Günter Strassert

Das Ordnen von Optionen und die Theorie der kollektiven Entscheidung

Wie durch individuelle Ordnungen kollektive Ordnungen und zirkuläre Triaden hergestellt werden

PL ACADEMIC RESEARCH

Das Ordnen von Optionen und die Theorie der kollektiven Entscheidung

Günter Strassert

Das Ordnen von Optionen und die Theorie der kollektiven Entscheidung

Wie durch individuelle Ordnungen kollektive Ordnungen und zirkuläre Triaden hergestellt werden

Eine explorative Studie

PL ACADEMIC RESEARCH

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Umschlaggestaltung:
© Olaf Gloeckler, Atelier Platen, Friedberg

ISBN 978-3-631-64005-0 (Print)
ISBN 978-3-653-02635-1 (E-Book)
DOI 10.3726/978-3-653-02635-1

© Peter Lang GmbH
Internationaler Verlag der Wissenschaften
Frankfurt am Main 2013
Alle Rechte vorbehalten.
PL Academic Research ist ein Imprint der Peter Lang GmbH

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

www.peterlang.de

Für
Žana

Inhalt

1. Einführung 9

2. Das System von elementaren Gleichungen im Basis-Fall 15
   2.1 Das „strikte Condorcet-Paradoxon“ 15
   2.2 Der Möglichkeitsbereich für Tripel individueller Ordnungen 19
      2.2.1 Kombinationen mit Wiederholung 19
      2.2.2 Kombinationen ohne Wiederholung 22
   2.3 Der Zusammenhang von Binomialkoeffizienten (ohne Wiederholung) und Multiplikator k 24
   2.4 Das Grundschema für die elementaren Gleichungen (Basis-Gleichungen) 26
   2.5 Bestimmungsgleichungen für die Mengen der kollektiven Ordnungen und zirkulären Triaden 28
   2.6 Synopse 32

3. Die Differenzierung des elementaren Gleichungssystems (zunehmende Anzahl der Optionen, drei Wähler) 35
   3.1 Die Bestimmung von Komponenten und Ausgangsgleichungen 35
   3.2 Das Prinzip der totalen Umkehrung von individuellen Ordnungen 37
   3.3 Das Prinzip der partiellen Umkehrung von individuellen Ordnungen 39
   3.4 Die Differenzierung der Menge $\overline{Y}$ der kollektiven Ordnungen S_1 41
      3.4.1 Bestimmung der Teilmengen $\overline{Y}_1$ und $\overline{Y}_2$ 41
      3.4.2 Komponenten T_{11} und P_{11} als Teilmengen von $\overline{Y}_1$ 43
      3.4.3 Zum Problem der Ganzzahligkeit der Teilmengen $\overline{Y}_1$ und $\overline{Y}_2$ 47
      3.4.4 Exkurs: Zum Zusammenhang der Mengen P_{11} und T_{11} 49
      3.4.5 Weitere Differenzierungen der Mengen $\overline{Y}_1$ und $\overline{Y}_2$ 52
      3.4.6 Verallgemeinerung in Bezug auf Kombinationen mit Wiederholung 59

4. Zirkuläre Triaden bei zunehmender Anzahl der Wähler im Fall von drei Optionen 65
   4.1 Bedingungen für die Zunahme der Menge der Wählerprofile 65
   4.2 Binomialkoeffizienten zur Bestimmung der Menge der Wählerprofile 70

4.2.1 Für die Fälle $p = 3$, $p = 5$ und $p = 7$ 70
4.2.2. Für die Fälle von $p \geq 9$ Wählern..... 72
4.3 Bestimmung der Gesamtmenge der zirkulären Triaden 75

5. Zirkuläre Triaden bei zunehmender Anzahl der Wähler im Fall von *n* Optionen: ein Versuch am Beispiel von 5 Optionen und 5 Wählern 77
5.1 Aufgabenstellung 77
5.2 Ein Analyseschema 78
5.3. Eingrenzung der Menge *D* der Doppelzählungen 80
5.4 Ergebnis 84

6. Die Aussagemöglichkeiten des bisher entwickelten elementaren Gleichungssystems und Schlussbetrachtungen 87
6.1 Zwei Wege zur Bestimmung der Menge *Z* der zirkulären Triaden 87
6.2 Die Bestimmungsgleichung für den Term $\overline{Y}^{w}$ für den Fall zunehmender Anzahl *p* der Wähler bei minimaler Anzahl *n* der Optionen ($n = 3$) 88
6.3 Die *n*/*p*-Tabelle 90
6.4 Schlussbetrachtungen 94

