Nadeshda Botschkarewa

Theorie und Numerik von ausgewählten Verfahren der nichtlinearen Optimierung

Bachelorarbeit

GRIN

BEI GRIN MACHT SICH IHR
WISSEN BEZAHLT

- Wir veröffentlichen Ihre Hausarbeit,
  Bachelor- und Masterarbeit

- Ihr eigenes eBook und Buch -
  weltweit in allen wichtigen Shops

- Verdienen Sie an jedem Verkauf

Jetzt bei www.GRIN.com hochladen
und kostenlos publizieren

GRIN

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de/ abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlages. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Impressum:

Copyright © 2010 GRIN Verlag
ISBN: 9783656659709

Dieses Buch bei GRIN:

https://www.grin.com/document/274017

Nadeshda Botschkarewa

Theorie und Numerik von ausgewählten Verfahren der nichtlinearen Optimierung

GRIN Verlag

GRIN - Your knowledge has value

Der GRIN Verlag publiziert seit 1998 wissenschaftliche Arbeiten von Studenten, Hochschullehrern und anderen Akademikern als eBook und gedrucktes Buch. Die Verlagswebsite www.grin.com ist die ideale Plattform zur Veröffentlichung von Hausarbeiten, Abschlussarbeiten, wissenschaftlichen Aufsätzen, Dissertationen und Fachbüchern.

Besuchen Sie uns im Internet:

http://www.grin.com/

http://www.facebook.com/grincom

http://www.twitter.com/grin_com

Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

ulm university universität
uulm

Theorie und Numerik von ausgewählten Verfahren der nichtlinearen Optimierung

Bachelorarbeit

in Wirtschaftsmathematik

vorgelegt von
Botschkarewa, Nadeshda
am 30.08.10

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

1 Mathematische Grundlagen **3**
1.1 Grundlagen aus der Linearen Algebra 3
1.2 Definitionen und Bezeichnungen der Optimierungstheorie 4
1.3 Optimalitätsbedingungen 6
1.4 Das Konvergenzverhalten iterativer Verfahren 8

2 Quasi-Newton-Verfahren zur Lösung von unrestringierten Optimierungsproblemen **12**
2.1 Grundidee des Newton-Verfahrens 12
2.2 Idee des BFGS-Verfahrens 14
2.3 Algorithmus und Konvergenz 18
2.3.1 Lokales BFGS-Verfahren 18
2.3.2 Globalisiertes BFGS-Verfahren 19
2.4 Effizienzanalyse 26

3 Penalty-Verfahren anhand der quadratischen Penalty-Funktion **28**
3.1 Idee des Verfahrens und Konstruktion von Penalty-Funktionen 28
3.2 Algorithmus und Konvergenz 31
3.3 Effizienzanalyse 36

4 Penalty-Lagrange-Methode **37**
4.1 Exakte Penalty-Funktionen 38
4.2 Idee des Verfahrens und Konstruktion von Penalty-Lagrange-Funktionen . 40
4.3 Algorithmus und Konvergenz 41
4.4 Erweiterung auf Ungleichungsrestriktionen 45
4.5 Effizienzanalyse 49

5 Barriere-Verfahren anhand der logaritmischen Barriere-Funktion **53**
5.1 Idee des Verfahrens und Konstruktion von Barriere-Funktionen 54
5.2 Algorithmus und Konvergenz 56
5.3 Effizienzanalyse 59

6 Innere-Punkte-Verfahren **61**
6.1 Grundidee der Verfahren anhand linearer Probleme 63
6.1.1 Grundlagen der linearen Optimierung 64

6.1.2 Logarithmische Barriere, zentraler Pfad . . . 64
6.1.3 Anwendung des Newton-Verfahrens in Innere-Punkte-Verfahren . . 69
6.1.4 Allgemeiner Algorithmus . . . 73
6.2 Pfad-Verfolgungs-Verfahren und Konvergenz . . . 76
6.3 Grundzüge der primal-dualen Innere-Punkte-Verfahren für nichtlineare Probleme . . . 81
6.3.1 Barriere-Problem und gestörte Optimalitätsbedingungen nichtlinearer primaler Probleme . . . 82
6.4 Globalisierung des Verfahrens . . . 87
6.4.1 Backtracking-Methode für unrestringierte Probleme . . . 88
6.4.2 Backtracking-Schrittweitenbestimmung mit dem Filteransatz . . . 88
6.4.3 Algorithmus mit Korrekturschritten . . . 95

