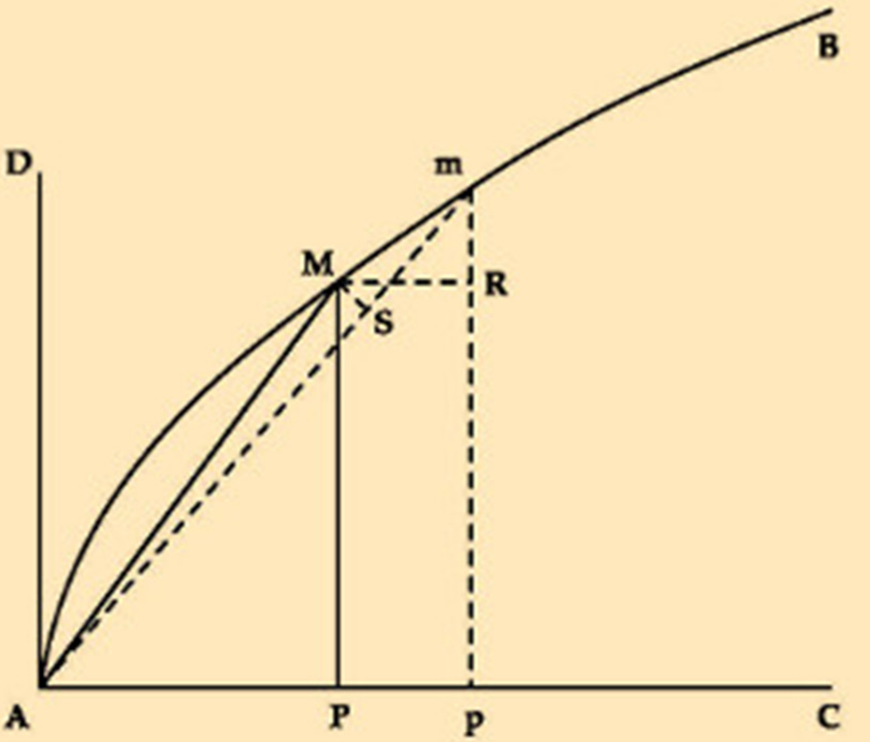
Detlef D. Spalt

Die Analysis im Wandel und im Widerstreit

Eine Formierungsgeschichte ihrer Grundbegriffe



VERLAG KARL ALBER

Detlef D. Spalt

Die Analysis im Wandel und im Widerstreit

VERLAG KARL ALBER

Titel wie »6000 Jahre Mathematik«, »5000 Jahre Geometrie«, »4000 Jahre Algebra« und »3000 Jahre Analysis« sind grundfalsch. Die Mathematik, mit der wir es zu tun haben, hat ihre Formierungsgeschichte in den letzten knapp 400 Jahren erfahren.

Diese Studie zeigt, wie heftig um jeden der Grundbegriffe der Mathematik (wie Zahl, Größe, Wert, Funktion, Differenzial) gerungen wurde, bis er in der heutigen Weise geprägt war. Es ist eine unendliche Geschichte um kleinste Details, die in kürzester Zeit im Streit durchfochten wurde und dennoch nicht ohne Vagheiten auskam, weil sich nichts Besseres finden ließ - für die Rechnung aber reichte es allemal.

Zugleich bedeutet die Darstellung der Analysis seit Descartes eine Würdigung der Arbeit der Mathematiker und deren Konsequenzen: den dramatischen Begriffs- und damit Bedeutungswandel grundlegender Lehrsätze der Analysis.

Der Autor:

Detlef D. Spalt studierte 1970–75 Mathematik an der TH Darmstadt, 1981 Promotion mit einem Thema zur Analysisgeschichte, 1992 Ablehnung der Habilitation, Gastvorlesungen an den Universitäten Salzburg (mehrfach), Marburg und derzeit Frankfurt am Main.

Detlef D. Spalt

Die Analysis im Wandel und im Widerstreit

Eine Formierungsgeschichte ihrer Grundgeschichte

Verlag Karl Alber Freiburg / München

Originalausgabe

www.verlag-alber.de

Satz: Detlef D. Spalt (LaTeX)
Herstellung: AZ Druck und Datentechnik, Kempten
Umschlagmotiv: l'Hospital 1696, Fig. 1

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier (säurefrei)
Printed on acid-free paper
Printed in Germany

ISBN 978-3-495-48740-2
E-ISBN 978-3-495-80785-9

dem Andenken an Birgit

(1964–2013)

Vorwort

Was ist die Mathematik?

Dieses Buch beleuchtet diese Frage, indem es den *Wandel* der Mathematik aufzeigt. Die mächtigste mathematische Theorie, die wir heute kennen, die Analysis (früher: Differenzial- und Integralrechnung, auch: Infinitesimalrechnung), wurde in den vergangenen dreieinhalb Jahrhunderten geschaffen. Wie dies möglich wurde, wird hier gezeigt.

Für wen?

Wer gar nicht weiß, wovon die Analysis handelt, wird nach dem ersten Kapitel nicht mehr leicht Gewinn aus diesem Buch ziehen. Wer sich jedoch bereits ein wenig mit „Funktionen" und „Stetigkeit", mit „Reihen" und „Konvergenz", mit „Ableitung" und „Integral" befasst hat, kann dieses Buch verstehen.

Die Grundbegriffe der Analysis werden hier nicht erklärt, sondern ihre Kenntnis wird vorausgesetzt – genauer: die Kenntnis ihrer *heutigen* Bedeutung. *Wie diese heutige Bedeutung zustande kam,* ist Gegenstand des Buches.

Die Probleme von Geist und Materie, Möglichkeit und Wirklichkeit, Sinn und Bedeutung mathematischer Begriffe haben das Denken auch der großen Mathematiker bestimmt. Diese Aspekte gehören daher zum Gegenstand dieses Buches.

Warum?

Merkwürdigerweise scheint sich noch niemand für die Erforschung dieses Themas erwärmt zu haben.

Wie?

Die Aufgabe ist ebenso einfach wie schwer: Was die Mathematik ist, wissen wir nur aus Texten. Also erfahren wir, was die Mathematik *war*, indem wir die *früheren Texte* (respektvoll „Quellen" genannt) lesen.

So einfach diese Feststellung war, so schwierig ist ihre Realisierung. Denn schnell zeigt sich: Die Lektüre der Quellen ist nicht trivial, die Früheren haben sich ganz anders ausgedrückt als wir heute. Dieses Ganz-Andere zu verstehen ist nun die Aufgabe, und eine Lösung dieser Aufgabe bringt eine Antwort auf unsere Frage zutage: welches der Wandel der Analysis war.

Die Grundlage dieses Buches sind die Originaltexte der Früheren.

Woher?

Der folgende Text ist das Skriptum der Vorlesung, die im Wintersemester 2013/14 im Fachbereich Informatik und Mathematik der Universität Frankfurt gehalten wurde. Im Vordergrund steht also die Lesbarkeit. Die zahlreichen Querverweise innerhalb des Textes (die typografisch in den Rand verschoben wurden) müssen die im Vortrag gegebenen ergänzenden Hinweise ersetzen und stellen die Zusammenhänge der Quellen her. Sie werden auch jenen nutzen, die im Buch eher nachschlagen als es ganz lesen wollen.

Dennoch enthält dieser Text nicht weniges Neue, erhebt also wissenschaftlichen Anspruch. Deswegen war alles zu belegen, die Herkunft jeder Quelle genau anzugeben. Das umgibt den Text mit einigem Brimborium, das wissenschaftlich unverzichtbar ist: *Fußnoten* als Verweise auf das *Literaturverzeichnis* sowie die üblichen *Register*. Sie mögen den Fachleuten – soweit sie sich heranwagen – zur Erschließung des Textes dienlich sein.

(Da die hier verfolgte Vorgehensweise neu ist, ging es nicht ganz ohne *neue* Fach-S. 731← begriffe. Sie sind im Register „Technik“ gesondert zusammengestellt und werden im Text ganz sanft eingeführt.)

S. ix ff.← Das *Inhaltsverzeichnis* ist ausführlich gehalten. Es soll dem Neuling die Sache schmackhaft machen und zur Orientierung dienen.

Die Vorlesung dauerte ein Semester, und zur Erstellung des Textes hatte ich jenes halbe Jahr Zeit. (Es gab freilich ein paar Jahrzehnte vorgängiger Befassung mit dem Thema, in den letzten beiden Jahrzehnten nur nebenberuflich.) Die für den Druck natürlich erforderliche Überarbeitung des Skriptums[a] erfolgte danach, ebenfalls S. xxvi← nebenberuflich und mit der unten genannten Unterstützung. Dabei konnte noch manche der offenen Fragen behandelt werden.[1] Jede neue Überarbeitung würde den Text maßgeblich ausweiten. Das würde ihn gewiss reichhaltiger machen, wohl aber kaum lesefreundlicher. Insofern mag es klug sein, der Arbeit an diesem Text ein – in gewissem Sinne: willkürliches – Ende zu setzen. Damit ist klar: Dieser Text kann und will nicht das letzte Wort in seiner Sache sein.

Ohne ein leistungsfähiges Satzsystem wie LaTeX wäre diese Aufgabe nicht in dieser Zeitspanne zu bewältigen gewesen.[2] Ich nutze das `KOMA-Script` von Markus Kohm und Jens-Uwe Morawski und profitiere unter vielem anderen insbesondere von den Paketen: `parallel` von Matthias Eckermann (auch wenn es sich dabei leider nur um eine Beta-Version handelt, die noch einigen Beschränkungen unterliegt) für die zweisprachigen Zitate; `bigfoot` von David Kastrup für den

[a] Detlef D. Spalt 2014/2015, Die Analysis im Wandel und im Streit – Die Entwicklung der Grundlagen der Analysis, in den Quellen gelesen, Universität Frankfurt. Das Vorgängerprojekt war eine Vorlesung am Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Marburg im Sommersemester 2008 mit dem Skriptum: Geschichte der Analysis, 679 Seiten.

[1] Der Abschnitt „Leibniz’ Begriff der Zahl“, S. 79–100, kam so zustande.

[2] Unverzichtbar: Mittelbach und Goossens [2]2005, nützlich auch: Niedermair und Niedermair 2004, wohl auch Lignau 2007.

Fußnotensatz sowie `picins` aus dem Jahr 1992 von J. Bleser und E. Lang, das leider nicht mehr mit `texlive` verteilt wird. Besonders danke ich Bernd Raichle, der mir einst (binnen Stunden) den ergänzenden Code zum `ngerman.sty`-File für die fakultative Silbentrennung beim Apostroph sandte. Ein effizienter Editor wie der GNU-Emacs, der viele Dateien parallel öffnen kann und dabei für jede eine ausgeprägte History-Funktion vorhält, erleichtert die Arbeit enorm.

Ich danke Herrn Lukas Trabert vom Verlag Karl Alber dafür, dass er sich prompt zur Publikation bereit erklärt, Wohlwollen signalisiert und mir bei der Gestaltung des Textes freie Hand gelassen hat.

Inhalt

Verzeichnisse

Einleitung

> ANDREA: Aber ich sehe doch, dass die Sonne abends woanders hält als morgens! Da kann sie doch nicht stillstehen! Nie und nimmer.
> GALILEI: Du siehst! Was siehst du? Du siehst gar nichts. Du glotzt nur. Glotzen ist nicht sehen.
>
> (Bertolt Brecht: Leben des Galilei)

Viele Menschen, darunter auch Mathematiker, glauben, in mathematischen Lehrsätzen seien absolute Wahrheiten ausgesprochen. Mathematik treiben sei gewissermaßen ein Dienst am Sein.[3] Dieser Glaube hat seine Reformation noch vor sich. Er blendet die Tatsache aus, dass ein mathematischer Lehrsatz – zuallererst ein *Satz* ist, ein sprachliches Konstrukt. Als sprachliches Konstrukt aber unterliegt jeder Satz, auch der mathematische Lehrsatz, vielfachen Bedingungen, oft auch solchen kontingenter Art. (Bemerkenswerterweise gab es sogar Historiker der Mathematik, denen diese Reformation ihres Glaubens nicht gelang: siehe die „Einleitenden Bemerkungen“ in OSKAR BECKERS *Die Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung* aus dem Jahr 1954.[4])

Dazu gehören zunächst die allgemeinen Unwägbarkeiten des Verständigungsprozesses: Ist der Sachverhalt zutreffend formuliert? Ist die Formulierung angemessen verstanden? Was ist überhaupt der Sinn des Satzes?

---

[3] Aller Anfang ist schwer. Ich habe mir hier KURT FLASCH zum Vorbild genommen, der einmal so begonnen hat:

> „Viele Menschen, darunter auch einige Philosophen, stellen sich Philosophie als ruhige Weisheit oberhalb aller Parteiungen vor.“ (Flasch 2008, S. 7)

[4] Die Erklärung ist leicht: OSKAR BECKER (1889–1964) war Platonist (zum „Übergeschichtlichen“, sagt er, gehört die „Mathematik mit ihren »ewigen Wahrheiten«“ – Becker 1943/44, S. 67). Dies erklärt sich unmittelbar aus BECKERS HEIDEGGER-Gefolgschaft, denn gut HEIDEGGER’sch ist eine Rede „entbergend“, und „Wahrheit“ ist „Unverborgenheit“ (dazu Givsan 1998, Anmerkung 63, S. 538 f.). Auch war BECKER, wie HEIDEGGER, Rassist („Philosophie ist [...] eben Schicksal: des Einzelnen, des Volkes, der Rasse selbst.“ – Becker 1938, S. 81; siehe auch Anmerkung 36 auf S. 71), sogar enthusiastischer Nationalsozialist:

> „Der politische Führer von Rang erhebt sich über das bloße (wenn auch eigentliche) Dasein seines vereinzelten Selbst in einer »wider-spännstigen Gefügtheit« (παλίντος ἁρμονία) von Existenz und Para-Existenz.“ (Becker 1943/44, 95, Anmerkung 57, letzter Satz; im Wiederabdruck Becker 1984 fehlt übrigens dieser Satz wie manches andere, auffälligerweise stets ohne Hinweis auf die Auslassung.)

Dazu gehört aber auch eine weit tiefer liegende Frage: *Welche* Sprache ist der Mathematik angemessen?

Mathematik als Symbolsprache

Heute liebt Mathematik Symbole. Genauer: Mathematik liebt die Symbole, seit sie Symbole nutzt. Symbole sind ein Grundgerüst ihrer Theoriebildung, je neuer die Zeit, desto mehr.

In der Wahl ihrer Symbole ist die Mathematik sehr konservativ: Neu eingeführte Zeichen für neue Gegenstände werden rasch kanonisiert und dann auf Dauer beibehalten. Dabei kann das Symbol doch, prinzipiell gesprochen, *beliebig* gewählt werden. Diese Wahlfreiheit aber wird gewöhnlich nur zur Zeit der Erfindung genutzt, gleichgültig, wie exotisch die Erstwahl war. GEORG CANTOR hat zur Bezeichnung der kleinsten unendlichen Kardinalzahl – ein von ihm erfundener S. 186,← Anm. 117 Begriff – einen (indizierten) hebräischen Buchstaben eingeführt ($\aleph_0$, gesprochen: Alef-Null), und der hat sich bis heute erhalten.

Die Bedeutung(en) eines Symbols

Diese Konstanz der Symbolwahl in der Mathematik verleitet dazu, auch eine Konstanz der *Bedeutung* der Symbole in der Mathematik zu vermuten. Eine solche Hypothese zeichnet ein glanzvolles Bild: DESCARTES hat im Jahr 1637 das x erfun- S. 25← den (DESCARTES nutzte zuerst z), und das verwenden wir noch heute – seht her, so wächst und gedeiht die Mathematik!

Dieses glanzvolle Bild ist jedoch ein Trugbild. Denn ganz sicher ist die Mathematik kein formales Hantieren mit Symbolen, die jeglicher Bedeutung bar sind. (Gleichwohl gab es auch diese Auffassung von der Mathematik – wir werden dar- S. 465, 474← auf im vorletzten Kapitel zu sprechen kommen.) Sondern die Symbole in der Mathematik symbolisieren *etwas:* Symbole bezeichnen mathematische Gegenstände.

Doch anders als in der Regel die Symbole unterliegen die mathematischen Gegenstände *grundsätzlich* und *immer* einem geschichtlichen Wandel. Diesen Wandel festzustellen und zu analysieren ist Gegenstand der geschichtlichen Mathematik.

Es ist richtig: Noch heute verwenden wir die von DESCARTES erfundene Gleichungssymbolik – auch wenn wir für „ist gleich“ ein anderes Zeichen schreiben S. 25← als DESCARTES (er nutzte „ æ “ oder „ ∝“), nämlich das von ROBERT RECORDE ein- S. 45← geführte Zeichen „=“, freilich in weit kürzerer Form als dieser. Doch das x des DESCARTES verstehen wir heute in gänzlich anderer Weise als er.

Um welchen Wandel es sich hier handelt, das ist eines der Themen dieses Buches.

Wandel der Mathematik

Die Mathematik wandelt sich, natürlich, als Ganzes. Es werden nicht nur neue Resultate gewonnen (neue Sätze formuliert und bewiesen, offene Probleme gelöst und andere formuliert), sondern auch die eingesetzten Mittel wandeln sich, die Begriffe und Methoden.

Die Darstellung dieses Wandels, genannt „Mathematikgeschichte“, bevorzugt jedoch traditionell die Beschreibung der neu erzielten Resultate. Die Beschreibung jener Bedingungen, die für die Gewinnung dieser neuen Resultate erforderlich waren: die gewandelten Begriffe und Methoden, werden gründlich vernachlässigt.

Der maßgebliche Grundbegriff der Analysis ist der Begriff „Größe“. Er war seit der Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung durch NEWTON und LEIBNIZ bis über die Mitte des 19. Jahrhunderts hinaus in Gebrauch, also rund zweihundert Jahre lang. Das jüngste deutschsprachige Buch zur Geschichte der Analysis[a] verzeichnet ihn nicht einmal in seinem Register.

Das ein Dutzend Jahre früher erschienene Gemeinschaftswerk zur Analysisgeschichte[b] hat etliche Registereinträge zum allgemeinen Größenbegriff und führt sogar einen dieser Begriffe ausdrücklich an[c] – doch jenes Kapitel, das die verheißungsvolle Überschrift „Das Ende der Größenlehre: Grundlagen der Analysis 1860–1910“ trägt[d], kommt ohne jede Äußerung zum damaligen Begriff „Größe“ aus (und gibt auch keine Erklärung für dieses Phänomen).

Gegenstand dieses Buches

Das hier vorliegende Buch will ein erster Versuch sein, diesen offenkundigen blinden Fleck der gängigen Geschichtsschreibung der Analysis (und man darf mit leichter Übertreibung sagen: fast aller Mathematikgeschichtsschreibung) ein wenig auszuleuchten.

Hier geht es also nicht darum, die *Spitzen*ergebnisse der behandelten Autoren darzustellen.[5] Vielmehr konzentriere ich mich auf den gegenteiligen Aspekt: Mich interessieren die *Basis*ergebnisse der untersuchten Texte. Ziel ist es deshalb, die jeweiligen *Grund*begriffe der Autoren aufzuklären – und die Bedeutung dieser Begriffsklärungen für *einige* der vom betrachteten Autor erzielten Resultate zu erläutern. Hier kann keine Vollständigkeit angestrebt werden, es wird Forschungsbedarf bleiben.

Klarerweise haben die jeweils erzielten Spitzenergebnisse ihren Sinn und ihre Bedeutung NUR *innerhalb jenes begrifflichen Rahmens, den die verwendeten Grund-*

[a]Sonar 2011 [b]Jahnke 1999
[c]Jahnke 1999/2003, S. 134 [d]Epple 1999/2003

[5]Das ist freilich nicht ungewöhnlich. Die Spitzenergebnisse, die etwa HILBERT in seinem Nachruf auf WEIERSTRASS anführt (Hilbert 1965, Bd. 3, S. 330–338), finden sich weder in Jahnke 1999 (und Jahnke 2003) noch in Sonar 2011 genannt, werden jedoch sehr wohl in Dieudonné 1985 ausführlich behandelt.

begriffe abstecken. Diese Einsicht setzt freilich jene Reformation des naiven Mathematikverständnisses voraus, die eingangs angesprochen wurde.

Deswegen erscheint es nicht als unvernünftig, die Arbeit an mathematischen Texten mit der Klärung der dort gebrauchten Grundbegriffe zu beginnen. Dies gilt jedenfalls für geschichtliche Texte – also solche, bei denen der zugrunde gelegte Begriffsrahmen nicht a priori der heutige sein wird.

In seinen „Anfangsgründe[n] einer allgemeinen Charakteristik“ schreibt LEIBNIZ im Jahr 1677:

> „Weshalb kein Mensch bisher [...] sich mit einem so wichtigten Gegenstande befasst hat, darüber habe ich mich oft gewundert. Denn wäre man nur streng methodisch verfahren, hätten sich gleich am Anfang solche Betrachtungen aufdrängen müssen [...].
>
> Der wahre Grund aber, weshalb man den Zugang verfehlt hat, liegt wohl darin, dass die Prinzipien meistens trocken und wenig reizvoll sind, und man sie daher, nachdem man sie nur oberflächlich gestreift, auf sich beruhen lässt.“ (Leibniz 1996*b*, S. 49)

Ich möchte mich hier an LEIBNIZ halten. Ich ersetze seine „Prinzipien“ profaner durch „Grundbegriffe“ – und hoffe, die Sache nicht gänzlich reizlos gestalten zu können.

Ergebnisse

Im Ergebnis wird sich herausstellen: Manches frühere Resultat hat *im Lichte der Begrifflichkeit seines Autors* – in diesem Buch werden nur männliche Autoren behandelt, ohne damit Frauen zu diskriminieren – eine andere mathematische Bedeutung, als es eine heutige Leserschaft denkt, die bloß das Resultat anschaut, ohne sich einen einzigen Gedanken über die Bedeutung der vom Verfasser *gemeinten* Begriffe gemacht zu haben.

Als Konsequenz dieser Begriffsanalyse wird sich zeigen: Lieb gewonnene (und populäre) Urteile müssen revidiert werden. Um die wichtigsten Revisionen vorweg zu nennen:[6]

(i) LEIBNIZ hat die Differenzial- und Integralrechnung nicht nur erfunden, son-
S. 109← dern er hat beide Lehren auf das Sorgfältigste und völlig korrekt begründet. Leider sind diese korrekten Beweise seinen Zeitgenossen nicht bekannt geworden.

(ii) Im Jahr 1821 hat CAUCHY in strenger Weise eine *Alternative* zur damals be-
S. 344← stehenden *wie auch* zur heutigen Analysis formuliert, und zwar eine (alternative) *Standard-Analysis.*

(iii) Das alte und heute überall anzutreffende Urteil, der moderne Funktionsbegriff verdanke sich DIRICHLET, muss revidiert werden: Erst DIRICHLETS Schüler
S. 370← RIEMANN hat die Funktion als eindeutige ‚Wert-zu-Wert‘-Zuweisung bestimmt.

[6] Das Erstgenannte verdankt sich nicht meinen eigenen Forschungen, sondern wird hier nur berichtet. Das Zweitgenannte ist bereits mehr als zwanzig Jahre alt, wird jedoch in der Fachliteratur (Jahnke 1999, Sonar 2011) bislang nicht bemerkt – zu SONARS Lesefehler siehe Anmerkung 233 auf S. 328 – und daher hier nochmals angesprochen.

(iv) Und schließlich wird sich zeigen: Die allgegenwärtige Heroisierung von WEIERSTRASS als dem Begründer einer „strengen" Analysis, der den Teufel der „unendlich kleinen Größen" mittels Epsilontik aus den Grundlagen der Analysis vertrieben und diese somit geklärt habe, ist mit den tatsächlichen Gegebenheiten völlig unvereinbar. Darüber hinaus verkennt dieses Urteil die mathematischen Konsequenzen der Wesensänderung der Analysis ab 1872. → S. 444

In diesem Sinne erhebt der vorliegende Text den Anspruch, die bisherige Geschichtsschreibung der Analysis in einigen grundlegenden Aspekten zu revidieren.

Methode

Die Vorgehensweise in einer solchen Studie ist durch ihren Gegenstand bestimmt: Es müssen die Originaltexte gelesen und analysiert werden.