Anhang I: Zirkuläre Triaden – weitere Zusammenhänge 99
1. Zum Begriff der Inversion 99
2. Inversionen und Teilordnungen 101
3. Relevante und irrelevante Menge 104
4. Die Aussonderung der irrelevanten Menge 105

Anhang II: Liste der Tripel individueller Ordnungen für die Teilmengen $\overline{Y}_1$ und $\overline{Y}_2$ 109

Literatur 117

1. Einführung

Wenn eine gegebene Wählerschaft eine gegebene Anzahl von Optionen in eine gemeinsame Rangordnung bringt, dann trifft sie eine *kollektiven Entscheidung.*

Eine *Wählerschaft* wird durch eine bestimmte Menge von Personen gebildet, welche in ihrer Funktion als *Wähler* nach bestimmten Regeln (Wahlverfahren) die Auswahl von Optionen bestimmen. Wähler können Einzelpersonen sein oder Gruppen von Wählern, welche sich jeweils wie Einzelwähler verhalten.

Optionen sind Auswahlmöglichkeiten, d.h. z.B. Kandidaten für ein bestimmtes Amt oder eine Funktion, Investitionsprojekte, Handlungsprogramme, Standorte, Zeitabschnitte. Zwei Optionen bilden eine Alternative, da der Begriff Alternative per definitionem eine zweistellige (binäre) Relation ist (im Sinne einer Entweder-Oder Beziehung). Ist die Anzahl der Optionen n größer als 4, dann ist die Anzahl q der Alternativen stets größer als die Anzahl der Optionen, nämlich $q = \binom{n}{2}$.

Das im Folgenden unterstellte Abstimmungsverfahren verlangt die Abgabe von Stimmzetteln, auf welchen die einzelnen Gruppenmitglieder ihre *individuelle Rangordnung* der Optionen aufgeschrieben haben. Stimmenthaltungen, unvollständige Rangordnungen sowie die Vergabe gleicher Rangplätze sind nicht zugelassen. Die Gruppenmitglieder haben die Wahl, ihre individuelle Rangordnung aus der theoretischen Gesamtmenge von $n!$ möglichen Rangordnungen auszuwählen.[1] Alle Stimmzettel werden dann nach dem Prinzip der paarweisen Vergleiche der Optionen ausgezählt, d.h. es gibt bei n Optionen $q = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) = \binom{n}{2}$ paarweise Vergleiche. Die Auszählung erfolgt nach dem *Mehrheitsprinzip*, d.h. bei jedem paarweisen Vergleich wird ausgezählt, wie oft eine Option vor einer anderen steht, und dementsprechend wird die Rangordnung vervollständigt.

Es gibt nun zwei Arten eines *Gruppen-Ergebnisses* oder allgemein: *kollektiven Ergebnisses*: Entweder handelt es sich um eine *strikte Rangordnung* in dem Sinne, dass sie der Gesamtmenge von $n!$ möglichen strikten Rangordnungen angehört. Oder es ergibt sich eine *zirkuläre Anordnung* in dem Sinne, dass die den Anfang der Anordnung bildende Option auch am Ende der Anordnung steht (ob-

1 Es ist dabei für die weitere Analyse unerheblich, welche der denkbaren mannigfaltigen individuellen Beweggründe für die jeweilige Auswahl eine Rolle gespielt haben. Mit anderen Worten: wenn unter diesen Aspekten der Begriff Rationalität bemüht wird, dann ist er möglichst weit zu fassen, etwa im Sinne von Nida-Rümelin (1994).

wohl keines der Gruppenmitglieder eine solche Anordnung vertreten hat). Solche zirkulären Anordnungen können *zyklische Folgen* genannt werden (Kern/Nida-Rümelin 1994:29), und zwar der Länge *l*, je nachdem wie viele Elemente die zyklische Folge umfasst.

Alle zyklischen Folgen, welche mehr als drei Elemente umfassen, d.h. zyklische Folgen der Länge $l \succ 3$, lassen sich in *zyklische Folgen der Länge* 3 zerlegen, im Folgenden als *zirkuläre Triaden* bezeichnet. [2]

Die Möglichkeit, dass zyklische Folgen von Optionen entstehen können (aber nicht entstehen müssen), wird aus logischer Sicht als *Paradoxon* bezeichnet, weil eine zyklische Folge mit dem Transitivitätsprinzip nicht vereinbar ist (und es sich daher um ein nicht konsistentes Ergebnis handelt): wenn *a* vor *b* und *b* vor *c* steht, dann muss logischerweise auch *a* vor *c* stehen.

