Walter Bühler

Musikalische Skalen bei Naturwissenschaftlern der frühen Neuzeit

Eine elementarmathematische Analyse

PL ACADEMIC RESEARCH

Musikalische Skalen bei Naturwissenschaftlern der frühen Neuzeit

Walter Bühler

Musikalische Skalen bei Naturwissenschaftlern der frühen Neuzeit

Eine elementarmathematische Analyse

PL ACADEMIC RESEARCH

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische
Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Umschlagabbildung:
Scheiben von Theophil Staden aus Harsdörffers
Philosophischen und Mathematischen Erquickstunden
Dritter Theil, Nürnberg 1653;
Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Museums
Spandovia Sacra in Berlin-Spandau.

ISBN 978-3-631-64430-0 (Print)
E-ISBN 978-3-653-03056-3 (E-Book)
DOI 10.3726/978-3-653-03056-3

PL Academic Research ist ein Imprint der Peter Lang GmbH.

Peter Lang – Frankfurt am Main · Bern · Bruxelles · New York ·
Oxford · Warszawa · Wien

www.peterlang.de

Inhalt

Einleitung

Sed utinam tam bene alibi, quam in Musica, Empiria ad Rationem reducari posset.

G. W. Leibniz, LBr 390, Bl. 90r.

Musikalische Elementarlehre und elementare Mathematik besitzen in Europa eine lange gemeinsame Geschichte. Ein wichtiger Teil der Theorie der musikalischen Skalen und Intervalle wird seit der Antike mit geometrischen und rechnerischen Begriffen und Verfahren formuliert. Weil die Musiktheorie heute zu den Kultur- oder Geisteswissenschaften gerechnet wird, mathematische Modellbildung jedoch in der Regel in einem naturwissenschaftlichen oder technischen Kontext stattfindet, entfaltet das Thema Mathematik und Musik auch heute noch eine besondere Faszination.

Der Hauptteil dieses Buches widmet sich der Frage, in welcher Weise und in welchem Umfang sich Newton, Leibniz, Henfling und Euler mit musikalischen Problemen beschäftigt haben. Der Leser wird damit zu einem historischen Ausflug in die Wissenschaftsgeschichte der frühen Neuzeit eingeladen, in der die moderne, an der Mathematik orientierte Physik entsteht und als dritter Partner das althergebrachte Zusammenspiel von Musiktheorie und Mathematik ergänzt.

Hinsichtlich der Geschichte der Musiktheorie beruht die Darstellung in weiten Teilen auf der Lektüre der gleichnamigen Bände, die im Auftrag des Staatlichen Instituts für Musikforschung in Berlin herausgegeben worden sind. Dabei verdanke ich besonders viele Anregungen den Aufsätzen von Frieder Zaminer[1] und von Mark Lindley[2]. Ein Blick in die Register dieser Bände macht deutlich, dass die vorliegende Arbeit keinesfalls den Anspruch erheben kann, alle Quellen zu berücksichtigen, die zum Thema gehören. Eine subjektive Auswahl ist unvermeidlich. Da durch die modernen Reproduktionsmöglichkeiten und durch die Digitalisierung der unmittelbare Zugang zu den Quellen erheblich erleichtert worden ist, habe ich mich zu dem Wagnis entschlossen, die originalen Quellen mit meinen eigenen Interpretationen in den Vordergrund zu stellen, obwohl ich gerade bei bisher unveröffentlichten Quellen nur vorläufige Transkriptionen und Übersetzungen bieten kann, die einer kritischen Nachprüfung bedürfen und deshalb einen umfangreichen Fußnotenapparat notwendig machen.

---

1 Zaminer 2006.

2 Lindley 1987.

Wer sich für die Frage interessiert, welche Positionen Mathematiker zu musiktheoretischen Fragen einnehmen, muss nach meiner Überzeugung auch zur Kenntnis nehmen, wie sie mit Skalen und Intervalle mathematisch umgehen. Die im Untertitel genannte elementarmathematische Ausrichtung stellt daher das zweite Wagnis dar, welches in dieser historischen Darstellung eingegangen wird. Rechenwege und mathematische Gedankengänge werden nicht vermieden, sondern bei Bedarf so in den Text integriert, wie es in den historischen Quellen zu diesem Thema auch der Fall ist. In Darstellungen unserer Zeit werden dagegen derartige Details eher in Fußnoten und Anmerkungen abgedrängt, weil sie einerseits als selbstverständlich oder sogar als trivial, andererseits aber auch als spröde, schwierig oder unanschaulich gelten. Wer sie dennoch stärker in den Vordergrund zu stellen wagt, geht heute hinsichtlich der Lesbarkeit ein beträchtliches Risiko ein. Außerdem werden dem Leser über die Fehler hinaus, die bei allen modernen Druckerzeugnissen unvermeidbar sind, auch noch die Rechenfehler zugemutet, die durch die zusätzliche Detailfreudigkeit bedingt sind.

Um der Lesbarkeit entgegen zu kommen, stelle ich die mathematischen Aspekte nicht in historischer Gestalt, sondern in moderner Form dar, wobei ich mich zugleich auf das Niveau der heutigen gymnasialen Schulmathematik beschränke. Zahlreiche Abbildungen, die in ihrer großen Mehrzahl neu erstellt worden sind, sollen die Gedankengänge durchsichtiger machen. In diesem Buch mit seinem mathematischen Schwerpunkt wird außerdem auf die genuin physikalischen Arbeiten von Newton, Leibniz und Euler zu akustischen Detailfragen bewusst nicht eingegangen. Ihr Beitrag zur Geschichte der modernen Akustik muss eigenständigen Untersuchungen überlassen bleiben. Ich beschränke mich hier auf die Darstellung der Koinzidenztheorie, soweit sie zum Verständnis historischer und musiktheoretischer Positionen notwendig ist.

Für manche Naturwissenschaftler und Mathematiker wird die Theorie der musikalischen Intervalle und Skalen eher fremd sein. Daher unternehme ich im ersten Abschnitt dieses Buches als drittes Wagnis den Versuch, auf der Basis gewisser historischer Sachverhalte und der elementaren Musiktheorie für die Darstellung der sehr unterschiedlichen mathematischen Modelle, die in diesem Buche eine Rolle spielen werden, einen gemeinsamen Hintergrund zu skizzieren. Auswahl, Umfang und Formulierung dieser vorbereitenden Betrachtungen sind wiederum nur subjektiv begründbar. Ich orientiere mich dabei an der Idee der von Leibniz entdeckten h a r m o n i s c h e n G l e i c h u n g e n, obwohl ihre Entdeckungsgeschichte erst in Abschnitt IV.5 thematisiert und in Abschnitt V formal abgeschlossen wird. Aus diesem Grunde bewegt sich die Argumentation überwiegend im aristoxenischen Treppenmodell und weniger im pythagoreischen Saitenlängenmodell, und die Verwendung von Begriffen wie N a t ü r l i c h k e i t und R e i n h e i t in der Musik wird eher kritisch betrachtet. Abschnitt I kann für sich genommen als eine kurze, historisch orientierte Darstellung der musikalischen Elementarlehre mit spezieller Akzentsetzung gelesen werden, wobei das kleine Begriffsregister am Ende des Buches bei der Orientierung helfen soll.

Die Hauptakteure Newton, Leibniz, Henfling und Euler sind allesamt Teilnehmer einer regen wissenschaftlichen und kulturellen Diskussion. Um das Besondere ihrer jeweiligen Theorie im Kontrast zu wichtigen zeitgenössischen Diskussionspartnern deutlicher hervortreten zu lassen, habe ich mich entschlossen, in Abschnitt II vorab die individuellen Positionen von Kepler, Mersenne, Descartes, Wallis, Huygens und Sauveur zu skizzieren. Dadurch wird auch die allgemeine Formulierung des Buchtitels besser gerechtfertigt.

Es gibt keine eigenständige Publikation Newtons zu Fragen der Musik. Nur in den optischen Werken sind einige wenige Hinweise auf dieses Thema zu finden. Seine Notizbücher, die heute in der Universitätsbibliothek von Cambridge aufbewahrt werden und seit 2012 auf der Website der Bibliothek als Faksimile einzusehen sind, enthalten jedoch Ausführungen zu musikalischen Intervallen und Skalen, die bisher nur in allgemeiner konzipierten Arbeiten von Penelope Gouk[3], Benjamin Wardhaugh[4] und Mark Lindley[5] angesprochen worden sind.