Dabei lege ich großen Wert auf das *genaue* Lesen. Und es zeigt sich: Dadurch kommt manches Erstaunliche zutage, etwa die in den deutschen Texten des 19. Jahrhunderts chronische Schlamperei, eine „Veränderliche" und ihre „Werte" nicht sauber auseinanderzuhalten! Diese Tatsache steht ganz eklatant im Widerspruch zu dem so gern verliehenen Ehrentitel „Zeitalter der Strenge" für das 19. Jahrhundert.[7]

Damit unterscheidet sich der vorliegende Text grundlegend von den üblichen[8] Büchern zur (Analysis-)Geschichte: *Hier kommen die früheren Mathematiker selbst zu Wort, und zwar ausführlich* (manchmal vielleicht ein wenig zu ausführlich?), statt nur in einer Interpretation oder mit einem aus dem Zusammenhang gelösten Satz oder wenigen solchen Sätzen. Und ihre Behauptungen werden *penibel* auf ihre *Bedeutung* und auf ihre *Richtigkeit* befragt. Dabei erlauben es die hier wiedergegebenen Originalpassagen den Lesenden, sich ein eigenes Urteil zu bilden, hin und wieder vielleicht auch eines, das der hier gegebenen Deutung widerspricht.

Hinzu kommt als wesentliches Element: Die *Verbindungen,* die diese Texte untereinander haben, werden hier ausdrücklich aufgezeigt. Die Texte werden zueinander in Beziehung gesetzt – eine Verfahrensweise, die sonst eher selten zu finden ist. Dabei ist diese Verbindung keineswegs immer eine Kontinuität, sondern sie kann auch strittig sein. Wunderbar ist etwa die – direkt ausgetragene – Kontroverse zwischen JOHANN BERNOULLI und LEIBNIZ um die Existenz der „unendlich kleinen" Zahlen, → S. 179 – 187 beeindruckend ist WEIERSTRASS' hartnäckiger Widerstand gegen die durch RIEMANN initiierte völlig neuartige Technik der relationalen Begriffsbildung → S. 388 – 439 in der Analysis.

[7] Auch meine 1991/92 formulierte Neudeutung der CAUCHY'schen Analysis verdankt sich übrigens dieser Vorgehensweise. Ob die Tatsache, dass diese Neudeutung bisher keine ernsthafte Kritik erfahren hat, dieser ungewohnten Vorgehensweise geschuldet ist, muss Spekulation bleiben.

[8] Eine eindrucksvolle und sehr schöne Ausnahme, freilich mehr Nachschlagewerk als Lesebuch, ist *A history of algorithms* von JEAN-LUC CHABERT. Auch das bereits genannte Buch Becker 1954 bildet eine Ausnahme, ebenso *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechung von den Anfängen bis 1933* von IVO SCHNEIDER. – Von anderer Art sind die verschiedenen „Quellenbücher", die jeweils längere Originalpassagen bedeutender Autoren weitgehend unkommentiert aneinanderreihen.

Wie sich die jeweilige Textauswahl gestaltet, hängt vom Autor, dessen Arbeitsstil und dem aktuellen Erschließungsgrad der Quellen ab.[9] Der derzeit fortgeschrittene Stand der Retrodigitalisierung der Bibliotheksbestände erleichtert eine solche Studie enorm, ermöglicht sie vielleicht gar erst,[10] jedenfalls einem Freizeit- oder Saisonwissenschaftler. Der kostenfreie Zugriff auf die Datenbanken der aktuellen Sekundärliteratur ist derzeit leider jedoch vielfach nur aus einem Universitätsnetz heraus möglich.

Glücklicherweise hat es heute den Anschein, dass wir auch die ältesten hier relevanten Texte nun zur Verfügung zu haben, nachdem die LEIBNIZ-Edition in den letzten zwanzig Jahren endlich einen deutlichen Fortgang erfahren hat. (Ein Fachartikel mit einer ausführlichen Darstellung und eingehenden Analyse der LEIBNIZschen Begründung seines Differenzialkalküls erschien vier Monate nach Beginn der Arbeit am Manuskript des vorliegenden Buches, also gerade noch rechtzeitig.)

Den Text habe ich im Wintersemester 2013/14 als Skriptum zu der Vorlesung erstellt, die ich im Fachbereich Informatik und Mathematik der Universität Frankfurt halten durfte. Er wurde nach dem Vortrag an einigen Stellen verbessert. (Das letzte Kapitel kam aus zeitlichen Gründen nicht mehr zum Vortrag.) Dieser Charakter des Textes sei besonders betont. Hier wird kein Endgültigkeitsanspruch erhoben. Da ich für fast keinen der hier behandelten Autoren als Spezialist gelten darf, werden im Einzelnen Ergänzungen oder Korrekturen erforderlich sein. Doch scheint mir der Forschungsstand reif, den Mathematikstudierenden Gelegenheit zu geben, über die Fragwürdigkeit des ihnen üblicherweise als unhinterfragbar vorgesetzten Lehrgebäudes Analysis – im *Einzelnen* wie im *Ganzen* – nachzudenken. (Ob die für die Studieninhalte Verantwortlichen dies wollen, muss sich zeigen.)

Grenzen dieser Darstellung

Der vorliegende Text beruht auf einer vor rund einem Vierteljahrhundert begonnenen Forschung. Da diese Forschungsperspektive auf heftigste Ablehnung stieß,[e] konnte ich sie nicht laufend betreiben. Seit dem Sommersemester 2008 in Marburg vermochte ich wieder mehr Zeit dafür zu erübrigen.

Das Vorliegende ist die Momentaufnahme meines derzeitigen Wissensstandes. Nicht alles darin konnte in gleicher Intensität bedacht werden; manches Urteil wird sich vielleicht bald als revisionsbedürftig erweisen. Wer diesen Text als eine neue Perspektive auf die Mathematik liest, die heute noch eine Forschungsperspektive ist, wird ihm gerecht.

[e] Spalt 1996

[9] Eine weitere Bemerkung zur Methode findet sich in der Anmerkung 340 auf S. 454. Eine ausführlichere Darlegung meiner Vorgehensweise ist in Spalt 1996 nachzulesen.

[10] Inzwischen sind die meisten der klassischen Druckwerke als Datei verfügbar – siehe das Literaturverzeichnis. Sonar 2011 arbeitet noch ganz ohne digitalisierte Originale, dafür aber etwa mit einem „photokopierten Taschenbuch nach [*sic*] der Erstausgabe“ (von Bolzano 1975*a*).

Wiedergabe der Quellen

Die Grundlage dieser Studie sind geschichtliche Quellen. Sie werden hier auszugsweise wiedergegeben, in aller Regel in Form von Originalzitaten.

Nicht alle maßgeblichen Quellen sind ursprünglich in deutscher Sprache verfasst. Daher wurden sie übersetzt, ausgenommen ein Satz Newtons und ein Satz des Newton-Herausgebers Whiteside sowie Hamiltons kritisches Urteil zu einer Newton'schen Vorgehensweise. → S. 155 Wo es erforderlich oder nützlich erschien, wird die Quelle mit abgedruckt, um Sprachkundigen leicht ein eigenes Urteil zu ermöglichen.

Wenn ein fremdsprachiger Text von mir übersetzt ist, sind keine Anführungszeichen gesetzt – es sei denn, es handelt sich um ein Kurzzitat; in diesem Fall bin ich als Übersetzer nur an der (fremdsprachigen) Quellenangabe erkennbar, beim Langzitat jedoch an der Einrückung.

Bei den eingerückten Langzitaten stehen immer dann Anführungszeichen, wenn es sich um wörtliche Wiedergaben handelt. Bei einem Autor wie Bolzano aber → z. B. S. 285 muss ich manchmal zu einer Sondermaßnahme greifen: Gelegentlich paraphrasiere ich seine gewundenen Ausführungen. In solchen Fällen stehen in den eingerückten Langzitaten keine Anführungszeichen. (Das gilt nicht nur bei Bolzano, sondern generell.) In diesen Fällen ist der Quellenangabe am Ende des Langzitats → z. B. S. 287, 341 dann ein „Vgl." vorgesetzt.

Alles – und *nur das* –, was in *doppelten* Anführungszeichen steht, ist Zitat; handelt es sich um ein einzelnes Wort oder einen zusammengesetzten Begriff, kann es sich auch um einen allgemein üblichen mathematischen Begriff handeln.

In *einfache* Anführungszeichen gesetzt habe ich jene Begriffe, die ich als methodische Hilfsmittel selbst gebildet habe. Sie sind in einem eigenen Register am → S. 731 Buchende zusammengefasst.

Die deutschen Fassungen der Quellen *wie auch die deutschsprachigen Originale* werden rigoros in der aktuellen Rechtschreibung (bei deutschsprachigen Quellen jedoch nicht in der heute gültigen Zeichensetzung) wiedergegeben – natürlich mit der Ausnahme der Titel und auch dann nicht, wenn es sich um ein Sprachgemisch handelt, wie es sich gelegentlich z. B. bei Leibniz findet. → S. 124 Einzig Eulers Formulierungen aus seiner *Vollständige[n] Anleitung zur Algebra* wurden nur moderat den heutigen Lesegewohnheiten angepasst, → S. 221 da bei diesem Text eine der wenigen Gelegenheiten besteht, Eulers Mathematik im Original *und* in deutsch zu lesen. (Und natürlich bleiben auch Freges „Caerimonien" erhalten.) → S. 469, Fußnote

Die Hervorhebungen der Originale wurden beibehalten, jedoch in der Regel in *kursivierter* Form wiedergegeben. *Ergänzte Hervorhebungen* sind, wo nicht anders ausgewiesen, durch eine über dem ersten Buchstaben gesetzte Tilde gekennzeichnet: *ẽrgänzt.*

In [. . .] stehen stets meine *Abänderungen* in einem Zitat, in seltenen Fällen werden diese Änderungen stattdessen vor dem Zitat vermerkt. (Wenn der Quelltext ergänzende Klammerpassagen enthält, weiche ich auf {...} aus.) In ⌈. . .⌉ stehen meine *Hinzufügungen* in einem Zitat, die im Text *dem Sinn nach,* jedoch *nicht als*

Wort enthalten sind; werden diese Hinzufügungen des Übersetzers von mir zitiert, geschieht dies so: ⌊. . . ⌋. Nicht von mir rührende Hinzufügungen in einem Zitat sind durch ⟨. . .⟩ bezeichnet. Wenn ich in einer zitierten Übersetzung ein originalsprachliches Wort ergänze, geschieht dies stets in (. . .).

Zur erhofften Erleichterung der Lektüre habe ich *drei Arten der Anmerkungen* eingeführt: solche, die auch in der Quelle vorhanden sind (gekennzeichnet durch die alten Fußnotensymbole); solche, die allein eine Quellenangabe beinhalten (gekennzeichnet durch kleine Buchstaben), und schließlich solche, die Ergänzungen zum Haupttext enthalten, die dort nicht glatt hineinpassen (gekennzeichnet durch Zahlen).

Querverweise im Text – sie sind ein nicht unbeachtlicher Kern dieses Textes – sind am Rand notiert. Das beeinträchtigt ein wenig die Ruhe des Layouts, entlastet aber den Fußnotenapparat enorm und erleichtert hoffentlich ihre Berücksichtigung. Auch gibt es jenen Interessierten eine Chance, die das Buch nicht (auf Anhieb) insgesamt lesen können, sondern selbst in den Quellen eine gewisse Orientierung suchen. (Das Ziel dieser Verweise ist mit der bloßen Seitenangabe nicht immer unmittelbar benannt. Wollte man genauer sein, müssten vermehrt die aus juristischen Texten geläufigen Randnummern eingeführt werden. In meinen Arbeitsdateien wird das so gehandhabt, doch hier soll kein standardisierter Leseleitfaden für die Analysisgeschichte geboten werden, sondern ein möglichst flüssig zu lesender Text.)

Dank

Zuallererst habe ich Hassan Givsan, Darmstadt, zu danken, der mir seit Jahrzehnten anregender und förderlicher philosophischer Gesprächspartner ist. Auch Rüdiger Thiele, Halle, hat mir stets mit Anregungen und Hinweisen geholfen, ebenso Prof. Dr. Joachim Fischer, München und Berlin, sowie Herbert Breger, Hannover.

Bernd Arnold, Wiesbaden, hat mit großer Geduld und Geschick meine Übersetzungen verbessert. Seine Hinweise waren stets mehr als Übersetzungshilfen, nämlich kritisches Mitdenken, das mir weiterhalf. Prof. Dr. Eberhard Knobloch, Berlin, hat der Übertragung einiger besonders vertrackter fremdsprachlicher Passagen die allerletzte Politur gegeben. Auch Thomas Busch, Marburg, danke ich für seine Unterstützung herzlich.

Ebenfalls zu großem Dank verpflichtet bin ich dem amtierenden Präsidenten des Hessischen Landtags, Norbert Kartmann, der mir im Sommer 2008 und im Winter 2013/14 zwei Halbjahre ganztägiger wissenschaftlicher Tätigkeit im Rahmen meines Dienstes im Hessischen Landtag – und somit auch die Abfassung des vorliegenden Textes – ermöglicht hat, ebenso den beiden mich jeweils freundlich aufnehmenden Fachbereichen für Mathematik und Informatik (auch umgekehrt) an den Universitäten Marburg und Frankfurt – und nicht zuletzt jenen über das Übliche hinaus engagierten Mathematik- und (im Falle Frankfurt auch:) Philosophie-Studierenden, die mir durch ihr Interesse und ihre Arbeitsbereitschaft sehr

geholfen haben. Besonders ist hier JOHN FLATH zu nennen, dessen Fragen und Anregungen in Frankfurt mich immer weitergebracht haben.

Und last but really not least danke ich den Professoren JOHANNES CZERMAK, Salzburg, sowie HENK J. M. BOS, Utrecht und KIRSTI ANDERSEN, Aarhus. Herr CZERMAK hat mir in der schwierigsten Phase meines wissenschaftlichen Lebens (nach 1992) den Kontakt zu Lehre und Forschung am Mathematischen Institut der Universität Salzburg jahrelang offen gehalten. HENK J. M. BOS hat trotz der vielfältigen untergründigen Widerstände die Publikation des Artikels „CAUCHYS Kontinuum“[f] befürwortet, dem *point of departure* meiner universitären Laufbahn und einem Markstein auch für die vorliegende Studie (und er hat lange mit mir um dessen Form gerungen). KIRSTI ANDERSEN hat mich im November 2000 zu einem Vortrag auf eine Tagung nach Roskilde eingeladen, mich zu dem Aufsatz Spalt 2001 ermuntert und seine Publikation befürwortet.

Meine Frau BIRGIT[g] hat das vorliegende Buch mit allen Kräften gefördert. Ihr war es noch mehr Herzensangelegenheit als mir. Dass sie nur den Beginn seiner Abfassung, nicht aber dessen Fertigstellung erlebt hat, ist tragisch.

Frankfurt am Main und Darmstadt, den 17. Februar 2014 und 2015

[f] Spalt 2002

[g] Karl 1993, Schlote 2002, (Allgemeine Wissenschaftsgeschichte, Philosophie 1750–1990); auch Karl *et al.* 1991 sowie Tyradellis (2016)

Kapitel 1: Die Erfindung der formalen Algebra durch Descartes

DER STAND DER DINGE VOR DESCARTES: GALILEI UM DIE JAHRE 1623–38

GALILEO GALILEI, der von 1564 bis 1642 (nach dem neuen gregorianischen Kalender) lebte, publizierte im Jahr 1623 seine zweite große naturwissenschaftliche Schrift *Il Saggiatore*[a] (*Die Goldwaage*). Mit seiner ersten naturwissenschaftlichen Schrift aus dem Jahr 1610, dem *Sidereus nuncius*[b] (*Der Sternenbote*), war GALILEI wegen der darin enthaltenen neuen Himmelsbeobachtungen rasch berühmt geworden. Er hatte diese Beobachtungen mit dem damals neuen Instrument Fernrohr erzielt. GALILEI wählte für seine Schriften nicht die seinerzeit übliche Wissenschaftssprache Latein, sondern die Sprache seines Volkes: Italienisch. So wandte er sich an die gebildeten Laien.

DIE GELÄUFIGE VERSION

In dieser zweiten naturwissenschaftlichen Abhandlung GALILEIS (die bislang nicht ins Deutsche übersetzt ist) steht eine heute gern zitierte Phrase, die in einer Kurzfassung bekannt wurde: „Das Buch der Natur ist in mathematischer Sprache geschrieben.“

Wenn wir ein bisschen von den Anfängen der Mechanik wissen, verstehen wir GALILEIS Satz als eine *richtige Beschreibung* der Welt. Nehmen wir als Beispiel das von GALILEI aufgestellte *Fallgesetz*. Es setzt für einen (im luftleeren Raum) frei fallenden Körper die durchmessene Strecke, den so genannten Fallweg s, und die dafür benötigte Zeit, die Fallzeit t, zueinander in Beziehung:

> „Der Fallweg (s) ist dem Quadrat der Fallzeit (t^2) proportional.“

Und wenn wir die Anfänge der mathematischen Formelsprache kennen, können wir diesen Sachverhalt auch so ausdrücken, wie GALILEI es offenbar gemeint hat, und elegant schreiben:

$$\frac{s}{t^2} = \text{konstant}$$

Dieses Fallgesetz hat GALILEI übrigens erst in seinem letzten großen Werk, den *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove Scienze, attenenti alla*

[a]Galilei 1890–1909, Bd. VI, S. 197–372 [b]Galilei 1890–1909, Bd. III, S. 7–399

Mecanica & i movimenti locali[c] (*Unterredungen und mathematische Beweise über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend*), formuliert. Dieses Werk erschien wegen des Einflusses der Katholischen Kirche zuerst (und unter einem anderen Titel) in lateinischer Übersetzung in Straßburg und 1638 in italienischer Sprache im holländischen Leiden.

Die tatsächliche Formulierung

So hübsch diese Geschichte ist, so falsch ist sie. Sie ist nicht falsch in dem Sinne, dass Galilei einen solchen Satz nie geschrieben oder das Fallgesetz nicht erfunden hätte – das nicht. Aber Galilei hat diesen Satz weder *so* gesagt, wie er oben wiedergegeben wurde, noch hat er das Fallgesetz *so* formuliert, wie wir das eben getan haben. Anders gesagt: Wenn wir diese Geschichte *in den Quellen verifizieren* wollen, finden wir sie dort ganz anders.

Galileis tatsächliche Worte

Genau (und übersetzt) hat Galilei im Jahr 1623 Folgendes veröffentlicht (das kann man heutzutage leicht bei *Wikipedia* finden):

> Die Philosophie steht in diesem großen Buch geschrieben, dem Universum, das unserem Blick ständig offen liegt. Aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Wort davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum. (Behrends 2010, S. 53, siehe: URL `http://de.wikiquote.org/wiki/Galileo_Galilei` – Quelle: Galilei 1890–1909, Bd. VI, S. 232, Z. 11–18)

Nanu? Die Sprache der Mathematik sollen Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren sein? Keine Buchstaben wie s und t? Lebt Galilei noch hinter dem Mond, den er doch mit Hilfe seines Fernrohrs dreizehn Jahre zuvor kartiert hat – bildlich gesprochen? Oder, wissenschaftlich korrekter: Ist Galilei in Sachen Sprache der Mathematik nicht weiter als Euklid um −300?

Offenbar ist das so. Offenbar ist die *Sprache der Mathematik* für Galilei noch eine ganz andere als für uns heute!

Das sollten wir uns genauer ansehen – her mit Galileis wirklicher Formulierung des Fallgesetzes.

Galileis tatsächliches Fallgesetz

Im *Vierten Tag* der *Discorsi* formuliert Galilei das Fall- (oder Wurf)gesetz wie folgt:

„Theorem I Proposition I

Ein gleichförmig horizontaler und zugleich gleichförmig beschleunigter

[c]Galilei 1890–1909, Bd. VIII, S. 39–317

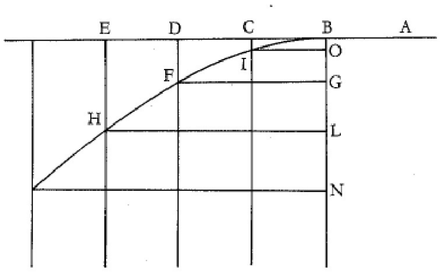
> *Bewegung unterworfener Körper beschreibt eine Halbparabel.*" (Galilei 1987, Bd. 1, S. 395)

Da haben wir einen der „Buchstaben" aus GALILEIs Sprache der Mathematik: „Halbparabel". GALILEI schreibt dafür sogar weniger speziell nur: „linea parabolica", also „Parabelkurve".

Aber warum so umständlich? Warum schreibt GALILEI „Parabel" statt einfach „$\frac{s}{t^2}$ = konstant"? Ist das nicht merkwürdig?

Folgen wir GALILEI noch einen Schritt weiter.

Wie beweist er sein Theorem? GALILEI beginnt seinen Beweis wie folgt:



> „Man denke sich eine Horizontale oder eine horizontale Ebene *AB*, längs welcher ein Körper sich gleichförmig bewege. Am Ende derselben fehlt die Stütze, und der Körper unterliegt infolge seiner Schwere einer Bewegung längs der Senkrechten *BN*. Man denke sich *AB* nach *E* hin fortgesetzt und teile gewisse gleiche Strecken *BC*, *CD*, *DE* ab. Von den Punkten *B*, *C*, *D*, *E* ziehe man Linien parallel *BN* in gleichen Abständen. In der Ersten von *C* aus nehme man eine beliebige Strecke *CI*, in der Folgenden das Vierfache *DF*, dann das Neunfache *EH* usw. [...]" (Galilei 1987, Bd. 1, S. 399; vgl. Galilei 1890–1909, Bd. VIII, S. 272 f.)

Ein geometrischer Beweis. GALILEIs „Sprache der Mathematik" ist im Jahr 1638 die Geometrie. GALILEI rechnet mit „Strecken": *BN*, *BC*, *BD* usw., und er verknüpft sie *in Worten* miteinander. Etwas anderes scheint er nicht zur Verfügung zu haben – jedenfalls keine *Buchstabensymbole*, keine *Rechenzeichen*, nicht einmal ein *Gleichheitszeichen!*

Dass ein Jahr zuvor in einer beispiellosen intellektuellen Großtat eine völlig neue Sprache der Mathematik erfunden worden war, wusste GALILEI nicht. Die Erfindung dieser Sprache ist das Thema dieses Kapitels.

Blicken wir abschließend auf GALILEI und seinen Satz von der Sprache der Mathematik zurück, so sehen wir: Für GALILEI hatte sein Satz eine völlig andere Bedeutung, einen ganz anderen Sinn als für uns heute. Unter der „Sprache der Mathematik" verstehen wir heute Buchstabensymbole und Rechenzeichen, allgemein: Formeln, während es für GALILEI geometrische Figuren waren.

DESCARTES' MATHEMATISCHE GROSSTAT

RENÉ DESCARTES (1596–1650) erfindet eine formale Algebra mit geometrischen Gebilden. „Formal" heißt: einen Kalkül, allein mit Symbolen.

Das war eine weltgeschichtlich beispiellose Tat. Niemand anderes hatte dergleichen getan, und danach konnte niemand anderes dergleichen tun: weil sich diese neue Sprache der Mathematik rasch und unwidersprochen verbreitete. Heute lernen wir das in der Schule, und zwar schon in der Mittelstufe. Dort heißt es manchmal „Buchstabenrechnen“.

Aber mit Buchstaben kann man nicht rechnen, sondern nur Worte bilden. Rechnen kann man nur dann mit Buchstaben, wenn sie *nicht* als Buchstaben (Lautzeichen) verstanden werden, sondern als Zeichen für Gegenstände: als *Symbole.* Und das ist die eigentliche Schwierigkeit beim Erlernen des „Buchstabenrechnens“: dass die Buchstaben dabei gar keine Buchstaben sind, sondern Symbole, „Platzhalter“ für etwas, von dem bei diesem Rechnen nicht direkt die Rede ist.

Diese Idee gehabt und umgesetzt zu haben, ist DESCARTES’ mathematische Großtat. Im Folgenden wollen wir verstehen, wie DESCARTES sie zustandegebracht hat.

