus der Sicht eines Studenten systematisch zu ordnen.

³ Charles Edward Spearman (* 10. September 1863 in London; † 17. September 1945 ebenda) war ein britischer Psychologe, der unter anderem durch seine 1904 publizierte *Zweifaktoretheorie der Intelligenz* bekannt wurde.

⁴ De.wikipedia.org/wiki/Rangkorrelationskoeffizient, abgerufen am 20.12.2014, 09:30 Uhr.

⁵ Müller G., Studienbrief, Statistik, Semester IV Diplom Fernstudiengang Grundständige Betriebswirtschaft, Auflage 3/2011, S.71, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, WINGS-Wismar International Graduation Service GmbH, Wismar, 2011

⁶ Bamberg G., Baur F., Krapp M., Statistik, 15. Überarbeitete Auflage, S.35, Oldenbourg Wissenschafts-verlag GmbH, München, Wien, 2009.

⁷ Bol G., Deskriptive Statistik, 6. überarbeitete Auflage, S.144, Oldenbourg Wissenschafts Verlag, GmbH München Wien, 2004.

⁸ Bourier G., Beschreibende Statistik, 8. überarbeitete Auflage, S.219, Gabler GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2010.

Auf das Nacharbeiten und die Wiedergabe von Musterklausuren sowie den Lösungen zu diesen Klausuren wurde weitgehend verzichtet, da diese Veröffentlichungen in nahezu allen Studenten-Plogs und Internet-Plattformen eingehend behandelt werden. Es wäre wenig hilfreich und würde dem Selbsterarbeiten des Vorlesungsstoffes des entsprechenden Studiengangs entgegenstehen.

In einzelnen Fällen wurde entsprechend den Aufzeichnungen des Verfassers dennoch die Lösung von Übungsaufgaben zur Verdeutlichung des Lösungsweges dokumentiert. Die Arbeit soll Hilfestellung beim Erinnern und wieder Auffrischen von Vergessenem, einmal Erlerntem, dienen. Deutlich zu erkennen, dass der Verfasser sich beim Lernen und niederschreiben des Stoffes an seinen Lehrbriefen entlang gearbeitet hat.

Im Übrigen gilt:

„Ob Mathe oder Muskeln um in Form zu bleiben helfen nur üben, trainieren und wiederholen.“⁹

Es gibt eine Vielzahl sehr guter Lehrbücher von hervorragenden Hochschul-lehrer(innen)n und Dozent(in)en die diesem Ziel dienen.

Die vom Verfasser dieser Arbeit genutzte Literatur ist im Literaturverzeichnis aufgeführt und empfohlen.

⁹ Partoll H., Wagner I., Fejes P., Mathe macchiato Analysis, 2. Auflage, S.43, Pearson Education, 2010.

Symbolverzeichnis

-Allgemeine Symbole-

$=$	ist gleich
$\neq$	ist ungleich
$a=b$	a ist gleich b
$a < b$	a ist kleiner als b
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
$a > b$	a ist größer als b
$a \geq b$	a ist größer oder gleich b
$\sum_{i=1}^n x_i$	$x_1+x_2+\dots+x_n$
$\prod_{i=1}^n x_i$	$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$
$\frac{dy}{dx} = f(x)$	1. Ableitung
$\frac{\partial y}{\partial x}$	1. Partielle Ableitung
$\int$	Integral
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	Grenzwert von $f(x)$
A'	Transponierte Matrix A
$\text{sgn}(x)$	Vorzeichen von x

-Symbole der Mengenlehre-

$\{a,b,c\}$	Menge, bestehend aus den Elementen a, b, und c
$x \in M$	x ist Element der Menge M
$x \notin M$	x ist nicht Element von M
$\{ \frac{x \in M}{x} \text{ hat die Eigenschaft } E \}$	Menge derjenigen Elemente von M, die die Eigenschaft E haben

$A \subset B$	A ist Teilmenge von M
$A \subseteq B$	A ist enthalten in oder gleich B
$A \not\subset B$	A ist nicht Teilmenge von M
$\emptyset$	Leere Menge
$\mathfrak{P}(M)$	Potenzmenge von M, d.h. Menge aller Teilmengen von M
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B
$\bar{A}$	Komplement von A
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der nicht negativen reellen Zahlen
(a,b)	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
$(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$
$[a,b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$
$ M $	Anzahl der Elemente von M