7 Numerische Fallstudie **97**
7.1 Implementierung . . . 97
7.2 Parameter . . . 98
7.3 Numerische Tests . . . 99

8 ANHANG **103**
A Anhang . . . 103
B Anhang . . . 105
C Anhang . . . 107

Abbildungsverzeichnis

2.1 Graphische Darstellung des Newton-Verfahrens 14
2.2 Rosenbrock-Funktion 25
2.3 Log-Rosenbrock-Funktion 25
2.4 Graphische Darstellung des Quasi-Newton-Verfahrens 26
2.5 Graphische Darstellung der Newton-und Quasi-Newton-Verfahren 27

3.1 Graphische Darstellung des Penalty-Verfahrens 30
3.2 Die Veranschaulichung einer Erhöhung von α im Penalty-Verfahren 31
3.3 Die Veranschaulichung des Abbruchskriteriums im Penalty-Verfahren . . . 31

4.1 Vergleich von quadratischer und l_1 Penalty-Funktion 39

5.1 Iterierten des quadratischen Penalty-Verfahrens und des Barriere-Verfahrens 54
5.2 Verlauf des Barriere-Verfahrens 56

6.1 Veranschaulichung eines Filters mit 7 Einträgen 92
6.2 Filter ohne Schranken 93
6.3 Obere Schranke für die Verletzung der Nebenbedingungen 93

7.1 Leistungsprofil der behandelten Verfahren 101

Tabellenverzeichnis

4.1 Numerisches Verhalten des quadratischen Penalty-Verfahrens 49
4.2 Numerisches Verhalten des Penalty-Lagrange-Verfahrens 49

5.1 Verschlechterung der Kondition im Barriere-Verfahren 61

7.1 Vergleich der Algorithme 100

8.1 Ausgaben der Penalty-Verfahren-Implementierung für das Testproblem 35 mit $\alpha_{k+1} = 5\alpha_k$ 103

8.2 Ausgaben der Penalty-Lagrange-Verfahren-Implementierung für das Testproblem 35 mit $\alpha_{k+1} = 5\alpha_k$ . . . 103
8.3 Ausgaben der Penalty-Verfahren-Implementierung für das Testproblem 35 mit $\alpha_{k+1} = 3\alpha_k$ . . . 104
8.4 Übersicht der Steuer-und Abbruchsparameter der implementierten Algorithmen . . . 105

Algorithmenverzeichnis

1 Lokales Newton-Verfahren . . . 13
2 Lokales inverses BFGS-Verfahren . . . 19
3 Allgemeines Abstiegsverfahren . . . 20
4 Globalisiertes inverses BFGS-Verfahren . . . 23

5 Penalty-Verfahren . . . 32

6 Penalty-Lagrange-Verfahren zur Lösung gleichungsrestringierter Probleme 43
7 Allgemeines Penalty-Lagrange-Verfahren . . . 48

8 Barriere-Verfahren . . . 57

9 Basis-Algorithmus der primal-dualen Innere-Punkte-Verfahren für lineare Probleme . . . 75
10 Zulässiges Pfad-Verfolgungs-Verfahren . . . 78
11 Basis-Algorithmus der primal-dualen Innere-Punkte-Verfahren . . . 87
12 Backtracking-Verfahren für unrestringierte Probleme . . . 88
13 Backtracking-Verfahren für restringierte Probleme . . . 91
14 Schrittweitenbestimmungs-Algorithmus mit einem Filteransatz . . . 94
15 Primal-duales Innere-Punkte-Verfahren . . . 95

Einleitung

Die Arbeit befasst sich mit der nichtlinearen Optimierung, die das Problem der Minimierung oder der Maximierung einer nichtlinearen Funktion unter Berücksichtigung einer endlichen Anzahl von Nebenbedingungen behandelt. Die Optimierung ist ein bedeutendes Anwendungsgebiet der Mathematik. Sie wird regelmäßig zur Unterstützung von Entscheidungsprozessen in Wirtschaft und Industrie verwendet. Wegen der wachsenden Leistungsfähigkeit moderner Rechner ist die Behandlung umfangreicher Optimierungsaufgaben aus der Praxis, die ohne dieses technischen Werkzeuges unmöglich wäre, ein Anwendungsgebiet der Numerik geworden.