ERSTER VERSUCH: DESCARTES’ ALGEBRA MIT FIGUREN (BIS 1628)

RENÉ DESCARTES ist der Begründer der Philosophie der Neuzeit, falls man einen solchen Titel überhaupt vergeben darf. Im Jahr 1637 publizierte er ein vierteiliges Werk.[d] Dessen letzter Teil (ab S. 381) trägt den schlichten Titel *La Géométrie.* Um einem möglichen Konflikt mit der Katholischen Kirche aus dem Weg zu gehen (der Inquisitionsprozess gegen GALILEI war natürlich auch in Holland bekannt, wo DESCARTES damals lebte), publizierte er das Buch anonym. Es war in französischer Sprache geschrieben, damit es auch der interessierte Laie verstehen konnte.

Dieses vierteilige Werk entfaltete eine enorme intellektuelle Wirkung. Darauf kann ich hier nicht eingehen. Ich will mich auf DESCARTES’ größte Neuerung *in den Grundlagen der Mathematik* konzentrieren. Sie ist – uns heute – so selbstverständlich und elementar, dass ihr gewöhnlich keine Aufmerksamkeit geschenkt wird. Damals aber stellte sie eine wirkliche Revolution dar. DESCARTES hob die Mathematik auf ein völlig neues Abstraktionsniveau, indem er eine rund zweitausendjährige Praxis überwand.

Zunächst müssen wir uns völlig klar machen, was der Ausgangspunkt dieser Revolution war. Bei GALILEI haben wir ihn bereits besichtigt. Wie stellte er sich für DESCARTES dar?

DAS AUSGANGSPROBLEM

In seiner *Géométrie* von 1637 gelang DESCARTES die Lösung eines bedeutenden Problems – das die Mathematiker freilich gar nicht gesehen hatten und an dessen Lösung DESCARTES selbst noch acht Jahre zuvor gescheitert war. Worin bestand dieses Problem?

Bei GALILEI haben wir gesehen: Noch im ersten Drittel des 17. Jahrhunderts bildeten die geometrischen Figuren die Sprache der Mathematik. Nun ist aber der Mathematiker nicht nur mit dem Konstruieren geometrischer Gebilde befasst, sondern gelegentlich rechnet er auch. Im Zuge des aufblühenden Handelskapi-

[d] Descartes 1637

talismus Kapitalismus mit dem Erstarken des Kaufmannsstandes hatte das kaufmännische Rechnen im 16. Jahrhundert enorm an Wichtigkeit und Verbreitung gewonnen. Der Beruf des Rechenmeisters war entstanden, und in deren (privaten) Schulen wurden die für die Buchführung wichtigen Fertigkeiten des Zahlenschreibens und Rechnens (auf dem Rechenbrett wie „auf der Feder", also schriftlich) unterrichtet. Darauf komme ich noch etwas ausführlicher auf S. 38 zurück.

Exkurs über Zahlen

Gerechnet wird mit Zahlen. Zahlen sind aber – damals – spezieller als geometrische Gebilde. Denn leicht lassen sich beispielsweise Längen konstruieren, die sich mit Zahlen nicht bequem beschreiben lassen. Ein klassisches Beispiel, das schon die Antike hat, ist die Diagonale im Quadrat. Die Diagonale im Quadrat ist eine ganz einfach zu konstruierende Linie. Aber diese Länge als Zahl zu schreiben, ist schwer. $\sqrt{2}$ ist da keine Lösung, denn $\sqrt{2}$ ist nur ein *Name* für diese Zahl, und dieser Name sagt nichts Direktes über ihre Größe aus. Wer kann schon auf Anhieb sagen, ob $\sqrt{612,5}$ < oder > als $24,7$ ist?

Das liegt daran, dass eine solche Zahl nicht als ein Bruch geschrieben werden kann, wenn die Quadratseite eine genau zu messende Länge hat. Denn für zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ haben wir eine Technik, ihr Größenverhältnis zu bestimmen: Wir bilden $a \cdot d$ und $c \cdot b$ und wissen: $a \cdot d \lessgtr c \cdot b$ gibt uns Auskunft, ob $\frac{a}{b} \lessgtr \frac{c}{d}$ ist.

Das Fachwort dafür, dass die Quadratdiagonale nicht als Bruch geschrieben werden kann, ist: Die Quadratdiagonale hat eine „irrationale" Länge. Der antiken Mathematik gelang es nicht, solche irrationalen Zahlen zu schreiben. Genauer: *Für die Antike gab es keine irrationalen Zahlen,* (sondern nur irrationale „Verhältnisse").

In den Jahren 1585/6 aber hatte der flämische Mathematiker, Physiker und Ingenieur Simon Stevin (1548/9–1620) in seiner Schrift *De Thiende*[e] eine Methode bekannt gemacht, um auch solche irrationalen Zahlen zu schreiben: die Dezimalschreibweise. Wir praktizieren sie noch heute. Diese Dezimalschreibweise ist keine mathematische Definition eines Zahlbegriffs. Vielmehr ist sie eine Technik, um Zahlen, auch schwierige Zahlen, zu schreiben. Leider verwischt die Dezimalschreibweise eine Unterscheidung, die der Mathematik seit der Antike wichtig ist: den Unterschied zwischen „rationalen" und „irrationalen" Zahlen, also zwischen Brüchen und Nicht-Brüchen. Denn dezimal geschrieben sind nicht nur alle irrationalen Zahlen unendlich lang, sondern auch der einfache Bruch $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}\ldots$ Es ist nicht schön, wenn ein solch großer begrifflicher Unterschied wie „rationale"/„irrationale" Zahl in einer Darstellung verwischt wird.

Doch kommen wir zurück zu Descartes' Zeit, in der zwar die Dezimalschreibweise den Fachleuten bekannt ist, aber dennoch die Geometrie die allgemeinere Wissenschaft gegenüber der Arithmetik ist.

Man könnte da auf die Idee kommen, zu fragen: Lassen sich nicht vielleicht beide Tätigkeiten, das Konstruieren geometrischer Gebilde und das Rechnen mit Zahlen, miteinander verbinden? Konkret:

> *Lässt sich mit geometrischen Gebilden rechnen?*

[e] Stevin 1958

Dies war das Problem, das DESCARTES löste. DESCARTES stellte Regeln auf, wie mit bestimmten *geometrischen* Gebilden *gerechnet* werden kann.

Das gelang ihm allerdings nicht im ersten Anlauf, doch letztlich war DESCARTES damit sehr erfolgreich.

DIE »REGULAE«: RECHNEN MIT FIGUREN

Im Jahr 1628 brach DESCARTES die Arbeit an einem Manuskript ab, an dem er in verschiedenen Etappen schon lange, vielleicht zehn Jahre, gearbeitet hatte. Nach seinem Tod fand sich ein Exemplar dieses Manuskriptes in seiner Hinterlassenschaft in Stockholm.

Dieses unvollendete Manuskript trägt den Titel *Regulae ad directionem ingenii.* Das kann man heute mit *Anleitung zur Ausrichtung der Erfindungskunst* übersetzen; manche sagen auch „Erkenntniskraft“ statt „Erfindungskunst“. Es besteht aus 21 *Regeln*, die in ganz unterschiedlichem Ausmaß durch weitere Ausführungen erläutert werden. In *Regel 18* bricht der Text in Erläuterung Nr. 12 ab (die Nummerierung der Erläuterungen gibt es nur in der deutschen Übersetzung, sie ist nicht im lateinischen Original enthalten), und die drei letzten *Regeln* sind nur formuliert, jedoch nicht weiter ausgearbeitet. Insgesamt sollten es vielleicht 36 Regeln werden.

DIE LEISTUNGSFÄHIGKEIT DES MENSCHLICHEN DENKENS

Worum geht es DESCARTES in diesem Text? Das beantwortet

> „Regel 1
>
> *Es muss das Ziel der wissenschaftlichen Bestrebungen sein, den Geist (ingenius) so zu lenken, dass er über alle sich ihm darbietenden Gegenstände begründete und wahre Urteile fällt.“* (Descartes 1980, S. 69)

DESCARTES’ *Regulae* befassen sich also keineswegs nur mit jenem Problem, das ich genannt habe (*Lässt sich mit geometrischen Gebilden rechnen?*). Dieser Text hat eine sehr viel allgemeinere Absicht. In den *Regulae* geht es um die wissenschaftliche Erkenntnis als solche sowie darum, wie man sie erwirbt. Wie gelangt man zur Wahrheit – außerhalb der Katholischen Kirche? Dazu DESCARTES’

> „Regel 4
>
> *Zur Erforschung der Wahrheit bedarf es notwendig der Methode.“* (Descartes 1980, S. 78)

sowie die Erläuterung Nr. 2 dazu:

> „Unter Methode verstehe ich aber sichere und einfache Regeln, und jeder, der sie peinlich genau beobachtet, wird niemals etwas Falsches als wahr voraussetzen und keine geistige Anstrengung unnütz verbrauchen, sondern nach und nach sein Wissen stetig vermehren und so zur wahren Erkenntnis alles dessen gelangen, wozu er fähig ist.“ (Descartes 1980, S. 78)

Regeln. Zur Wahrheit gelangt man, indem man gewisse Regeln befolgt – das Thema seiner Schrift. Durch Befolgung dieser Regeln gelingt es, das Wissen zu vermehren. Wissen entsteht durch eine regelhafte Vorgehensweise (Konstruktion).

Das bedeutet zunächst: Wissen wird nicht aus göttlicher Offenbarung erlangt, sondern durch menschliches Denken – wenn es richtigen Regeln folgt. Das ist eine klare Abkehr vom kirchlichen Wahrheits- und Herrschaftsanspruch, die Verabschiedung des Mittelalters, der Aufbruch in eine neue Zeit. Diese neue Zeit stützt ihre Wahrheit auf das Denken des Menschen, auf das Denken des Einzelnen: sofern es nur den richtigen Regeln folgt.

Im Weiteren erläutert DESCARTES, dass diese Methode „in der Ordnung und Disposition dessen [besteht], worauf sich der Blick des Geistes richten muss, damit wir eine bestimmte Wahrheit entdecken"[f] (*Regel 5*), und dass es darum geht, „die einfachsten Dinge von den verwickelten [zu] unterscheiden und sie der Ordnung nach verfolgen zu können"[g] (*Regel 6*). Stößt man dabei auf ein Problem, „das unser Geist nicht zur Genüge zu durchschauen vermag, so ist es geboten, an dieser Stelle einzuhalten und das darauf Folgende nicht zu untersuchen, sondern von dieser überflüssigen Mühe Abstand zu nehmen"[h] (*Regel 8*). Es hat keinen Sinn, über etwas Unverstandenes hinwegzugehen und einfach weiterzumachen. Das weiß jede Wissenschaftlerin und jeder Wissenschaftler, insbesondere wenn es um Mathematik geht.

Dann kommt die für DESCARTES zentrale

> „Regel 9
> *Man muss den Scharfsinn auf die geringsten und einfachsten Dinge richten und bei ihnen längere Zeit verweilen, bis man sich daran gewöhnt hat, die Wahrheit distinkt und klar zu durchschauen.*" (Descartes 1980, S. 101)

Hier haben wir DESCARTES' Wahrheitsbegriff: *Wahr ist das, was wir „distinkt" und „klar" erkennen.* „Distinkt" heißt: deutlich,[i] wohl bestimmt, abgegrenzt. „Klar" ist ein Bewusstseinszustand des denkenden Menschen: Ja, ich habe es verstanden!

Nach *Regel 1* geht es um „wahre" *und* „begründete" Urteile. Die Wahrheit wird im Denken des Einzelnen *erkannt* (die so genannte *Intuition*). *Erlangt* wird sie durch korrekte *Deduktion,* das ist die Herleitung aus anderen Wahrheiten: „Es bleibt also bloß die Deduktion, gemäß der wir die Dinge so zusammensetzen können, dass wir über ihre Wahrheit Gewissheit erlangen."[j]

DESCARTES' Erkenntnislehre ist höchst interessant. Leider können wir hier nicht näher auf sie eingehen, sondern müssen uns dem Kern der Sache nähern.

DESCARTES' VORGEHENSWEISE

Wie findet man laut DESCARTES die Wahrheit? Zweierlei ist dazu nötig. Zum Ersten muss man das Problem in all seine Bestandteile zerlegen:

---

[f] Descartes 1980, S. 84

[g] Descartes 1980, S. 85 [h] Descartes 1980, S. 94

[i] Vgl. Marshall Jr. 1979, S. 31. [j] Descartes 1980, Regel 12.23, S. 120

> „Regel 13
>
> *Wenn man ein Problem vollkommen einsieht, so muss man es von jeder überflüssigen Vorstellung loslösen, auf die einfachste Fragestellung zurückführen und vermöge der Aufzählung in so viele Teile als nur möglich teilen.“* (Descartes 1980, S. 125)

Das ist heute eine dominierende Denkweise: Wenn wir reisen wollen, entscheiden wir uns für ein Ziel, überlegen den Transfer, buchen eine Unterkunft usw. Das ist der Normalfall. Natürlich geht es auch anders: Wir könnten einfach losziehen und sehen, was wird. Das tun heute zwar die Wenigsten, aber möglich ist auch das. Man kann ein Problem sehr wohl als ein Ganzes annehmen und angehen, sich mit dem Unbekannten herumschlagen und sehen, was wird. Der heutigen westlichen Denk- und Vorgehensweise entspricht das freilich nicht. Wir sind Systematiker, Erben von DESCARTES.

Das Zweite, was wir nach DESCARTES zur Erlangung der Wahrheit tun müssen, steht in

> „Regel 14
>
> *Das Gesagte muss auf die reale Ausdehnung der Körper übertragen und ganz durch bloße Figuren für die sinnliche Anschauung dargestellt werden; auf diese Weise nämlich wird es weit distinkter durch den Verstand erfasst.“* (Descartes 1980, S. 131)

Hier benennt DESCARTES den *Gegenstand,* anhand dessen der Verstand seine Erkenntnis gewinnt. Dieser Gegenstand ist, allgemein gesagt, „die reelle Ausdehnung der Körper“. Konkret sind es „bloße Figuren“, die „für die sinnliche Anschauung dargestellt werden.“ Sie werden vom Verstand erfasst. Werden sie „klar und
S. 7← distinkt“ erfasst, handelt es sich um eine Wahrheit. „Alles, was ich klar und deutlich erfasse, [ist] notwendig wahr.“[k]

Der Verstand erfasst also ein Problem „distinkt“, wenn es durch „bloße Figuren dargestellt“ wird. Das hatten wir so auch bei GALILEI: Die „Sprache der Mathematik“ sind „Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren.“ DESCARTES ist 1628 auf völlig demselben Stand wie GALILEI 1638.

WAS SIND FIGUREN, UND WIE SOLL MIT IHNEN VERFAHREN WERDEN?

Laut DESCARTES gibt es „bloß zwei Arten von Dingen, die sich miteinander vergleichen lassen, nämlich Vielheiten und Großheiten“[l] – im lateinischen Original: „multitudines & magnitudines“[m].

Leider hat das Deutsche für die zwei lateinischen Worte „magnitudo“ und „quantitas“ nur ein einziges gebräuchliches Wort zur Übersetzung parat: „Größe“. Aber diese beiden

[k] Descartes 1972, S. 59
[l] Descartes 1980, Regel 14.20, S. 140
[m] Descartes 1897–1910, Bd. 10, S. 406

lateinischen Wörter – und diese Unterscheidung gibt es auch im Französischen und im Englischen – haben traditionell unterschiedliche Bedeutungen, bei DESCARTES sowieso: Für DESCARTES ist „quantitas" eine *Substanz* – nämlich: Ausgedehntes[n] –, während „magnitudo" ein *Modus* ist, eine Eigenschaft einer Substanz also. (Ab S. 31 gehe ich etwas genauer auf diese Thematik ein.) Um diese – jedenfalls ursprünglich – wichtige Unterscheidung zwischen „quantitas" und „magnitudo" auch im deutschen Text aufrechtzuerhalten, werde ich hier neben „Größe" noch das weniger geläufige[11] deutsche Wort „Großheit" verwenden, und zwar wird hier immer „Größe" für „quantitas" oder „quantité" stehen, „Großheit" für „magnitudo" oder „magnitude". Das wird auch für Übersetzungen Anderer gelten, die ich hier verwende: Dort werde ich stillschweigend „Großheit" für „magnitudo/magnitude" setzen, auch wenn die Übersetzung „Größe" hat.[12]

Für diese beiden Arten von vergleichbaren Dingen sieht DESCARTES zwei mögliche Arten von Figuren, nämlich *Punkte* (·) für die Vielheiten sowie *„diejenigen [...], die kontinuierlich und unteilbar sind,* wie das Dreieck (△), das Quadrat (□) usw."[o] für die Großheiten. Für dieses Letztere prägt DESCARTES hier keinen Namen, sondern bezeichnet sie im Weiteren als „kontinuierliche Großheiten" („magnitudines continuitatis").

Für diese kontinuierlichen Großheiten stellt DESCARTES eine wichtige Einschränkung und zugleich auch eine wichtige Forderung auf:

> „Bemerken wir schließlich, dass von den Dimensionen der kontinuierlichen [Großheiten] überhaupt keine distinkter gedacht werden als Länge und Breite und dass man bei derselben Figur nicht auf eine größere Anzahl zugleich achten darf als auf zwei, um sie miteinander zu vergleichen.
>
> Denn es ist eine Forderung der Methode, dass man, wenn mehr als zwei verschiedene miteinander zu vergleichen sind, sie nacheinander durchläuft und nur auf zwei zugleich achtet." (Descartes 1980, S. 141 f.)

DESCARTES begründet hier, dass man unter den „kontinuierlichen Großheiten" nur ein- und zweidimensionale betrachten solle, also etwa Strecken und Flächengroßheiten, nicht aber räumliche Gebilde wie etwa Quader. Seine Begründung dafür ist jedoch etwas fadenscheinig: Es sei „eine Forderung der Methode", dass bei Figuren beim Vergleich miteinander nur auf zwei Dimensionen „zugleich geachtet" werden könne.

Warum ist das so? Wie sollte sich gerade diese „Forderung der Methode" begründen lassen? Weil man in *einem* Akt nur *zwei* Gegenstände miteinander vergleichen kann? DESCARTES sagt es hier nicht.

[n] Vgl. Marshall Jr. 1979, S. 37. [o] Descartes 1980, S. 141

[11] Es findet sich aber schon, etwa Mitte des 19. Jahrhunderts in Bolzano 1975*c*, f. 2[r], und natürlich in Grimm und Grimm 1984, Bd. 9, Sp. 542–545.

[12] Im Jahr 1882 beklagt PAUL DU BOIS-REYMOND (1831–89) dieses Sprachproblem im Deutschen und löst es in derselben Weise wie ich hier – siehe du Bois-Reymond 1968, S. 14, Anmerkung *.

Vielleicht wird man an die Beschränkung denken, die das zweidimensionale Blatt Schreibpapier setzt, auf dem wir uns die Figuren „distinkt" und „klar" zur Anschauung bringen. So lässt sich jedenfalls der Anfang von DESCARTES' Erläuterung seiner *Regel 16* deuten, aber zuvor geben wir noch *Regel 15* wieder:

> „Regel 15
>
> *Es ist auch in den meisten Fällen von Vorteil, diese Figuren zu zeichnen und den äußeren Sinnen darzustellen, damit auf diese Weise unsere Aufmerksamkeit rege gehalten wird.*
>
> [...]
>
> Regel 16
>
> *Was dagegen die gegenwärtige Aufmerksamkeit des Geistes nicht erfordert, wenn es auch für die Schlussfolgerung nötig ist, das tut man besser, durch ganz kurze Bemerkungen als durch vollständige Figuren zu bezeichnen. Auf diese Weise wird uns nämlich das Gedächtnis nicht im Stich lassen, und trotzdem wird dabei das Bewusstsein nicht gezwungen, das Eine zurückzuhalten, während es sich damit beschäftigt, das Andere abzuleiten.*
>
> 1. Da übrigens nicht mehr als zwei verschiedene Dimensionen von den unzähligen, die sich unserer Phantasie abmalen können, mit einem und demselben, sei es körperlichen oder geistigen, Schauen zu erfassen sein sollen, so ist es von Wichtigkeit, alle Übrigen so zu bewahren, dass sie sich mit Leichtigkeit jedesmal, wenn man ihrer bedarf, darbieten.
>
> Zu diesem Zweck scheint das Gedächtnis von der Natur eingerichtet zu sein. Damit wir nun aber, da es häufig unsicher ist, nicht gezwungen sind, einen Teil unserer Aufmerksamkeit auf seine Erneuerung zu verwenden, während wir bereits anderen Gedanken obliegen, hat die Methode als geeignete Ergänzung den Gebrauch der Schrift hinzuerfunden. Auf sie vertrauen wir, überlassen hier nun nichts mehr dem Gedächtnis, sondern geben unsere Phantasie frei und ganz den gegenwärtigen Ideen hin und schreiben alles zu Behaltende auf dem Papier nieder. Und zwar geschieht das vermöge sehr kurzer Zeichen [...]" (Descartes 1980, S. 142–144)

DESCARTES macht sich hier sehr ins Einzelne gehende Gedanken über die Art, wie „die Aufmerksamkeit des Geistes" durch geeignete „Figuren" auf dem Schreibpapier auf möglichst vorteilhafte Weise „rege gehalten" werden kann. Dabei wird das Gedächtnis durch „die Schrift" entlastet, um „die Phantasie" für „gegenwärtige Ideen" frei zu haben.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass DESCARTES in den *Regulae* den Begriff der Dimension viel weiter fasst als wir heute: Unter „Dimension" versteht er

> „nichts anderes als die Art und Weise, gemäß der ein Subjekt als messbar angesehen wird, sodass nicht nur Länge, Breite und Tiefe Dimensionen des Kör-

> pers sind, sondern außerdem z. B. die Schwere die Dimension ist, gemäß der die Gegenstände gewogen werden, die Geschwindigkeit ⌈die⌉ Dimension der Bewegung und anderes unendlich vieles derselben Art." (Descartes 1980, *Regel 14*.15, S. 138)

Mit „Dimension" kennzeichnet DESCARTES somit alles Messbare.

DESCARTES' ZIELSETZUNG

In der folgenden *Regel* formuliert DESCARTES seine weitere Zielsetzung, und in der Erläutung dazu kündigt er seine Lösungsstrategie an – an deren Umsetzung er dann scheitert.

> „Regel 17
>
> *Man muss die vorliegende Schwierigkeit direkt durchlaufen, indem man davon absieht, dass gewisse Termini von ihr bekannt, andere unbekannt sind, und indem man auf dem richtigen Wege die wechselseitige Abhängigeit der einen von der anderen intuitiv verfolgt.*
>
> [...] Nun aber wollen wir in den fünf folgenden Regeln auseinandersetzen, wie diese Schwierigkeiten so zu behandeln sind, dass, so viele unbekannte [Großheiten] auch in einer Gleichung (propositio) enthalten sein werden, sie sich doch alle einander unterordnen. [...]
>
> Da wir aber hier uns nur mit verwickelten Problemen beschäftigen [...], so wird die ganze Kunst hierbei darin bestehen, dass wir das Unbekannte als bekannt annehmen und so imstande sind, uns ein leichtes und direktes Forschungsmittel zu verschaffen, das selbst bei noch so verwickelten Schwierigkeiten anwendbar bleibt." (Descartes 1980, S. 147 f.)

Nach dieser Textübersetzung zu urteilen schwebt DESCARTES hier sehr klar das Ziel vor, *Gleichungssysteme* aufzustellen und zu lösen. Dabei sei „das Unbekannte als bekannt anzunehmen".

Im lateinischen Original ist das nicht ganz so modern formuliert. Dort ist nicht von „Gleichungen" (aequationes) die Rede, sondern von „propositio", was traditionell für „Urteil" oder auch einfach für „Aussage" oder gar „Theorem" steht – wir haben das bereits bei GALILEI gesehen (S. 3). Das Unbekannte heißt im Original „ignota". Also hat DESCARTES zwar „Unbekanntes", aber in den *Regulae* sucht er nicht nach „Gleichungen", sondern unbestimmter oder allgemeiner nach „Aussagen", „Lehrsätzen" von ihnen.