-Symbole der Aussagenlogik-

A	A ist eine Aussage, die wahr (w) oder falsch (f) sein kann
$v(A)$	$v(A)$ wird als Wahrheitswert der Aussage A bezeichnet; $v(A) = 1$ heißt, dass A wahr und $v(A) = 0$ falsch ist.
$\neg A$	Die Negation $\neg A$ (bzw. $\bar{A}$) der Aussage A ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch wenn A wahr ist.
$A \wedge B$	Die Konjunktion $A \wedge B$ ist wahr, wenn beide Aussagen wahr sind, und falsch, wenn wenigstens eine der Aussagen falsch ist.
$A \vee B$	Die Disjunktion $A \vee B$ ist wahr, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen wahr ist, und falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.
$A \Rightarrow B$	Die Implikation $A \Rightarrow B$ bedeutet: Wenn A wahr ist, dann ist B auch wahr. A wird als Voraussetzung (Prämisse), B als Folgerung (Konklusion) bezeichnet. $A \Rightarrow B$ ist nur dann falsch, wenn eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist.
$\exists$	„Es gibt“ (z.B.: $\exists x \in \mathbb{Q}: x^2 = 4$ heißt: Es gibt eine rationale Zahl x mit $x^2 = 4$)
$\forall$	„Für all“ (z.B.: $\forall x \in \mathbb{Q}: x^2 \geq 0$ heißt: Für alle rationalen Zahlen x gilt $x^2 \geq 0$).

-Symbole Statistik-

X bzw. Y	Merkmale
X bzw. Y	Zufallsvariablen (gegebenenfalls auch zugehörige Merkmale)
x_i bzw. y_i	Beobachtungswerte von X bzw. Y
$a_1, \dots, a_k$	realisierte Ausprägung des Merkmals x

$h(a_j)$	absolute Ausprägung a_j
$f(a_j)$	relative Häufigkeit von a_j
$H(x)$	kumulierte absolute Häufigkeitsverteilung
$F(x)$	kumulierte relative Häufigkeitsverteilung
$\bar{x}$	arithmetisches Mittel
s^2	mittlere quadratische Abweichung
s	Standardabweichung
r	Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient
Ω	Ergebnismenge
P	Wahrscheinlichkeitsmaß
$P(A B)$	bedingte Wahrscheinlichkeit
$f(x)$	Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte
$F(x)$	Verteilungsfunktion
$B(n;p)$	Binomialverteilung
$N(\mu;\sigma)$	Normalverteilung
$N(0;1)$	Standardnormalverteilung
$\phi(x)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
$E(X)$ bzw. μ	Erwartungswert der Zufallsvariablen X
$Var(X)$ bzw. σ^2	Varianz der Zufallsvariablen X
G	Grundgesamtheit
X_i	i -te Stichprobenvariable
$\bar{X}$	Stichprobenmittel
S^2	Stichprobenvarianz
S	Stichproben-Standardabweichung
$(x_1, \dots, x_n)$	Stichprobenergebnis

$f(x_1, \dots, x_n)$	Likelihoodfunktion
V_u bzw. V_o	untere bzw. obere Grenzen eines Konfidenzintervalls
V bzw. v	Testfunktion bzw. ihre Realisierung
H_0 bzw. H_1	Nullhypothese bzw. Alternativhypothese
α	Signifikanzniveau
B	Verwerfungsbereich eines Tests
$g(\vartheta)$	Gütefunktion

-Symbole Operation Research-

0	Nullvektor
$<, \leq$	kleiner, kleiner oder gleich
$> \geq$	größer, größer oder gleich
$a \gg b$	a wesentlich größer als b
$a < b$	a schlechter als b
$a \sim b$	a gleichwertig zu b
$a \succ b$	a besser als b
$a \succeq b$	a besser oder gleichwertig zu b
$a \lesssim b$	a ungefähr gleich b oder möglichst nicht größer als b
$ a $	Betrag von a := $\begin{cases} a, & \forall \leq 0 \\ -a, & \forall < 0 \end{cases}$
$\lceil a \rceil$	kleinste ganze Zahl größer oder gleich a
$\lfloor a \rfloor$	größte ganze Zahl kleiner oder gleich a
$(a; b)$	offenes Intervall von a bis b, $a < b$
$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall
$\in$	Element von
$\notin$	nicht Element von