Von Leibniz existiert ebenfalls keine geschlossene Abhandlung zur Musiktheorie. Es gibt aber viele verstreute Äußerungen zu diesem Thema, darunter auch solche, die noch nicht transkribiert und publiziert worden sind. Die darin gefundenen musiktheoretischen Ideen habe ich 2011 bereits auf dem IX. Internationalen Leibniz-Kongress vorgetragen und in einem zweiteiligen Aufsatz in den Studia Leibnitiana[6] dargestellt, auf den hier vielfach zurückgegriffen wird. Der fragmentarische Charakter der Überlieferung und die Eigenart seiner Theorie machen es sinnvoll, auf einige Aspekte seiner Philosophie einzugehen, wobei auf das Buch von Ulrich Leisinger[7] zurückgegriffen werden kann. Die Leibniz-Bibliothek in Hannover hat dankenswerterweise die Genehmigung für die Wiedergabe der aus den Handschriften stammenden Abbildungen erteilt. Der Abdruck der Abbildung 71 ist vom Museum Spandovia Sacra in Berlin-Spandau genehmigt worden.

Weil sich Leibniz mit der 1710 veröffentlichten Arbeit Conrad Henflings ausführlich beschäftigt, und weil darin einige ungewöhnliche inhaltliche Ansätze zu finden sind, die meiner Meinung nach eine gründlichere Darstellung ver-

3 Gouk 1982 sowie Gouk 1999.
4 Wardhaugh 2008.
5 Lindley 1987, S. 201-211.
6 Bühler,Walter, *Musikalische Skalen und Intervalle bei Leibniz unter Einbeziehung bisher nicht veröffentlichter Texte*, *Teil I*, in: *Studia Leibnitiana*: Band XLII, Heft 2 (2010), S. 129 -161, *Teil II*: im Druck.
7 Leisinger 1994.

dienen, wird diesem wenig bekannten Autor ein eigenes Kapitel gewidmet. Das schwierige Werk Henflings ist seit 2011 auf der Web-Site der Berlin-Brandenburgischen Akademie zu finden[8]. Es ist am Ende des 20. Jahrhunderts von Patrice Bailhache[9] diskutiert worden, nachdem Rudolf Haase 1982 den Briefwechsel Henflings mit Leibniz veröffentlicht hat[10].

Der Ausflug in das Zeitalter der frühen Aufklärung findet mit Leonhard Euler seinen Abschluss. Da die wesentlichen Arbeiten Eulers in gedruckter Form erschienen sind, werden sie schon zu ihrer Entstehungszeit öffentlich diskutiert. Hermann Richard Busch hat 1970 eine umfangreiche Untersuchung[11] vorgelegt, welche sich nicht nur auf die Lehre von den Intervallen und Skalen beschränkt. Dennoch erscheint auch Eulers relativ bekannte Theorie in einem anderen Licht, wenn man sie aus der in diesem Buche gewählten Perspektive betrachtet.

Der Epilog geht schließlich noch einmal allgemein auf das Verhältnis der Musiktheorie zur Mathematik ein, wobei die kritische Sicht der Musiktheorie auf die Mathematik im Mittelpunkt steht, wie sie in den Werken von Johann Mattheson aus dem 18. Jahrhundert enthalten ist.

Im weiten Grenzgebiet von Mathematik, Physik, Philosophie und Musiktheorie zeigen die Wissenschaftler der frühen Neuzeit insgesamt eine erstaunliche Kreativität und Originalität. Ihre Fragestellungen sind auch heute noch durchaus aktuell, wenn man sie in ihren Details und in ihrer Komplexität ernst nimmt und sich nicht mit oberflächlichen Antworten zufrieden gibt. Mir bleibt nur zu wünschen übrig, dass das Buch in diesem Sinne die Neugier und das Interesse des Lesers wecken kann.

---

8 Henfling 1710.
9 Bailhache 1992.
10 Haase 1982.
11 Busch 1970.

I. Musikalische Skalen aus mathematischer Sicht

1. Diatonische Struktur

a) Intervalle und Skalen in der Antike

Der Raum der musikalischen Intervalle wird in der europäischen Tradition von den Konsonanzen aus erschlossen. Eine Konsonanz unterscheidet sich von einer Dissonanz nicht nur durch die Angenehmheit ihres Klanges. Sie kann auch von musikalisch Gebildeten innerhalb eines relativ kleinen Toleranzbereiches eindeutig erkannt und reproduziert werden. In diesem Sinne besitzt ein konsonantes Intervall – im Kreise musikalisch gebildeter Personen – eine identifizierbare Größe und ermöglicht so grundsätzlich einen quantitativen Zugang zu den Intervallen. Gut identifizierbare Konsonanzen können als Stimmintervalle ein Gerüst für die Größenbestimmung aller Intervalle bilden.

Schon in der Antike gelten die Intervalle Oktave (*Diapasôn*), Quinte (*Diapénte*) und Quarte (*Diatessáron*) als Stimmkonsonanzen. Während heute auch die Terzen als konsonant betrachtet werden, wird in der Antike die Quarte als die kleinste Konsonanz angesehen. Der quantitative Zusammenhang zwischen den drei antiken Grundkonsonanzen wird durch die Skizze in Abbildung 1 veranschaulicht. Das dissonante Intervall *T*, das damals als *Tónos* [*lat. tonus*] und heute als Ganzton bezeichnet wird, ist die Differenz zwischen Quinte und Quarte. Es gilt Oktave = Quinte + Quarte, Quinte = Quarte + Ganzton und Quarte < Quinte < Oktave. Man kann die fundamentale Folge Oktave–Quinte–Quarte–Ganzton daher als eine Kettendifferenz betrachten. Derartige Kettendifferenzen erweisen sich als interessante Strukturierungsmöglichkeiten für die Intervallbildung in der Musiktheorie.

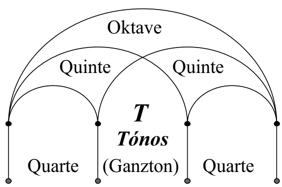


Abbildung 1

Obwohl der Ganzton T ein dissonantes Intervall darstellt, wird er schon in der Antike als Einheit für die Angabe musikalischer Intervallgrößen und als primäres Schrittintervall für die Skalenbildung verwendet. Er kann nämlich als Differenz der Konsonanzen Quinte und Quarte ebenfalls schnell eingestimmt werden. Durch einfache Stimmexperimente wird schon damals festgestellt, dass eine Quarte größer als zwei und kleiner als drei Ganztöne sein muss.

Damals wie heute wird das Problem der Skalenbildung meist auf die Gliederung einer Oktave reduziert, deren Struktur sich wiederholen kann. Jede Quarte (jedes Tetrachord) wird durch zwei innere Stufen in drei Intervalle geteilt, die als bewegliche Stufen gelten. Daher wird eine Oktave insgesamt durch sechs Zwischenstufen in sieben Teilintervalle zerlegt, wobei in der Antike die beiden Quarten durch ihre beweglichen Stufen gleich strukturiert sein müssen. Man spricht daher von heptatonischen Oktavskalen, die nach ihrer Quarten- oder Tetrachordgliederung unterschieden werden können.

Anders als heute kennt man in der Antike viele unterschiedliche Möglichkeiten für die Einteilung der Quarte durch die beiden als beweglich angesehenen Stufen. Sie können über das größte Teilintervall grob nach drei Tongeschlechtern klassifiziert werden (Abbildung 2). Von diesen hat das diatonische Geschlecht die weitere historische Entwicklung in Europa geprägt. Hierbei werden in jede Quarte zwei *Tónoi* oder Ganztöne T eingestimmt. Dadurch entsteht ein Doppelganzton oder Dítonos, der heute als große Terz bezeichnet wird. Weil die Größe der Quarte zwischen zwei und drei Ganztönen liegt, ist das dritte Intervall s deutlich kleiner als die beiden Ganztöne und wird daher als Restintervall (*apotomè / leîmma*) oder meist einfach als Halbton (*hemitónion; lat. semitonium*) bezeichnet. Wegen der Ungenauigkeit beim Stimmen muss man damit rechnen, dass die beiden Ganztöne in der Quarte sich ein wenig untereinander und vom Ganzton zwischen Quinte und Quarte unterscheiden.

