

**Michael Weber**

**Die Anwendbarkeit probabilistischer  
Modelle im Rahmen der  
Wissensraumtheorie**

**Doktorarbeit / Dissertation**

# BEI GRIN MACHT SICH IHR WISSEN BEZAHLT



- Wir veröffentlichen Ihre Hausarbeit, Bachelor- und Masterarbeit
- Ihr eigenes eBook und Buch - weltweit in allen wichtigen Shops
- Verdienen Sie an jedem Verkauf

Jetzt bei [www.GRIN.com](http://www.GRIN.com) hochladen  
und kostenlos publizieren



## **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlanges. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

## **Impressum:**

Copyright © 2004 GRIN Verlag  
ISBN: 9783640264346

## **Dieses Buch bei GRIN:**

<https://www.grin.com/document/122377>

**Michael Weber**

**Die Anwendbarkeit probabilistischer Modelle im Rahmen der Wissensraumtheorie**

## **GRIN - Your knowledge has value**

Der GRIN Verlag publiziert seit 1998 wissenschaftliche Arbeiten von Studenten, Hochschullehrern und anderen Akademikern als eBook und gedrucktes Buch. Die Verlagswebsite [www.grin.com](http://www.grin.com) ist die ideale Plattform zur Veröffentlichung von Hausarbeiten, Abschlussarbeiten, wissenschaftlichen Aufsätzen, Dissertationen und Fachbüchern.

### **Besuchen Sie uns im Internet:**

<http://www.grin.com/>

<http://www.facebook.com/grincom>

[http://www.twitter.com/grin\\_com](http://www.twitter.com/grin_com)

**Die Anwendbarkeit probabilistischer Modelle  
im Rahmen der Wissensraumtheorie**

**DISSERTATION**

**zur Erlangung  
des Doktorgrades der Naturwissenschaften  
an der Fakultät für Human- und Sozialwissenschaften der  
Universität Wien**

**eingereicht von  
Michael Weber**

**Wien, September 2004**

## Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen Menschen bedanken, die mich in den letzten Jahren beim Schreiben dieser Arbeit immer wieder motiviert und auf unterschiedliche Weise unterstützt haben.

An erster Stelle seien Prof. Dr. Anton Formann und Dr. habil. Jürgen Heller genannt. Beide hatten immer wieder ein offenes Ohr, wenn es darum ging, meine Ideen und Gedankengänge zu diskutieren. Diese Diskussionen haben viel dazu beigetragen, Schwachstellen in der Argumentation aufzudecken, aus gedanklichen Sackgassen herauszufinden und die eigene Argumentation zu festigen.

Besonderer Dank geht auch an Manuela. Ihr ist es zu verdanken, dass die Zahl der Tippfehler in dieser Arbeit auf ein Minimum reduziert werden konnte und auch die Beistriche größtenteils an den richtigen Stellen gelandet sind. Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden dafür bedanken, dass sie mich in den für ich besonders schwierigen Phasen immer wieder motiviert und mir so aus so manchem „Tief“ herausgeholfen haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>EINLEITUNG</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>WISSENSRAUMTHEORIE</b> .....	<b>4</b>
<b>2.1</b>	<b>EINFÜHRUNG</b> .....	<b>4</b>
<b>2.2</b>	<b>BEGRIFFSERKLÄRUNGEN</b> .....	<b>5</b>
2.2.1	WISSENSZUSTAND (KNOWLEDGE STATE).....	5
2.2.2	WISSENSSTRUKTUR (KNOWLEDGE STRUCTURE).....	5
2.2.3	WISSENSRAUM (KNOWLEDGE SPACE).....	6
2.2.4	VERMUTUNGSRELATION (SURMISE-RELATION).....	7
2.2.5	BASIS EINES WISSENSRAUMS .....	8
2.2.6	ÄQUIVALENTE ITEMS.....	9
2.2.7	VERMUTUNGSSYSTEME (SURMISE SYSTEMS).....	9
<b>2.3</b>	<b>ERWEITERUNGEN DER WISSENSRAUMTHEORIE</b> .....	<b>10</b>
2.3.1	PROBABILISTISCHE WISSENSSTRUKTUREN .....	10
2.3.2	FERTIGKEITEN (SKILLS) .....	10
<b>2.4</b>	<b>ZIELE UND PROBLEME DER WISSENSRAUMTHEORIE</b> .....	<b>11</b>
2.4.1	ZIELE.....	11
2.4.2	PROBLEME.....	12
<b>2.5</b>	<b>KONSTRUKTION VON WISSENSSTRUKTUREN</b> .....	<b>12</b>
2.5.1	EXPERTENBEFRAGUNGEN.....	13
2.5.2	ANNAHME VON DEN AUFGABEN ZU GRUNDE LIEGENDEN FERTIGKEITEN.....	13
2.5.2.1	Das disjunktive Modell .....	14
2.5.2.2	Das konjunktive Modell .....	14
2.5.2.3	Das Kompetenz-Modell.....	15
2.5.2.4	Die Komponentenanalyse.....	16
2.5.3	GENERIERUNG DER WISSENSSTRUKTUR MITTELS DATENANALYSE .....	19
2.5.3.1	Item Tree Analysis (ITA) .....	19
2.5.3.2	Kritische Antwortmusterhäufigkeiten (Knowledge State Frequency Analysis).....	21
<b>2.6</b>	<b>STATISTISCHE MAßE FÜR DIE ANPASSUNGSGÜTE VON WISSENSRÄUMEN AUF DATEN</b> .....	<b>23</b>
2.6.1	SYMMETRISCHE DISTANZEN.....	23
2.6.1.1	Kritik an den mittleren symmetrischen Distanzen.....	24
2.6.2	DISTANCE AGREEMENT COEFFICIENT (DA).....	24
2.6.2.1	Kritik am DA Koeffizient .....	25
2.6.3	CORRELATIONAL AGREEMENT COEFFICIENT (CA).....	26
2.6.3.1	Kritik am CA Koeffizient .....	27
2.6.4	VIOLATIONAL COEFFICIENT (VC).....	29
2.6.5	APP.....	30
2.6.5.1	Kritik am APP.....	31
<b>3</b>	<b>WISSENSRAUMTHEORIE UND LATENT CLASS ANALYSE</b> .....	<b>32</b>
<b>3.1</b>	<b>DIE LATENT CLASS ANALYSE FÜR DICHOTOME DATEN</b> .....	<b>34</b>
<b>3.2</b>	<b>GEGENÜBERSTELLUNG</b> .....	<b>36</b>
<b>3.3</b>	<b>ALLGEMEINE PROBLEME BEI DER KONSTRUKTION VON WISSENSSTRUKTUREN AUS DATEN</b> .....	<b>39</b>