Dieses Paradoxon wird gemeinhin Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet (1743-1794), zugeschrieben und dementsprechend als *Condorcet-Paradoxon* bezeichnet. Zur Geschichte des Condorcet-Paradoxons siehe z.B. Gehrlein (1983; 1997) und die dort zitierte Literatur.

Die fundamentale Bedeutung von *zyklischen Folgen* wurde erst nach über 150 Jahren augenscheinlich, als Kenneth Arrow den Versuch unternahm, einen axiomatischen Ansatz für ein Wahlsystem zu bestimmen, welches solche Widersprüchlichkeiten vermeidet. Sein 1951 vorgestelltes Axiomensystem, seitdem *Arrow-Theorem* genannt (verwendet werden auch Bezeichnungen wie *Nichtexistenz-Theorem* oder *Unmöglichkeitstheorem*), mündet in der These, dass solche Widersprüchlichkeiten in allen bekannten Wahlverfahren zwar auftreten können, aber nicht auftreten müssen.

Diese These rief verschiedene Forschungen auf den Plan, wobei zwei Hauptrichtungen unterschieden werden können:

(1) Die weitere Suche nach einem idealen oder besseren Axiomensystem. Das Arrow-Theorem wird nicht als generelle Absage an Versuche aufgefasst, einen axiomatischen Ansatz für ein perfektes Wahlsystem zu entwickeln, vielmehr wird weiterhin nach Bedingungen gesucht, unter denen spezielle Wahlsysteme zu wünschenswerten Ergebnissen führen.

(2) Überprüfung der praktischen Relevanz von zyklischen Folgen.
Zunächst wurde in einer Vielzahl von Untersuchungen von Wahlergebnissen und theoretischen Studien (siehe hierzu umfassend Gehrlein, 2006: 33ff) festgestellt, dassdas Vorkommen von zyklischen Folgen, insbesondere mit zunehmender Anzahl von Optionen und Wählern, vielmehr die Regel als die Ausnahme ist.

---

2 Der Begriff *circular triad* wird z.B. verwendet in Kendall/Smith (1939), Slater (1961), Bezembinder (1981) oder Maas (1993), vor allem in Bezug auf individuelle Ordnungen.

Logischerweise folgte als nächster Schritt die Bestimmung der relativen Bedeutung von zyklischen Folgen. Dabei bürgerte sich schnell die Bestimmung von Wahrscheinlichkeitsmaßen ein. Diese Forschungsrichtung ist noch heute vorherrschend und wird immer differenzierter (siehe z.B. Gehrlein, 1997; 2006; Lepelley/Martin, 2001).

In der Theorie der kollektiven Entscheidungen ist seit Arrow unbestritten, dass ein Wähler die Möglichkeit haben soll, aus der Gesamtheit der theoretisch möglichen *n*! Rangordnungen seine individuelle Rangordnung auszuwählen (Axiom of Unrestricted Domain bzw. Axiom des Unbeschränkten Definitionsbereichs;Arrow/Raynaud 1986:18; Kern/Nida-Rümelin 1994:33).

Um abschätzen zu können, wie groß die Menge zyklischer Folgen in Form von zirkulären Triaden maximal sein kann, ist es zweckmäßig, den kombinationstheoretischen Möglichkeitsbereich für alle *n*! möglichen und zulässigen individuellen Rangordnungen zu bestimmen. Dies kann mit Hilfe von in Kapitel 2 zu definierenden *Binomialkoeffizienten* geschehen, und zwar in Abhängigkeit von der Anzahl *n* der Optionen und *p* der Wähler.

Von den auf diese Weise ermittelten Mengen von zirkulären Triaden kann gesagt werden, dass sie mit Sicherheit entstehen und unter den jeweiligen Bedingungen als Obergrenzen fungieren. Dieser Extremfall wird hier dieser Studie zugrunde gelegt und kann als *Referenzfall* angesehen werden.[3]

Tatsächlich kann und wird es aber Situationen geben, in welchen der kombinationstheoretische Möglichkeitsbereich kleiner als *n*! ist, weil bestimmte individuellen Ordnungen, aus welchen Gründen auch immer, von der Betrachtung ausgeschlossen sind. Dies ist dann der Auftakt für wahrscheinlichkeitstheoretische Ansätze mit dem Ziel, die zu erwartenden und auf jeden Fall geringere Mengen von zirkulären Triaden abzuschätzen.