Antike Tongeschlechter

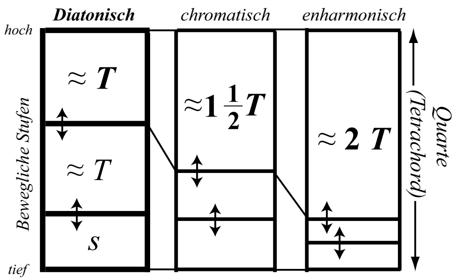


Abbildung 2

Intervalle werden in der Regel von den Konsonanzen aus mittels Differenzenbildung definiert, sie können aber auch mittels Zusammenfassung (*sýnthesis*) oder Summenbildung durch die Schrittintervalle T und s angegeben werden. Das Denken in solchen Schritten entspricht der Bewegung auf den Stufen einer Treppe oder einer Leiter, so dass man vom Treppenmodell sprechen kann, wenn man auf dieser Basis eine mathematische Behandlung musikalischer Skalen beginnt. Die konsonanzbasierte analytische oder differenzierende Betrachtungsweise wird so bereits in der Antike durch eine synthetische oder integrierende Betrachtungsweise ergänzt. Eine diatonisch gegliederte Oktave besteht demnach aus fünf ungefähr gleichgroßen Ganztönen T und zwei Halbtönen s, welche jedoch nicht notwendigerweise die numerisch exakte Hälfte von T darstellen müssen.

Aristoxenos von Tarent, ein Nachfolger des Aristoteles, formuliert im vierten vorchristlichen Jahrhundert als erster eine Theorie[12] der Intervalle und Skalen mit wissenschaftlichem Anspruch, die sich am musikalischen Geschehen orientiert. „*Wir ... wollen versuchen, alle Prinzipien zu erfassen, welche sich den in der Musik Erfahrenen zeigen, und aus diesen abzuleiten, was sich daraus ergibt*.“[13] Er fixiert für die Skalenbildung im diatonischen Geschlecht, die nicht auf die Oktave beschränkt sein muss, zusätzlich drei weitere Regeln:

(1) Es darf *„das Halbtonintervall nicht zu beiden Seiten eines Ganztons auftreten.“*[14], d.h. eine Folge sTs kann nicht vorkommen.

(2) Man darf *„drei Ganztonintervalle nacheinander setzen, mehr aber nicht“*[15], d.h. eine Folge $TTTT$ ist nicht zugelassen.

(3) Es *„können niemals zwei Halbtonintervalle aufeinander folgen“*[16], d.h. die Folge *ss* darf nicht auftreten.

In einer diatonischen Skala können daher nur die Intervall-Gruppen *sTTs* und *sTTTs* auftreten. Sieben aufeinander folgende Intervalle aus der Folge $\ldots Ts\underbrace{TT}_{2}s\underbrace{TT}_{2}s\underbrace{TT}_{2}s\underbrace{TT}_{2}sT\ldots$ ergeben jedoch keine Oktave mit fünf Ganztönen T und zwei Halbtönen s, und die Siebener-Gruppe $\underbrace{TTT}_{3}s\underbrace{TTT}_{3}$ aus der Folge $\ldots Ts\underbrace{TTT}_{3}s\underbrace{TTT}_{3}s\underbrace{TTT}_{3}s\underbrace{TTT}_{3}sT\ldots$ bildet ebenfalls keine Oktave.

12 Aristoxenos S. 5 (1, 11 Meibom): „Τῆς περὶ μέλους ἐπιστήμης …“.

13 Aristoxenos S. 42 (32, 31 Meibom): „Ἡμεῖς δ᾽ ἀρχάς τε πειρώμεθα λαβεῖν φαινομένας ἁπάσας τοῖς ἐμπείροις μουσικῆς καὶ τὰ ἐκ τούτων συμβαίνοντα ἀποδεικνύναι.“

14 Aristoxenos S. 83 (66,19 Meibom): „Ἐν διατόνῳ δὲ τόνου ἐφ᾽ ἑκάτερα ἡμιτόνιον οὐ μελῳδεῖται.“

15 Aristoxenos S. 81 (65,2 Meibom): „ … τρία τονιαῖα ἑξῆς τεθήσεται, πλείω δ᾽οὔ. “

16 Aristoxenos S. 81 (65,9 Meibom): „… δύο ἡμιτονιαῖα ἑξῆς οὐ τεθήσεται.“

Die Intervall-Gruppen *sTT* und *sTTT* müssen sich daher in einer diatonischen Skala regelmäßig abwechseln, und jede reale diatonische Skala muss schließlich nach Aristoxenos einen endlichen zusammenhängenden Abschnitt aus der diatonischen Sequenz $\dots Ts\underbrace{TT}_{2}s\underbrace{TTT}_{3}s\underbrace{TT}_{2}s\underbrace{TTT}_{3}sT\dots$ bilden, bei der man aus sieben aufeinanderfolgenden Intervallen immer eine Oktave erhält. Es gibt folglich sieben verschiedene Oktavgliederungen oder *Oktavgattungen*, die sich durch die Position der Halbtonschritte unterscheiden lassen.

An dieser diatonischen Grundstruktur hat sich bis heute nichts geändert, auch wenn seit der Renaissance leichte Modifikationen mit unterschiedlich großen Ganztönen in der Musiktheorie thematisiert werden. Wenn in einer diatonischen Struktur die Ganztöne tatsächlich als gleich groß angesehen werden, bezeichnen wir sie als regulär, während wir Falle von zwei unterschiedlich großen Ganztonschritten von einer biregulären diatonischen Struktur sprechen.

b) Aristoxenisches Treppenmodell und gleichmäßiges Zwölfersystem

Die Wissenschaft von der Musik kann sich nach Aristoxenos nicht – wie die Mathematik selbst – allein auf logische Reflexion (*diánoia*) stützen. Vielmehr muss in der Musik die Wahrnehmung (*aísthesis*) für die wissenschaftliche Theoriebildung gleichberechtigt herangezogen werden. „*Für den Musiker hat die Genauigkeit der sinnlichen Wahrnehmung nahezu die Bedeutung eines Grundprinzips, da unmöglich jemand mit schlechten Wahrnehmungen gut über die Dinge reden kann, deren Eigenschaften er gar nicht wahrnimmt.*“[17]

Er beruft sich auf die Erfahrung, dass bei jeder akustischen Kommunikation – sowohl beim Singen wie beim Sprechen – eine Bewegung der menschlichen Stimme hinsichtlich Höhe und Tiefe wahrgenommen wird. Die musikalische Bewegung der Stimme erscheint in der menschlichen Vorstellung als (vertikale) räumliche Bewegung[18]. Man kann daher sagen, dass die akustische Wahrnehmung in unserer Vorstellung einen Eindruck oder ein Bild eines musikalischen Intervalls erzeugt, welches dem Bild einer räumlichen Strecke entspricht.

Lange bevor die Mathematik als Wissenschaft überhaupt in Erscheinung tritt, praktiziert der Mensch beim Umgang mit Strecken und ihren Längen elementare rechnerische und geometrische Verfahren, insbesondere zur Messung

---

17 Aristoxenos S. 42-43 (33, 21 Meibom): „τῷ δὲ μουσικῷ σχεδόν ἐστιν ἀρχῆς ἔχουσα τάξιν ἡ τῆς αἰσθήσεως ἀκρίβεια, οὐ γὰρ ἐνδέχεται φαύλως αἰσθανόμενον εὖ λέγειν περὶ τούτων ὧν μηδένα τρόπον αἰσθάνεται.“

18 Aristoxenos S. 7 (3, 5 Meibom): „ … τήν τῆς φωνῆς κίνησιν ... κατὰ τόπον.“

und Berechnung von Abständen. Solche protogeometrischen Verfahren und Begriffe, die auf der intuitiven Orientierung im Raume beruhen, werden nach Aristoxenos spontan auf musikalische Intervalle und Skalen übertragen. Das zeigt sich exemplarisch in den Begriffen *intervallum* und *scala* selbst. Das griechische Wort *diástema*, welches zur Bezeichnung eines musikalischen Intervalls verwendet wird, bezeichnet auch den Abstand von zwei Punkten oder die Länge einer Strecke im Raum. Wie geometrische Streckenlängen bilden auch musikalische Intervallgrößen ein Kontinuum, und gleichgroße Strecken entsprechen gleichgroßen Intervallen.