<b>3.4 DIE ANWENDBARKEIT DER LCA IM RAHMEN DER ITA.....</b>	<b>44</b>
3.4.1 MODELLAUSWAHL UND –EVALUIERUNG.....	44
3.4.2 DIE ITEM TREE LATENT CLASS ANALYSE (ITLCA).....	47
3.4.3 VERGLEICH DER VERFAHREN ZUR KONSTRUKTION VON WISSENSSTRUKTUREN AUS DATEN .....	49
3.4.4 ERGEBNISSE.....	53
3.4.5 VERGLEICH DER ITLCA UND DER KSFA.....	63
<b>3.5 KONSTRUKTION VON WISSENSSTRUKTUREN AUS DATEN MITTELS RESTRINGIERTER LCA .....</b>	<b>66</b>
<b>3.6 EINFLUSS DER STICHPROBENGRÖÙE AUF DIE RESULTATE DER LATENT CLASS ANALYSE.....</b>	<b>71</b>
<b>3.7 DISKUSSION DER ERGEBNISSE .....</b>	<b>77</b>
<b>4 WISSENSRAUMTHEORIE UND RASCH MODELL .....</b>	<b>78</b>
<b>4.1 DAS ISOP- MODELL VON SCHEIBLECHNER.....</b>	<b>79</b>
4.1.1 MODELLTESTS .....	81
4.1.2 INDEX DER ISOTONIE .....	83
<b>4.2 VERMUTUNGSRELATION, ITEMSCHWIERIGKEITEN UND STOCHASTISCHE DOMINANZ .....</b>	<b>84</b>
4.2.1 STOCHASTISCHE DOMINANZ .....	84
4.2.1.1 Stochastische Dominanz und Rasch Modell .....	85
4.2.1.2 Stochastische Dominanz und ISOP Modell.....	86
4.2.1.3 Stochastische Dominanz und Wissensraumtheorie .....	87
4.2.2 HERLEITUNGEN UND BEWEISE .....	87
4.2.2.1 Nomenklatur und allgemeine Annahmen.....	88
4.2.2.2 Dominanz zweier Items, die von einem dritten Item gleich dominiert werden.....	90
4.2.2.3 Dominanz zweier Items, die von einem dritten Item unterschiedlich stark dominiert werden .....	91
4.2.3 GEGENÜBERSTELLUNG DER DREI MODELLE UNTER VERWENDUNG DER STOCHASTISCHEN DOMINANZEN.....	92
<b>4.3 DIE BEDEUTUNG DER VERTEILUNG DER WISSENSZUSTÄNDE FÜR DIE ANNAHME DER EINDIMENSIONALITÄT DER ITEMS.....</b>	<b>93</b>
<b>4.4 RE-ANALYSE PUBLIZIERTER DATENSÄTZE .....</b>	<b>96</b>
4.4.1 DARSTELLUNG DER REANALYSIERTEN DATENSÄTZE .....	97
4.4.2 ERGEBNISSE DER ISOP MODELLKONTROLLEN.....	104
<b>4.5 EIGNUNG DER MITTELS RASCH MODELL GESCHÄTZTEN ITEMSCHWIERIGKEITEN ZUR ERSTELLUNG VON WISSENSSTRUKTUREN.....</b>	<b>107</b>
4.5.1 WAHRSCHEINLICHKEITSAUFGABEN (HELD, 1993) .....	108
4.5.1.1 Ergebnis der Rasch Analyse.....	109
4.5.1.1.1 Rasch Analyse des ursprünglichen Datensatzes (WK1) (Held, 1993).....	109
4.5.1.1.2 Raschanalyse des neuen Datensatzes (WK2) .....	109
4.5.1.2 Ergebnisse der ISOP Analyse .....	110
4.5.1.3 Gegenüberstellung der aus Datensatz WK1 resultierenden Strukturen.....	112
4.5.1.4 Gegenüberstellung der aus Datensatz WK2 resultierenden Strukturen.....	113
4.5.2 ZAHLENREIHEN ERGÄNZEN .....	115
4.5.2.1 Ergebnis der Modellkontrollen zum ISOP Modell .....	116
4.5.2.2 Ergebnis der Rasch Analyse.....	117
4.5.2.3 Ergebnis der ITA, der ITA* und der KSFA .....	117
4.5.2.4 Gegenüberstellung der resultierenden Strukturen.....	117
4.5.3 RE-ANALYSE DES DATENSATZES VON BAHRICK AND HALL.....	118
4.5.3.1 Ergebnis der unrestringierten LCA .....	119
4.5.3.2 Ergebnis der restringierten LCA und ITLCA .....	120
4.5.3.3 Ergebnis der Raschanalyse .....	121
4.5.3.4 Ergebnis der Modellkontrollen zum ISOP Modell .....	121
4.5.3.5 Ergebnis der ITA, der ITA* und der KSFA .....	122