$:=$	definitionsgemäß gleich (Wertzuweisung im Verfahren)
B	Basis
B^{-1}	Basisinvers
B, N	Menge der Binären bzw. der natürlichen Zahlen
R, R_+, R^n	Menge der reellen, nichtnegativen ganzen bzw. n-elementigen reellen Zahlen, n-dimensionaler euklidischer Raum
R^+, R^-	Menge der positiven, negativen reellen Zahlen
Z, Z_+	Menge der ganzen bzw. nichtnegativen ganzen Zahlen
$\odot^h$	Zuweisung, wobei h die Reihenfolge der Zuweisung bestimmt
$\emptyset$	leere Menge
∞	unendlich, wir definieren $\infty \pm p := \infty$ für $p \in R$
$i \in I$	i ist Element der Menge I
$I \subseteq J, I \subset$	I ist Teilmenge bzw. Echte Teilmenge von J
$I \cup J$	Vereinigung der Mengen I und J
$f: X \rightarrow R$	Abbildung f, die jedem Element von X einen Wert aus R zuordnet
$\min\{a_{ij} \mid i = 1, \dots, m\}$	Minimum aller $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$
$ \delta , I $	Absolutbetrag von δ , Mächtigkeit der Menge I
$A=(a_{ij})$	Koeffizienten Matrix
$b=(b_1, \dots, b_m)$	Vektor der rechten Seiten
$c=(c_1, \dots, c_n)$	Vektor der Zielkoeffizienten
$c_{ij}=c(i,j)=c[i, j]$	Kosten (Länge, Zeit, etc.) auf Pfeil (i,j) bzw. auf Kante $[i, j]$
$c(w)$	Länge des Weges
$C(G)=(c_{ij})$	Kostenmatrix des Graphen G

E	Kanten- oder Pfeilmenge
$E(x)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen x
$F(.)$	etwa $F(x)$, verwendet für Zielfunktions(-wert)
$G=[V, E]$	ungerichteter, unbewerteter Graph
$G=(V, E)$	ungerichteter, unbewerteter Graph
GE, ME, ZE	Geldeinheit(en), Mengeneinheit(en), Zeiteinheit(en)
g_i	Grad des Knotens i (in ungerichteten Graphen)
$h_i; h_{ij}$	nicht negativ gebrochener Anteil, $0 \leq h_i, h_{ij} < 1$
H_i	Hilfsvariable
I	Einheitsmatrix
m bzw. n	Anzahl der Restriktionen bzw. Variablen
M	hinreichend große Zahl für fiktive Bewertungen
N	Nichtbasismatrix
$N(i)$	Menge der Nachfolger des Knotens i
$NB(i)$	Menge der Nachbarn des Knotens i
$n!$	n Fakultät mit $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, n \in \mathbb{N}; 0! := 1$
$S[1..n]$	eindimensionales Feld der Länge n
$\prod_{i=1}^n a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$
$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$\int_a^b$	bestimmtes Integral in den Grenzen a und b
$\frac{\partial F}{\partial x}$	Ableitung von F nach x
$\lim_{h \rightarrow 0} x_h$	Limes von x_h für h gegen 0
$P(A/B)$	Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A eintritt, wenn B bereits eingetreten
T	Baum

V	Knotenmenge
$V(i)$	Menge der Vorgänger des Knotens i
$\mathbf{X}$	wird vorwiegend als Vektor von Variablen x_j bzw. X_{ij} , etwa $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})$, verwendet
$\{x \mid \dots\}$	Menge aller x , für die gilt...
∇F	Gradient der Funktion F
X	kartesisches Produkt
$x_j; \bar{x}_i$	primale Struktur-/Schlupfvariable
$x/y/z$	3-Tupel
$y_i; \bar{y}_i$	duale Struktur-/Schlupfvariable
Z^*	aktuelle Zielfunktionswerte einer Basis $\mathbf{B}$
Z^0	optimale Zielfunktionswerte einer primal und dual zulässigen, optimalen Basis $\mathbf{B}$
Δz_j	Kriteriums Element
□	Ende Beispiel
■	Ende Beweis

Formelverzeichnis

Algebra

Rationale Zahlen

Dezimaldarstellung:

Natürliche Zahlen: $x = \sum_{i=0}^k c_i 10^i \quad k \in \mathbb{N}_0, c_k \neq 0$

Ganze Zahlen: $x = \pm \sum_{i=0}^k c_i 10^i \quad k \in \mathbb{N}_0$

Rationale Zahlen: $x = \sum_{i=-\infty}^k c_i 10^i \quad k \in \mathbb{Z}, c_k \neq 0$, wobei die Anzahl der Summanden (Dezimalstellen) entweder endlich ist (endlicher Dezimalbruch) oder sich eine endliche Folge von Ziffern unendlich oft wiederholt (periodischer Dezimalbruch).