Wie schon die gewöhnliche Längenmessung kann auch die quantitative Erfassung eines musikalischen Intervalls durch Zahlen nicht mit völliger Genauigkeit erfolgen. Da seine Größe letztlich nur durch das musikalisch geschulte Gehör verifiziert werden kann, besitzen alle Zahlenangaben in der Musik eine prinzipielle Unschärfe, die vom musikalischen Ausbildungserfolg und anderen subjektiven Faktoren abhängt und nicht ignoriert werden darf.

Aus heutiger Sicht kann man hierin eine Anwendung von mathematischen Verfahren erkennen, auch wenn diese von so elementarer geometrischer Natur sind, dass sie von vielen Menschen gar nicht als mathematische Überlegungen empfunden werden. Die Herleitung der Sequenz *...TsTTsTTTsTTs...* im vorigen Abschnitt ist ein Beispiel dafür. Wir sprechen vom Treppenmodell und vom Intervallkalkül, um diese spezielle mathematische Modellbildung innerhalb der Musik, die sich durch ihre große Einfachheit auszeichnet, von anderen quantitativen Modellbildungen in der Musik sprachlich zu unterscheiden.

Mit einem sorgfältig ausgeklügelten Stimmexperiment, das eine reguläre Struktur voraussetzt, bestätigt Aristoxenos die Beziehung Quarte = 2½ T oder s = ½ T. Wie in Abbildung 2 zu sehen ist, ergeben sich diese Zusammenhänge auch schon intuitiv durch den Begriff des Halbtons. Für Aristoxenos ist jedenfalls die Größe aller Basiskonsonanzen ein ganzzahliges Vielfaches des exakten gleichmäßigen Halbtons. Nach Abbildung 1 folgt aus der Gleichung Quarte = 2½ $T = 5s$ die Aussage Quinte = 3½ $T = 7s$. Daher muss auch gelten Oktave = 6 $T = 12s$. Diese quantitativen Angaben für die Basiskonsonanzen stimmen mit den modernen Ergebnissen im gleichmäßigen Zwölfersystem überein, in welchem die Oktave in zwölf gleichgroße Halbtonschritte geteilt wird.

Das moderne Zwölfersystem, bei dem nicht nur die Größe einer Konsonanz, sondern die Größe eines jeden Intervalls als Vielfache des gleichmäßigen Halbtons s angegeben werden kann, erscheint bei Aristoxenos als der Sonderfall *diátonon sýntonon* im diatonischen Geschlecht. In diesem regulären Spezialfall sind die beweglichen Stufen in einer Quarte so fixiert, dass die beiden Ganztonschritte in Abbildung 2 exakt gemäß $T = 2s$ übereinstimmen. Da Aristoxenos aber die Vielfalt der Skalen seiner Zeit beschreiben will, betrachtet er daneben mehrere andere Spielarten des diatonischen Geschlechts, die keine Regularität aufweisen. Bei der Untersuchung aller Tongeschlechter gibt es schließlich für ihn auch Intervalle, die deutlich kleiner sind als der gleichmäßige Halbton. Diese werden von ihm ebenfalls als Bruchteile des Ganztons angegeben.

c) Die reguläre diatonische Struktur

Die differenzierende oder analytische Betrachtungsweise der diatonischen Struktur, welche von den großen Stimmkonsonanzen zu den kleinen Schrittintervallen der diatonischen Sequenz führt, ist musikalisch wohl begründet. Indem man umgekehrt bei den Schrittintervallen T und s beginnt und aus ihnen die größeren Intervalle zusammensetzt, kann man die diatonische Struktur jedoch auch in der integrierenden oder synthetischen Betrachtungsweise studieren.

Betrachtungsmöglichkeiten der regulären diatonischen Struktur im Intervallkalkül des Treppenmodells

Differenzierung

	Konsonanzen				*Schrittintervalle*		
	Oktave *(Diapasôn)*	***Quinte*** *(Diapénte)*	***Quarte*** *(Diatessáron)*	*Doppelganzton* ***[Große Terz]*** *(Dítonos)*	***Ganzton*** *(Tónos)*	***Halbton*** *(Hemitónion)*	*Quintenkomma*
	A	B	C	D	T	s	K_Q
Differenzierende Betrachtung	A	B	$A-B$	$T+T$	$B-C$	$C-D$	$6T-A$
	A	B	$A-B$	$4B-2A$	$2B-A$	$3A-5B$	$12B-7A$
Integrierende Betrachtung	$B+C$	$C+T$	$D+s$	$T+T$	T	s	$6T-A$
	$5T+2s$	$3T+s$	$2T+s$	$2T$	T	s	$T-2s$

Integration

Abbildung 3

Aus heutiger Sicht sind in einer regulären diatonischen Struktur beide Betrachtungsweisen äquivalent, weil die beiden zugehörigen linearen Gleichungssysteme äquivalent sind:

$$\begin{bmatrix} A = 5T + 2s \\ B = 3T + s \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} T = 2B - A \\ s = 3A - 5B \end{bmatrix}.$$

Setzt man $s = 1$ und $T = 2$, so gewinnt man aus Abbildung 3 die Angaben für das gleichmäßige Zwölfersystem, welches sechs gleichgroße Ganztöne bzw. zwölf gleichgroße Halbtöne in der Oktave besitzt. Andere reguläre Systeme sind daran erkennbar, dass die Differenz von sechs Ganztönen und der Oktave von Null verschieden ist. Diese Differenz wird in der Antike als Komma bezeichnet. Wir sprechen vom Quintenkomma, um es sprachlich von anderen Kommata unterscheiden zu können, die in der Geschichte ebenfalls wichtig werden. Das Quintenkomma wird in der Geschichte zum ersten Mal im pythagoreischen System thematisiert und darin durch eine konkrete Zahl angegeben, die heute als pythagoreisches oder ditonisches Komma bezeichnet wird (vgl. Abbildung 4).

d) Saitenlängenmodell und Proportionenkalkül

Seit dem sechsten vorchristlichen Jahrhundert entsteht in Griechenland die Mathematik. Damals wird im Kreise der Pythagoreer entdeckt, dass es inkommensurable geometrische Strecken gibt. Die neue Wissenschaft Mathematik entfaltet sich zu einem bedeutenden Teil in der geometrischen Algebra, in der strengen Behandlung von irrationalen Größen in geometrischer Gestalt. Der Zahlbegriff selbst bleibt jedoch auf natürliche Zahlen und auf Brüche beschränkt.

Aristoxenos polemisiert in seiner Schrift gegen ein neues mathematisches Modell für musikalische Intervalle, das im Umfeld der Pythagoreer entstanden ist. Diese Theorie beruht auf der Beobachtung, dass ein musikalisches Intervall auch durch Verkürzung einer Saite hörbar gemacht werden kann. Dazu wird ein Monochord verwendet, ein Instrument, welches die durch Längenmessung kontrollierte Verkürzung einer Saite erlaubt. Jedes musikalische Intervall kann auf dem Monochord hörbar und zugleich sichtbar gemacht werden, und jede Intervallgröße lässt sich durch die Angabe des Saitenlängenverhältnisses erfassen, nämlich durch zwei Zahlen, die aus zwei Längenmessungen hervorgehen.

Weil es wie auf jeder geraden Linie auch auf einem Monochord inkommensurable Strecken gibt, sind aus heutiger Sicht in diesem Saitenlängenmodell nur dann wirklich alle musikalischen Intervalle durch Zahlen bestimmbar, wenn auch irrationale Längenmaßzahlen in Proportionen oder Progressionen zugelassen werden. Die Menge aller wirklichen Saitenlängenverhältnisse bildet ebenso wie die Menge aller Saitenlängen selbst ein Kontinuum.