---

4.5.3.6	Gegenüberstellung der resultierenden Strukturen.....	123
4.6	<b>SIMULATIONEN ZUR STABILITÄT DES DA UND APP KOEFFIZIENTEN .....</b>	<b>126</b>
4.7	<b>DISKUSSION DER ERGEBNISSE DER RE-ANALYSEN .....</b>	<b>128</b>
5	<b>GEGENÜBERSTELLUNG VON SKILL - ANSATZ UND LLTM.....</b>	<b>130</b>
5.1	<b>DAS LINEAR LOGISTISCHE TEST MODELL .....</b>	<b>130</b>
5.2	<b>BESCHREIBUNG DES WMT .....</b>	<b>132</b>
5.3	<b>BESCHREIBUNG DER STICHPROBE .....</b>	<b>134</b>
5.4	<b>ERSTELLUNG VON WISSENSSTRUKTUREN .....</b>	<b>136</b>
5.4.1	MODELL 1 .....	138
5.4.2	MODELL 2 .....	138
5.4.3	MODELL 3.....	140
5.4.4	MODELL 4.....	140
5.5	<b>ERGEBNISSE FÜR 24 ITEMS .....</b>	<b>141</b>
5.5.1	WISSENSSTRUKTUREN UND ERGEBNISSE FÜR ALLE ITEMS DES WMT .....	142
5.5.2	MODELL 5.....	144
5.6	<b>ERGEBNISSE FÜR DIE 15 LLTM KONFORMEN ITEMS DES WMT .....</b>	<b>146</b>
5.7	<b>DISKUSSION DER ERGEBNISSE .....</b>	<b>148</b>
6	<b>DISKUSSION.....</b>	<b>149</b>
7	<b>ZUSAMMENFASSUNG.....</b>	<b>154</b>
8	<b>LITERATURVERZEICHNIS .....</b>	<b>157</b>
9	<b>ANHANG .....</b>	<b>164</b>
9.1	<b>ANHANG A.....</b>	<b>164</b>
9.2	<b>ANHANG B.....</b>	<b>166</b>
9.3	<b>ANHANG C.....</b>	<b>169</b>
9.4	<b>ANHANG D.....</b>	<b>172</b>
9.5	<b>ANHANG E.....</b>	<b>173</b>
9.6	<b>ANHANG F.....</b>	<b>175</b>
9.7	<b>ANHANG G .....</b>	<b>176</b>
9.8	<b>ANHANG H.....</b>	<b>177</b>