Komplexe Zahlen

Grundlegende Definitionen

Rechenregeln für komplexe Zahlen

Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ und $w = c + di \in \mathbb{C}$ gilt:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i \quad \text{Addition}$$

$$z - w = (a - c) + (b - d)i \quad \text{Subtraktion}$$

$$\lambda a + \lambda bi \quad \text{Multiplikation mit einer reellen Zahl}$$

$$z * w = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad \text{Multiplikation}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \text{ falls } c^2 + d^2 > 0 \quad \text{Division}$$

Für das Rechnen mit Beträgen komplexer Zahlen gilt:

$$|z * w| = |z| * |w| \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0) \quad |\bar{z}| = |z|$$

Ganzzahlige Potenzen

Rechenregeln für Potenzen

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ und $r, s \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a^r a^s = a^{r+s} \quad (a^r)^s = a^{rs} = (a^s)^r \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} = (ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r b^{-r}$$

$$(abcd)^r = a^r b^r c^r d^r \quad a^n a^{-n} = a^0 = 1$$

Speziell für Zehnerpotenzen gilt:

$$10^0 = 1 \quad 10^n = \underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ Nullen}}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0.00 \dots 01}_{n \text{ Nullen}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Achtung: $(a + b)^r \neq a^r + b^r$ im Allgemeinen

Wichtige Regeln der Algebra

Grundlegende Gesetze

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a$

Assoziativgesetz der Addition:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

Null ist neutrales Element der Addition: $a + 0 = 0 + a = a$

-a ist invers zu a bezüglich Addition: $a + (-a) = 0$

Kommutativgesetz der Multiplikation: $ab = ba$

Assoziativgesetz der Multiplikation: $(ab)c = a(bc) = abc$

1 ist neutrales Element der Multiplikation: $1 * a = a * 1 = a$

a^{-1} ist invers a bezüglich Multiplikation:

$$aa^{-1} = a^{-1}a = \frac{a}{a} = 1 \text{ für } a \neq 0$$

Rechnen mit Minuszeichen:

$$-a = (-1) * a = a * (-1) \quad -(-a) = a$$

Rechnen mit Minuszeichen: $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ $0 - ab = -ab$ $(-a)(-b) = ab$

Distributivgesetz oder Ausklammern: $a(b + c) = ab + ac$

Distributionsgesetz: $(a + b)c = ac + bc$

Multiplikation mit Null: $a * 0 = 0 * a = 0$

Produkt Null, wenn ein Faktor Null: $a * b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0$

Division der Null: $a \neq 0 \Rightarrow \frac{0}{a} = 0$

Division durch Null nicht erlaubt: $\frac{a}{0}$ nicht definiert

Quotient Null, wenn Zähler Null: $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ und } b \neq 0$

Binomische Formel

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Regeln für Brüche

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt, wenn alle Nenner $\neq 0$ sind:

Erweitern eines Bruches: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad (c \neq 0)$

Kürzen eines Bruches: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$

Vorzeichenregel: $\frac{-a}{-b} = \frac{(-1)a}{(-b)b} = \frac{a}{b}$

Vorzeichenregel: $-\frac{a}{b} = (-1)\frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{(-1)(-a)}{-b}$

Addition von Brüchen mit gleichem Nenner: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Subtraktion von Brüchen mit gleichem Nenner: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Addition von beliebigen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a*d+b*c}{b*d}$

Subtraktion von beliebigen Brüchen: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a*d-b*c}{b*d}$

Addition/Subtraktion eines Bruches zu einer Zahl: $a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$

Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl: $a * \frac{b}{c} = \frac{a*b}{c} = \frac{a}{c} * b$

Multiplikation zweier Brüche: $\frac{a*c}{b*d} = \frac{a*c}{b*d}$

Division zweier Brüche=Multiplikation mit dem Kehrwert:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{a*d}{b*c}$$

Division eines Bruches durch eine Zahl: $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{(\frac{a}{b})}{c} * \frac{a}{\frac{a}{(bc)}} = \frac{a}{bc}$

Division einer Zahl durch einen Bruch: $\frac{a}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{(\frac{c}{d})} = \frac{a*d}{c} = \frac{ad}{c}$