Die pythagoreische Theorie der musikalischen Intervalle wechselt mit ihrem Proportionenkalkül jedoch nicht nur vom Treppenmodell ins Saitenlängenmodell. Sie akzeptiert von Anfang an für die Musiktheorie nur solche Saitenlängenverhältnisse, die als Zahlenproportionen von natürlichen Zahlen und Bruchzahlen angegeben werden können, wobei jede mit Brüchen geschriebene Zahlenproportion in eine äquivalente ganzzahlige Proportion umgewandelt werden kann. Sie verlagert damit letztlich den mathematischen Bezugspunkt weg von der Geometrie hin zur Arithmetik. Für die mathematische Beschreibung musikalischer Intervalle dürfen außerdem nur bestimmte ganzzahlige Proportionen verwendet werden. Daher kann im ganzzahligen Saitenlängenmodell prinzipiell nur eine begrenzte Auswahl aus der vollen Menge der musikalisch möglichen Intervallgrößen erfasst werden. Es gibt viele wichtige musikalische Skalen, die in der pythagoreischen Theorie nicht darstellbar sind. Das gilt nicht nur für das gleichmäßige Zwölfersystem.

Die pythagoreische Theorie kann dennoch für die europäische Musiktheorie eine große Bedeutung gewinnen, weil damals wie heute im Rahmen der menschlichen Hörgenauigkeit und Hörgewohnheit das Verhältnis (2:1) eine Oktave, (3:2) eine Quinte und (4:3) eine Quarte zu Gehör bringt.

Das der musikalischen Addition von Intervallen entsprechende Rechenverfahren für ganzzahlige Proportionen wird deutlich, wenn man die Proportionen als Brüche schreibt. Wenn man hilfsweise für die Addition das Zeichen $\circ$ einführt, dann muss ja wegen Oktave = Quinte + Quarte gelten $\frac{3}{2} \circ \frac{4}{3} = \frac{2}{1}$. Offenbar kann $\circ$ nicht durch unser Additionszeichen $+$ ersetzt werden. Das Multiplikationszeichen $\bullet$ führt dagegen zu einer wahren Aussage. Musikalische Intervalle, die durch Proportionen angegeben sind, werden im Proportionenkalkül schon seit der Antike addiert, indem die zugeordneten Verhältniszahlen multipliziert werden. Sie werden subtrahiert, indem die Verhältniszahlen dividiert werden.

Bei genuin musikalischen Fragen, die sich nicht auf die rechnerische Analyse von Intervallen und Skalen beziehen, verlassen auch pythagoreische Theoretiker das Saitenlängenmodell und übernehmen die am Treppenmodell orientierten Sprachgewohnheiten der Praktiker. Auch ein Pythagoreer spricht daher von der Addition und Subtraktion musikalischer Intervalle, wenn er im Saitenlängenmodell ganzzahlige Verhältnisse multipliziert und dividiert. Der additive Sprachgebrauch der Musik strahlt sogar auf das Rechnen mit Proportionen insgesamt zurück: Fast alle Theoretiker sprechen auch bei Proportionen von einer Addition, wenn sie die zugehörigen Zahlenverhältnisse multiplizieren.

	Konsonanzen				*Schrittintervalle*		
	Oktave *(Diapasôn)* *A*	***Quinte*** *(Diapénte)* *B*	***Quarte*** *(Diatessáron)* *C*	*Doppelganzton* (***Große Terz***) *(Ditonos)* *D*	***Ganzton*** *(Tónos)* *T*	***Halbton*** *(Leímma)* *s*	*Pythag. (ditonisches) Komma* $K_Q = K_P$
	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$A - B$	$4B - 2A$	$2B - A$	$3A - 5B$	$12B - 7A$
	$5T + 2s$	$3T + s$	$2T + s$	$2T$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{s}$	$T - 2s$
Pythagoreisches System	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{524288}{531441}$

Abbildung 4

Wenn man diesen Übergang von der Addition zur Multiplikation konsequent durchführt, kann man mit Hilfe der diatonischen Struktur von Abbildung 3 die Grundgrößen des pythagoreischen Systems ohne Schwierigkeiten auch im Saitenlängenmodell berechnen (Abbildung 4). Das Quintenkomma ist von Null verschieden, wobei der hier auftretende Zahlenwert, das pythagoreische oder ditonische Komma K_P, bereits in der Antike als konkrete Proportion angegeben wird. Der diatonische Halbton s wird als *Leímma* oder Limma bezeichnet und die Differenz $s' = T - s$, die durch $(2187{:}2048)$ bestimmt ist, als *Apotome*.

Wegen $\frac{256}{243} = 1 + \frac{13}{243} = 1 + \frac{1}{18+\frac{9}{13}} \approx 1 + \frac{1}{19}$ und $\frac{2187}{2048} = 1 + \frac{139}{2048} = 1 + \frac{1}{14+\frac{102}{139}} \approx 1 + \frac{1}{15}$ ist die Apotome s' größer als die exakte Hälfte des pythagoreischen Ganztons T, und diese ist wegen $s < \frac{1}{2}T < s'$ wiederum größer als das Limma s. Ein pythagoreischer Ganzton T ist größer als ein Ganzton des gleichmäßigen Zwölfersystems, und seine exakte Hälfte ist größer als ein gleichmäßiger Halbton.

Die Basiskonsonanzen des pythagoreischen Systems mit den Proportionen $(3{:}2)$ und $(4{:}3)$ werden als r e i n e Quinte und r e i n e Quarte bezeichnet. Sie lassen sich zusammen mit der Oktavproportion $(2{:}1)$ im Saitenlängenmodell mit den ersten vier natürlichen Zahlen beschreiben. Ihre Proportionen werden so in der figurierten Darstellung ∴∵ der Zahl $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ sichtbar, die als *Tetráktys* (Vierzahl) bezeichnet wird. Sie besitzt in der pythagoreischen Lehre über die Musik hinaus als kosmisch–universelles Strukturprinzip eine zentrale Bedeutung. Mit der Berufung auf die Tetraktys erhält die pythagoreische Musiktheorie eine über- oder außermusikalische Legitimation, aus der musikalische Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden. Diese Reduktion auf außermusikalische Prinzipien ist neben der Verwendung des Saitenlängenmodells der zweite Schwerpunkt der aristoxenischen Kritik an Pythagoras.

Die Bindung an die Tetraktys führt dazu, dass in der pythagoreischen Theorie nur solche Intervalle in der Musik denkbar sind, deren Proportionen aus den reinen Tetraktys-Proportionen abgeleitet werden können. Daher können bei pythagoreischen Proportionen nur natürliche Zahlen mit den Primfaktoren 1, 2 und 3 auftreten; 3 ist der maximale Primfaktor. Das pythagoreische Intervallsystem umfasst daher nur $\mathbb{N}\{3\}$-Proportionen, eine echte Teilmenge der ganzzahligen Proportionen, deren Glieder in gekürzter Darstellung nur die maximalen Primfaktoren 1, 2 oder 3 besitzen. Das Intervall, welches durch die $\mathbb{N}\{5\}$-Proportion $(5{:}4)$ definiert ist und seit der Renaissance als reine Großterz bezeichnet wird, ist deshalb in der altpythagoreischen Theorie nicht enthalten (vgl. I.3).

Bereits die Pythagoreer erkennen, dass man die Tetraktys-Intervalle gemäß Abbildung 5 auf dem Monochord über die $\mathbb{N}\{3\}$-Progression $(12{:}9{:}8{:}6)$ realisieren kann. Für beide Quarten sind in der Tat die Saitenlängenverhältnisse gleich: $\frac{9}{12}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. Aber dennoch ist es ein großer Vorzug von Abbildung 1 gegenüber Abbildung 5, dass alle Quarten entsprechend der Grundidee des Treppenmodells als Strecken gleicher Länge sichtbar werden. Auf dem Monochord werden dagegen gleiche musikalische Intervalle als unterschiedlich lange Strecken sichtbar, weil die Saitenlängenverhältnisse übereinstimmen müssen.