Eine der bedeutenden Aufgaben der Numerik ist es, die Korrektheit von Algorithmen zu überprüfen, d.h. sicherzustellen, das unter gewissen Voraussetzungen an die Problemdaten tatsächlich die richtige Lösung bzw. eine Näherungslösung mit einer benötigten Lösungsgenauigkeit bestimmt wird. Diese Überprüfung soll mit mathematischen Techniken durchgeführt werden, d.h. am Ende steht ein formaler mathematischer Beweis, der den korrekten Ablauf eines Algorithmus sicherstellt.
Hat man sich von der einwandfreien Funktion eines Algorithmus überzeugt, so stellt sich die Frage nach der Effizienz des Algorithmus, d.h. es muss der Rechenaufwand pro Näherungslösung und die Konvergenzgeschwindigkeit gegen die exakte Lösung untersucht werden. Die beiden Eigenschaften liefern Informationen darüber, wieviel Iterationen der Algorithmus benötigt, um eine Nährungslösung auf eine bestimmte Genauigkeit zu berechnen und wieviel Zeit jede Iteration der Berechnung in Anspruch nimmt.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit numerischen Verfahren zur Lösung nichtlinearer Optimierungsaufgaben. Es werden theoretische Grundlagen von mehreren Verfahren unter den Gesichtspunkten der Korrektheit und der Effizienz ausgearbeitet und durch Beispiele und mit Matlab R2008a erzeugten Abbildungen aufgelockert.

In dem folgenden einleitenden Kapitel sind Definitionen und Sätze aus Optimierungstheorie, Linearer Algebra, Analysis und Numerik zusammengestellt und Kriterien zur Konvergenzanalyse erklärt. Da die Lösung von drei der behandelten Verfahren auf die Lösung von sogenannten unrestringierten Problemen oder eines Gleichungssystems zurückgeführt wird, wird zuerst ein Newton-artiges Verfahren vorgestellt und wünschenswerte Eigenschaften, wie globale Konvergenz, hohe Konvergenzordnung des Verfahrens, erörtert. Im nächsten Kapitel wird das sogenannte Penalty-Verfahren anhand einer Penalty-

Funktion mit einem Algorithmus für eine numerische Behandlung vorgestellt und seine Konvergenzeigenschaften anhand der im ersten Kapitel erklärten Konvergenzkriterien analysiert. Die Nachteile des in dem Kapitel vorgestellten Verfahrens werden durch eine Anwendung von sogenannten exakten Penalty-Funktionen aufgehoben, was auch kurz erläutert wird. Auf der Grundlage des Penalty-Verfahrens wird die Penalty-Lagrange-Methode mit einer vollständigen algorithmischen Darstellung der theoretischen Herleitung vorgestellt und eine Konvergenzanalyse durchgeführt. Das sogenannte Barriere-Verfahren wird nach dem gleichen Schema vorgestellt, basierend auf der Idee und einigen im Rahmen des Barriere-Verfahrens getroffenen Aussagen wird eine Version aus der Klasse der Innere-Punkte-Verfahren erörtert. Diese Version bildet die mathematischen Grundlagen für den Open Source Solver IPOPT, der von Andreas Wächter und Lorez T. Biegler entwickelt wurde.

Den Schlußpunkt der Arbeit setzen numerische Fallstudien im letzten Abschnitt, wobei die Effizienz der Verfahren im Mittelpunkt der Untersuchung steht. Dabei wurde der IPOPT als ein Werkzeug zur Lösung von Optimierungsaufgaben mit dem Innere-Punkte-Verfahren eingesetzt. Alle anderen ausgearbeiteten Algorithmen wurden in der Programmiersprache C++ unter Verwendung der numerischen Bibliothek FLENS implementiert. Dies ermöglicht eine nahezu unveränderte Übertragung der mathematischen Notation der Algorithmen in ein aufgebautes Programm.
Der Inhalt der Arbeit basiert auf mehrere Literaturquellen, die in den entsprechenden Kapitel spezifiziert werden, wobei [7], [6] und [15] die Hauptquellen sind.