# Abbildungsverzeichnis

<b>Abbildung 2.1</b> Hasse-Diagramm der Vermutungsrelation des in Bsp. 2.1 beschriebenen quasi-ordinalen Wissensraums.....	<b>8</b>
<b>Abbildung 2.2</b> Aufgaben- und Attributsstruktur .....	<b>18</b>
<b>Abbildung 2.3</b> Vier-Felder-Tafel für 2 Items .....	<b>19</b>
<b>Abbildung 2.4</b> „Gelöst/Nicht-gelöst“-Matrix für k Items .....	<b>19</b>
<b>Abbildung 2.5</b> Hasse-Diagramm der Vermutungsrelation der 5 Items des Beispieldatensatzes .....	<b>27</b>
<b>Abbildung 2.6</b> Hasse-Diagramm der Vermutungsrelation dreier Items sowie die Auftrittswahrscheinlichkeiten der daraus resultierenden Wissenszustände .....	<b>29</b>
<b>Abbildung 3.1</b> Hasse-Diagramm der Vermutungsrelation und Wissenszustände des Wissensraums A .....	<b>39</b>
<b>Abbildung 3.2</b> Hasse-Diagramm der Vermutungsrelation und Wissenszustände des Wissensraums B .....	<b>40</b>
<b>Abbildung 3.3</b> Hasse-Diagramme dreier unterschiedlich stark verbundener Vermutungsrelationen für 4 Items .....	<b>42</b>
<b>Abbildung 3.4</b> Hasse-Diagramm der Vermutungsrelation eines Wissensraumes mit zwei unverbundenen Itemmengen .....	<b>43</b>
<b>Abbildung 3.5</b> Hasse-Diagramme der 5 verschiedenen Vermutungsrelationen .....	<b>49</b>
<b>Abbildung 3.6</b> Wissenszustände der 5 Strukturen .....	<b>50</b>
<b>Abbildung 3.7</b> Verteilung der von den einzelnen Verfahren falsch klassifizierten Antwortmuster .....	<b>58</b>
<b>Abbildung 3.8</b> Hasse-Diagramm der Vermutungsrelation der 5 Items .....	<b>64</b>
<b>Abbildung 3.9</b> Verteilung der Anzahl der von KSFA und LCA falsch klassifizierten Antwortmuster.....	<b>68</b>
<b>Abbildung 4.1</b> Kontingenztafel aller möglichen Antwortkombinationen zweier Items.....	<b>81</b>
<b>Abbildung 4.2</b> Hasse-Diagramm der Vermutungsrelation dreier Items und die Wissenszustände des resultierenden Wissensraums .....	<b>87</b>
<b>Abbildung 4.3</b> Vier-Felder-Tafeln für 3 dichotome Items .....	<b>89</b>
<b>Abbildung 4.4</b> Hasse-Diagramm der Vermutungsrelation der Struktur 5.....	<b>94</b>
<b>Abbildung 4.5</b> Beschreibung der für die Konstruktion der Schachaufgaben verwendeten Motive.....	<b>98</b>
<b>Abbildung 4.6</b> Beispiel für ein Schachproblem mit den Motiven „Gabel“, „Pin“ und „Deckung“ .....	<b>98</b>
<b>Abbildung 4.7</b> Aufgaben zum „Zahlenreihen Ergänzen“ sowie deren Komponenten und Attribute .....	<b>99</b>
<b>Abbildung 4.8</b> Elementarkompetenzen der Geometrieaufgaben .....	<b>99</b>
<b>Abbildung 4.9</b> Typisches Beispiel für die „Geometrieaufgaben“ aus dem Wissensbereich um die Satzgruppe des Pythagoras .....	<b>100</b>
<b>Abbildung 4.10</b> Aufgaben zur Teilbarkeitslehre .....	<b>100</b>
<b>Abbildung 4.11</b> Die von Held und Korossy ausgewählten Aufgaben zur elementaren Algebra.....	<b>101</b>
<b>Abbildung 4.12</b> Beschreibung der für die Konstruktion der Schachaufgaben verwendeten Motive .....	<b>102</b>

---

<b>Abbildung 4.13</b> Beispiel für ein Schachproblem mit den Motiven „Elimination“, „Deckung“ und „Patt“ .....	<b>103</b>
<b>Abbildung 4.14</b> Beispiele für die von Wesiak verwendeten vier Aufgabentypen .....	<b>104</b>
<b>Abbildung 5.1</b> Typisches Beispiel des WMT .....	<b>132</b>
<b>Abbildung 5.2</b> Rohscoreverteilung des WMT .....	<b>134</b>
<b>Abbildung 5.3</b> Ordnung der Attribute der 3 Faktoren .....	<b>145</b>