Die folgende *Regel* jedoch zeigt, warum der Übersetzer ARTUR BUCHENAU auf die Idee kam, „propositio" mit „Gleichung" zu übersetzen:

> „Regel 18
>
> *Hierzu sind nur vier Operationen erforderlich, nämlich Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, von denen die beiden Letztenhier*

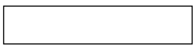
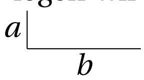
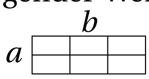
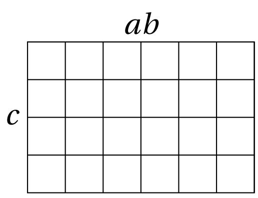
> *häufig nicht gebraucht werden dürfen, damit einerseits keine nutzlose Verwicklung eintritt, andererseits, weil sie an späterer Stelle leichter ausgeführt werden können.*“ (Descartes 1980, S. 149)

Hier spricht DESCARTES nun klar von Rechenoperationen, und das verbinden wir Späteren leicht mit Gleichungen. Wohl deswegen hat der Übersetzer die „propositio“ von 1628 als „Gleichung“ wiedergegeben. DESCARTES’ Sprache ist das nicht.

Und *womit* will DESCARTES rechnen? Mit seinen anschaulichen „Figuren“. Wobei er die „Punkte“ gleich übergeht und sich sofort den „kontinuierlichen Großheiten“ zuwendet. Das interessiert uns jetzt genau, denn hier erscheint der Wurm, der die ganze schöne Konstruktion zu Fall bringt. Wir lesen das in Etappen:

> „6. Wenn es sich darum handelt, eine [Addition] oder Subtraktion anzustellen, so nehmen wir das Subjekt nach der Art einer Linie oder einer ausgedehnten [Großheit] an, bei der allein die Länge in Betracht zu ziehen ist. Denn soll die Linie *a* zur Linie *b* hinzugefügt werden, so verbinden wir die eine mit der anderen in der Weise *ab* und erhalten als Ergebnis *c*. Wenn man dagegen die Kleinere von der Größeren abziehen soll, z. B. *b* von *a*, so legen wir in folgender Weise die eine auf die andere *b* *a* und erhalten so den Teil der Größeren, den die Kleinere nicht bedecken kann, nämlich . “ (Descartes 1980, S. 151)

Das ist einleuchtend, einfach und klar: So und nicht anders addiert und subtrahiert man Strecken *a* und *b*. (Wir bemerken in Klammern: DESCARTES verwendet hier nicht +- und −-Zeichen.) Wie aber geht es weiter?

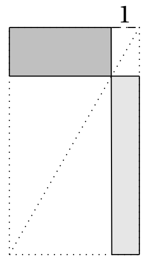
> „7. Bei der Multiplikation nehmen wir ebenfalls die gegebenen [Großheiten] nach Art von Linien an, stellen uns aber vor, dass aus ihnen ein Rechteck  gebildet wird; denn wenn wir *a* mit *b* multiplizieren, so legen wir sie im rechten Winkel in folgender Weise aneinander 
>
> und erhalten das Rechteck 
>
> .
>
> Ebenso muss man, wenn wir *a b* mit *c* multiplizieren wollen, sich *a b* als Linie vorstellen: *ab* um 
>
> für *a b c* zu erhalten. “ (Descartes 1980, S. 151 f.)

Genau hier steckt der Wurm: bei der Multiplikation von Strecken! Stellen wir an DESCARTES eine Frage: Was *ist* das Produkt zweier Strecken?

Auf diese einfache Frage hat DESCARTES keine eindeutige Antwort! Denn DESCARTES sagt zuerst: Das Produkt der Strecken a und b, also $a \cdot b$, ist ein „Rechteck" – aber wenn dann dieses Produkt $a \cdot b$ noch mit c multipliziert werden soll, wird aus dem „Rechteck" $a \cdot b$ plötzlich eine „Linie"!

Nicht, dass eine solche Konstruktion unklar oder schwierig wäre. Das ist sie nicht: Es ist nur das gefundene Rechteck mit den Seitenlängen a und b in ein flächengleiches Rechteck mit der einen Seitenlänge 1 zu verwandeln – dann hat die andere Seite ganz von selbst die Länge $a \cdot b$. Das zu bewerkstelligen, ist ganz einfach. Es ist Jahrtausende altes Wissen und steht in EUKLID (I.43). In meinen Worten:

> Man füge an eine Rechteckseite die Strecke 1 an und konstruiere ein umhüllendes Hilfs-Rechteck mit der neu gebildeten Gesamtseite und der vom freien Ende über die alte Rechteck-Ecke gezogenen Verlängerung als Diagonale. Das neu entstandene kleine Rechteck ist flächengleich zum anfänglichen und hat eine Seitenlänge 1.
>
> Die Flächengleichheit folgt daraus, dass die über der Diagonalen entstandenen vier kleineren und zwei größeren rechtwinkligen Dreiecke jeweils paarweise gleich groß sind.



Mit anderen Worten: Das Produkt zweier Strecken hat DESCARTES *nicht* „distinkt" erklärt.[13] Das aber hat er anfangs gefordert! Wir sehen: DESCARTES' Erklärung des Produkts zweier Strecken genügt hier nicht den zuvor von ihm selbst aufgestellten Anforderungen. DESCARTES' Denken ist hier *inkonsistent!* Daher ist es *folgerichtig,* wenn er diesen Gedankengang alsbald abbricht. – Und so ist es auch. Sehen wir diesem Abbrechen zu:

> „10. [...] Denn obgleich es uns, wenn wir uns zum ersten Male mit einer Schwierigkeit beschäftigen, freisteht, ihre Termini als Linien oder als Rechtecke anzunehmen, ohne ihnen jemals andere Figuren zuzuschreiben (wie oben bei der vierzehnten Regel ausgeführt), so kommt es doch häufig im Laufe der Operation vor, dass ein Rechteck, das vorher durch die Multiplikation zweier Linien hervorgebracht worden ist, bald darauf wieder als Linie aufgefasst werden muss, um eine andere Operation zustande zu bringen; oder dass dasselbe Rechteck oder die Linie, die aus einer Addition oder Subtraktion entstanden ist, wieder

[13] Wenn 240 Jahre später HERMANN HANKEL das „Produkt" zweier „Strecken" *erklärt* als „das Rechteck, welches die Strecken a, b zu Seiten hat" (Hankel 1867, S. 63), eine Seite später aber von der „Festsetzung" spricht, „dass $a(bc) = (ab)c = abc$ ein rechtwinkliges Parallelepipedum mit den Seitenlängen a, b, c seinem Inhalte nach bezeichnet", so ist das *unproblematisch* und nicht derselbe Fehler wie bei DESCARTES. HANKELS Erklärung der Multiplikation von „Strecken" ist nicht sehr pedantisch, aber klarerweise geht es ihm nicht um eine *Beschränkung* des Rechnens auf „Strecken", wie es jedoch bei DESCARTES der Fall ist.

> aufgefasst werden muss als ein anderes Rechteck, das etwas über die Linie hinaus bedeutet, durch die es zu dividieren ist.
>
> 11. Es ist also von Wichtigkeit, hier auseinanderzusetzen, wie jedes Rechteck in eine Linie verwandelt werden kann und umgekehrt eine Linie oder ebenfalls ein Rechteck in ein anderes Rechteck, dessen Seite angegeben wird. Das ist für die Geometer sehr einfach, wenn sie nur darauf achten, dass wir unter Linien, jedesmal wenn wir sie mit einem Rechteck vergleichen wie hier, stets Rechtecke verstehen, deren eine Seite diejenige Länge ist, die wir als Einheit angenommen haben. Auf diese Weise wird nämlich die ganze Aufgabe auf die zurückgeführt, zu einem gegebenen Rechteck ein anderes gleiches über einer gegebenen Seite zu konstruieren.
>
> 12. Wenngleich dies auch sogar den Anfängern unter den Geometern bekannt ist, so will ich es dennoch auseinandersetzen, um nicht den Schein zu erwecken, als hätte ich etwas vergessen …" (Descartes 1980, S. 153 f.)

An dieser Stelle hört die Erläuterung der *Regel 18* auf und damit der gesamte Text der *Regulae*. Das liegt sicher nicht an dem soeben aufgeworfenen Problem, nämlich: Wie verwandelt man ein Rechteck in ein flächengleiches, dessen eine Seitenlänge 1 ist? Denn das ist, wie gesagt, Jahrtausende altes Wissen und DESCARTES natürlich bekannt, er hat es gerade beschrieben.

Nein, nicht deswegen bricht DESCARTES hier ab, sondern weil sein Denken hier ins Schwanken geraten ist: Eine Linie soll in ein Rechteck verwandelt werden und umgekehrt – was denn nun?

Mir ist nicht bekannt, ob DESCARTES die Inkonsistenz seines mathematischen Denkens in den *Regulae* jemals eingestanden hat. In einem Brief an MARIN MERSENNE (1588–1648) vom 15. April 1630 begründet DESCARTES den Abbruch der *Regulae* wie folgt:

> Wenn Sie es merkwürdig finden, dass ich einige andere Abhandlungen begonnen hatte, als ich Paris war, und die ich dann nicht fortgesetzt habe, so werde ich Ihnen den Grund sagen: Während ich daran arbeitete, erlangte ich ein wenig mehr Wissen davon, und da ich mich danach richten wollte, war ich gezwungen, ein neues Projekt zu beginnen, größer als das Erste, so wie jemand, der ein Bauwerk als Wohnsitz begonnen hat, währenddessen unerhoffte Reichtümer erlangte & die Lage änderte, sodass sein begonnenes Bauwerk zu klein für ihn wurde; man würde ihn nicht tadeln, wenn man ihn dabei sähe, wie er mit einem neuen, seinem Besitzstand angemesseneren neu anfinge. (Descartes 1897–1910, Bd. I, S. 137 f.; ich danke BERND ARNOLD für die Übersetzung.)

Jedenfalls hat DESCARTES seinen Standpunkt gewechselt.

Vor welchen Hindernissen steht Descartes hier?

DESCARTES' Zielsetzung ist es, mit *geometrischen* Gebilden, nämlich mit ein- oder zweidimensionalen „Figuren", *algebraisch* zu verfahren: zu rechnen. Anspruchsvoll formuliert: DESCARTES will eine Algebra der Geometrie.

Jetzt aber sitzt er in der Falle, und sogar gleich doppelt!

Das erste Hindernis

Zuallererst scheitert DESCARTES, wie wir gesehen haben, an der Tatsache, dass durch die *Multiplikation* (und auch durch die *Division*) die geometrische *Dimension* der vorkommenden Großheiten geändert wird, während nur gleichartige geometrische Gebilde *addiert* und *subtrahiert* werden können: Das Produkt zweier („eindimensionaler") Strecken ergibt eine („zweidimensionale") Flächengroßheit, und zu dieser kann man keine Strecke hinzuaddieren, ohne zuvor die Flächengroßheit in eine Strecke zu transformieren.

Addieren (und subtrahieren) lassen sich nur gleichartige Gebilde.

Diese Tatsache heißt auch das „Homogenitätsgesetz". „Homogen" heißt „gleichartig", von griechisch „homos", gleich.

Kurz: Es gelingt DESCARTES nicht, das Produkt zweier Strecken *eindeutig* zu definieren. Zunächst ist es eine Flächengroßheit, aber *vielleicht* muss man diese noch in eine Strecke (gleichen Zahlwertes) verwandeln.

Das zweite Hindernis

DESCARTES steht aber noch vor einem zweiten Hindernis. Dieses zweite Hindernis hat er nicht klar benannt, aber es besteht *offenbar*.[14] Man muss nur ein bisschen nachdenken.

Rechnen besteht nicht nur aus Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren, sondern auch aus dem Ziehen von Wurzeln! Wenn DESCARTES mit seinen „Figuren" rechnen will, muss er auch sagen, wie aus ihnen *Wurzeln zu ziehen* sind.

Im einfachsten Fall ist das klar: Die Quadratwurzel wird aus einer Flächengroßheit gezogen, indem diese Flächengroßheit als Quadrat dargestellt und dann dessen Seite genommen wird. Das ist einfach.

Aber es gibt nicht nur quadratische Probleme, sondern auch kubische, also Probleme dritten Grades; und auch solche noch höheren Grades. Seit dem Beginn des 16. Jahrhunderts waren sogar Verfahren bekannt, um solche kubischen Probleme allgemein zu lösen. (Diese Verfahren wurden übrigens von italienischen Rechenmeistern erfunden, die sich gegenseitig in öffentlichen Wettstreiten herausforderten: Sie stellten einander Rechenaufgaben und hofften, der Gegner werde sie nicht lösen können. Bei solchen Gelegenheiten wurden Verfahren zur Lösung der kubischen Probleme gefunden – und natürlich als Betriebsgeheimnisse geheim gehalten.)

Wenn nun der im 17. Jahrhundert lebende DESCARTES eine Algebra geometrischer Großheiten formulieren will, muss er folglich nicht nur Quadratwurzeln ziehen können, sondern auch Kubikwurzeln – und mehr.

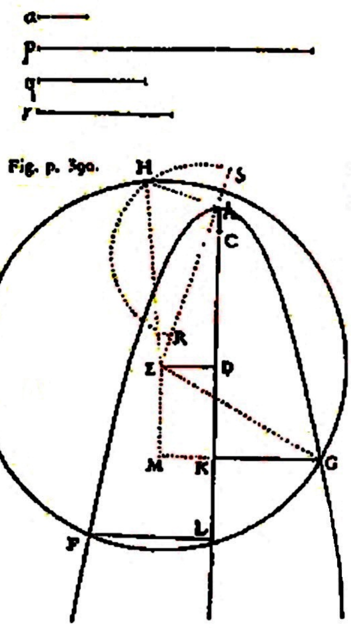
[14] Dies gibt Schuster 1980, S. 78 als einzigen *mathematischen* Grund (er nennt noch andere) für den Abbruch der *Regulae* an.

Wie aber soll eine Kubikwurzel geometrisch konstruiert werden – unter der von Descartes nun einmal aus erkenntnistheoretischen Gründen bestimmten Einschränkung, dass höchstens zweidimensionale Figuren zulässig sind? Durch diese Einschränkung scheidet die sonst triviale Lösung von vornherein aus, die betreffende Großheit als Würfel zu konstruieren und dann dessen Seite als Lösung zu nehmen. Descartes' Einschränkung auf höchstens zweidimensionale Figuren (die freilich wegen der von ihm verlangten „distinkten" und „klaren" Erkenntnis *erforderlich* war) verbietet diesen Weg.

Gibt es einen anderen Weg? Lässt sich eine dritte Wurzel geometrisch höchstens zweidimensional konstruieren?

Descartes' Lösung dieses Problems

In der Tat hat Descartes für dieses Problem eine Lösung gefunden. Er hat einen Weg gefunden, zu einer gegebenen Strecke eine andere Strecke zu konstruieren, deren Länge die dritte, ja sogar die vierte Wurzel der gegebenen Streckenlänge ist.



Diese Lösung steht in *La Géométrie*, in deren deutscher Fassung ab S. 92. Sie ist so verwickelt, dass ich sie hier nicht vorstellen will. Ich zeige nur eine der zugehörigen Zeichnungen von Descartes (es gibt in *La Géométrie* mehrere Zeichnungen dazu, da verschiedene Fälle der Problemstellung zu unterscheiden sind). Wer sich für die Details interessiert: Sie sind sehr klar in Bos 2001, S. 256 f. nachzulesen. In der nebenstehenden Zeichnung[p] konstruiert Descartes für die Gleichung vierten Grades

$$z^4 = \pm pz^2 \pm qz \pm r$$

(beachte die Angabe der Strecken p, q und r in der Zeichnung) die Lösung

$$z = GK,$$

und er beweist auch, dass diese Strecke die Lösung dieser Gleichung (sogar) vierten Grades ist.

Wie zu sehen verwendet Descartes bei seiner Konstruktion nicht nur gerade Linien, sondern auch einen Kreis und eine Parabel. Diese Figuren sind zwar flächig, aber: Sind sie „distinkt" und „klar"?

Dem Kreis mag man diese Attribute vielleicht zubilligen, denn schon Euklid behandelt ihn ausführlich. Beim Kreis ist auch klar, wie er *konstruiert* wird.

[p]Alle Figuren zu *La Géometrie* aus Descartes 1897–1910, Bd. 6.

Aber wie ist das mit der Parabel? Die kommt bei EUKLID nicht vor! Wie ist sie (selbstverständlich: „distinkt" und „klar") zu konstruieren? Das ist erst einmal nicht zu sehen.

Wir halten hier für unsere Perspektive nur fest: DESCARTES' Algebra der Figuren in den *Regulae* erlaubt es nicht, Kubik- oder gar höhere Wurzeln geometrisch zu konstruieren.

ZWEITER VERSUCH: DESCARTES' ALGEBRA MIT STRECKENLÄNGEN (AB 1637) – DIE ERFINDUNG DER FORMALEN ALGEBRA

Wie schon erwähnt publizierte DESCARTES im Jahr 1637 anonym ein sehr wichtiges und einflussreiches Werk aus vier Teilen. Der letzte Teil war Mathematik und trug den einfachen Titel *La Géométrie*.

Das erste Kapitel (DESCARTES spricht, wie seinerzeit EUKLID, vom ersten „Buch") von DESCARTES' *La Géométrie* beginnt mit dem Satz:

> „Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, dass es nachher nur der Kenntnis der Länge gewisser gerader Linien bedarf, um diese Probleme zu konstruieren." (Descartes 1981, S. 1)

Die anschließenden allgemeinen Ausführungen über die arithmetischen Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und das Ausziehen von Wurzeln enden mit dem Satz:

> „Ich werde mich nicht scheuen, diese der Arithmetik entnommenen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen, um mich dadurch verständlicher zu machen." (Descartes 1981, S. 2)

Genau dies ist DESCARTES' Programm in *La Géométrie:* eine *Algebra mit den „Längen gerader Linien"* . Ich werde im Folgenden von ‚Streckenlängen' statt von „Längen gerader Linien" sprechen und also sagen: Es geht DESCARTES in der *Géométrie* um eine *Algebra mit Streckenlängen.*

Wir sehen, DESCARTES hat sein Arsenal reduziert: Wollte er in den *Regulae* auch zweidimensionale geometrische Gebilde („Figuren") zulassen, so beschränkt er sich in der *La Géométrie* von Anfang an auf eine einzige Kategorie geometrischer Gebilde, auf Streckenlängen.

Offenbar hat es 360 Jahre gedauert,[15] bis es DESCARTES' Nachfolgern auffiel, inwiefern dieser selbstbewusste erste Satz DESCARTES' in *La Géométrie* sachlich unzutreffend ist. Im Jahr 1997 machte PETRI MÄENPÄÄ gegen DESCARTES geltend, schon die erste Aufgabe bei EUKLID:

> „*Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.*" (Euklid, I.1, S. 3)

[15] Diesen Hinweis verdanke ich Schmitz 2010, S. 129 f.

könne von DESCARTES nicht gelöst werden:

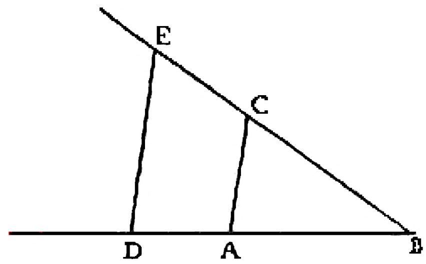
> Die nicht-algebraischen Aspekte der Geometrie fallen außerhalb des Geltungsbereichs, der als Analytische Geometrie bekannt ist. Ein einschlägiger Fall ist ein elementares Konstruktionsproblem wie das erste Vorhaben in EUKLIDS *Elementen,* zu einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren. (Mäenpää 1997, S. 207)

Hier gilt es für EUKLID, eine Konstruktion in gerechtfertigter Weise durchzuführen, und diese Aufgabe lässt sich in DESCARTES' Analytischer Geometrie nicht abbilden.

DIE GRUNDLEGENDEN KONSTRUKTIONEN

Dann gibt DESCARTES drei geometrische Konstruktionen (die *Addition* und die *Subtraktion* erwähnt er gar nicht, diese beiden Operationen sind für Streckenlängen selbstverständlich):

„Die Multiplikation.

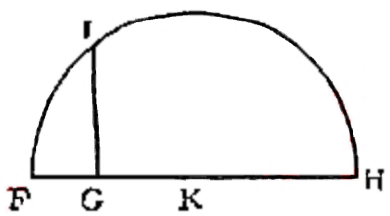


Es sei z. B. AB die Einheit und es sei BD mit BC zu multiplizieren, so habe ich nur die Punkte A und C zu verbinden, dann DE parallel mit CA zu ziehen und BE ist das Produkt dieser Multiplikation.

Die Division.

Oder aber wenn man BE durch BD zu dividieren hätte, so wäre, nachdem die Punkte E und D verbunden ⌈sind⌉ und AC parallel mit DE gezogen worden ist, BC das Resultat dieser Division.

Das Ausziehen der Quadratwurzel.



Soll endlich aus GH die Quadratwurzel ausgezogen werden, so füge ich zu GH in geradliniger Fortsetzung die Einheit FG hinzu, und beschreibe, nachdem ich FH im Punkte K in zwei gleiche Teile geteilt, um K als Mittelpunkt den Kreis FIH, errichte dann in G unter rechtem Winkel zu FH eine gerade Linie bis nach I, so ist GI die gesuchte Wurzel. Ich sage hier nichts über die Kubik- oder andere Wurzeln, da ich von diesen an späterer Stelle bequemer handeln kann." (Descartes 1981, S. 2)

REFLEXION 1

Was macht DESCARTES?

DESCARTES gibt hier Anwendungen sowohl des Strahlensatzes wie des Höhensatzes. Beide Sätze kennt bereits EUKLID. Was ist bei DESCARTES das Neue?

Das Neue ist das, was DESCARTES jeweils zu Beginn seiner Konstruktion setzt: die Einheit. Die Einheit spielt bei EUKLID beim Strahlen- wie beim Höhensatz keine Rolle, bei DESCARTES jetzt sehr wohl. Und nur, weil DESCARTES die Einheit *setzt*, gelingt ihm das, was in den *Regulae* nicht ohne Zwischenschritt funktioniert: Er kann das Produkt wie den Quotienten zweier Streckenlängen (bilden und) wieder als Streckenlänge gewinnen.[16]

Was aber bedeutet es, dass DESCARTES die Einheit *setzt?*

Indem er die Einheit *setzt*, fasst DESCARTES die gerade Linie nicht mehr als bloße Linie auf, sondern als eine ‚Streckenlänge': als ein *gemessenes* geometrisches Gebilde. Indem DESCARTES *allem voraus* eine Einheit setzt, macht er aus sämtlichen Linien der Untersuchung Streckenlängen. Diese Streckenlängen sind *wohldefiniert,* ihre Maße sind mit der Einheit unverrückbar festgelegt.

Anders gesagt: Diese geraden Linien sind nicht bloße, reine Linien, sondern sie sind Linien mit einem Maß. Mit der vorgängigen Festsetzung der Einheit wandelt DESCARTES die EUKLIDische reine Geometrie in eine Theorie der Streckenlängen: in das, was heute „Analytische Geometrie" heißt. In dieser Theorie ist *alles* messbar, denn man kann jede Linie auf die Einheitslinie beziehen und hat dann ihr Maß: Man hat sie als eine Streckenlänge. (Im konkreten Fall kann die Längenbestimmung freilich ein schwieriges mathematisches Problem sein.)

Diese beiden Konstruktionen DESCARTES' finden sich – natürlich – auch in EUKLIDS *Elementen,* und zwar im Sechsten Buch:

> *„Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu finden."* (Euklid, VI.12, S. 121)

Dort wird zu drei gegebenen Strecken a, b, c die vierte Proportionale d konstruiert, d. h. es gilt: $a : b :: c : d$. Mit $a = 1$ ergibt sich daraus DESCARTES' Lösung: $b \cdot c = 1 \cdot d = d$

Und im direkten Anschluss:

> *„Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale finden."* (Euklid, VI.13, S. 121)

Operational betrachtet sind EUKLIDS und DESCARTES' Verfahren dieselben. Ein Unterschied besteht nur im theoretischen Zugriff auf diese Operationen: EUKLID hat Proportionen, DESCARTES Gleichungen.

[16] NICCOLÒ GUICCIARDINI nennt diese Definition des Produkts zweier Streckenlängen bei DESCARTES eine „riesige Neuerung" und fragt (sich) dazu:

> War das seinen Zeitgenossen und insbesondere DESCARTES selbst bewusst? (Guicciardini 2009, S. 38, die Frage in Anmerkung 14)

Die *Regulae* beantworten diese Frage in großer Klarheit.