Rechenregel für Quadratwurzeln: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \quad (b > 0)$$

beachten: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

beachten: $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$, aber $\sqrt{a^2} = |a| \geq 0$

Rechenregel für n-te Wurzel: Für $n, m \in \mathbb{N}$ und $a, b > 0$ gilt:

$$\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = a^{1/(m*n)}$$

Rechenregel für Potenzen mit gebrochenen Exponenten:

Für $a > 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{a})^p = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Rechenregeln für Wurzeln aus Potenzen mit rationalen Exponenten:

Für $a, b > 0, n, m \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Q}$ gilt: $\sqrt[n]{a^r} * \sqrt[m]{a^s} = \sqrt[nm]{a^{rm+sn}}$

$$\frac{\sqrt[n]{a^r}}{\sqrt[m]{a^s}} = \sqrt[nm]{a^{rm-sn}}$$

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^r})^s} = \sqrt[nm]{a^{rs}}$$

$$\sqrt[n]{a^r} * \sqrt[n]{b^r} = \sqrt[n]{(ab)^r}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^r}}{\sqrt[n]{b^r}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^r}$$

Rechenregel für Potenzen mit reellen Exponenten:

Für $ab > 0, r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^r a^s = a^{r+s} \quad (a^r)^s = a^{rs} = (a^s)^r \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} = \frac{1}{a^{s-r}} \quad (ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r b^{-r} \quad ab^r = a(b^r) \quad -a^r = (a^r) \quad a^{b^r} = a^{(b^r)} \\ = (a^b)^r$$

$$a^r = a^s \Leftrightarrow (r = s \text{ oder } a = 1) \quad a^r = b^r \Leftrightarrow (a = b \text{ oder } r = 0) \quad a^r > 0$$

Erlaubte Umformungen einer Gleichung:

Es sei D_G die Definitionsmenge einer Gleichung und $c \in \mathbb{R}$ oder ein auf D_G definierter algebraischer Ausdruck. Dann gilt:

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

$$a =$$

$$b \Leftrightarrow a - c = b - c$$

$$a = b \Leftrightarrow$$

$$ac = bc$$

$$a = b \Leftrightarrow \frac{a}{c} =$$

$$\frac{b}{c}$$

$$c \neq 0$$

$$a = b \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

$$a =$$

$$b \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{c}{b}$$

$$a, b, c \neq 0$$

$$a = b \Leftrightarrow d^a = d^b$$

$$a =$$

$$b \Leftrightarrow \exp(a) = \exp(b)$$

$$d \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

$$a = b \Leftrightarrow \log_d a = \log_d b$$

$$d \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

$$a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$$

$$b \Leftrightarrow a^n = b^n$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$$

$$a =$$

$$a = b \Leftrightarrow$$

$$n \in \mathbb{N}, n \text{ ungerade}$$

$$a = b \Leftrightarrow a^c = b^c$$

$$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a, b > 0$$

$$a^n = b^n \Leftrightarrow a = b \text{ oder } a = -b$$

$$n \in \mathbb{N}, n \text{ gerade}$$

Wenn

$$a = a^* \text{ und } b = b^* \text{ allgemeingültig sind, so gilt } a = b \Leftrightarrow a^* = b^*.$$

$$a * b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

$$a_1 *$$

$$a_2 * \dots * a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \vee a_2 = 0 \vee a_n = 0$$

Lösung der Linearen Gleichung:

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \neq$$

$$0: ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a =$$

$$0, b = 0: ax + b = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$a = 0, b \neq$$

$$0: ax + b = 0 \text{ ist nicht lösbar.}$$

$$a \neq c: ax +$$

$$b = cx + d \Leftrightarrow (a - c)x = d - b \Leftrightarrow x = \frac{d-b}{a-c}$$

Rechenregeln für Matrizenmultiplikation

Es seien A, B und C Matrizen. Unter der Voraussetzung, dass alle Produkte definiert sind, gilt:

Assoziativgesetz:

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

linksseitiges Distributivgesetz:

$$A(B+C) = AB+AC$$

rechtsseitiges Distributivgesetz:

$$(A+B)C = AC+BC$$

Satz des Pythagoras:

$$x = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Sinussatz:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{1}{2r}$$

Cosinus Satz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (= \text{verallgemeinerter Pythagoras})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Tangenssatz:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan \frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan \frac{\alpha+\gamma}{2}}{\tan \frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