# Tabellenverzeichnis

<b>Tabelle 2.1</b> Ergebnisse der ITA Analysen.....	<b>28</b>
<b>Tabelle 3.1</b> Auftrittswahrscheinlichkeiten der Antwortmuster in Abhängigkeit von der Wissenszustandsverteilung des Wissensraums A sowie den itemspezifischen Fehlerwahrscheinlichkeiten.....	<b>40</b>
<b>Tabelle 3.2</b> Auftrittswahrscheinlichkeiten der Antwortmuster in Abhängigkeit von der Stateverteilung des Wissensraums B sowie den itemspezifischen Fehlerwahrscheinlichkeiten .....	<b>40</b>
<b>Tabelle 3.3</b> Wissenszustände und deren Auftrittswahrscheinlichkeiten in der High- und Low Score Variante .....	<b>52</b>
<b>Tabelle 3.4</b> Scoreverteilung der Normalverteilungsbedingung .....	<b>53</b>
<b>Tabelle 3.5</b> Vergleich der 4 Verfahren hinsichtlich der Zahl korrekt reproduzierter Wissensstrukturen und falsch klassifizierter Antwortmuster.....	<b>54</b>
<b>Tabelle 3.6</b> Ergebnis des Friedman Tests zum Vergleich der 4 Methoden hinsichtlich der Anzahl falsch klassifizierter Antwortmuster .....	<b>54</b>
<b>Tabelle 3.7</b> Ergebnisse der Friedman Tests zum Vergleich der 4 Methoden pro Verteilung .....	<b>55</b>
<b>Tabelle 3.8</b> Ergebnisse der Wilcoxon Tests zum Vergleich von KSFA und ITLCA pro Verteilung.....	<b>56</b>
<b>Tabelle 3.9</b> Ergebnisse der 4 Methoden pro Simulationsbedingung.....	<b>56</b>
<b>Tabelle 3.10</b> Ergebnisse der Kruskal Wallis Tests zum Vergleich der Strukturen.....	<b>59</b>
<b>Tabelle 3.11</b> Ergebnisse der Kruskal Wallis Tests pro Verfahren hinsichtlich der Zahl der falsch klassifizierten Antwortmuster pro Verteilung .....	<b>59</b>
<b>Tabelle 3.12</b> Mittelwerte der absoluten Abweichungen der mittels ITLCA geschätzten von den in der Simulation verwendeten Fehlerwahrscheinlichkeiten.....	<b>60</b>
<b>Tabelle 3.13</b> LCA Ergebnis für ITA Lösung mit 28 Wissenszuständen.....	<b>61</b>
<b>Tabelle 3.14</b> Ergebnisse der Pearson- $\chi^2$ und Likelihoodquotiententests ( $L^2$ ) .....	<b>61</b>
<b>Tabelle 3.15</b> LCA Ergebnisse für ITA Lösungen mit 36 und 16 Wissenszuständen (States).....	<b>62</b>
<b>Tabelle 3.16</b> Ergebnisse der $\chi^2$ und Likelihoodquotiententests ( $L^2$ ).....	<b>63</b>
<b>Tabelle 3.17</b> Ergebnisse der ITLCA für Datensatz 1.....	<b>65</b>
<b>Tabelle 3.18</b> Ergebnisse der ITLCA für Datensatz 2.....	<b>66</b>
<b>Tabelle 3.19</b> Wissenszustände der Strukturen 6 und 7 und deren Auftrittswahrscheinlichkeiten .....	<b>69</b>
<b>Tabelle 3.20</b> Einfluss der Stichprobengröße auf die Zahl der pro Methode und Struktur falsch klassifizierten Antwortmuster.....	<b>72</b>
<b>Tabelle 3.21</b> Einfluss der Stichprobengröße auf die Zahl der pro Methode falsch klassifizierten Antwortmuster .....	<b>73</b>
<b>Tabelle 3.22</b> Einfluss der Stichprobengröße auf die Zahl der pro Methode und Simulationsbedingung falsch klassifizierten Antwortmuster .....	<b>73</b>
<b>Tabelle 3.23</b> Wilcoxon Tests zum Vergleich der Anzahl von ITLCA und der KSFA pro Struktur falsch klassifizierter Antwortmuster (N= 150) .....	<b>74</b>