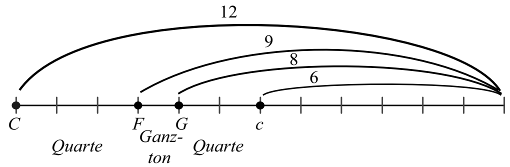


Abbildung 5

Man findet nur wenige gute Zeichnungen von Monochordteilungen für das pythagoreische und später für das natürliche System, weil solche Teilungen durch endliche Zahlenfolgen oder Progressionen wesentlich präziser dargestellt werden können. Am Beispiel der zur $\mathbb{N}\{3\}$-Progression α = (12:9:8:6) gehörenden Monochordteilung in Abbildung 5 kann man die traditionelle Schreibweise solcher Progressionen oder Mehrfachproportionen nachvollziehen, bei der mit aufsteigender Tonhöhe die Zahlen kleiner werden. Die größte Zahl wird wie bei einer Proportion als Gesamtlänge (tiefster Ton) interpretiert, und die anderen Zahlen stellen die klingenden Saitenlängen für die höheren Tonstufen dar.

e) Aristoxenische und pythagoreische Theorie

Wie das Werk des Aristoxenos zeigt, hat die pythagoreische Form der mathematischen Intervallbeschreibung im Saitenlängenmodell mit Hilfe von $\mathbb{N}\{3\}$-Proportionen in der Antike keine allgemeine Gültigkeit erlangt. Vielmehr stammt sie aus dem Umkreis pythagoreischer, platonischer und neuplatonischer Philosophie, in welcher die Tetraktys als Schlüssel zum Verständnis der gesamten Natur und des Kosmos betrachtet wird. Diese philosophischen Strömungen sind durch ein auffallendes Misstrauen gegen die sinnliche Wahrnehmung und gegen die Erfahrung geprägt, weil diese keine wahre Erkenntnis liefern können.

Die pythagoreische Polemik gegen Aristoxenos konzentriert sich deshalb auf die zentrale Rolle, welche er bei der Theoriebildung der innermusikalischen Erfahrung und damit der sinnlichen Wahrnehmung einräumt. Pythagoreische Musiktheorie will nach dem Muster einer mathematischen Disziplin ausschließlich den *lógos* oder die *ratio* zur theoretischen Konstruktion des Systems aus der Tetraktys heranziehen. Schon in der *sectio canonis*, der ersten pythagoreischen Schrift, die zusammenhängend erhalten ist und Euklid zugeschreiben wird, inszeniert sie sich als mathematische Teildisziplin, und zwar als Teilgebiet der Arithmetik. Das hat zur Folge, dass musiktheoretische Aussagen aus dem Kreis der Pythagoreer in der gleichen Sprache und mit dem gleichen Wahrheitsanspruch formuliert werden wie mathematische Sätze.

Der neuplatonische Ptolemaios-Kommentator Porphyrios stellt eine Ausnahme dar, wenn er im dritten nachchristlichen Jahrhundert auf die Tatsache verweist, dass die Aristoxener nicht weniger als die Pythagoreer auf Zahlen beruhende Beweise verwenden[19]. In der pythagoreischen Polemik wird sonst die aristoxenische Theorie durchgehend als unwissenschaftlich und unmathematisch disqualifiziert, weil sie mathematisch gesicherten Erkenntnissen widersprechen würde. Das wird an der berühmten pythagoreischen Behauptung deutlich, dass ein musikalischer Ganzton nicht in zwei gleiche Halbtöne geteilt werden könne. Der zugehörige Beweis demonstriert nur die Richtigkeit der arithmetischen Aussage, dass die $\mathbb{N}\{3\}$-Proportion (9:8) nicht in zwei gleiche $\mathbb{N}\{3\}$-Proportionen zerlegt werden kann. Die Unteilbarkeit des musikalischen Ganztons kann nur dann als „bewiesen“ gelten, wenn man zwischen ganzzahligen Proportionen und musikalischen Intervallen keinen Unterschied mehr machen will und sich gedanklich der Beschränkung auf das pythagoreische System unterwirft.

Die Erfahrungsfeindlichkeit und die außermusikalische Legitimation durch das kosmische Prinzip der Tetraktys bedeuten auch, dass die Proportionen am Monochord aus pythagoreischer Sicht nur hörbar demonstriert, aber nicht hergeleitet werden dürfen. Daher handelt es sich um ein Missverständnis, wenn die pythagoreischen Operationen am Monochord als Experimente in modernem Sinne interpretiert werden. Denn auch bei diesem Gerät, welches als Kanon bezeichnet wird, darf ein wahrer Pythagoreer die Sinneswahrnehmung nicht als Richter akzeptieren.

Das Selbstverständnis als mathematische Wissenschaft impliziert schließlich auch, dass es im schroffen Gegensatz zu der von Aristoxenos gelehrten Vielfalt in der Theorie nur eine einzige richtige diatonische Skala geben kann, nämlich die nach Abbildung 4 gebildete Skala. Sie bleibt für 2000 Jahre praktisch unverändert bestehen. Sie passt jedoch ebenfalls zur allgemeinen diatonischen Sequenz *...TsTTsTTTsTTs...*, weil die Bildungsgesetze von Abbildung 3 ja auch bei ihrer Konstruktion verwendet werden.

19 I. Düring [Hrsg.], Porphyrius Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios, Göteborg 1932, S. 4, Z. 3: „οὐχ ἧττων γὰρ τῶν Πυθαγορείων καὶ οἱ Ἀριστοξένειοι ταῖς διὰ τῶν ἀριθμῶν χρῶνται ἀποδείξεσιν.“

2. Pythagoreisches System und Liniensystem

a) Das Liniensystem

Der Neuplatonismus wird im Gegensatz zu anderen antiken Traditionen relativ bruchlos in die frühe christliche Theologie Westeuropas übernommen. Die Anbindung an die Theologie über die Vorstellung einer von Gott geschaffenen Weltordnung verschafft der pythagoreischen Theorie eine historisch einmalige Monopolstellung, und zwar in der Gestalt, wie sie von Boethius kodifiziert worden ist, innerhalb des Quadriviums als Anwendungswissenschaft der Arithmetik. Diese Einordnung betont ihren diskreten Charakter. Das Gebiet der kontinuierlichen Größen wird von der Astronomie vertreten, welche deshalb im Quadrivium der Geometrie zugeordnet ist.

Auch pythagoreische Theoretiker wechseln häufig ins Treppenmodell, wenn sie sich mit genuin musikalischen Fragen beschäftigen. Daher bleibt trotz der pythagoreischen Polemik das aristoxenische Treppenmodell zu jeder Zeit im Hintergrund präsent. Das zeigt sich im hohen Mittelalter in der Einführung des Liniensystems durch Guido von Arezzo. Der erstaunliche Erfolg dieser auf die musikalische Praxis und Didaktik ausgerichtet Notationsform beruht im Kern darauf, dass musikalische Intervalle durch vertikale Positionsunterschiede sichtbar gemacht werden, wobei im Grundsatz gleichgroße Abstände gleichgroßen Intervallen entsprechen. Das erkennt man an den damals neu gebildeten Intervallbezeichnungen, welche allmählich die antiken Bezeichnungen ablösen und bis heute unverändert benutzt werden. Durch einfaches Abzählen der Linien und Zwischenräume können Intervalle im Liniensystem primär durch einfache Ordinalzahlen benannt werden, und zwar auf dem Kontinent überwiegend mit lateinischen, in England dagegen mit englischen Ordinalzahlen. Von der ersten Position, welche den Grundton enthält, definiert zum Beispiel jeweils die *vierte* Position (*quarta* bzw. *fourth*) das musikalische Intervall der Quarte, unabhängig davon, in welchem Bereich der Skala man sich befindet (Abbildung 6). Man vergleiche damit die unterschiedlich langen Strecken für die Quarten *C–F* und *G–c* in Abbildung 5.

Abbildung 6

Um die unterschiedlichen Positionen auf und zwischen den Linien andeuten zu können und um gleichzeitig die Oktavgliederung der Skala auf einfache Weise bewusst zu machen, werden die sieben diatonischen Stufen in jeder Oktave mit den Buchstaben *A, ..., G* benannt. Unterschiedliche Oktaven werden durch unterschiedliche Schreibweisen der Buchstaben kenntlich gemacht. Einen Abschnitt der Skala, der eine vollständige Oktave umfasst, bezeichnen wir als Basisoktave. Alle Stufen der Gesamtskala entstehen dann durch Oktavierung aus den Stufen der Basisoktave, daher wird die Basisoktave in der Regel in den unteren Bereich der Skala gelegt. Die Schlüsselsymbole für die Grundstufen *C*, *F* und *G* legen den Zusammenhang zwischen Positionsbuchstabe und Position in den Linien fest (vgl. Abbildung 31).

Die Notation im Liniensystem setzt sich schnell durch. Seit dieser Zeit spielt das Saitenlängenmodell mit seinem Proportionenkalkül selbst bei überzeugten Anhängern des pythagoreischen Systems nur noch dann eine Rolle, wenn die musikalische Skalenbildung als solche theoretisch und rechnerisch diskutiert wird, oder wenn in der *musica mundana* und in der *musica humana* harmonische Spekulationen angestellt werden. Bei konkreten Fragen der *musica instrumentalis*, die sich nicht auf die rechnerische Analyse von Intervallen und Skalen beziehen, begeben sich auch pythagoreische Theoretiker mit der Verwendung des Liniensystems argumentativ sehr schnell in das Treppenmodell.