Fläche:

$$F = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2}$$

Winkelsumme:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi$$

Statistik**Univariate Datenanalyse- Gruppierte Daten****Häufigkeitsverteilung:**

Absolute Häufigkeit: $\sum_{i=1}^k h_i = N$

Relative Häufigkeit: $f_i = \frac{h_i}{N} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \text{ mit } \sum_{i=1}^k f_i = 1$

Absolute Summenhäufigkeit:

$$H_i = h_1 + \dots + h_i = \sum_{j=1}^i h_j \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Relative Summenhäufigkeit:

$$F_i = f_1 + \dots + f_i = \sum_{j=1}^i f_j \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Absolute Summenhäufigkeit:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_1 \\ H_i & \text{für } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1 & \text{für } x \geq x_k \end{cases}$$

Verteilungsfunktion

(relative Summenhäufigkeitsfunktion):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_1 \\ F_i & \text{für } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1 & \text{für } x \geq x_k \end{cases}$$

Lageparameter:

Modalwert (Modus):

$$x_D = x_i \text{ mit } f_i \rightarrow \text{Max!}$$

Arithmetischer Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i * h_i = \sum_{i=1}^k x_i * f_i$$

Geometrischer Mittelwert:

(Ø Wachstumsfaktor)

$$x_G = \sqrt[N]{x_1 * x_2 * \dots * x_N}$$

Additionssatz für Mittelwerte:

$$\bar{x} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

Median:

$$x_Z = \begin{cases} x_{(k)} & \text{falls } 0,5 * N < k < 0,5 * N + 1 \text{ und } k \in Z \\ \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2} & \text{falls } 0,5 * N \end{cases}$$

Quantil :

$$x_p =$$

$$\begin{cases} x_{(k)} & \text{falls } p * N \notin Z \text{ mit: } p * N < k < p * N + 1 \text{ und } k \in Z \\ \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2} & \text{falls } p * N \in Z \text{ mit: } k = p * N \end{cases}$$

Streuungsparameter

Spannweite (Range) R: $R = x_{max} - x_{min}$

Quartilsabstand Q: $Q = x_{0,75} - x_{0,25}$

Variationskoeffizient

(relative Streuung): $V = \frac{s_x}{\bar{x}}$

Standartabweichung: $s_x = \sqrt{s_x^2}$

Varianz:
$$s_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 * h_i$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^2 * h_i - \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 * f_i - \bar{x}^2$$

Varianz der Grundgesamtheit:
$$s^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2} + \frac{N_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + N_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{N_1 + N_2}$$

Relative Konzentration

Konzentrationskoeffizient:
$$p_i = \frac{x_i * h_i}{\sum_{j=1}^k x_j * h_j} = \frac{x_i * h_i}{N * \bar{x}} = \frac{x_i * f_i}{\bar{x}}$$

Konzentrationsmaß:
$$p_i = p_1 + \dots + p_i = \sum_{j=1}^i p_j$$

Fläche unter der Lorenzkurve:
$$A(L) = \sum_{i=1}^k \frac{P_{i-1} + P_i}{2} * f_i \text{ mit } P_0 = 0$$

Lorenzfläche:
$$A = 0,5 - A(L)$$

Gini-Koeffizient:
$$G = \frac{0,5 - A(L)}{0,5}$$

Univariate Datenanalyse Klassierte Daten

Häufigkeitsverteilung:

Absolute Klassenhäufigkeit:
$$\sum_{i=1}^k h_i = N (i = 1, 2, \dots, k)$$

Relative Häufigkeit:
$$f_i = \frac{h_i}{N} (i = 1, 2, \dots, k) \text{ mit } \sum_{i=1}^k f_i = 1$$

Häufigkeitsdichte:
$$h_i^* = \frac{h_i}{\Delta x_i} \Delta x_i = \text{Klassenbreite}$$

Absolute Summenhäufigkeit:

$$H_i = h_1 + \dots + h_i = \sum_{j=1}^i h_j \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

Relative Summenhäufigkeit:

$$F_i = f_1 + \dots + f_i = \sum_{j=1}^i f_j \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Absolute Summenhäufigkeitsfunktion:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_1^u \\ H(x_i^u) + \frac{h_i}{\Delta x_i} * (x - x_i^u) & \text{für } x_i^u \leq x < x_i^0 \\ 1 & \text{für } x \geq x_k^0 \end{cases}$$