<b>Tabelle 3.24</b> Wilcoxon Tests zum Vergleich der Zahl von ITLCA und KSFA pro Verteilung falsch klassifizierten Antwortmuster (N= 150).....	75
<b>Tabelle 3.25</b> Vergleich der für jede der vier Methoden falsch klassifizierten Antwortmuster getrennt nach Verteilung und Wissenszuständen.....	76
<b>Tabelle 4.1</b> Modellkonforme Auftrittswahrscheinlichkeiten der Antwortmuster .....	89
<b>Tabelle 4.2</b> Auftrittswahrscheinlichkeiten der Antwortmuster in Abhängigkeit von der Verteilung der Wissenszustände sowie der itemspezifischen Fehlerwahrscheinlichkeiten .....	95
<b>Tabelle 4.3</b> Ergebnisse der ISOP Modellkontrollen .....	105
<b>Tabelle 4.4</b> Ergebnis der Rasch Modellkontrollen für Datensatz 13 („Aufgaben zur induktiven Problemlösung“) .....	106
<b>Tabelle 4.5</b> Geschätzte Leichtigkeitsparameter der „Wahrscheinlichkeitsaufgaben“ für die Datensätze WK1, WK2 und die Gesamtdaten .....	110
<b>Tabelle 4.6</b> Ergebnis der ISOP Modellkontrollen .....	111
<b>Tabelle 4.7</b> Wissenszustände der 4 anhand von Datensatz WK1 konstruierten Wissensstrukturen .....	111
<b>Tabelle 4.8</b> Vergleich der Methoden zur Konstruktion von Wissensstrukturen (Datensatz WK1).....	112
<b>Tabelle 4.9</b> Die vier häufigsten Antwortmuster der Datensätze WK1 und WK2.....	113
<b>Tabelle 4.10</b> Wissenszustände der 4 anhand von Datensatz WK2 konstruierten Wissensstrukturen .....	114
<b>Tabelle 4.11</b> Vergleich der Methoden zur Konstruktion von Wissensstrukturen (Datensatz WK2).....	114
<b>Tabelle 4.12</b> Ergebnis der ISOP Modellkontrollen .....	116
<b>Tabelle 4.13</b> Ergebnis der Modellkontrollen zum Rasch Modell .....	117
<b>Tabelle 4.14</b> Vergleich der Methoden zur Konstruktion von Wissensstrukturen für die Aufgaben des Tests „Zahlenreihen Ergänzen“ .....	118
<b>Tabelle 4.15</b> Ergebnisse der 5 Klassenlösung der unrestringierten LCA.....	119
<b>Tabelle 4.16</b> Ergebnis der Modellkontrollen zum Rasch Modell und Itemschwierigkeitsparameter .....	121
<b>Tabelle 4.17</b> Ergebnis der ISOP Modellkontrollen .....	121
<b>Tabelle 4.18</b> Itemschwierigkeitsparameter geschätzt anhand von Datensatz 1 .....	122
<b>Tabelle 4.19</b> Wissenszustände der für die einzelnen Methoden resultierenden Wissensstrukturen.....	122
<b>Tabelle 4.20</b> Vergleich der zur Konstruktion von Wissensstrukturen verwendeten Methoden.....	123
<b>Tabelle 4.21</b> Wissensstrukturen bei Verwendung der ITA für die unterschiedlichen Datensätze .....	124
<b>Tabelle 4.22</b> Wissensstrukturen bei Verwendung der ITA* für die unterschiedlichen Datensätze.....	124
<b>Tabelle 4.23</b> Wissensstrukturen bei Verwendung der Itemschwierigkeiten für die unterschiedlichen Datensätze.....	125
<b>Tabelle 5.1</b> Ergebnis des Andersen Tests (N= 381) .....	135
<b>Tabelle 5.2</b> Ergebnis des Martin Löf Tests (N= 381) .....	135
<b>Tabelle 5.3</b> Ergebnisse des t-Tests für den Vergleich von Datensatz 1 und 2.....	135
<b>Tabelle 5.4</b> Ergebnis des Andersen Tests (N= 521) .....	136
<b>Tabelle 5.5</b> Ergebnisse der Modelltests zur Gültigkeit des LLTM für k=15 Items .....	136

---

<b>Tabelle 5.6</b> Q-Matrix der 24 Items des WMT .....	<b>137</b>
<b>Tabelle 5.7</b> Items des WMT mit den ihnen zugeordneten Attributen laut Modell 1 .....	<b>139</b>
<b>Tabelle 5.8</b> Items des WMT mit den ihnen zugeordneten Attributen laut Modell 4 .....	<b>141</b>
<b>Tabelle 5.9</b> Vergleich der Wissensstrukturen für 24 Items mittels DA Koeffizient.....	<b>142</b>
<b>Tabelle 5.10</b> Vergleich der mittleren minimalen Distanzen der für 24 Items erzielten Wissensstrukturen mit denen von Zufallsstrukturen.....	<b>143</b>
<b>Tabelle 5.11</b> Median und Quartile der pro Wissenszustand gelösten Aufgaben.....	<b>144</b>
<b>Tabelle 5.12</b> Items des WMT mit den ihnen zugeordneten Attributen laut Modell 5 .....	<b>145</b>
<b>Tabelle 5.13</b> Vergleich der Wissensräume anhand des CA und VC.....	<b>146</b>
<b>Tabelle 5.14</b> Vergleich der Wissensstrukturen für 15 Items mittels DA und DA* .....	<b>146</b>
<b>Tabelle 5.15</b> Vergleich der DA Koeffizienten der erzielten Wissensstrukturen für 15 Items mit denen von gleich großen Zufallsstrukturen.....	<b>147</b>
<b>Tabelle 5.16</b> Vergleich der Wissensräume anhand des CA und VC.....	<b>147</b>