Das Liniensystem suggeriert allerdings sieben gleichgroße Tonschritte in einer Oktave, obwohl innerhalb einer diatonischen Struktur pro Oktave zwei Halbtöne s und fünf Ganztöne T auftreten müssen. Bei Sekunden, Terzen, Sexten und Septimen muss daher in Wirklichkeit zwischen einer großen und einer kleinen Teilklasse unterschieden werden, wenn man ihre Zusammensetzung aus Halb- und Ganztönen beachtet (Abbildung 7). Kleine oder verminderte Quinten und große oder übermäßige Quarten bilden wegen $2s \approx T$ eine gemeinsame Klasse, die man heute nach der übermäßigen Quarte TTT als Tritonus bezeichnet. Deshalb können die Begriffe Quinte und Quarte weiterhin ohne Zusatz verwendet werden. Die Nummer der Klasse entspricht der Anzahl der Halbtöne.

	Reguläre diatonische Intervallklassen													
	Prime	**Sekunde**		**Terz**		**Quarte**		**Quinte**		**Sexte**		**Septime**		**Oktave**
		klein (Halbton)	*groß* (Ganzton)	*klein*	*groß*	↙	übermäßig	vermindert	↘	*klein*	*groß*	*klein*	*groß*	
							Tritonus							
	I	**II–**	**II+**	**III–**	**III+**	**IV**	**IV+**	**V–**	**V**	**VI–**	**VI+**	**VII–**	**VII+**	**VIII**
int.	0	s	T	$T+s$	$2T$	$2T+s$	$3T$	$2T+2s$	$3T+s$	$3T+2s$	$4T+s$	$4T+2s$	$5T+s$	$5T+2s$
diff.	0	$3A-5B$	$2B-A$	$2A-3B$	$4B-2A$	$A-B$	$6B-3A$	$4A-6B$	B	$3A-4B$	$3B-A$	$2A-2B$	$5B-2A$	A
Nr.	0	1	2	3	4	5	6		7	8	9	10	11	12

Abbildung 7

Man kann leicht verifizieren, dass die antike reguläre diatonische Struktur in Abbildung 3, welche sich noch nicht auf das Liniensystem bezieht, dennoch zu den neuen diatonischen Intervallklassen in Abbildung 7 passt, die erst im Liniensystem verständlich werden. Mit der Entwicklung von Tasteninstrumenten gewinnen zwölfstufige Skalen an Bedeutung, die aus jeder diatonischen Intervallklasse genau ein Intervall enthalten. Die weißen Haupttasten der Normaltastatur werden dabei mit den gleichen Buchstaben bezeichnet wie die zugehörigen diatonischen Stufen im Liniensystem. Eine zwölfstufige Skala, die für jede diatonische Intervallklasse genau eine Stufe enthält, wird daher auch als Stimmung bezeichnet, weil die Stufen den Tasten der Normaltastatur zugeordnet werden können (vgl. I.5 und Abbildung 21).

b) Solmisation und die Lage der Halbtonschritte

Weder das Liniensystem in seiner ursprünglichen Gestalt noch die Buchstabennotation machen die Stellen kenntlich, an denen Halbtöne liegen. Für den Anfänger, der das Singen erst lernen soll, führt Guido deshalb zusätzlich die Solmisation ein, die bis ins 18. Jahrhundert als Ergänzung der Buchstabenbezeichnung verwendet wird. Sie beruht auf der mnemotechnischen Einübung einer Teilskala aus fünf Intervallen, bei der in der Mitte zwischen vier Ganztonschritten ein Halbtonschritt liegt. Jeder Anfänger muss diese Skala, welche eine große Sexte oder – in antikisierender Ausdrucksweise – ein Hexachord durchschreitet, zu Beginn auswendig singen können. Guido bezeichnet die Hexachord-Stufen mit den sechs Silben *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol* und *la*, sodass der Halbtonschritt in der Mitte durch die Silbenfolge *mi-fa* erfasst wird (Abbildung 8).

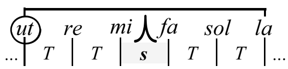


Abbildung 8

Dieses Hexachord kann nun auf verschiedenen Schlüsselstufen aufgebaut werden. Ausgangspunkt ist das *Hexachordum naturale*, das auf dem Schlüssel *ut* = *C* aufgebaut wird und den Halbton zwischen *E* und *F* fixiert. In einer Oktave bleibt die Struktur der kleine Terz zwischen *A* und *C* zu klären. Man muss zum natürlichen mindestens ein weiteres Hexachord hinzufügen, um alle Stufen zu erfassen. Mit dem *Hexachordum durum*, welches auf dem Schlüssel *ut* = *G* aufgebaut ist, wird die kleine Terz zwischen *A* und *C* so aufgeteilt, dass der Halbtonschritt unmittelbar vor der Stufe C liegt. Das *Hexachordum molle* mit dem

Schlüssel *ut* = *F* verlegt dagegen den Halbton hinter *A*, so dass vor *C* ein Ganztonschritt liegt (Abbildung 9).

So entstehen zwei gegeneinander verschobene diatonische Sequenzen, die an der Schreibweise der Stufe *B* zwischen *A* und *C* unterschieden werden können. Zum *Hexachordum molle* gehört das weiche *B*, welches in der abgerundeten Gestalt ♭ geschrieben wird, zum *Hexachordum durum* das harte *B*, welches zuerst in der Form ♮ und schließlich im deutschen Sprachraum als *H* geschrieben wird.

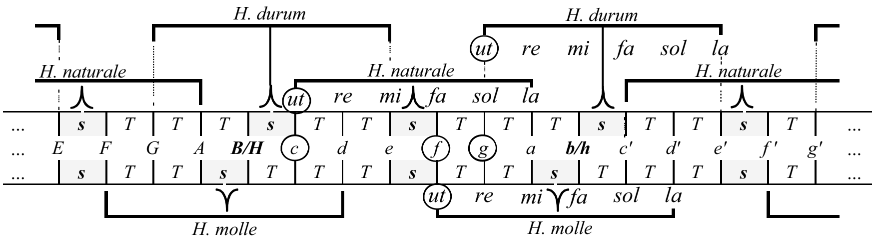


Abbildung 9

Seit Guido von Arezzo findet man zahlreiche Darstellungen wie in Abbildung 9, allerdings fast immer in vertikaler Anordnung nach dem Liniensystem wie in Abbildung 10. Alle Hexachorde erscheinen in diesen Skizzen als gleichlange Strecken: die Verschiebung der Hexachorde ist nur im Treppenmodell verständlich

Natürlich gibt es in der musikalischen Wirklichkeit nur eine endlich begrenzte Skala, welche im Mittelalter zehn Linien mit zwanzig Positionen umfasst (*scala decemlinealis*). Die vollständigen Stufenbezeichnungen setzen sich aus dem Tonbuchstaben und den Silben der beteiligten Hexachorde zusammen; so spricht man von *a la mi re* statt dem einfachen *a* (Abbildung 10). Dieses komplizierte Benennungssystem hat sich bis in die Zeiten Newtons gehalten.

Die Varianten der Stufe *b* werden als *b mi* und *b fa* unterschiedlich benannt. Aus didaktischen Gründen werden die vollständigen Stufenbezeichnungen von Guido in Spiralform auf einer Handfläche angeordnet. Sie können beim Singen mit der anderen Hand jederzeit angezeigt werden. Man spricht deshalb auch von der Hand (*manus guidonis*), wenn man die traditionelle Solmisation meint.

Die Methode der Hexachord-Solmisation wird bis zur Renaissance offenbar mit Erfolg verwendet. Aber in der Barockmusik können mit der vermehrten Verwendung der Vorzeichen Ganz- und Halbtonschritte überall im Liniensystem auftauchen, und das gedankliche Verschieben von Hexachorden zur Lokalisierung eines Halbtons wird damit zu einer schwierigen Aktion. Im Laufe des 17.