Relative Summenhäufigkeitsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_1^u \\ H(x_i^u) + \frac{(x-x_i^u)}{\Delta x_i} * f_i & \text{für } x_i^u \leq x < x_i^0 \\ 1 & \text{für } x \geq x_k^0 \end{cases}$$

Lageparameter

Modalwert (Modus):
$$x_D = \frac{x_i^u + x_i^0}{2} = x_i' \text{ mit } f_i^* \rightarrow \text{Max!}$$

Arithmetischer Mittelwert:
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i' * h_i = \sum_{i=1}^k x_i' * f_i$$

Geometrischer Mittelwert:
$$x_G = \sqrt[N]{x_1 * x_2 * \dots * x_N}$$

Additionssatz für Mittelwerte:
$$\bar{x} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

Median:
$$F(x_z) = F(x_i^u) + \frac{f_i}{\Delta x_i} * (x_z - x_i^u) = 0,5$$

$$\Leftrightarrow x_z = x_i^u + \frac{0,5 - F(x_i^u)}{f_i} * \Delta x_i$$

Quantil:
$$x_p = x_i^u + \frac{p - F(x_i^u)}{f_i} * \Delta x_i$$

Streuungsparameter

Spannweite (Range) R: $R = x_k^0 - x_1^u$

Quartilsabstand: $Q = x_{0,75} - x_{0,25}$

Standartabweichung: $s_x = \sqrt{s_x^2}$

Variationskoeffizient (relative Streuung): $V = \frac{s_x}{\bar{x}}$

Varianz: $s_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i' - \bar{x})^2 * h_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i'^2 * h_i - \bar{x}^2$

Varianz der Grundgesamtheit :

$$S^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2} + \frac{N_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + N_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{N_1 + N_2}$$

Relative Konzentration:

Konzentrationskoeffizient: $p_i = \frac{x_i' * h_i}{\sum_{j=1}^k x_j' * h_j} = \frac{x_i' * h_i}{N * \bar{x}} = \frac{x_i' * f_i}{\bar{x}}$

Konzentrationsmaß: $P_i = p_1 + \dots + p_i = \sum_{j=1}^i p_j$

Gini-Koeffizient: $G = \frac{0,5 - A(L)}{0,5}$

Lorenzfläche: $A = 0,5 - A(L)$

Fläche unter der Lorenzkurve (AL):

$$A(L) = \sum_{i=1}^k \frac{P_{i-1} + P_i}{2} * f_i \text{ mit } P_0 = 0$$

Multivariate Datenanalyse

Zweidimensionale Häufigkeitsverteilung

Zeilensumme: $h_{i.} = \sum_{k=1}^n h_{ik} \ (i = 1, 2, \dots, m)$

Spaltensumme: $h_{.k} = \sum_{i=1}^m h_{ik} \ (k = 1, 2, \dots, n)$

Summe der Randhäufigkeiten:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n h_{ik} = \sum_{i=1}^m h_{i.} = \sum_{k=1}^n h_{.k} = N$$

Relative Häufigkeiten: $f_{ik} = \frac{h_{ik}}{N}$ bzw. $f_{i.} = \frac{h_{i.}}{N}$ bzw. $f_{.k} = \frac{h_{.k}}{N}$

Summen der relativen Häufigkeiten:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n f_{ik} = \sum_{i=1}^m f_{i.} = \sum_{k=1}^n f_{.k} = 1$$

Zusammenhang von nominalen Merkmalen

Bedingte relative Häufigkeiten:

$$f(y_k | x_i) = \frac{h_{ik} \leftarrow \text{absolute Häufigkeiten von } x_i \text{ und } y_k}{h_{i.} \leftarrow \text{Randhäufigkeiten von } x_i}$$

Statistische Unabhängigkeit:

$$f(y_k | x_1) = f(y_k | x_2) = \dots = f(y_k | x_m) \text{ für } k = 1, 2, \dots, n$$

wegen
$$f(y_k | x_i) = \frac{h_{ik}}{h_{i.}} = f_{.k} = \frac{h_{.k}}{N}$$

gilt bei Unabhängigkeit
$$h_{ik} = \frac{h_{i.} \cdot h_{.k}}{N} \text{ bzw. } f_{ik} = f_{i.} \cdot f_{.k}$$