> „Der zentrale Unterschied besteht jedoch darin, dass EUKLID klar die *Voraussetzungen,* die *Grundlagen,* formuliert, die er vorher entwickelt und *bewiesen* hat, auf deren Basis das Finden der vierten Proportionalen auf wissenschaftliche Weise allererst möglich ist.“ (Schmitz 2010, S. 134)

DESCARTES *stützt sich* ganz klar auf die bei EUKLID erarbeiteten geometrischen Kenntnisse (Konstruktionen, Lehrsätze) – ohne diese ist die *Gültigkeit* seiner beiden Konstruktionen ungewiss.

DESCARTES ändert den Grundcharakter der Geometrie: Jedes (zulässige) geometrische Gebilde ist eine Großheit und hat als solche ein bestimmtes Maß. Insofern sind alle (zulässigen) geometrischen Gebilde miteinander vergleichbar: ihrem Maß nach. Oder kurz: DESCARTES will in der Geometrie alles messen können, und zwar mit einem einzigen Maß: der anfangs bestimmten Einheit.

Man könnte das so deuten, als erkenne DESCARTES die technischen Anforderungen, die das anbrechende Maschinenzeitalter stellt, und formuliere sie als sein Erkenntnisinteresse. Sein Erkenntnisinteresse sei instrumentell.[17]

DESCARTES unterwirft EUKLIDS Geometrie radikal dem Maß. Wir nennen das heute „Analytische Geometrie“. *Passender* wäre dafür der Name „Algebraische Geometrie“, aber dieser Name hat heute eine völlig andere Bedeutung, sodass wir ihn nicht verwenden können.

Woher?

Wie kommt DESCARTES auf seine neue Idee? Wie gelingt ihm der Ausbruch aus der Sackgasse seines Denkens über die Art des Multiplizierens von Streckenlängen, in die er in den *Regulae* geraten war? Natürlich waren ihm EUKLIDS *Elemente* auch schon vor dem Jahr 1628 bekannt.

Die Frage, *woher* ein Mathematiker einen Geistesblitz hat, ist ebenso interessant wie in den meisten Fällen nicht zu beanworten. Dies dürfte ein solcher Fall sein.

Allerdings verdient folgende Tatsache vielleicht Erwähnung: Nach dem Tod von SIMON STEVIN im Jahr 1620 gab ALBERT GIRARD (1595–1632) im Jahr 1625 dessen Werk *L'Arithmetique* bei dem Verlag Elzevier in Leiden neu heraus.[q] (In Leiden erscheint 1637 auch DESCARTES' vierteiliges Werk mitsamt *La Géométrie*, wenn auch bei einem anderen Drucker.) Bei *L'Arithmetique* handelt es sich um eine Textsammlung, und den Abschluss dieser Sammlung (vor STEVINS sieben *Thesen zur Mathematik*) bildet die Abhandlung *Traicte des incommensurables grandeurs* (*Abhandlung über inkommensurable Großheiten*).

Das erste der drei dort gestellten Probleme lautet:

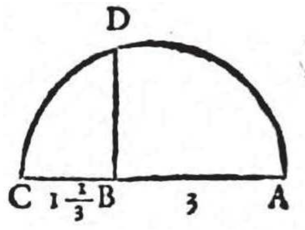
> *Gegeben seien eine gerade Linie und zwei Zahlen: Finde eine gerade Linie, deren Verhältnis zur gegebenen wie das der Zahl zur Zahl ist.* (Stevin 1625, S. 859)

Zur Lösung dieses Problems gibt STEVIN sechs Beispiele, oft mit mehreren Lösungen, und dazu vier „Folgerungen“ (corollaires).

Im ersten Beispiel sind zur Linie AB die beiden Zahlen $\surd 5$ und 3 vorgegeben. Die beigegebene Figur passt zu STEVINS zweiter Lösung:

[q] Stevin 1625

[17] So Irrlitz 1980*b*, S. 390 f. und *passim.*



Aus: Stevin 1625, S. 860

Wähle AB als 3. (STEVIN spricht *nicht* von der „Länge“ von AB!) Weil sich $AB : BC$ wie 9 : 5 (die Quadrate der gegebenen Zahlen) verhalten soll (und $AB = 3$ ist), muss $BC = AB \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ gewählt werden (die Figur enthält also einen Druckfehler). Dann ist nach § 13 des Buches VI von EUKLID (wir sprechen heute vom „Höhensatz“) BD die gesuchte Linie. Denn aus

$$AB \cdot BC = BD^2$$

folgt

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{BD} = \frac{BC}{\sqrt{AB \cdot BC}} = \frac{\sqrt{BC}}{\sqrt{AB}} = \frac{\sqrt{5/3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

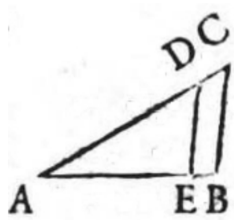
wie gewünscht.

Hier kann DESCARTES lesen, wie sich eine *Quadratwurzel als ‚Streckenlänge‘* (BD) konstruieren lässt.[18]

Und STEVINs zweites Problem lautet:

> *Von einer gegebenen geraden Linie einen verlangten Teil abzuschneiden.* (Stevin 1625, S. 866)

Im ersten Beispiel dazu verlangt STEVIN, von der gegebenen Linie AB den $\sqrt{\frac{1}{3}}$-ten Teil abzuschneiden.



Aus: Stevin 1625, S. 866

Zur Lösung wird der „Strahlensatz“ (Euklid, VI.2) genutzt: Zur Linie AB wird irgendeine Linie AC gezogen und gleich $\sqrt{3}$ gemacht. Gemäß dem *Problem 1* kann man die Linie AD finden, die zu AC im Verhältnis wie $\sqrt{1}$ zu $\sqrt{3}$ steht. Dann folgt:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

und also

$$AE = \frac{AD}{AC} \cdot AB = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot AB,$$

wie gewünscht.

Wenn DESCARTES hier $AE = 1$ liest, hat er seine Konstruktion des Produkts AC der beiden Streckenlängen AB mit *AD als eine Streckenlänge* gefunden.

Und es ist natürlich ganz ausgeschlossen, dass DESCARTES die Publikation dieses Werkes im Jahr 1625 in Leiden entgangen sein könnte.

DIE BAHNBRECHENDE ERFINDUNG

Das ist aber noch keineswegs alle Neuerung, die DESCARTES' *La Géométrie* enthält. Das weltgeschichtlich Einzigartige kommt noch. Es besteht aus zwei Schritten.

---

[18] Der Höhensatz als Konstruktionsmethode für Strecken, deren Länge eine „taube“ Zahl ist, gehört freilich *schon immer* zum Kernbestand der Techniken der Rechenmeister: Bereits der *Liber abacus* von LEONARDO FIBONACCI (um 1170–um 1250) aus dem Jahr 1202 (siehe dazu S. 39) verzeichnet diese Konstruktion, siehe Leonardo 1857, S. 353 bzw. Leonardo 2003, S. 491.

Der erste Schritt

In unmittelbarem Anschluss an die Vorschrift zum Ausziehen der Quadratwurzel heißt es in *La Géométrie:*

> „Wie man sich in der Geometrie der Zahlzeichen bedienen kann.
>
> Oftmals aber ist es gar nicht nötig, diese Linien so aufs Papier zu zeichnen, sondern es genügt, sie jede einzeln mit einem Buchstaben zu bezeichnen. – So nenne ich, um die Linie BD zu GH hinzuzufügen, die eine a, die andere b und schreibe $a+b$; und $a-b$, um b von a abzuziehen; und ab, um sie miteinander zu multiplizieren; und $\frac{a}{b}$, um a durch b zu dividieren; und aa oder a^2, um a mit sich selbst zu multiplizieren, und a^3, um dies noch einmal mit a zu multiplizieren und so bis ins Unendliche; und $\sqrt{a^2+b^2}$, um die Quadratwurzel aus a^2+b^2 auszuziehen; und $\sqrt[3]{a^3-b^3+abb}$, um aus a^3-b^3+abb die Kubikwurzel auszuziehen, usw.“ (Descartes 1981, S. 2 f.)

DESCARTES *ersetzt* also die Längen der aufs Papier „gezeichneten“ Strecken durch *Buchstaben.* Diese Buchstaben „bezeichnen“ die Streckenlängen. Er setzt Buchstaben *anstelle von* Streckenlängen.

Ebenso setzt DESCARTES jetzt für Rechenoperationen eigene *Zeichen*: $+$, $-$, $\sqrt{\ }$. (DESCARTES erfindet diese Zeichen für Rechenoperationen nicht, sondern übernimmt sie von anderen.)

Damit stellt DESCARTES eine *vollständige Äquivalenz* her zwischen dem algebraischen Operieren mit Streckenlängen (Geometrie) und der Bildung von Ausdrücken aus Buchstaben und Rechenzeichen (Arithmetik): Was er als Streckenlänge konstruieren kann, das kann er auch durch Buchstaben und Rechenzeichen darstellen – und umgekehrt.

Diese Buchstaben sind offensichtlich gebliebig gewählte *Zeichen für* die geometrischen Streckenlängen. Auf dem Schreibpapier, im Rechenausdruck stehen sie *für* diese Streckenlängen. Die Buchstaben sind also *Symbole.* DESCARTES *rechnet mit Symbolen.*

(Übrigens hat DESCARTES das Symbol $\sqrt{a^2+b^2}$ bereits in den *Regulae*, nämlich in *Regel 16*.3. Allerdings stehen an jener Stelle a und b für Zahlen, nicht für „Figuren“.)

Wir berichten noch, dass DESCARTES seine neu erfundenen Zeichen – Symbole: Einzelbuchstaben für geometrische Großheiten – *unmittelbar* in *kursiver* Type setzt. Das machen korrekt gesetzte mathematische Texte noch heute so.

DESCARTES betont als Nächstes sogleich das Neue an dieser Erfindung:

„Hierbei ist zu bemerken, dass ich unter a^2 oder b^3 oder dergleichen gewöhnlich nur einfache Linien verstehe, und dass ich nur, um mich der in der Algebra ge-

„Où il est a remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me seruir des noms vsités brauchten Bezeichnungen zu bedienen, dieselben als Quadrate, Kuben usw. benenne. " (Descartes 1981, S. 3)

en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c." (Descartes 1954, S. 7)

DESCARTES rechnet jetzt konsequent ausschließlich mit Streckenlängen.

Schließlich zeigt DESCARTES, dass (und warum) er auf das *Homogenitätsgesetz* → S. 15 vollkommen verzichten kann, denn er fährt fort:

„Es ist auch hervorzuheben, dass sich, wenn in der Aufgabe die Einheit nicht festgelegt ist, alle Teile einer und derselben Linie durch Ausdrücke von gleicher Dimension darstellen müssen, so wie hier a^3, abb und b^3, aus denen sich die Linie zusammensetzt, die ich $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + abb}$ genannt habe; dies braucht aber nicht der Fall zu sein, wenn die Einheit bestimmt gegeben ist, da diese alsdann immer mit darunter verstanden werden kann, wo die Dimension zu hoch oder zu niedrig ist. Hat man etwa aus $a^2b^2 - b$ die Kubikwurzel auszuziehen, so muss man sich die Größe a^2b^2 einmal durch die Einheit dividiert und die andere Größe b zweimal mit der Einheit multipliziert denken." (Descartes 1981, S. 3)

„Il est aussy a remarquer que toutes les parties d'vne mesme ligne, se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'vne que l'autre, lorsque l'vnité n'est point déterminée en la question, comme icy a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont se compose la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\ a^3 -\!- b^3 + abb}$: mais que ce n'est pas de mesme lorsque l'vnité est déterminée, a cause qu'elle peut estre soustendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimensions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb -\!- b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est diuisée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme." (Descartes 1954, S. 7)

Der erste Schritt besteht also darin, *rein formale Ausdrücke* für Rechenoperationen mit Streckenlängen zu bilden. Dabei muss das Homogenitätsgesetz *nicht* beachtet werden. Das hat vor DESCARTES niemand getan.

Der zweite Schritt

Im unmittelbaren Anschluss daran kommt der zweite Schritt:

„Ferner ist es nötig, um die Bezeichnungen der Linien nicht zu vergessen, ein Verzeichnis für alle Festsetzungen und Änderungen anzulegen, indem man z. B. schreibt:

AB ꝏ 1, d. h. *AB* gleich [1]
GH ꝏ *a*,
BD ꝏ *b*, usw." (Descartes 1981, S. 3. SCHLESINGER schreibt generell „=" für DESCARTES' „ ꝏ ".)

„Au reste affin de ne pas manquer a se souuenir des noms de ces lignes, il en faut tousiours faire vn registre separé, à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, escriuant par exemple.

A B ꝏ 1, c'est a dire, A B esgal à 1
G H ꝏ *a*

B D ꝏ *b*, &c." (Descartes 1954, S. 8)

DESCARTES beginnt hier, *Definitionsgleichungen* zu schreiben. Sein Zeichen für
S. 45← die Gleichheit ist „ æ “. Das ist neu. (Auf eine Ausnahme gehe ich noch ein.) DESCARTES bezeichnet die Gleichheit durch ein Zeichen, ein Symbol. Hier dient es noch der *Definition* der Größe (eine erste Strecke erhält die Länge 1; eine zweite wird durch „a“ bezeichnet, eine dritte durch „b“). Doch dabei wird es nicht bleiben, wie wir gleich sehen werden.

Das von DESCARTES gewählte Zeichen für die Gleichheit scheint aus einer Verbindung der Buchstaben o und e gebildet zu sein. (Verständlicher wäre vielleicht a und e, denn dies ließe sich als Beginn des Wortes „aequalis“ – „gleichwertig“ – deuten.[19] Vermutlich jedoch war nicht die *Bedeutung* der verwendeten Buchstaben entscheidend, sondern deren *Gestalt*: In seinem – 1905 aufgefundenen – *Journal* gibt ISAAC BEECKMAN (1588–1637) ein DESCARTES'sches Gleichheitszeichen aus der Zeit 1628/29 als „ ∝“ wieder[r] – wobei jene Gleichung interessanterweise keine Buchstaben*symbole* verwendet, sondern Buchstaben
S. 43← als *Namen* sowie zusätzlich cossische. Auch die Werkausgabe von DESCARTES verwendet „ ∝“ als Gleichheitszeichen.)

Nun beschreibt DESCARTES *in allgemeiner Weise* den Gebrauch der Gleichungen: wie man ein (geometrisches) Problem in Gleichungen fasst und wie man ein solches System aus Gleichungen löst. Er erläutert sogar, wie zu verfahren ist, wenn die Aufgabe unterbestimmt ist:

> „Wie man zu den Gleichungen gelangt,
> die zur Lösung der Probleme dienen.
>
> Soll nun irgendein Problem gelöst werden, so betrachtet man es zuvörderst als bereits vollendet und führt für alle Linien, die für die Konstruktion nötig erscheinen, sowohl für die unbekannten als auch für die anderen, Bezeichnungen ein. Dann hat man, ohne zwischen bekannten und unbekannten Linien irgendeinen Unterschied zu machen, in der Reihenfolge, die die Art der gegenseitigen Abhängigkeit dieser Linien am natürlichsten hervortreten lässt, die Schwierigkeiten der Aufgabe zu durchforschen, bis man ein Mittel gefunden, um eine und dieselbe Größe (quantité) auf zwei verschiedene Arten darzustellen; dies gibt dann eine Gleichung (une Equation), weil die den beiden Darstellungsarten entsprechenden Ausdrücke (termes) einander gleich sind. Es sind dann so viele solcher Gleichungen aufzufinden, als unbekannte Linien vorhanden sind; wenn sich aber nicht so viele angeben lassen, obwohl man nichts, was in der Aufgabe enthalten ist, übergangen hat, so ist die Aufgabe nicht vollkommen bestimmt. Man kann alsdann für diejenigen Unbekannten (les inconnuës), für

[r] Descartes 1897–1910, Bd. 10, S. 335

[19] Gelegentlich findet man die Behauptung, DESCARTES' Gleichheitszeichen sei „∞“ (sogar Descartes 1981, S. 115, Anmerkung 4). Dies trifft nicht genau zu, jedoch in einer Abwandlung: siehe den folgenden Text oben.

die sich keine Gleichungen ergeben haben, nach Belieben gewählte bekannte Linien setzen; bleiben dann noch mehrere Unbekannte zu bestimmen, so hat man sich der Reihe nach der aufgefundenen Gleichungen zu bedienen, indem man sie entweder einzeln oder in Verbindung mit den Übrigen betrachtet, und durch Reduktion zu erreichen sucht, dass jede der unbekannten Linien einer bekannten anderen gleich gesetzt sei, oder dass das Quadrat der Unbekannten, oder ihr Kubus, oder das Quadrat ihres Quadrats, oder ihre fünfte Potenz, oder das Quadrat des Kubus usw. gleich sei dem, was sich durch die Addition oder Subtraktion zweier oder mehrerer Größen ergibt, deren eine bekannt ist, während die übrigen sich aus irgendwelchen mittleren Proportionalen zwischen der Einheit und diesem Quadrat oder Kubus oder Quadrat des Quadrats usw., multipliziert mit anderen Bekannten, zusammensetzen." (Descartes 1981, S. 4 f.)

Hier erläutert DESCARTES in klaren Worten (aber langen Sätzen) Zielsetzung und Verfahrensweise der formalen Gleichungslehre: Man behandelt das Unbekannte genau so wie das Bekannte, sucht zwei verschiedene Ausdrücke für dasselbe und setzt diese gleich. Man braucht so viele Gleichungen, wie es Unbekannte gibt; sind es zu wenig Gleichungen, kann man für einige Unbekannte Beliebiges setzen. Die gefundenen Gleichungen reduziert man mit dem Ziel, jede Unbekannte etwas Bekanntem gleichzusetzen.

DIE ERFINDUNG DER REIN FORMALEN GLEICHUNG

Im direkten Anschluss folgt der Schlussstein von DESCARTES' großartiger Erfindung:

„Ich schreibe dies in folgender Weise:

$z \;\text{æ}\; b$, oder
$z^2 \;\text{æ}\; -az + b^2$, oder
$z^3 \;\text{æ}\; +az^2 + b^2 z - c^3$, oder
$z^4 \;\text{æ}\; az^3 - c^3 z + d^4$, usw.

D. h. die unbekannte Größe z ist gleich b, oder das Quadrat von z ist gleich dem Quadrat von b, weniger a multipliziert mit z, oder der Kubus von z ist gleich a multipliziert mit dem Quadrat von z, vermehrt um das Quadrat von b multipliziert mit z, weniger dem Kubus von c, usw. " (Descartes 1981, S. 5)

„Ce que i'escris en cete sorte.

$z \;\text{æ}\; b$. ou
$z^2 \;\text{æ}\; \text{--}az + bb$. ou
$z^3 \;\text{æ}\; +az^2 + bbz \,\text{--}\, c^3$. ou
$z^4 \;\text{æ}\; az^3 \,\text{--}\, c^3 z + d^4$. &c.

C'est a dire, z que ie prens pour la quantité inconnuë, est esgalé a b, ou le quarré de z est esgal au quarré de b moins a multiplié par z. ou le cube de z est esgal à a multiplié par le quarre de z plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. & ainsi des autres." (Descartes 1954, S. 11)

Im Anschluss fasst DESCARTES die Leistungsfähigkeit seiner Methode zusammen:

„In dieser Weise kann man stets alle unbekannten Größen (quantités inconnuës) auf eine einzige zurückführen, wenn das Problem mit Hilfe von geraden Linien und Kreisen oder auch von Kegelschnitten und selbst von einer gewissen anderen Linie, die nur um einen oder zwei Grade zusammengesetzter ist, gelöst werden kann.

Aber ich verweile nicht länger bei einer genaueren Auseinandersetzung dieser Dinge, weil ich euch sonst das Vergnügen, dieselben durch eigene Überlegung zu erlernen, und auch den Nutzen entzöge, den solche Übung eurem Geiste bringt, und der nach meinem Dafürhalten das Wichtigste ist, was man aus dieser Wissenschaft zu schöpfen vermag.

Ich finde auch nichts darin, was so schwierig wäre, dass diejenigen, die in der gemeinen Geometrie und in der Algebra ein wenig bewandert sind, und auf das, was in diesem Buche enthalten ist, genau achten, es nicht finden könnten.

Darum begnüge ich mich damit zu bemerken, dass sich, wenn man beim Reduzieren der Gleichungen nicht verabsäumt, alle sich als möglich erweisenden Divisionen auszuführen, unfehlbar der einfachste Ausdruck ergeben wird, auf den die Frage zurückgeführt werden kann.“ (Descartes 1981, S. 5)

REFLEXION 2

Was ist hier geschehen? Hier hat DESCARTES die ersten *rein formalen* Gleichungen der Mathematik notiert:

- Sie enthalten nur Buchstaben: als *Symbole* für geometrische „Größen“ (die als ‚Streckenlängen‘, also als Maße festgelegt sind), sowie *Rechenzeichen* und ein *Gleichheitszeichen.*
- Die „Unbekannten“ werden durch die letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet, die „Bekannten“ durch die ersten.

  Soweit ich sehe, spricht DESCARTES diese Regel nicht ausdrücklich aus – jedenfalls in *La Géométrie*[20], sondern *handelt* nur ihr gemäß. *Ausgesprochen*, noch dazu für die „Analysis“, wird diese Regel später von L'HOSPITAL .[s] – In den *Regulae* war DESCARTES noch einer anderen Regel gefolgt, die er dort auch *ausgesprochen* hat:

[s] l'Hospital [2]1716, S. 3

[20] In den *Werken* findet sich eine *Einleitung* in DESCARTES' *La Géométrie*, welche die Herausgeber DESCARTES selbst zuschreiben – und dort wird diese Regel formuliert: Descartes 1897–1910, Bd. 10, S. 672.

> „Alles also, was man zur Lösung einer Schwierigkeit als Einheit wird anzusehen haben, werden wir durch ein einziges Zeichen wiedergeben, das nach Belieben ausgedacht werden kann, doch benutzen wir der Einfachheit halber die Charaktere a, b, c usw., um bereits Bekanntes, und A, B, C usw., um Unbekanntes auszudrücken. Davor setzen wir dann häufig Zahlzeichen 1, 2, 3, 4 usw., um ihre Vielheit, oder fügen sie an, um die Anzahl der [Relationen] auszudrücken, die man in ihnen anzunehmen haben wird. Wenn ich so etwa schreibe $2a^3$, so wird das dasselbe sein, wie wenn ich sagte: das Doppelte der durch a bezeichneten Größe, die drei [Relationen] enthält. Auf diese Weise werden wir nicht nur eine kurze Zusammenfassung vieler Worte geben, sondern, was die Hauptsache ist, wir werden die Termini der Schwierigkeit so rein und bloß darstellen, dass, ohne etwas Nützliches außer Acht zu lassen, trotzdem niemals etwas Überflüssiges in ihnen gefunden wird, was vergeblich das begriffliche Vermögen des Geistes beschäftigt, wenn er eine Mehrheit auf einmal zu erfassen sich genötigt sieht." (Descartes 1980, zur Regel XVI, S. 144, das Wort „Beziehung" des Übersetzers ARTUR BUCHENAU durch „Relation" ersetzt.)

- Die Bekannten wie die Unbekannten sind „Linien" mit bestimmter Länge[21] (also das, was ich eine ‚Streckenlänge' nenne).
- DESCARTES nennt das Abstraktum zu den behandelten Streckenlängen nicht mehr „Großheit" (magnitudo), sondern „Größe" (quantité).
- Indem DESCARTES die ‚Streckenlängen' zu seinen Rechenobjekten macht, hat er einen „kontinuierlichen" Objektbereich. Dieser Objektbereich enthält nicht nur die „ganzen" und die „gebrochenen Zahlen", sondern auch die „Irrationalen" (paradigmatisch: die $\sqrt{2}$ als die Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge 1).

Diese formalen Gleichungen sind die ersten *rein formal* notierten mathematischen *Sätze* bzw. *Aussagen:* „A ist B." Das „ist" ist durch das Gleichheitszeichen beschrieben. Es ist eine Beziehung (Relation), und zwar eine philosophisch höchst wichtige: Es ist die grundlegendste Beziehung, die es in der Sprache überhaupt gibt – die Beziehung zwischen Subjekt und Prädikat.

Wir sollten uns vor einem Missverständnis hüten: Das mathematische Zeichen „=" steht, *logisch* betrachtet, für ein *Prädikat*; doch *mathematisch* versteht man es als eine *Beziehung* oder *Relation* – und diese Relation ist keineswegs die Identitätsrelation!