Jahrhunderts wird die Solmisation deshalb hinsichtlich ihrer pädagogischen Brauchbarkeit zunehmend kritischer gesehen und verliert schließlich in der Mitte des 18. Jahrhunderts ihre zentrale Bedeutung.

Solmisation und Liniensystem in der scala decemlinealis

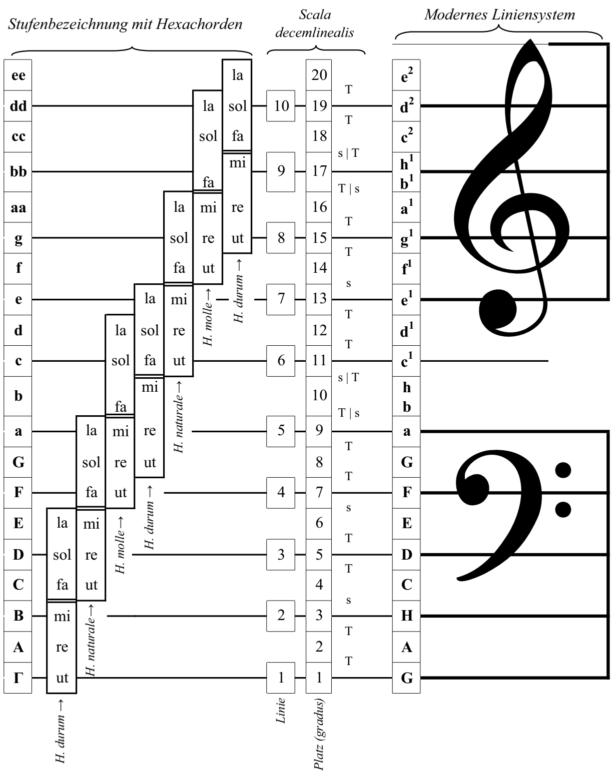


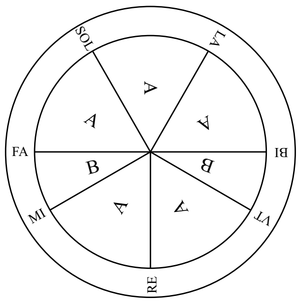
Abbildung 10

Am Beginn des 17. Jahrhunderts werden vielfältige Versuche unternommen, innerhalb der Solmisation die diatonische Struktur nicht mehr über das Hexachord, sondern über die Gliederung der ganzen Oktave zu beschreiben. Leibniz wendet bereits 1666 kombinatorisches Rechnen auch auf die Solmisationssilben an[20]. Er erwähnt dabei, dass Erycius Puteanus zu Beginn des 17. Jahrhunderts vorgeschlagen hat, durch die Einführung einer weiteren Silbe *Bi* für

20 Leibniz: *Dissertatio de Arte Combinatoria* 1666; A VI, 1, S. 218, Punkt 4.

den Tonbuchstaben *B* die Zahl der Tonsilben an die Zahl der Tonbuchstaben anzupassen und auf die Hexachordlehre zu verzichten[21]. Puteanus stellt die sieben neuen Silben für die Solmisation der ganzen Oktave kindgerecht im Treppenmodell als sieben Speichen eines Rades dar (Abbildung 11), wobei er *A* statt *T* und *B* statt *s* verwendet. Wenn die Speichen hervorragen, sieht man beim Abrollen im Sand die diatonischen Sequenz $\ldots\underbrace{TTT}_{3}s\underbrace{TT}_{2}s\underbrace{TTT}_{3}s\underbrace{TT}_{2}s\ldots$, die daher auch in dem Kreisdiagramm der Abbildung 11 gut zu identifizieren ist.

INTENTIO.



REMISSIO.
Spatium A Tonum: B Hemitonium significat.

Abbildung 11

Einflussreiche kontinentale Theoretiker wie Calvisius und Lippius empfehlen für diese neue Art der Oktavsolmisation völlig neue Silben wie etwa *Bo ce di ga lo ma ni*. Dies hat zu der Bezeichnung Bocedisation für diese neue sieben- oder achtsilbige hexachordfreie Art der Solmisation geführt.

In England gewinnt dagegen eine viersilbige Oktavsolmisation viele Anhänger[22], darunter auch John Wallis und Isaac Newton (vgl. II.4 und III.2.a). Christopher Simpson schreibt 1667, dass von den sechs alten Solmisationssilben nur vier notwendig sind[23]: „*Die anderen beiden, Ut und Re sind überflüssig, und*

21 Puteanus 1602. In LBr 390 Bl. 88v wird Puteanus mit seinem Aufsatz ebenfalls erwähnt. Das Diagramm in Abbildung 11 befindet sich in der *Musathena* (Puteanus 1602) auf S. 76 und gehört zu dem im Titel genannten Dialog *Iter Nonianum*, in welchem Puteanus eine pädagogische Kurzfassung seiner neuen Solmisationslehre vorstellt.

22 Zur besonderen Solmisation in England siehe Barnett 2002, S. 435-441.

23 Simpson 1667a, S. 5: „The other two, Ut and Re, are superfluous, and therefore laid aside by most Modern Teachers."

werden daher von den meisten modernen Lehrern weggelassen." Die Oktave wird in sieben Schritten durch die Folge *fa sol la mi fa sol la* erfasst, wobei unter *fa* immer ein Halbtonschritt liegt (vgl. Abbildung 41). Für die verschiedenen Tonarten muss je nach Schlüssel und Schlüsselvorzeichen nur die Zuordnung von *mi* angegeben werden[24].

Der Nutzen der Oktavsolmisation oder der Bocedisation hat sich unabhängig von ihrer Ausgestaltung jedoch langfristig nicht als besonders groß erwiesen, denn sie bewirkt letztlich die Parallelisierung der Tonbuchstaben mit den Tonsilben. Das hat bereits Kepler erkannt[25]. Deswegen fällt diese unnötige Doppelung ebenso wie die veraltete Hexachord-Solmisation in der Musiktheorie schließlich weg. Im deutschsprachigen Mitteleuropa und in England benutzt man heute Tonbuchstaben, in den anderen Ländern meist die Solmisationssilben. Newton und Leibniz setzen sich jedoch noch intensiv mit beiden Benennungsverfahren auseinander.

c) Quinterzeugung pythagoreischer Skalen

Pythagoreische Skalen werden seit der Antike als Mehrfachproportionen oder Progressionen von ganzen Zahlen aus $\mathbb{N}\{3\}$ dargestellt. Da der pythagoreische Ganzton als Differenz von Quinte und Quarte und das Limma als Differenz von Quarte und Doppelganzton definiert ist, kann letztlich jede Stufe innerhalb der Oktavproportion (2:1) durch eine Folge von Quint- und Quartschritten sowie durch Oktavreduktionen gefunden werden.

Michael Stifel hat in seiner *arithmetica integra*[26] von 1544 einen Algorithmus angegeben, wie man mit einer solchen Folge von Progressionen die Oktave

24 Simpson 1667a, S. 6: „A rule for placing of Mi". Ohne Vorzeichen: *mi→ H*, ein ♭: *mi →E*, zwei ♭: *mi →A* usw.

25 Kepler 1619, Lib. III, Cap. X, S. 57. „Itaque videat Belga ille, qui pro sex septem fecit, Bo, ce, di, ga, lo, ma, ni, quod ex hoc augmento lucrum habeat; Nam si censuit, voces usurpandas aequali numero cum chordis unius octavae, ... quid quaeso desiderat in literis a. b. c. d. e. f. g. jam dudum in hunc usum receptis?"
„Daher mag jener Belgier –der anstelle von sechs die sieben Silben *Bo, ce, di, ga, lo, ma, ni* gemacht hat – sehen, welchen Vorteil er aus dieser Vermehrung gewonnen hat. Denn wenn er geglaubt hat, man müsse Silben in gleicher Anzahl mit den Stufen in der Oktave annehmen …, was will er dann, frage ich, mit den *Buchstaben a. b. c. d. e. f. g*, die schon seit langem für diesen Zweck verwendet worden sind?" (vgl. Caspar 1939, S. 143-144).

26 Stifel 1544, Lib. I, Cap. IX, S. 70r – 75r. Eberhard Knobloch und Otto Schönberger haben eine Übersetzung angefertigt (Michael Stifel, *Vollständiger Lehrgang der Arithmetik*, Würzburg 2007, S. 119-127). Stifels Algorithmus wird hundert Jahre spä-