Erst wenn also unterstellt wird, dass es eine Menge von individuellen Ordnungen gibt, welche nicht von Wählern besetzt wird (selbst dann, wenn die Wählerschaft groß genug ist, dass die Gesamtheit der theoretisch möglichen *n!* Rangordnungen als individuelle Rangordnungen ausgewählt werden könnte), dann kann damit gerechnet werden, dass die maximal mögliche Anzahl zyklischer Folgen nicht erreicht wird. [4]

---

3 In diesem Fall entstehen zyklische Folgen mit Sicherheit, weil das Kriterium der sogenannten Eingipfeligkeit nicht erfüllt sein kann. Dieses Kriterium bedeutet konkret: es ist z.B. für den Fall von 3 Optionen nicht zulässig, dass jede Option in den individuellen Ordnungen einmal an erster, einmal an zweiter und einmal an dritter Stelle steht. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, entstehen zirkuläre Folgen auf jeden Fall. Das so ohne weiteres kaum verständliche Denkmuster der Eingipfeligkeit wird z.B. erläutert in Kern/Nida-Rümelin (1994: 93-97).

4 Theoretisch ist es sogar möglich, dass gar keine zyklischen Folgen entstehen, weil gerade individuelle Ordnungen fehlen, welche für deren Entstehen konstitutiv sind. Diese Möglichkeit

Auf diese Grundannahme stützt sich die auf Wahrscheinlichkeitsberechnungen orientierte Forschungsrichtung.

Mit anderen Worten, für die Wahrscheinlichkeitsfraktion der Theorie der kollektiven Entscheidungen hängt gegenwärtig viel von der Annahme ab, dass eine Wählerschaft *nicht* in der Lage oder nicht gewillt ist, eine Situation herzustellen, in welcher alle theoretischen Möglichkeiten der Kombination von individuellen Rangordnungen ausgeschöpft sind.

Im Umkehrschluss zwingt dies dazu angeben zu müssen, auf welche Weise die Wählerschaft diesen Möglichkeitsbereich nicht ausschöpft bzw. welche individuellen Rangordnungen überhaupt und in welchem Umfang in die Analyse einbezogen werden. Zu diesem Zweck kann eine Vielzahl möglicher statistischer Verteilungen (Häufigkeitsverteilungen) eingeführt werden, deren sachliche Begründung zwar stets weitgehend offen bleibt, die aber den Boden für immer differenziertere Wahrscheinlichkeitsmaße für zyklische Folgen bereiten. (Vgl. hierzu insbesondere Gehrlein, 2006).[5]

Unter diesen Aspekten scheint es zweckmäßig, zwei Forschungsbereiche besser voneinander zu trennen, welche in der auf Wahrscheinlichkeitsberechnungen orientierten Forschungsrichtung eine enge Verquickung eingegangen sind: die Analyse der Bestimmungsgründe von strikten Rangordnungen und zyklischen Folgen im Hinblick auf immanente Zusammenhänge auf der einen Seite und die Berechnung von charakteristischen Kennziffern einschließlich adäquater Wahrscheinlichkeitsmaße auf der anderen Seite. Wenn die zweite Seite die erste Seite dominiert, wie das häufig der Fall zu sein scheint, dann wird die analytische Seite der Theorie der kollektiven Entscheidung nur einseitig zweckorientiert bzw. nur partiell erschlossen und in ihrer systematischen Entfaltung gehemmt.

In der vorliegenden Abhandlung wird im Interesse einer solchen Trennung ein vollständiger Systemansatz verfolgt, d.h. es werden kombinationstheoretische Situationen betrachtet, in welchen strikte Rangordnungen *und* zyklische Folgen mit Sicherheit entstehen – analog zu einem vollständigen Produktionssystem, in welchem ja auch Haupt- und Nebenprodukte simultan entstehen.

Charakteristisch für diesen Ansatz sind folgende Annahmen:

Zunächst wird die Betrachtung von zyklischen Folgen eingeschränkt auf 3-elementige Zyklen, d.h. auf *zyklische Folgender Länge* 3, welche wie oben bereits erwähnt auch als *zirkuläre Triaden* bezeichnet werden. Vor dem Betreten des

---

wird in Kapitel 6 am Beispiel des Basis-Falls von n = 3 Optionen und p = 3 Wählern sowie der Tabelle 6 erläutert.

5 Wäre eine sachliche Begründung empirisch belegt, dann entfiele die Rechtfertigung für Wahrscheinlichkeitsmaße, da diese ja an das Auftreten von Zufallsereignissen gebunden sind: „Kurzum: keine Zufälligkeiten, keine Wahrscheinlichkeit“ (Bunge/Mahner, 2004: 105). Andererseits bedürfen auch die behaupteten Zufallsereignisse einer Begründung und einer Abgrenzung gegenüber rein willkürlichen Annahmen.