Unter dem Gesichtspunkt der Identität ist DESCARTES' $z = b$ *immer falsch!* „z" ist *nicht* „gleich" „b"!

21 Stolz 1891, S. 12 sagt, DESCARTES „rechnete zwar mit den Linien *als solchen*", und ergänzt erst sieben Zeilen später:

> Unter den Strecken wählte er eine übrigens beliebige aus, welche er die Einheit nannte und meist mit 1 bezeichnete.

Die DESCARTES'sche Gleichung $z = b$ heißt, streng genommen, nicht: „z ist gleich b" (wie wir es immer lesen), sondern sie besagt: „Die (durch „z" bezeichnete) Streckenlänge ist b."

Auch wenn wir es gelernt haben, das Symbol „=" als „ist gleich" zu lesen, so sollten die Mathematikkundigen (jedenfalls dann, wenn sie vom Philosophen danach gefragt werden) immer wissen: Dieses „ist gleich" ist nur eine traditionelle Sprechweise – sie ist auf keinen Fall wörtlich (nämlich als „gleich") zu verstehen, sondern *je nachdem*, bei DESCARTES beispielsweise in der Weise wie eben dargelegt.

Damit ist erstmals die Möglichkeit erschaffen, Mathematik als *reines Operieren mit Symbolen* zu betreiben. Die *Syntax* (die Sprach*regeln*) kann nun klar von der *Semantik* (der Sprach*bedeutung*) getrennt werden: Man kann die Rede von der *Gleichung* und ihre Behandlung – die symbolisch-formale Ebene (Syntax) – klar und deutlich von der *Interpretation* der Gleichung unterscheiden, also von dem, was sie *bedeutet*, nämlich welche Streckenlänge sie beschreibt (Semantik). In dieser Klarheit war das vor der Erfindung des Gegenstandes „rein formale Gleichung" nicht, jedenfalls nicht so distinkt und klar, möglich.

Neben der Philosophie der Neuzeit und der neuzeitlichen Wissenschaft hat DESCARTES damit auch der Mathematik der Neuzeit den Boden bereitet und den Weg gewiesen.

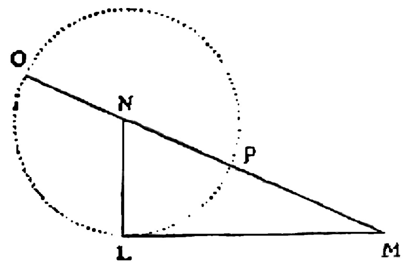
Der Übersetzer BUCHENAU fügt in seiner Übertragung der *Regulae* an einer Stelle erklärend in Klammern das Wort „Symbol" hinzu. Die betreffende Passage aus *Regel 12*.11 lautet:

> „Will [der Geist] aber, wie das häufig nötig ist, aus der Mehrheit ein Einzelnes ableiten, so ist von den Ideen der Dinge all das fernzuhalten, was keine gegenwärtige Aufmerksamkeit erfordert, damit man das Übrige leichter im Gedächtnis behalten kann. Man muss in derselben Weise alsdann nicht die Dinge selbst den äußeren Sinnen darbieten, sondern lieber nur abgekürzte Gestalten (Symbole) von ihnen, die nur dazu hinreichen sollen, einen Irrtum zu vermeiden; je kürzer sie aber, umso bequemer sind sie." (Descartes 1980, S. 114)

Ein Hinweis sei hierzu angebracht: Das Symbol ist für das Auge, für den Augensinn – nicht für die Einbildungskraft! Nach DESCARTES wird nicht das Symbol distinkt und klar wahrgenommen, sondern die Figur, die durch das Symbol bezeichnet wird. Wie die Zahlzeichen (Zahlsymbole) die Zahlen bezeichnen (symbolisieren), so bezeichnen (symbolisieren) bei DESCARTES die Buchstaben – oder die aus Buchstaben und Zahlzeichen gebildeten Formeln – die Streckenlängen.

Die Rückbindung der algebraisch gefundenen Gleichungslösung an die Geometrie

Schließlich zeigt DESCARTES, wie man eine algebraisch gefundene Lösung einer quadratischen Gleichung geometrisch konstruieren kann:



„Habe ich z. B.

$$z^2 \propto az + b^2,$$

so konstruiere ich das rechtwinklige Dreieck NLM, dessen Seite LM gleich der Quadratwurzel b aus der bekannten Größe b^2, und dessen andere Seite LN gleich $\frac{1}{2}a$, der Hälfte der anderen mit der unbekannten Linie z multiplizierten bekannten Größe ist. Verlängert man die GrundlinieMN dieses Dreiecks bis nach O hin, sodass NO gleich sei mit NL, so ist das ganze OM die gesuchte Linie z. Sie stellt sich wie folgt dar:

$$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.\text{“}$$

(Descartes 1981, S. 6)

Für die Gleichung

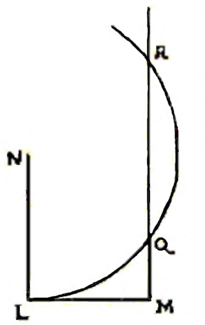
$$z^2 \propto -az + b^2$$

mit der allgemeinen Lösung

$$z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

ist PM die gesuchte Strecke. Der Kreisradius ($\frac{1}{2}a$) wird also subtrahiert statt addiert.

Und der letzte Fall:



„Habe ich endlich

$$z^2 \propto az - b^2,$$

so mache ich wie vorhin NL gleich $\frac{1}{2}a$ und LM gleich b; dann ziehe ich, statt die Punkte MN zu verbinden, MQR parallel mit LN und beschreibe um N als Mittelpunkt einen durch L gehenden Kreis, der MQR in den Punkten Q und R schneidet; die gesuchte Linie z ist MQ oder MR, denn in diesem Falle entsprechen ihr zwei verschiedene Ausdrücke, nämlich:

$$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

und

$$z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

> Und wenn der Kreis mit dem Mittelpunkte N, der durch den Punkt L hindurch geht, die gerade Linie MQR weder schneidet noch berührt, so hat die Gleichung keine Wurzel, sodass man versichern kann, die Konstruktion des Problems sei unmöglich.“ (Descartes 1981, S. 7)

Man betrachtet das (nicht gezeichnete) rechtwinklige Dreieck NQL', wobei $L'Q$ die Parallele zu LM durch den Punkt Q ist. Dann ist zum einen in diesem rechtwinkligen Dreieck $NL'^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$. Zum anderen gilt $NL' = NL - QM = \frac{1}{2}a - QM$ und also $QM = \frac{1}{2}a - NL'$ – das ist die letzte Lösung. Die andere ergibt sich aus Symmetriegründen.

Es sei nur kurz angemerkt, dass auch DESCARTES’ erste geometrische Konstruktion einer Lösung einer quadratischen Gleichung bei EUKLID konstruiert ist:

> „Wählt man außerhalb eines Kreises einen Punkt und zieht von ihm aus zum Kreis zwei Strecken, von denen die eine den Kreis [als Durchmesser] schneidet, die andere ihn berührt, so muss das Rechteck aus der ganzen schneidenden Seite und dem außen zwischen dem Punkt und dem erhabenen Bogen abgegrenzten Stück dem Quadrat über der Tangente gleich sein.“ (Euklid, III.36, S. 73)

Dies zeigt: Auch in diese Konstruktion gehen etliche geometrische Vorkenntnisse ein, von denen bei DESCARTES nicht die Rede ist.

DESCARTES HAT NUR POSITIVE GRÖSSEN – UND KEINE KOORDINATEN

DESCARTES bleibt hier bei der Betrachtung der *drei traditionellen Formen* der quadratischen Probleme. Sie lauten:

$$\begin{aligned} z^2 &\;\text{æ}\; az + b^2\,, \\ z^2 &\;\text{æ}\; -az + b^2\,, \\ z^2 &\;\text{æ}\; az - b^2\,. \end{aligned}$$

Es sind a und b demnach bei DESCARTES immer „absolute“ – oder: „positive“ – Größen. Das ist unausweichlich, da die Buchstaben Streckenlängen bezeichnen. Und die jeweiligen geometrischen Konstruktionen der Lösungen der Gleichungen unterscheiden sich auch, wie DESCARTES demonstriert hat.

Daraus erklärt sich zwanglos, dass wir bei DESCARTES keine Spur des nach ihm benannten Koordinatensystems („kartesisches Koordinatensystem“) finden. Denn in diesem System sind gleichermaßen „positive“ wie „negative“ „Werte“ vertreten. Aber: An „Werte“, gar „negative“, denkt DESCARTES nicht. Er denkt an Streckenlängen, an „Linien bestimmter Länge“. Und „Linien“ sind nicht „Werte“. „Linien“ sind geometrische Objekte, „Werte“ hingegen sind algebraische oder analytische Objekte. Auch wird eine Streckenlänge durch *zwei* Angaben bestimmt: ihren Anfangs-und ihren Endpunkt – ein Wert hingegen ist eine *einzige* Angabe. Einprägsam formuliert: DESCARTES hat eine Wert-freie Algebra, eine Algebra aus *positiven* Größen.

ERGEBNIS

DESCARTES ist mit seiner Leistung sehr zufrieden:

> „Im Übrigen können diese selben Wurzeln auch auf unzähligen anderen Wegen gefunden werden, und ich wollte nur diese hierher setzen, weil sie sehr einfach sind und erkennen lassen, dass alle Probleme der gewöhnlichen Geometrie durch alleinige Anwendung des Wenigen konstruiert werden können, was in den vier erläuterten Figuren enthalten ist. Dies scheinen die Alten nicht bemerkt zu haben, da sie sonst die Mühe gescheut hätten, darüber so viele dicke Bücher zu schreiben, in denen schon allein die Anordnung ihrer Lehrsätze erkennen lässt, dass sie nicht im Besitze der wahren Methode waren, die alle diese Lehrsätze liefert, sondern dass sie nur diejenigen, die ihnen begegnet sind, aufgelesen haben. " (Descartes 1981, S. 7 f.)

DESCARTES ist hörbar stolz darauf, dass er etwas Neues geschaffen hat. Seine – wie wir heute sagen – Analytische Geometrie ist geeignet, alles das zu *berechnen*, was „die Alten" nur *konstruieren* konnten – und noch weit mehr. Das ist eine bewundernswerte Leistung von DESCARTES.

Freilich ist DESCARTES' hier ausgesprochenes Urteil sehr arrogant. Denn er verschweigt, dass die *Gültigkeit* seiner Konstruktionen auf genau jenen „dicken Büchern" beruht, welche die Alten verfasst haben. Es ist wirklich bemerkenswert, dass der mit allen Methoden des Zweifelns gewaschene DESCARTES in der *Géométrie* über die Richtigkeit seiner geometrischen Konstruktionen kein Sterbenswörtchen verliert.

Das elementar Neue aber ist hier DESCARTES' Erfindung der *formalen* Algebra: jener neuen Sprache der Mathematik, gebildet aus Buchstaben, Rechenzeichen und dem Gleichheitszeichen, welche die alte Sprache aus Geraden, Kreisen, Dreiecken und sonstigen geometrischen Figuren seither und bis auf den heutigen Tag ablöst – wir können Gebiete wie die Formale Logik, aber auch die Mengensprache oder die Kategorientheorie und selbstverständlich die modernen Gebiete der Algebra als Weiterentwicklungen dieser DESCARTES'schen formalen Algebra ansehen. Mit der formalen Algebra hat DESCARTES der Mathematik eine neue Sprache erfunden. Wir nutzen sie noch heute.

EIN BLICK AUF DESCARTES' ONTOLOGIE

Wir haben gesehen: In den *Regulae* versteht DESCARTES die betrachteten Figuren als „Großheiten" (magnitudines). In *La Géométrie* hingegen bezeichnet er seine Rechenobjekte als „Größen" (quantités).

Dieser Wandel ist keine Kleinigkeit. Zu Zeiten *La Géométrie* hat DESCARTES seine reife Philosophie entwickelt. Das ist der berühmte Dualismus zwischen den beiden Substanzen *Geist* und *Materie*.

Im Folgenden werde ich ein paar Bemerkungen zu DESCARTES' Philosophie machen. Es versteht sich von selbst, dass diese Bemerkungen weit mehr im Streit stehen als das, was ich zu DESCARTES' Mathematik und deren Deutung vorgetragen habe – obwohl auch dies natürlich bestritten werden kann.

SUBSTANZ, ATTRIBUT, MODUS

Die Ontologie ist die Lehre von dem, was ist; vornehmer formuliert: die Lehre vom Sein. Dort werden traditionell Substanz, Attribut und Modus unterschieden, und es werden deren Beziehungen zueinander formuliert. Für DESCARTES gilt:

> „Ein Körper ist ausgedehnt und hat Gestalt und Bewegung. Der Körper ist eine Substanz, seine Ausdehnung ein Attribut, und seine Gestalt und Bewegung sind Modi.
>
> Ein Geist ist ein denkendes Wesen, und er erinnert sich und will. Der Geist ist eine Substanz, das Denken ein Attribut, Erinnerung und Wollen sind Modi." (Marshall Jr. 1979, S. 26, mit Verweis auf DESCARTES' *Principia Philosophiae* von 1644)

ZWEI SUBSTANZEN

Nach MARSHALL gibt es für DESCARTES nur zwei Substanzen. Populär gesprochen sind dies: Geist und Materie; in DESCARTES' Sprache: „res cogitans" und „res extensa". Das ist der berühmte DESCARTES'sche Dualismus. (Eine dritte Substanz müsste wohl DESCARTES' Gott sein.)

Res cogitans – Denken

„Res cogitans" ist die denkende Substanz. Es wurde die These vertreten, die „res cogitans" sei in DESCARTES' Philosophie das Einzige, worauf sich das Wort „Gott" beziehen könne. Die Seelen der Menschen inhärierten dieser Substanz als Modi.[t]

Das sagt DESCARTES natürlich nicht klipp und klar, denn dies würde ihn sofort vor die katholische Inquisition bringen. Daran konnte er kein Interesse haben.

Res extensa – Ausdehnung

Für uns hier wichtiger ist die „res extensa". Dies ist DESCARTES' Begriff der objektiven Realität,[u] der Materie.

MARSHALLS Analyse zufolge gibt es für DESCARTES keine Vielheit materieller

[t] Vgl. Marshall Jr. 1979, S. 62. [u] Vgl. Marshall Jr. 1979, S. 144.

Substanzen, sondern nur eine einzige. Diese eine Substanz ist die *Ausdehnung*, in der Fachsprache: „extensio".[V]

Eigentlich ist Ausdehnung das Attribut der Substanz „res extensa". Aber bei DESCARTES können das wesentliche Attribut einer Substanz und diese Substanz nicht voneinander unterschieden werden.

Nach DESCARTES' Substanzlehre kann eine Substanz nur ein einziges Attribut haben. Das liegt zum Ersten daran, dass eine Unterscheidung zweier verschiedener Attribute einer Substanz nicht distinkt und klar erkannt werden kann. Außerdem: Könnte eine Substanz zwei Attribute haben, dann könnten die beiden Attribute Denken und Ausdehnung wesentliche Eigenschaften – Prädikate (im *logischen* Sinn des Wortes) – ein und desselben Wesens sein. So hatte man sich vor DESCARTES den Menschen gedacht: als einziges Subjekt mit mehreren wesentlichen Attributen. Diese Lehre verwirft DESCARTES.[W]

Mit dieser Position – die Ausdehnung ist das Attribut der Materie – widerspricht DESCARTES der herrschenden scholastischen Lehre. Diese hatte, in der Tradition von ARISTOTELES, unterschieden zwischen den *materialen* und den *formalen* Prinzipien einer körperlichen Substanz:

> „Das Formalprinzip verleiht der Substanz eine allgemeine Natur, das Materialprinzip individuiert sie. Quantität – Größe – Ausdehnung ist als Prädikat an die Materie geknüpft, aber von ihr unterschieden." (Marshall Jr. 1979, S. 43)

Gegen diese Unterscheidung wendet sich DESCARTES, etwa in seinem 1633 abgeschlossenen, jedoch zu seinen Lebzeiten nicht veröffentlichten Werk *Le Monde:*

> „[Ich muss den Philosophen] an dieser Stelle sagen, wenn ich mich nicht täusche, rührt die ganze Schwierigkeit, die sie an [der ersten Materie] empfinden, nur davon her, dass sie sie von ihrer eigenen Qualität und ihrer äußeren Ausdehnung unterscheiden wollen, d. h. von ihrer Eigenschaft, Raum einzunehmen.
>
> Es ist mir gleichwohl recht, dass sie glauben, darin recht zu haben, denn ich habe nicht die Absicht, mich damit aufzuhalten, ihnen zu widersprechen. Aber sie dürfen es auch nicht seltsam finden, wenn ich annehme, *dass die Quantität der Materie, die ich beschrieben habe, sich nicht mehr von ihrer Substanz unterscheidet als die Zahl von den gezählten Dingen; und wenn ich ihre Ausdehnung oder ihre Eigenschaft, Raum einzunehmen, nicht als Akzidens auffasse, sondern als ihre wirkliche Form und ihr Wesen* [...]" (Descartes 1989, S. 43, 45)

DESCARTES entwickelt hier, in diesem von ihm nicht veröffentlichten Text, seine Position ausdrücklich im Gegensatz zur traditionellen Philosophie. MARSHALL dazu:

> „Eine materielle Substanz ist für DESCARTES ihre Ausdehnung. Die Unterscheidung, die wir gewohnt sind zwischen beiden zu machen,

[V] Vgl. Marshall Jr. 1979, S. 54. [W] Vgl. Marshall Jr. 1979, S. 33.

> ist auf die Unklarheit unseres Denkens zurückzuführen.“ (Marshall Jr. 1979, S. 43, mit weiterem Quellenbeleg)

Das hat Folgen auch für den Raumbegriff: Für DESCARTES sind Raum und Materie identisch. Es gibt keinen Unterschied zwischen einem Körper und dem Raum, den er einnimmt.[x]

Eine Konsequenz daraus: Für DESCARTES gibt es keinen leeren Raum. Selbst der Gott kann ihn nicht erschaffen – eben wegen dieser Identität von Materie und Raum.[y] Die Existenz der Materie beschränkt des Gottes Allmacht.

GEOMETRIE UND ARITHMETIK BEI DESCARTES

Geometrie

Wie wir in dem Zitat aus *Le Monde* gerade gelesen haben, unterscheidet DESCARTES nicht zwischen Materie, Größe (quantité) und Ausdehnung. Folglich ist mit der Ausdehnung auch die Größe mit der Materie identisch. Indem die Geometrie von Größen handelt, handelt sie von der Materie: der „res extensa“.

Insofern hat die Geometrie einen objektiven Gegenstand: die Substanz Materie.

Arithmetik

Um die Arithmetik aber ist es weit schlechter bestellt. Wie in jenem Zitat aus *Le Monde* ebenfalls zu lesen war, ist die Zahl nicht vom gezählten Ding zu trennen. Auch in *Regel 14*.12 f. der *Regulae* sagt DESCARTES das:

> „Wenn es sich z. B. um die Zahl handelt, so stellen wir uns ein durch viele Einheiten messbares Subjekt vor, und wenngleich der Verstand jetzt nur über dessen Vielheit reflektiert, so müssen wir uns trotzdem in Acht nehmen, dass er daraus nicht einen Schluss zieht, wonach man annehmen kann, dass die gezählte Sache von unserm Begriff ausgeschlossen gewesen ist, wie es die machen, welche den Zahlen wunderbare Geheimnisse und bloße Torheiten zuschreiben, auf die sie sicherlich nicht so fest bauen würden, wenn sie nicht die Zahl als von den gezählten Dingen distinkt dächten. [...]
>
> In der Tat täuschen uns selbst die Wissenschaften der Arithmetik und der Geometrie, wenngleich sie die Allergewissesten sind, in dieser Beziehung. Denn welcher Arithmetiker (Logista) ist nicht der Überzeugung, dass seine Zahlen von jedem Subjekt nicht nur durch den Verstand abstrahiert sind, sondern durch die sinnliche Anschauung auch wahrhaft unterschieden werden müssen?“ (Descartes 1980, S. 136 f.)

Nach dem ersten Satz dieses Zitats ist „Zahl“ ein „messbares Subjekt“. Die „messbaren Subjekte“ aber sind die „Ausdehnungen“ (oder „Quantitäten“). Somit ist

[x] Vgl. Marshall Jr. 1979, S. 43.

[y] Vgl. Marshall Jr. 1979, S. 47, der sich auf S. 48–55 mit abweichenden Textstellen bei DESCARTES auseinandersetzt.

für DESCARTES „Zahl" eine „Ausdehnung". Insofern die Geometrie diese „Ausdehnungen" behandelt, erledigt sie *nebenbei* auch die Arithmetik. Denn dass die für → S. 17 die Geometrie *geeigneten* Operationen gerade die *arithmetischen* seien (und nicht *ganz andere*), sehe ich bei DESCARTES nicht problematisiert.

Wenn es aber keine *vom gezählten Ding unterschiedene* Zahl gibt, kann es von Zahlen, *sofern sie vom gezählten Ding unterschieden sind,* auch keine Wissenschaft geben. Eine Wissenschaft Arithmetik ist für DESCARTES nicht möglich.

Die Zahlen werden nur vom Verstand (intellectus) von den Dingen abstrahiert. Sie sind nicht Gegenstand der Einbildungskraft (Intuition). Demzufolge können sie nicht distinkt und klar wahrgenommen werden.[z] Die Sätze der Arithmetik sind für DESCARTES nur „empirische Verallgemeinerungen"[a]. Somit sind sie nicht objektiv gewiss, sondern unterliegen dem Zweifel. Solche Zweifel formuliert DESCARTES in den *Meditationen*:

> „Woher weiß ich aber, dass [Gott] nicht bewirkt hat, [...] dass – so wie ich urteile, dass bisweilen auch andere sich in dem irren, was sie aufs vollkommenste zu wissen meinen – so auch ich mich täusche, so oft ich 2 und 3 addiere oder die Seiten des Quadrats zähle, oder was man sich noch Leichteres denken mag." (Descartes 1972, S. 14)

Bekanntlich ist der Zweifel in den *Meditationen* kein wirklicher, sondern ein methodischer. Dennoch ist es bemerkenswert, dass DESCARTES sogar an den Sätzen der Arithmetik zu zweifeln bereit scheint.

Ergebnis: Die Arithmetik ist für DESCARTES keine Wissenschaft. (Das erklärt, warum DESCARTES kein Buch über die Arithmetik verfasst hat.)

BEWEGUNG IN DER MATHEMATIK

Wie wir in späteren Kapiteln sehen werden, spielt die *Bewegung* eine wichtige Rolle in der Entwicklung der Grundlagen der Analysis. Bei DESCARTES' Erfindung der formalen Algebra spielt Bewegung keine direkte Rolle. Deshalb sei hier eine Darstellung von DESCARTES' Auffassung der Bewegung ergänzt.

In der Geometrie hält DESCARTES die Bewegung für unproblematisch, denn in *Le Monde* heißt es, offenbar zustimmend:

> „Die Natur der Bewegung, von der ich hier spreche, ist im Gegenteil so leicht zu erkennen, dass selbst die Geometer, die von allen Menschen die gebildetsten sind, um die Dinge sehr deutlich zu begreifen, die sie betrachtet haben, sie für einfacher und einsichtiger gehalten haben, als die ihrer Oberflächen und ihrer Linien: was daran deutlich wird, wie sie die Linie durch die Bewegung eines Punktes und die Oberfläche durch diejenige einer Linie erklärt haben." (Descartes 1989, S. 49)

[z]Vgl. Marshall Jr. 1979, S. 87 f. [a]Marshall Jr. 1979, S. 88

Die Lehre, die Bewegung sei das Konstitutionsprinzip nicht nur der geometrischen Figuren, sondern auch der physikalischen Körper, nennt MARSHALL einen „der kühnsten und originellsten Teile der kartesischen Philosophie“[b]. Darauf kann ich hier nicht eingehen, sondern ich muss mich auf DESCARTES’ Bewegungsbegriff in der Geometrie beschränken.