---

# 1 Einleitung

Psychologische Tests sind wesentliche Bestandteile des Berufsalltags vieler Psychologinnen und Psychologen und finden nach wie vor im Rahmen der Selektionsdiagnostik (z.B. zur Personalauslese) Verwendung. Zunehmend gewinnt jedoch die „sequentielle Diagnostik“ (siehe z.B. Kubinger, 1995) an Bedeutung. Durch das Feststellen individueller Stärken und Schwächen einer Person ist es möglich, entsprechend abgestimmte Förderungsprogramme anzubieten. Das steigende Angebot an Lernsoftware und die dadurch entstehende Vielzahl an neuen Möglichkeiten erlaubt es, der vermehrten Nachfrage nach einer individuell abgestimmten Leistungsförderung nachzukommen. Zur Entwicklung von sogenannten tutoriellen Systemen, die entsprechend dem jeweiligen Wissensstand einer Person individuelles Lernen ermöglichen, ist es vor allem notwendig zu wissen, über welche Fertigkeiten eine Person verfügt und welche sie benötigt, um sich weiter entwickeln zu können. Weiters ist es im Sinne der Testgütekriterien „Zumutbarkeit“ und „Ökonomie“ wünschenswert, die Vorgabe der Testung adaptiv gestalten zu können. Adaptive Tests ermöglichen einen maximalen diagnostischen Informationsgewinn bei gleichzeitig minimaler Beanspruchung einer Testperson im Hinblick auf zeitliche, physische und psychische Komponenten.

Lange Zeit war adaptives Testen unmittelbar mit der Forderung nach Raschhomogenität der Items verbunden. Doignon und Falmagne (1985) formulierten mit der Wissensraumtheorie einen neuen testtheoretischen Ansatz, in dessen Rahmen sowohl die Bestimmung der individuellen Fertigkeiten als auch adaptives Testen ermöglicht wird, ohne die Items den strengen Forderungen des Rasch-Modells (z.B. Eindimensionalität oder Parallelität der Item-Charakteristik-Kurven) auszusetzen. Diese, neben der klassischen und der modernen Testtheorie, dritte Theorie psychologischer Tests basiert auf der Mengenlehre. Im Zentrum steht die Annahme der Existenz von Relationen zwischen Items, welche es ermöglichen, von der Lösung einer Teilmenge von Items auf die Lösung einer weiteren Teilmenge von Items zu schließen. Das primäre Problem der

Wissensraumtheorie stellt der deterministische Ansatz dar. Ein deterministisches Testmodell bietet zwar denkbar einfache Möglichkeiten der Modelltestung, stellt jedoch für die praktische Anwendung unrealistische Anforderungen und kann daher höchstens von akademischem Interesse sein. Somit war es unerlässlich, Überlegungen für mögliche probabilistische Varianten der Wissensraumtheorie zu entwickeln. Diese Annahmen führen in dem ursprünglich deterministisch formulierten Modell zu einer Charakterisierung von Personengruppen anhand latenter Antwortmuster. Diese Art der Charakterisierung findet sich jedoch bereits in der von Lazarsfeld und Henry (1968) dargestellten Latent Class Analyse (LCA).

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden nun erstmals die beiden Zugänge gegenüber gestellt, um Parallelen und Unterschiede herauszuarbeiten. Die Probabilisierung der Wissensraumtheorie stellt zwar eine deutliche Verbesserung für die Anwendbarkeit in einer realistischen Umgebung dar, es treten dadurch jedoch weitere Probleme in Erscheinung. So wird es unter anderem notwendig, Kennwerte zu entwickeln, die eine Abschätzung ermöglichen, inwiefern ein Modell die empirische Wirklichkeit hinreichend beschreibt. Es muss prüfbar sein, ob ein für einen gegebenen Datensatz formuliertes Modell als gültig angenommen werden kann. Umgekehrt wird es notwendig, für eine gegebene Itemmenge die den Items zu Grunde liegenden Relationen zu ermitteln. Aufgrund der aus dem Vergleich der LCA mit der Wissensraumtheorie resultierenden Erkenntnisse ergeben sich in weiterer Folge neue Lösungsansätze für diese zentralen Probleme der Wissensraumtheorie. Einerseits zeigt sich, dass die im Rahmen der Latent Class Analyse verwendeten Kennwerte für die Modellgeltung auch im Rahmen der Wissensraumtheorie angewandt werden können, andererseits wird ein neues, exakteres Verfahren zur Identifizierung von Wissensstrukturen vorgestellt, das anhand simulierter Datensätze den bisher im Rahmen der Wissensraumtheorie verwendeten Methoden zur Konstruktion von Wissensstrukturen aus Daten gegenübergestellt wird. Der Vorteil der Verwendung simulierter Datensätze liegt sowohl in der Kenntnis der den Daten zu Grunde liegenden Wissensstrukturen, als auch darin, dass durch das experimentelle Design mögliche Störfaktoren systematisch kontrolliert werden können. Weiters wird versucht, anhand der im Rahmen der Wissensraumtheorie verwendeten Methoden zur Konstruktion von