Maß von *Cramér*

$$C = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \frac{\chi^2}{\min((m-1);(n-1))}}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{(h_{ik} - \frac{h_{i.} \cdot h_{.k}}{N})^2}{\frac{h_{i.} \cdot h_{.k}}{N}} = N \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{h_{ik}^2}{h_{i.} \cdot h_{.k}} \right) - 1 \right]$$

Zusammenhang von metrischen Merkmalen

Kovarianz:

$$\text{Cov}(X; Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Berechnung mit absoluten bzw. relativen Häufigkeiten bei zweidimensionaler Häufigkeitsverteilung

Gruppierte Werte:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})(y_k - \bar{y}) * h_{ik} = \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})(y_k - \bar{y}) * f_{ik} &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n x_i * y_k * f_{ik} - \bar{x} * \bar{y} \end{aligned}$$

Klassierte Werte:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (x'_i - \bar{x})(y'_k - \bar{y}) * h_{ik} = \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (x'_i - \bar{x})(y'_k - \bar{y}) * f_{ik} &= \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n x'_i * y'_k * f_{ik} - \bar{x} * \bar{y} \end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient von Pearson/Bravais

$$r_{xy} = \frac{Cov(X, Y)}{S_x * S_y} \quad -1 \leq r_{xy} \leq 1$$

Berechnung der Regressionskoeffizienten

$$a_1 = \frac{Cov(X, Y)}{S_x^2} = r_{xy} * \frac{S_y}{S_x}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 * \bar{x}$$

Umformung ergibt: $\bar{y} = a_0 + a_1 * \bar{x}$

Regressionsgerade: $\hat{y} = a_0 + a_1 * X$

Residuum: $e_i = y_i - \hat{y}_i$

Bestimmtheitsmaß: $B^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2} = \frac{a_1^2 * s_x^2}{s_y^2} = 1 - \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{Cov(X, Y)^2}{s_x^2 * s_y^2}$

Zusammenhang von ordinalen Merkmalen

Rangkorrelationskoeffizient

$$d_i = R(x_i) - R(y_i)$$

$$R = 1 - \frac{6 * \sum_{i=1}^N d_i^2}{N * (N^2 - 1)} \quad \text{mit } -1 \leq R \leq +$$

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur überarbeiteten Neuauflage.....	II
Vorwort.....	III
Symbolverzeichnis.....	VII
Formelverzeichnis.....	XV
Inhaltsverzeichnis.....	XXIX
I Abbildungsverzeichnis.....	XXXIV
II Tabellenverzeichnis.....	XL
III Anlagenverzeichnis	XLI
IV Abkürzungsverzeichnis	XLXLII
Einführung	1
Kapitel A.....	3
1 Mathematik	5
1.1 Zahlen/ Arithmetik	5
1.2 Variablen, Operatoren, Ausdrücke	11
1.3 Geometrie.....	17
1.4 Funktionen, Koordinaten, Graphen	28
1.5 Gleichungen	44
1.6 Diskrete und stetige Wachsstumsvorgänge	54
1.7 Winkelfunktionen/Trigonometrie	61
1.8 Reihen.....	69

Kapitel B.....	73
2 Analysis.....	75
2.1 Differenzialrechnung.....	75
2.1.1 Ableitung als Funktion.....	81
2.1.2 Differenzationsregel.....	84
2.1.3 Tangenten und Normale	86
2.1.4 Extremwerte.....	90
2.1.5 Kettenregel.....	93
2.1.6 Ableitung als lineare Näherung.....	94
2.1.7 Ableitung des Produktes und des Quoienten.....	97
2.1.8 Kurvendiskussion ganzer Funktionen.....	99
2.1.9 Ableitung der Winkelfunktionen.....	102
2.1.10 Newton'sches Näherungsverfahren.....	106
2.1.11 Ableitung der Exponentialfunktion und des Logarithmus.....	108
2.1.12 Umkehrung der Kurvendiskussion.....	110
2.1.13 Interpolation.....	112
2.1.14 Regel von de l'Hospital.....	114
2.2 Integralrechnung.....	115
Kapitel C.....	123
3 Statistik.....	125
3.1 Beschreibung von Daten.....	126
3.2 Datenerhebung und Datenaufbereitung.....	127
3.2.1 Statistische Einheit und Statistische Masse.....	128
3.2.2 Klassifizierung der Merkmale.....	128
3.2.3 Datenverdichtung (Gruppierung und Klassifizierung).....	133
3.3 Eindimensionale Häufigkeitsverteilung.....	136