Im zweiten Buch von *La Géométrie* sagt DESCARTES:

> „[...] es scheint mir ganz klar, dass, [...] wenn man die Geometrie als diejenige Wissenschaft ansieht, die allgemein die Maße der Körper kennen lernt, man die zusammengesetzteren Linien ebenso wenig ausschließen dürfe wie die einfachsten, vorausgesetzt, dass man sie sich beschrieben denken kann durch eine stetige Bewegung oder durch mehrere aufeinanderfolgende solche Bewegungen, deren jede durch die vorhergegangene vollkommen bestimmt ist; denn auf diese Weise kann man stets eine scharfe Vorstellung (connoissance exacte) von den Maßen einer solchen Linie erhalten.“ (Descartes 1981, S. 20 f.)

Auch wenn eine geometrische Figur durch eine „stetige Bewegung“ als „beschrieben“ *gedacht* werden kann, so *ist* diese Bewegung jetzt diese Figur. Die Einbildungskraft kann diese Figur distinkt und klar wahrnehmen. Wenn ich die Figur wahrnehme, so nehme ich also ihre (gedachte) Erzeugung durch diese „stetige Bewegung“ wahr. Kurz: *In* oder *mit* der Figur nehme ich die Bewegung wahr. Die Figur ist die Einheit einer gedachten Bewegung. Die Figur ist die Bewegung.[22]

Laut DESCARTES kann eine geometrische Figur distinkt und klar wahrgenommen werden. Also kann eine (vollendete) Bewegung distinkt und klar wahrgenommen werden. Eine vollendete Bewegung ist eine vergangene Bewegung, aber sie kann im Nachhinein distinkt und klar wahrgenommen werden. („Es scheint dies das einzige in DESCARTES’ Physik zu sein, was ein Gesetz genannt werden kann.“[c]) Daher und in diesem Sinne ist für DESCARTES die Bewegung ein legitimer Gegenstand der Geometrie, der Mathematik: als Figur.

Dies ist deshalb wichtig, weil die Antike – genauer: die Eleaten – idealtypisch die Bewegung aus der Mathematik ausgeschlossen hatte: Sicheres Wissen kann es den Eleaten zufolge nur vom Sein geben, nicht vom Werden.

PARMENIDES (−520/15––460/55) lehrt:

> „Es ⟨das Seiende⟩ ist oder es ist nicht! Damit ist unweigerlich entschieden, den einen Weg als undenkbar und unaussprechlich zu verwerfen – er ist ja nicht der Wahre –, den anderen aber zu wählen als den einzig Richtigen. Wie könnte also das Seiende in der Zukunft sein? Wie könnte es jemals geworden sein? Denn wenn es einmal geworden ist, dann *ist* es nicht; es ist aber auch nicht, wenn es jemals in Zukunft sein sollte. So ist das Werden ausgelöscht und das Vergehen ⟨der Dinge⟩ abgetan. [...]

[b]Marshall Jr. 1979, S. 104

[c]Marshall Jr. 1979, S. 135

[22]So auch Marshall Jr. 1979, S. 136.

> Dasselbe aber ist Denken und des Gedankens Gegenstand. Denn du kannst das Denken nicht ohne das Seiende antreffen, in dem es ⟨ja⟩ ausgesprochen ist. Denn es gibt nichts außer dem Seienden und wird nichts außer ihm geben; hat doch das Schicksal es verhängt, dass es ganz und unbeweglich ist. Daher sind alles nur *leere Namen,* was die Sterblichen ⟨durch die Sprache⟩ festgesetzt haben, in dem Glauben, es liege ihnen eine *Wirklichkeit* zugrunde: »Entstehen« und »Vergehen«, »Sein« und »Nichtsein«, »Veränderung des Ortes« und »Wechsel der leuchtenden Farbe«." (Capelle ^{9}2008, S. 130 f., Hinzufügungen ⟨...⟩ vom Herausgeber)

Denken ist das Denken von Etwas. Denken fordert daher Sein. PARMENIDES identifiziert Denken und Gedachtes.

Widerspruchslos gedacht werden kann nur das (unveränderliche) Sein.[23] Wenn es keine Veränderung, keine Bewegung gibt, ist auch das Sein unbeweglich. Also ist es überall und gleichmäßig:

> „Nirgends gibt es ein stärkeres Sein, das seinen Zusammenhalt hinderte, nirgends ein schwächeres: denn alles ist voll vom Seienden. Daher ist es in seinem ganzen Umfange zusammenhängend. Denn Seiendes stößt an Seiendes." (Capelle ^{9}2008, S. 130)

Anders gesagt: Das Seiende ist ein Kontinuum.[d] Neben dem Satz „Das Seiende ist." haben wir damit einen zweiten positiven Satz über das Seiende.[24]

In der *Nikomachischen Ethik* schreibt ARISTOTELES:

> „Nun, was wissenschaftliche Erkenntnis ist, ergibt sich, wenn es gilt, sich exakt auszudrücken und sich nicht durch bloße Ähnlichkeiten leiten zu lassen, aus Folgendem. Wir nehmen alle an, dass das, was wir wissenschaftlich erkennen, die Möglichkeit eines Andersseins ausschließt. Von dem, was anders sein kann, wissen wir nicht, ob es existiert oder nicht, falls es sich unserer unmittelbaren Beobachtung entzogen hat. Der Gegenstand wissenschaftlicher

[d] So Szabó 1954, S. 254.

[23] Das formulierte 23 Jahrhunderte später IMMANUEL KANT (1784–1804) so:

> „Veränderung ist Verbindung kontradiktorisch einander entgegengesetzter Bestimmungen im Dasein ein und desselben Dinges." (Kant, *Kritik der reinen Vernunft,* B 291)

Zuvor hatte er bestimmt:

> „Veränderung ist eine Art zu existieren, welche auf eine andere Art zu existieren eben desselben Gegenstandes erfolget. Daher ist alles, was sich verändert, »bleibend«, und nur sein Zustand »wechselt«. Da dieser Wechsel also nur die Bestimmungen trifft, die aufhören oder auch anheben können; so können wir, in einem etwas paradox scheinenden Ausdruck, sagen: nur das Beharrliche (die Substanz) wird verändert, das Wandelbare erleidet keine Veränderung, sondern einen »Wechsel«, da einige Bestimmungen aufhören, und andere anheben." (Kant, *Kritik der reinen Vernunft,* B 230/A 187)

[24] Was ÁRPÁD SZABÓs überraschendes Urteil infrage stellt, man könne „über dies Seiende nur lauter Negationen behaupten" (Szabó 1954, S. 279).

> Erkenntnis hat also den Charakter der Notwendigkeit. Das heißt, er ist ewig. Denn alles, was mit uneingeschränkter Notwendigkeit existiert, ist ewig, und das Ewige ist ungeworden und unzerstörbar.“ (Aristoteles, *Nikomachische Ethik,* Buch VI, Kap. 3, 1139b)

Ein ontologischer Nachtrag

Beiläufig haben wir bereits DESCARTES’ Wahrheitskriterium genannt: Wahr ist das,
S. 7, 8← was ich klar und deutlich erfasse. Etwas „klar und deutlich erfassen“ ist ein Verhältnis des erkennenden Subjekts zu einem Gegenstand. „Wahrheit“ ist ein Verhältnis eines Satzes (einer Aussage) zu einem Gegenstand. Offenkundig ist das nicht dasselbe. Wie gelingt es DESCARTES, beides zu identifizieren? Das erläutert er in der sechsten *Meditation:*

> „[...] wenn ich sage, »die Natur lehrt mich etwas«. In diesem Ausdrucke nehme ich nämlich die »Natur« in einem engeren Sinne [...] [Es handelt sich jetzt] nur um das, was Gott mir, als dem aus Körper und Geist Zusammengesetzten verliehen hat.“ (Descartes 1972, S. 70 f.)

Nur weil der Gott gut ist und kein Betrüger, nur deswegen ist das „wahr“, was ich „klar und distinkt“ erfasse. Der gute Gott garantiert die Existenz des von mir klar und distinkt Erfassten.

HISTORIOGRAFISCHE NACHTRÄGE

Die Erfindung der Operationszeichen + und −

Der entstehende Handelskapitalismus in den oberitalienischen Städten

Kapitalismus

Im Hochmittelalter führten die Christen auf Betreiben und mit dem Segen ihres Papstes einen heiligen Eroberungskrieg gegen die Heiden. In den Jahren 1096 bis 1270 fanden sieben sogenannte Kreuzzüge statt.

Die wirtschaftliche Folge dieser Raubzüge war ein ungeheures Erstarken der Kaufleute in den oberitalienischen Handelszentren, vor allem Genua, Venedig, Pisa und Florenz. Dieses Erstarken speiste sich zunächst aus der sehr profitträchtigen Aufgabe, die heiligen christlichen Krieger zu transportieren und ihre Versorgung mit Material und Verpflegung zu bewerkstelligen. Die Eroberer brachten sodann – soweit sie erfolgreich waren – reiche Beute orientalischer Schätze zurück.[25]

In einer auf einfacher Warenproduktion gegründeten Wirtschaft wie der des europäischen Mittelalters ist der Handel mit den lebensnotwendigen Gütern genau geregelt. Diese Regeln verhindern gewöhnlich die Akkumulation von Kapital. Anders beim internationalen Handel: Dieser unterliegt nicht derartigen Beschränkungen, da es keine Instanz gibt, deren Durchsetzung zu garantieren.

[25] Türcke 2015, S. 142–146 beschreibt eine zweite Quelle der Kapitalbildung jener Zeit: das „monetäre Schenkungswesen“, also die Stiftung sakraler Großbauten nach der (ab 1033 offenkundig) ausgebliebenen Wiederkehr Christi, die „wie Pilze aus dem Boden schossen“ und um die herum sich die Stadt formierte: „Stadt hieß so viel wie Handelsplatz, Markt.“

Wohin mit dem erworbenen Kapital? Zunächst ging es den Kaufleuten darum, Ein- und Verkaufsmonopole für die neuen Luxuserzeugnisse aus dem Orient zu errichten, die die Neureichen begehrten. Allerdings sind die Expansionsmöglichkeiten des internationalen Handels begrenzt, sodass die Gewinne anderswo investiert werden mussten. Die Möglichkeiten dafür waren gering: Landerwerb und Bankgeschäfte.

Diese Wandlungen der Wirtschaftsweise schufen einen beträchtlichen Bedarf an Rechenkundigen: ohne Rechnen kein Großhandel, keine Geldgeschäfte und keine Buchführung.

Alte und neue Zahlschrift

Doch die Schuleinrichtungen der Zeit boten keinerlei Ausbildung für kaufmännische Bedürfnisse, sondern lehrten weiterhin vorrangig Latein und Katechismus.

Im Jahr 1202 fasste der Sohn eines Pisaner Notars das auf seiner Reise in die nordafrikanische Niederlassung Bugia (Bougie) erworbene kaufmännische Wissen in einem umfangreichen Manuskript namens *Liber abaci* zusammen. Ein Exemplar der zweiten Auflage dieser Handschrift aus dem Jahr 1228 ist bis heute erhalten. Es wurde 1857 gedruckt[e] und 2003 englisch publiziert[f]. Der Autor des *Liber abaci* ist LEONARDO FIBONACCI. Dieses Werk bringt die indisch-arabische Zahlschrift ins Abendland. Es ist eine umfängliche Sammlung der Rechenkunst. Auch das Lösen von – wie wir sagen – quadratischen Problemen und linearen Gleichungssystemen wird darin gelehrt.

Der *Liber abaci* erregt große Aufmerksamkeit, auch die des Kaisers FRIEDRICH II. Noch aber werden die Geschäftsbücher des Großhandels und der Banken in der römischen Zahlschrift geführt, und zwar werden die Beträge nicht in Spalten ausgeworfen, sondern in den laufenden Text einbezogen. Wenn im Jahr 1299 der Rat von Florenz eine Verordnung über das Bankwesen erlässt, in der er es bei einer Geldstrafe verbietet, Hauptbücher in indisch-arabischen Ziffern zu schreiben,[g] muss dafür ein Anlass bestanden haben. Ziel dieser Verordnung war Betrugsverhinderung beim Zahlschreiben. Noch im Jahr 1500 schreiben die Rechnungsbücher der freien Reichsstadt Augsburg die Beträge in römischen Zahlzeichen im Text und werfen sie daneben spaltenweise in Ziffern aus.[h]

Die Rechenmeister

Zunächst also in Oberitalien entstand ein Bedürfnis nach Rechenkundigen. Die Universitäten boten hier keine Hilfe – nicht nur, weil sie in Latein unterrichteten, sondern auch, weil die dort gelehrten Algorismus-Schriften zwar über die neue Zahlschrift und das Rechnen damit informierten, aber nicht in für den Praktiker

[e] Leonardo 1857 [f] Leonardo 2003
[g] Menninger ^{3}1979, Bd. 2, S. 244 [h] Menninger ^{3}1979, Bd. 2, S. 99

nützlicher Weise.[i]

Daher entstanden, zunächst in Oberitalien, eigene Schulen zur Vermittlung kaufmännischen Rechnens an die Praktiker. Diese Schulen hießen nach dem damals gebräuchlichen Computer „Abacus-Schulen“ – obwohl sie nicht das Brett-Rechnen mit dem Abacus, sondern die neue indisch-arabische Zahlschrift und das Rechnen mit ihr lehrten.

Aus Florenz kennen wir aus dem Jahr 1304 den frühesten Namen eines Abacus-Lehrers: MAESTRO NERI. Die Abacus-Lehrer in Florenz schlossen sich bereits 1316 mit anderen Lehrern zu einer Gilde zusammen, und im Jahr 1343 gab es in Florenz sechs Abacus-Schulen mit 1000–1200 Schülern.[j] Selbstverständlich wurden für diesen Unterricht geeignete Lehrtexte benötigt.

Deutsche Kaufleute sandten ihre Söhne zur Ausbildung zunächst in Schulen und Handelshäuser oberitalienischer Städte, um dort die „Kunst der Kaufmannschaft“ zu erlernen.

Auf diese Weise kamen neben arithmetischen Fertigkeiten auch die Fachausdrücke von Handel und Bankwesen nach Deutschland: „Agio“ als Aufgeld, „Disagio“ als Abschlag, „Konto(-korrent)“ für die (laufende) Rechnung, „Diskonto“ (verkürzt: „Skonto“) für Rechnungsabzug, „Giro“ für den unbaren Geldkreislauf, „Saldo“ für den Rechnungsabschluss, „Spese“ für den Aufwand, „Valuta“ für den Wert (einer Fremdwährung), „brutto“ und „netto“ für verpackte und unverpackte Ware usw. bis hin zum „Lombard“-Geschäft (kurzfristige Beleihung von Wertpapieren) nach den Vorgehensweisen von oberitalienischen (lombardischen) Bankiers, die Leihgeschäfte etwa von vertriebenen Juden zu übernehmen, und „Bankrott“ für die zerbrochene Rechenbank, mit der man betrügerische Wechsler auf dem Markt zu strafen pflegte.[k]

Seit Mitte des 15. Jahrhunderts findet man in größeren Handelsstädten Deutschlands den Stand der Rechenmeister. „Mit Genehmigung oder gar Förderung durch die städtischen Behörden richteten sie private Rechenschulen ein und erteilten Unterricht [nicht in lateinischer, sondern] in deutscher Sprache. Das Rechnen am Abakus und das Rechnen mit der Feder nach der indisch-arabischen Methode wurden im Unterricht mindestens in der Anfangszeit gleichrangig behandelt.“[l] Auch die deutschen Rechenschulen benötigten Lehrtexte. Zum Glück hatte gerade GUTENBERG den Buchdruck mit beweglichen MetallletTern erfunden, sodass ein neues Handwerk sich ein neues Geschäftsfeld erschließen konnte.

Die ersten und die einflussreichsten deutschen Rechenbücher

In Bamberg 1483 und in Augsburg 1489 wurden die frühesten deutschen Rechenbücher gedruckt.

Ulrich Wagner 1483

Das so genannte *Bamberger Rechenbuch* wurde 1483 bei dem Bamberger Dru-

[i] Folkerts und Reich 1989, S. 190, Sp. 2 [j] Folkerts und Reich 1989, S. 190, Sp. 2
[k] Vgl. Menninger ^{3}1979, Bd. 2, S. 245 f., Schröder 1988, S. 298.
[l] Schröder 1988, S. 300 f.

cker HINRIK PETZENSTEINER gedruckt.[m] Sein Verfasser ist höchstwahrscheinlich ULRICH WAGNER († 1489/90), auch H. PAUR genannt, der eine der drei 1457 in Nürnberg urkundlich belegten Rechenschulen leitete. WAGNER lehrte das Schreiben der Zahlen in der (wie wir heute sagen) indisch-arabischen Zahlschrift sowie das schriftliche Rechnen mit natürlichen und gebrochenen Zahlen, auch den Dreisatz, den er „goldene Regel" nennt. Er präsentiert das Nötigste korrekt und knapp, manchmal zu knapp und beschränkt sich auf die Darlegung der elementarsten Sachverhalte für den Praktiker. Einen weitergehenden Bildungsanspruch hat WAGNER nicht, wissenschaftliches Niveau oder derartige Ansprüche sind nicht zu erkennen. (Im viel älteren *Liber abaci* des LEONARDO FIBONACCI war das ganz anders!) Die großen gelehrten Vorläufer finden bei WAGNER keine Erwähnung. Seine Verfahrensweisen teilt er mit, ohne sie zu begründen – manche auch so knapp, dass sie dem Leser allein aus der Lektüre heraus nicht verständlich sind. Und das, obwohl sich WAGNER nicht an seinesgleichen wendet, sondern an den „Mercker": den Schüler, der auf etwas merken, der Acht geben soll – nicht: der etwas verstehen soll. Entgegen seinem Anspruch ist WAGNERs Rechenbüchlein nicht oder nur eingeschränkt zum Selbststudium ausreichend. (Die Proben etwa werden dem „Mercker" unbegreiflich bleiben.)

Ein Vergleich von WAGNERs Rechenbuch mit dem *Liber abacus* von LEONARDO FIBONACCI oder dem *Triparty* aus dem Jahr 1484[n] von WAGNERs Zeitgenossen NICOLAS CHUQUET (1445/55–1487/8) verbietet sich sofort: Während diese das Wissen ihrer Zeit entfalten (und um Neues ergänzen), präsentiert WAGNER lediglich elementare Rechentechniken für den Kaufmann.

Zeichen für Rechenoperationen kommen in diesem Buch nicht vor. (Es ist heute als Faksimile-Druck Wagner 1483 leicht zugänglich.)

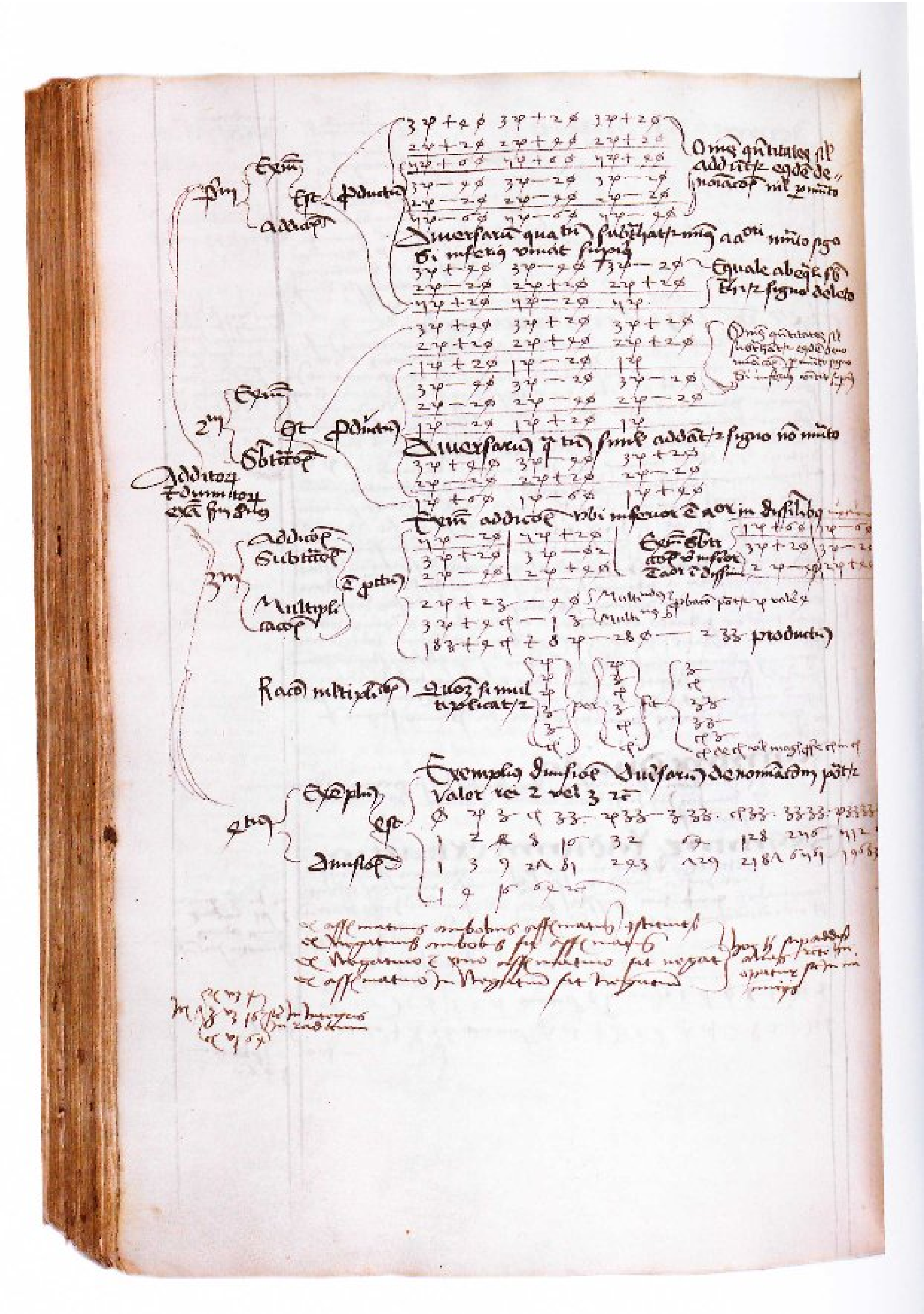
Johannes Widman 1489

In dem erstmals 1489 in Ausgsburg gedruckten Rechenbuch mit dem Titel *Behende und hübsche Rechnung auff allen Kauffmanschafften* von JOHANNES WIDMAN (1460/5–um 1505) aus Eger wird ebenfalls das schriftliche Rechnen der Grundrechenarten gelehrt. Auch dies geht ohne die Nutzung von Operationszeichen vonstatten.

Bei Maßen allerdings werden gelegentlich die Zeichen + (im Wechsel mit dem Wort „und") und − (im Wechsel mit dem Wort „minus") verwendet. Gelegentlich erscheint auch +, wenn keine Addition vorliegt: „Regula augmenti + Decrementi"[o]. Dies wird man so verstehen können, dass + und − als Zeichen für Über- oder Untermaß aus der kaufmännischen Praxis hervorgegangen sind.[p] Gelegentlich werden + und − als Zeichen für Rechenoperationen verwendet.

WIDMAN hat sich beim Verfassen seines Rechenbuches einer Reihe von Manuskripten bedient, die noch heute in dem Sammelband *Codex 80* der Dresdner Bibliothek vorhanden sind.[q] Unter diesen befindet sich eine deutsche Algebra, ge-

[m] Schröder 1988, S. 293 f. [n] Chuquet 1880/1881 [o] Widman, S. 90 f., Gärtner 2000, S. 429
[p] Tropfke ^{3}1933, S. 15 [q] Tropfke ^{3}1933, S. 16, Gärtner 2000, S. 171



Widman 1486

Das nebenstehende Bild zeigt eine Seite aus dem Manuskript einer Coss-Vorlesung von WIDMAN aus dem Sommersemester 1486 (f. 464v des *Kodex 1470* der Universitätsbibliothek Leipzig. Aus: Kaunzner 2008, S. 32).

Zum cossischen Rechnen siehe ab S. 43.

schrieben im Jahre 1481, in der bereits das Minuszeichen (gelesen „minner") auftritt, statt des Pluszeichens aber das Wort „vnd" gebraucht wird. In einer ebenfalls im Dresdner Codex 80 vorhandenen lateinischen Algebra tritt neben dem —-

Zeichen auch das +-Zeichen auf.