Wissensstrukturen Beziehungen zur modernen Testtheorie herzustellen und diese formal zu untermauern. Wie gezeigt werden kann, hängt die Geltung von Modellen der Item Response Theory (IRT) auf wissensraumkonforme Daten wesentlich von der Verteilung der Wissenszustände ab. Somit ist es möglich, Datensätze zu simulieren, die entweder nur der Wissensraumtheorie oder auch IRT Modellen entsprechen. Um die praktische Relevanz zu gewährleisten, werden daher für die Überprüfung der vermuteten Beziehungen im Rahmen der Wissensraumtheorie real erhobene Datensätze reanalysiert. Die beobachteten Beziehungen eröffnen abermals neue Methoden zur Konstruktion von Wissensstrukturen aus Daten. Diese neuen Methoden werden in weiterer Folge den bisher im Rahmen der Wissensraumtheorie verwendeten Methoden gegenübergestellt. Dabei wird darauf geachtet, dass die Validierung der Wissensstrukturen, welche mit Hilfe der verschiedenen Methoden gewonnen werden, an einem weiteren Datensatz erfolgt. Sofern die Größe der vorhandenen Datensätze es erlaubt, werden diese hierfür in zwei hinreichend große Teilstichproben aufgeteilt. Sollte eine Aufteilung aufgrund des zu geringen Stichprobenumfangs nicht möglich sein, werden neue Datensätze erhoben.

---

## 2 Wissensraumtheorie

### 2.1 Einführung

Ausgehend von den Arbeiten von Doignon und Falmagne (1985) ist die Wissensraumtheorie ein auf der Mengentheorie basierendes Rahmenmodell zur Wissensmodellierung und Wissensdiagnostik. Sie kann neben der klassischen und modernen Testtheorie als ein dritter, neuer testtheoretischer Ansatz verstanden werden, mit dem Ziel einer möglichst effizienten Schätzung des Wissenszustandes einer Person über ein bestimmtes Wissensgebiet. Es wird von der Annahme ausgegangen, dass durch die Vorgabe von Aufgaben, die sich mit einem bestimmten Thema beschäftigen, der Wissensstand einer Person erfasst werden kann. Da die Menge der vorzulebenden Aufgaben mitunter sehr groß ist, werden Relationen zwischen den Items angenommen, wodurch Rückschlüsse auf das Wissen einer Person möglich werden, ohne der Person alle Items vorgeben zu müssen. Diese Struktur, welche die Aufgaben zueinander in Beziehung setzt, bildet den Kern der Wissensraumtheorie. Im Folgenden werden die im Rahmen dieser Arbeit benötigten Begriffe der Wissensraumtheorie dargestellt. Für eine umfassende Darstellung sowie für einen Überblick über den Forschungsstand sei auf Doignon und Falmagne (1999) verwiesen.

## 2.2 Begriffserklärungen

### 2.2.1 Wissenszustand (Knowledge State)

Unter dem Wissenszustand ( $W$ ) einer Person versteht man jene Teilmenge vorgegebener Items, die diese Person unter idealen Bedingungen zu lösen vermag. Da in der Praxis diese idealen Bedingungen nicht herstellbar sind, muss bei konkreten Antworten damit gerechnet werden, dass eine Person Aufgaben, die zu ihrem Wissenszustand gehören, aus Unachtsamkeit nicht löst bzw. zufällig Aufgaben löst, die nicht zu ihrem Wissenszustand zählen. Der Wissenszustand einer Person ist daher im Allgemeinen nicht direkt beobachtbar und muss aus den gegebenen Antworten der Person erschlossen werden.

### 2.2.2 Wissensstruktur (Knowledge Structure)

Ein weiterer zentraler Begriff in der Wissensraumtheorie ist die Wissensstruktur ( $\Omega$ ). Eine Wissensstruktur ist die Menge aller Wissenszustände. Die trivialen Wissenszustände „kein Item gelöst“ und „alle Items gelöst“, welche unabhängig von der den Items zu Grunde liegenden Struktur angenommen werden können, sind Elemente jeder Wissensstruktur. Eine Wissensstruktur kann demnach folgendermaßen definiert werden: Ein Paar  $(Q, \Omega)$  wird als Wissensstruktur bezeichnet, wenn

- 1)  $Q$  eine endliche, nicht leere Menge von Aufgaben und
- 2)  $\Omega$  eine Familie von Teilmengen von  $Q$  ist, die zumindest die leere Menge sowie  $Q$  selbst enthält.

Die in  $\Omega$  enthaltenen Teilmengen sind die Wissenszustände. Die Menge  $Q$  wird die Domäne der Wissensstruktur genannt. Der Nomenklatur der Literatur zur Wissensraumtheorie folgend, wird die Zahl der in einer Wissensstruktur enthaltenen Wissenszustände mit  $|\Omega|$  bezeichnet;  $\emptyset$  bezeichnet die leere Menge. Anstatt der Darstellung eines Wissenszustandes  $W$  als Menge der von einer Person unter idealen Bedingungen lösbaeren Aufgaben, kann auch die Darstellung