Adam Ries 1518, 1522

Der heute bekannteste deutsche Rechenmeister ist ADAM RIES (1492–1559). Er verfasste ab 1518 sehr erfolgreiche Rechenbücher. Dieser Erfolg dürfte daher rühren, dass er darin nicht nur das schriftliche Rechnen („Rechnen auf der Feder") lehrte, sondern auch das Abakus-Rechnen („Rechnen auf den Linien"). Da das Brett-Rechnen ohne das Erlernen der in Deutschland damals neuen indisch-arabischen Zahlschrift funktioniert, war es um Vieles leichter.

Sein zweites Rechenbuch *Rechenung auff der Linihen und federn …* erschien erstmals 1522 und erfuhr mehr als hundert Auflagen. Es begründete den heute sprichwörtlichen Ruhm: „Das macht nach ADAM RIESE …". In diesem Buch kommen keine Zeichen für Rechenoperationen vor. Auch dies könnte zum Erfolg des Werkes beigetragen haben, zusammen natürlich mit dessen geschickter pädagogischer Diktion.

Christoph Rudolff 1525

Viel gelesen wurde auch das 1525 erschienene Buch *Behennd vnnd Hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre / so gemeincklich die Coß genēt werden …* von CHRISTOPH RUDOLFF (1499?–1545?) aus Wien.[r,26] Hier werden +- und −-Zeichen ausgiebig verwendet. MICHAEL STIFEL (1487?–1567) hat dies in seiner ebenfalls berühmt gewordenen Bearbeitung von RUDOLFFS *Coß* von 1553 beibehalten.[s]

Ergebnis

Die Operationszeichen (*Symbole*) + und − kommen in den deutsch geschriebenen Büchern der Rechenmeister in Gebrauch; „Symbole" deshalb, weil es sich dabei um – grundsätzlich beliebig gewählte – Zeichen handelt.

In den italienisch und französisch geschriebenen Lehrtexten der Zeit waren stattdessen *Abkürzungen* der Art „p" und „m" oder „m̃" üblich.

DAS COSSISCHE RECHNEN

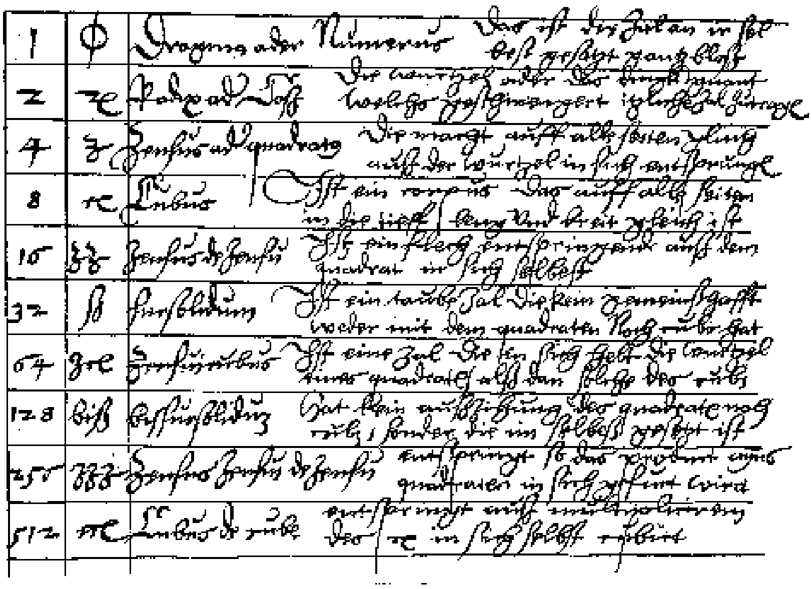
Was hat es mit der schon wiederholt erwähnten „Coss" auf sich? → S. 24, 42

In den deutschsprachigen Rechenbüchern wurde der italienische Name für die Unbekannte („cosa") als „Coss" (Original: „Coß") bezeichnet. WIDMAN schrieb im Jahr 1489 „cossa", RIES schrieb im Jahr 1524 „Coß", ebenso CHRISTOPH RUDOLFF in seinem bereits genannten Werk aus dem Jahr 1525.

[r]Rudolff 1525 [s]Stifel 1553

[26]Ein Zitat daraus findet sich auf S. 100 in Anmerkung 75.

Das RIES'sche Manuskript über die *Coß* wurde nicht in Druck gegeben, scheint aber „bei Freunden in Umlauf gewesen zu sein."[t] In diesem Manuskript werden die cossischen Zeichen erläutert:



ADAM RIES, *Coß*. Aus Wieleitner 1927, S. 30

In WIELEITNERS Übertragung:

„1 ~ Dragma ader Numerus. – Das ist die zal an ir selbest gesetzt gantz bloß.

2 ~ Radix ader Coss. – Die wurtzel ader das dingk gnant, welchs geschwengert itzliche zal zu tragen.

4 ~ Zensus ader quadratus. – Die macht auff alle seiten gleich auß der wurtzel in sich entsprungen.

8 ~ Cubus. – Ist ein corpus, das auff alle seiten in die tieff leng vnd breit gleich ist.

16 ~ Zensus de Zensu. – Ist ein flech entspringend auß dem quadrat in sich selbest.

32 ~ sursolidum. – Ist ein taube zal die kein gemeinschafft weder mit dem quadraten noch cubo hat.

64 ~ Zensuicubus. – Ist eine zal die in sich helt die wurtzel eines quadraten alß dan solche des cubi.

128 ~ bissursolidum. – Hat kein außzihung des quadraten noch cubi / sonder die im selbst gesetzt ist.

256 ~ Zensus Zensui de Zensu. – Entspringt so das product ayns quadraten in sich gefurt wird.

512 ~ Cubus de cubo. – Entspringt auß multiplicieren des [Cubus] in sich selbst cubirt."

[t]Hofmann 1968, S. 29, Anmerkung 89

(Wieleitner 1927, S. 29–31)

Die Zahlen in der ersten Spalte erscheinen etwas abenteuerlich.

Die cossischen Zeichen stehen also für: die einfache Zahl, die Unbekannte und für die Potenzen der Unbekannten. Bei diesen Zeichen handelt es sich um *bestimmte* Zeichen: um die Anfangsbuchstaben der betreffenden Worte. Es sind *Abkürzungen.* Ich nenne das „Namen“, im Unterschied zu (aus einem gegebenen Zeichenvorrat frei wählbaren) „Symbolen“.

Eine solche pedantische Unterscheidung zwischen „Name“ und „Symbol“ ist nicht üblich. Mir scheint sie wichtig. Denn nur dann, wenn wir hier genau sind, können wir erkennen, welch enormer Abstraktionsschritt DESCARTES’ Idee war, (Buchstaben-)„Symbole“ statt (cossischer) „Namen“ zu schreiben. Als diese Idee einmal in der Welt war, wurde sie nicht mehr aufgegeben.

RECORDE ODER: DIE ERFINDUNG DES GLEICHHEITSZEICHENS

DESCARTES hat nicht das von uns heute verwendete Gleichheitszeichen („=“) geschrieben, sondern „ æ “[u] oder „ ∝“. Nach dem, was man heute weiß, wurde das Zeichen = für Gleichheit zweier Größen erstmals von ROBERT RECORDE (1510–58) im Druck verwendet, und zwar in dessen Coss.[27] RECORDEs Begründung für dieses Zeichen lautete, keine zwei Dinge könnten gleicher sein als zwei parallele Linien gleicher Länge: → S. 23, 25

> „I will sette as I doe often in woorke vse, a paire of parallels, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═══════, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle.“ (Recorde 1557, f. Ffj[v])

RECORDE verwendet sein Zeichen dann konsequent, zusammen mit den Zeichen —+— und ——.

Hat Recorde formale Gleichungen geschrieben?

Kann man nun sagen, RECORDE habe *rein formale Gleichungen* geschrieben?

Ich meine nicht. In der Tat verwendet RECORDE sehr konsequent *Symbole* für Rechenoperationen. Aber seine Rechenobjekte sind cossische Zeichen, und dies sind, wenn man es so genau nimmt, wie ich das hier tun will, keine „Symbole“, sondern *Abkürzungen* und also: „Namen“.

Es gibt noch ein weiteres Argument dafür, dass RECORDE keine rein formalen Gleichungen schreibt: Er nimmt seine Gleichungen nicht als Gegenstand weiterer Betrachtungen. Er *operiert* nicht mit ihnen. Während DESCARTES – wie wir gleich sehen werden – *Gleichungen als Rechenobjekte* nimmt, die man miteinander ad-

[u] Descartes, *passim.*

[27] In einem Manuskript von POMPEO BOLOGNETTI (†1568), das möglicherweise älter ist als 1557, findet sich ebenfalls das heute übliche Zeichen für Gleichheit – siehe Cajori 1924, Bd. I, S. 126, 129.

S. 52← dieren, subtrahieren, multiplizieren usw. kann, sehe ich bei RECORDE nirgendwo eine solche Praxis.

Gleichwohl hat RECORDE sein Symbol für Gleichheit in England berühmt gemacht, sodass es schließlich LEIBNIZ gelingen konnte, RECORDEs Symbol als Gleich-
S. 129← heitszeichen durchzusetzen.[v]

VIÈTE ODER: RECHNEN MIT GEOMETRISCHEN FIGUREN – NICHT FORMAL

Meist heißt es, FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) habe das formale Rechnen erfunden. Das wäre dann früher als DESCARTES. Ich teile diese Meinung nicht und begründe das jetzt.

Viète nutzt Operationszeichen und rechnet mit Buchstaben

Operationszeichen

Unzweifelhaft bedient sich VIÈTE einiger Operationszeichen fürs Rechnen: Er hat ein Plus- und ein (eigenes!) Minuszeichen, und er nutzt auch den Bruchstrich, um eine Division anzuzeigen. Ein Zeichen für die Multiplikation hingegen hat er nicht, sondern schreibt dafür das Wort „in“. Auch ein Zeichen für Gleichheit fehlt ihm.

An dieser Stelle könnte ich meine Argumentation beenden. Denn wer in einer Rechung ein oder mehrere *Worte* benutzt, der rechnet nicht *rein formal*.

So einfach aber will ich es mir gar nicht machen. Denn VIÈTE fehlt mehr als nur ein Multiplikations- und ein Gleichheitszeichen zum rein formalen Rechnen. VIÈTE fehlt ein Abstraktionsschritt.

Buchstaben

Zutreffend ist: VIÈTE benutzt Buchstaben zur Bezeichung seiner Rechenobjekte. In Kapitel IV seiner *Isagoge* aus dem Jahr 1591 heißt es:

> „Damit diese Arbeit durch ein schematisch anzuwendendes Verfahren unterstützt wird, mögen die gegebenen [Großheiten] von den gesuchten unbekannten unterschieden werden durch eine feste und immer gleich bleibende und einprägsame Bezeichnungsweise, wie etwa dadurch, daß man die gesuchten [Großheiten] mit dem Buchstaben A oder einem anderen Vokal E, I, O, U, Y, die gegebenen mit den Buchstaben B, G, D, oder anderen Konsonanten bezeichnet.“ (Viète 1973, S. 52)

VIÈTE will also die Gesuchten durch Vokale und die Bekannten durch Konsonanten bezeichnen. (Nebenbei gesagt ist dies keine *formale* Unterscheidung der

[v] Tropfke [3]1933, S. 32

Buchstabenarten – wie etwa: erste oder letzte Buchstaben des Alphabets –, sondern sie bezieht sich auf die jeweilige *Art* der Buchstaben.)

Sind Viètes Buchstaben Symbole?

Eine Verwendung von Buchstaben in einer Rechnung, so habe ich bisher argumentiert, ist ein Rechnen mit „Symbolen". Bei VIÈTE jedoch ist das nicht so! Denn wenn man es genau prüft, sieht man: VIÈTE rechnet nicht mit Buchstaben allein, nicht mit bloßen Buchstaben.

Sehen wir uns ein erstes Beispiel an. Ignorieren wir den umstehenden Text (das soll man eigentlich nie tun!) und halten wir in der *Isagoge* Ausschau nach dem, was wie eine Formel aussieht.

Der erste Kandidat für eine Formel in der *Isagoge* (der nicht bloße Definition ist), findet sich bei der Erklärung der Division:

> „[...] zum Beispiel $\frac{\text{B ⌈Fläche⌉}}{\text{A}}$. Mit diesem Symbol (symbolo) bezeichnet man die Breite, die die Fläche *B* dividiert durch die Länge *A* ergibt."
> (Viète 1973, S. 48 f. mit Viète 1970, S. 7)

Wir ignorieren jetzt die Tatsache, dass VIÈTE hier selbst das Wort „Symbol" benutzt, und schauen uns die Sache an. Die Sache ist der Ausdruck $\frac{\text{B Fläche}}{\text{A}}$. Darin sind offenkundig *nicht nur* Buchstaben und der Bruchstrich als Operationszeichen enthalten, sondern da steht auch das Wort „Fläche" („planum"). Ein *Wort* in einem Ausdruck nimmt dem Ausdruck aber ganz sicher den Ehrentitel Symbol! VIÈTE rechnet hier nicht mit dem *bloßen* Buchstaben B, sondern notiert zu diesem Buchstaben B dessen *Bedeutung*. VIÈTE *schreibt ausdrücklich* dazu: Es handelt sich bei diesem B um eine Fläche.

Und so ist es bei VIÈTE nicht nur beim ersten Mal, sondern *immer*. In der letzten Formel der *Isagoge* mit Bruchstrich heißt es:

> Es sei B mal A zum Quadrat plus die Fläche D mal A gleich dem Körper Z gegeben. Ich behaupte, dass man dann vermöge eines Parabolismus A Quadrat plus $\frac{\text{⌈Fläche⌉ D}}{\text{B}}$ mal A gleich $\frac{\text{⌈Körper⌉ Z}}{\text{B}}$ erhält. (nach Viète 1973, S. 55 mit Viète 1970, S. 9 – REICH und GERICKE symbolisieren den übersetzten Text stärker, als es die Quelle tut)

Wer wird hier ernsthaft zwei formale Gleichungen erkennen wollen?

Viète rechnet mit Figuren

Wie sich aus den eben gelesenen Passagen ergibt, rechnet VIÈTE in der *Isagoge* mit geometrischen Figuren. In dieser Hinsicht könnte er Vorbild für DESCARTES gewesen sein. Dabei hat VIÈTE noch keineswegs DESCARTES' Abstraktionsschritt ab 1637 zum reinen Linienrechnen vollzogen. Dies zeigt sich darin, dass VIÈTE größten Wert auf die Geltung des Homogenitätsgesetzes legt:

> *„Über das Gesetz der homogenen [Großheiten], über die Grade Potenzen und die Dimensionen komparativer [Großheiten].*
>
> Das erste und allgemein gültige Gesetz der Gleichungen und Proportionen, das, weil es für homogene [Großheiten] aufgestellt ist, das Gesetz der homogenen [Großheiten] genannt wird, ist Folgendes:
>
> Homogene [Großheiten] sind mit homogenen [Großheiten] zu vergleichen.
>
> Denn, wenn es sich um heterogene [Großheiten] handelt, kann man nicht feststellen, in welcher Weise sie zusammengesetzt sind, wie Adrastus sagt. Deshalb:
>
> Wenn eine [Großheit] zu einer [Großheit] addiert wird, ist diese zu jener homogen.
> Wenn eine [Großheit] von einer [Großheit] subtrahiert wird, ist diese zu jener homogen.
> Wenn eine [Großheit] mit einer [Großheit] multipliziert wird, ist das Ergebnis zu dieser und zu jener heterogen.
> Wenn eine [Großheit] durch eine [Großheit] dividiert wird, ist diese zu jener heterogen.
>
> Dies nicht beachtet zu haben, war der Grund für viele mangelnde Einsicht und Blindheit der alten Analytiker.“ (Viète 1973, S. 40)

Wir sehen: VIÈTE steht mit seinem nicht formalen Bezeichnen und nicht formalen Rechnen mit geometrischen Figuren auf jenem Stand, den DESCARTES nach 1628 verlassen hat.

EINE WELTGESCHICHTLICHE ANALOGIE ZU DESCARTES’ LEISTUNG

Wir haben gesehen: Der erste Schritt von DESCARTES’ Leistung bestand darin, S. 22← Streckenlängen durch (Buchstaben-)Symbole zu ersetzen. Aus diesen Symbolen konnten dann mittels der *Operationssymbole* neue Symbole *konstruiert* (errechnet) werden. Und durch seinen Trick, vorgängig die „Einheit“ festzusetzen, wurde es nun möglich, geometrische Gegenstände *unter Missachtung des „Homogenitätsgesetzes“*[28] beispielsweise zu addieren.

Ein solcher Schritt – die Möglichkeit der Addition von *heterogenen* (nicht artverwandten) Gebilden – markierte schon einmal eine intellektuelle Großtat des menschlichen Geistes: *die Erfindung eines universellen Maßsystems.*

Die Grundformen der frühen Maßzeichen der sogenannten „archaischen Texte“ aus dem Zweistromland, also aus der Zeit ab etwa −2900, sind der Abdruck des gerade und des schräg in den Ton gedrückten runden Schreibgriffels:

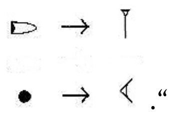
[28] Siehe den vorigen Abschnitt.

Durch Abwandlungen dieser beiden Grundzeichen wurde eine Fülle weiterer Maßzeichen gebildet, beispielsweise durch Vergrößerung:

Eine systematische Analyse der Fundtexte in den 1980er Jahren förderte 62 verschiedene Varianten solcher Maßzeichen zutage.[w] Daraus ließen sich 13 verschiedene Maßzeichensysteme rekonstruieren[x] – wobei 10 der gefundenen Maßzeichen zunächst keinem dieser Systeme zugeordnet werden konnten.

Das aus unserer Sicht Aufregende dabei ist: *Je nach Maßsystem haben diese Zeichen unterschiedliche Wertbedeutungen.* Beispielsweise bedeutet 1 ● manchmal 10 ⊃, ein andermal jedoch 18 ⊃ oder aber 6 ⊃. Und 1 ⊃ kann 60 ⊃ bedeuten oder 180 ⊃. Dagegen kann 1 ● 3600 ⊃ bedeuten, aber auch 1080 ⊃ oder 60 ⊃. Sogar die Größerbeziehung kann sich umkehren: Es können 60 ⊃ 1 ● bedeuten, wie auch 3 ● 1 ⊃ ausmachen können. Mit anderen Worten: Es gab keine feste Anzahl-Relation zwischen den einzelnen Maßzeichen, kein *universelles Maßsystem. Die Schreiber dieser „archaischen Texte" nutzten keinen das einzelne Maßzeichensystem überschreitenden und also:* ABSTRAKTEN *Begriff von Zahl.* Mindestens ein Jahrtausend lang[y] wurden die babylonischen Wirtschaftsverwaltungstexte in diesen Maßzeichensystemen verfasst – schon aus dem Grund, weil es keine Alternative dazu gab.

Ein entscheidender Schritt auf dem Weg zur Erfindung der abstrakten Zahl wird dokumentarisch sichtbar in dem Jahrhundert ab −2100.[z] Texte dieser Zeit enthalten die abstrakte Sexagesimalschrift:

> „In einem lang andauernden Prozess, der erst gegen Ende des Jahrtausends in der Ur-III-Periode seinen Abschluss fand, wurden die mit dem runden Griffel in den Ton gepressten Maßzeichen allmählich durch Keilschriftzeichen ersetzt, die ihre Form nachahmten, aber mit dem gleichen Griffel geschrieben wurden wie die normalen Schriftzeichen:
>
> 
>
> (Damerow und Englund 1990*b*, S. 181)

Übrig blieben allein zwei Zeichen „Winkelhaken": (𒁹) und „Keil" (𒌋). 10 𒁹 bedeuten 1 𒌋, und 6 𒌋 machen 1 𒁹. *Damit war ein* UNIVERSELLES MASSSYSTEM *erfunden worden,* also eines, in das jedes konkrete Maßsystem übersetzbar war. Und sofort fanden diese *universellen* Zeichen Verwendung.

Die Tontafel mit der Bezeichung BM 13901, zuerst 1936 publiziert, gilt als einer der frühesten erhaltenen altbabylonischen mathematischen Texte. Die erste Aufgabe dort lautet in der aktuellen Übersetzung von JENS HØYRUP:

---

[w] Siehe Damerow und Englund 1990*a*, S. 62. [x] Siehe Damerow und Englund 1990*a*, S. 64 f.
[y] Dazu Nissen *et al.* 1990, S. 170, Nissen *et al.* 1990, S. 163. [z] Vgl. Damerow und Englund 1990*b*.

Die Fläche und meine Gegenüberstellung habe ich zusammengefügt: heraus kommt $\frac{3}{4}$.

„The surface and my confrontation I have heaped: 45′ is it.“ (Høyrup 2013, S. 39)

Hier ist nicht der Ort, den Feinheiten der sumerisch-akkadischen Schriftzeichen und deren angemessener Übersetzung nachzugehen.[29] Für unsere Zwecke genügt es zu verstehen: Hier werden eine Quadratfläche und deren Seite „zusammengefügt“, und die Summe soll $\frac{3}{4}$ betragen. In DESCARTES’ Symbolismus ist das:

$$z^2 + z = \frac{3}{4}\,. \tag{1.1}$$

Es war also den babylonischen Schreibern des ausgehenden −3. Jahrtausends *von Anfang an* klar: *Das neue Maßsystem ist geeignet, Werte* heterogener *Größen* unterschiedslos (unter Missachtung dessen, was später „Homogenitätsgesetz“ genannt wurde) *zu addieren,* etwa eine Länge zu einer Fläche. Im alten System der verschiedenen Maßsysteme war das unmöglich: Die Fläche wäre im „GAN_2-System“ zu notieren gewesen, die Länge in der Sexagesimalschrift „S“ oder „S′“; beide Zeichenarten *zusammen* („Addition“) bildeten kein Maßsystem.

Die babylonischen Schreiber waren es (durch eine fast tausendjährige Tradition) gewohnt, die Zeichen einer Maßangabe hinsichtlich ihres konkreten Wertes *aus dem Zusammenhang zu deuten.* Wohl so erklärt es sich, dass ihre Sexagesimalschrift ohne ein Zeichen für Null auskam – und demzufolge auch kein Äquivalent für unser Dezimalkomma kannte. Ob die Zeichenfolge 𒌋𒁹𒁹 den Wert $(10+2)\times 60^0 = 12$ bedeutete oder aber $(10+2)\times 60^1 = 720$ usw. – oder aber ob sie $(10+2)\times 60^{-1} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ bedeuten sollte, das ergab sich zwanglos aus dem jeweiligen Zusammenhang, in dem diese Zeichen standen. Und wollte man die Maßgröße $661 = 11 \times 60^1 + 1 \times 60^0$ (oder etwa $39\,660 = 11 \times 60^2 + 1 \times 60^1$) notieren, so schrieb man 𒌋𒁹 𒁹, d. h. man ließ einen etwas größeren Abstand zwischen den Zeichen.

Diese Verfahrensweise gibt den Zeichen wie den Zeichenfolgen keine eindeutig bestimmten *Werte.* (Und somit wird man hier auch noch nicht von einem abstrakten *Zahl*begriff sprechen können!) Infolgedessen kann es zu Fehldeutungen und zu Rechenfehlern kommen.[30] Daher ist es nicht verwunderlich, dass die neue Sexagesimalschrift in den Texten

Vgl. auch Høyrup 2001, S. 165.

[29] Der Herausgeber dieses Textes FRANÇOIS THUREAU-DANGIN (1872–1944) übersetzte die Aufgabenstellung wie folgt:

„Ein Feld und seine Quadratseite addiert ergibt 0;45.“ (Becker 1954, S. 11)

„J’ai additionné la surface et (le coté de) mon carré: 45′.“ (Thureau-Dangin 1936, S. 31)

BECKER notiert die betreffende Zahl wie in diesen Zusammenhängen lange üblich sexagesimal. Dabei steht das Semikolon für das dezimale Komma, und die sexagesimalen „Ziffern“ werden zweistellig dezimal notiert. Es ist also „0;45“ zu lesen als: „45 der ersten Nachkomma-Einheit“. Die erste Nachkomma-Einheit in der Sexagesimalschrift sind Sechzigstel. Folglich ist „0;45“ zu lesen als „$\frac{45}{60}$“ = $\frac{3}{4}$. – HØYRUP kehrt jetzt zur Grad-Notation zurück: [0°]45′.

[30] Ein hübsches Beispiel für einen Rechenfehler ist in Damerow und Englund 1990*b*, S. 194 f. dokumentiert.