Lern- und Übungsbuch zur Theoretischen Physik 1

Klassische Mechanik

von

Karsten Kirchgessner
Marco Schreck

Oldenbourg Verlag München

Lektorat: Kristin Berber-Nerlinger
Herstellung: Tina Bonertz
Titelbild: Dr. Marco Schreck
Einbandgestaltung: hauser lacour

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data
A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

Rosenheimer Straße 143, 81671 München, Deutschland
www.degruyter.com/oldenbourg
Ein Unternehmen von De Gruyter

Gedruckt in Deutschland

Dieses Papier ist alterungsbeständig nach DIN/ISO 9706.

ISBN 978-3-486-75461-2
eISBN 978-3-486-85842-6

Vorwort

Die *klassische Mechanik* stellt einen der Grundpfeiler der Physik dar, weshalb sie zum Lehrkanon eines jeden technischen Studiengangs gehört. Sie gliedert sich in die beiden Bereiche *Statik* und *Dynamik*. Die Statik beschäftigt sich mit den physikalischen Gesetzen ruhender Körper, die miteinander in Wechselwirkung treten. Dies können z.B. Kräfte sein, wie sie innerhalb eines Mauerwerks auftreten. Im Gegensatz dazu beschreibt die Dynamik die Bewegung von Körpern ohne oder unter äußeren Einflüssen.

Die Statik spielt in den angewandten Ingenieurwissenschaften eine entscheidende Rolle. Für jeden Ingenieur, der eine Brücke entwirft, ist es wichtig, die auftretenden Kräfte zwischen den Stahlträgern zu verstehen. Schließlich legen diese fest, ob die Brücke stabil ist oder die Gefahr droht, dass sie in sich zusammenbricht. In der Physik selbst spielt die Statik jedoch eine untergeordnete Rolle. Der Schwerpunkt liegt hier eindeutig auf der Dynamik. Der Grund ist, dass die Dynamik ein Fundament schaffen soll für weiterführende Bereiche der Physik wie der Elektrodynamik oder der Thermodynamik. Es ist so, dass es für gewisse physikalische Gesetzmäßigkeiten oder Systeme aus der klassischen Mechanik Analogien in den anderen Gebieten gibt. Deshalb setzt sich das Ihnen vorliegende Buch vor allem mit Problemstellungen der Dynamik auseinander. Dabei stehen eher theoretische Konzepte als Experimente im Vordergrund, was es zu einem Buch über theoretische Mechanik macht.

Die Grundlage der klassischen Mechanik sind Gesetze, deren Entdeckung und Untersuchung auf den Physiker Isaac Newton zurückgehen. Eingeführt werden diese im ersten Kapitel. Im zweiten Kapitel wird Ihnen das notwendige Rüstzeug zur Verfügung gestellt, welches ein Verständnis der Bewegung von punktförmigen Körpern ermöglicht. Dazu gehören die mathematische Beschreibung von Kurven im Raum und die Einführung verschiedener Koordinatensysteme. Das dritte Kapitel eröffnet die wichtigsten Größen der klassischen Mechanik (Arbeit, Energie, Impuls, Drehimpuls usw.) und demonstriert Ihnen einige der Eigenschaften dieser Größen. Im vierten Kapitel lernen Sie, was man beachten muss, wenn mechanische Vorgänge in bewegten Koordinatensystemen stattfinden.

Danach ist der Ausgangspunkt geschaffen, um sich die zentralen Systeme der Mechanik im fünften Kapitel anzuschauen. Dazu gehört der schiefe Wurf, der harmonische Oszillator und das Kepler-Problem. Die meisten Physiker werden zustimmen, dass der harmonische Oszillator das bedeutendste physikalische System darstellt. Dieser wird Ihnen sowohl innerhalb der Mechanik als auch in anderen Bereichen der Physik immer wieder begegnen. Aus dem Grund finden Sie in den darauf folgenden Kapiteln verstreut weitere Anwendungen dieses wichtigen Systems.

Wenn sich ein Körper bewegt, ändert sich auf jeden Fall dessen Ort. Andere Größen wie Energie oder Drehimpuls können sich ebenso ändern, müssen es jedoch nicht. Im sechsten Kapitel geht es darum, ein Verständnis dafür zu entwickeln, welche der physikalischen Größen unter welchen Umständen während eines Bewegungsvorgangs gleich bleiben. Derartige Größen sind wesentlich, denn sie können die Lösung von Problemen erheblich vereinfachen. Da in den bisherigen Kapiteln nur die Bewegung eines einzigen punktförmigen Körpers untersucht wurde, geht es im siebten Kapitel darum, die Bewegung zweier oder mehrerer miteinander wechselwirkender Körper zu beschreiben. Schließlich werden diese Betrachtungen im letzten Kapitel verallgemeinert, um zu verstehen, wie sich ausgedehnte Körper verhalten. Sie besitzen im Vergleich zu punktförmigen Körpern zusätzliche Eigenschaften, wodurch sich ihr physikalisches Verhalten ihnen gegenüber unterscheidet.

Wir, die Autoren dieses Buchs, blicken auf eine langjährige Erfahrung als Tutoren an der Universität zurück. Wir wissen, wo der Schuh drückt, wenn man z.B. im Rahmen eines Physikstudiums mit der theoretischen Mechanik in Berührung kommt. Das Buch beschränkt sich deshalb nicht allein auf allgemeine Herangehensweisen, sondern stellt eine Fülle von Übungsaufgaben zur Verfügung, die teilweise sofort oder am Ende des Buchs gelöst werden. Dass Herleitungen oder Berechnungen in der theoretischen Mechanik nicht ohne ein gewisses Maß an mathematischem Wissen oder Werkzeugen möglich sind, liegt in der Natur der Sache. Jedoch bemühen wir uns besonders, alle Berechnungen mit einem vernünftigen Maß an verständlichen Zwischenschritten zu präsentieren. Die meisten Rechnungen können Sie auf einem Blatt Papier nachvollziehen. An wenigen Stellen erweist sich die Verwendung eines Computers als sinnvoll. Gewisse Grundlagen der höheren Mathematik wie die Definition von Skalar- und Vektorprodukt oder die Bestimmung einfacher Integrale werden vorausgesetzt. Wir empfehlen Ihnen aus eigener Erfahrung, die gegebenen Lösungen der Übungsaufgaben nicht einfach nur durchzulesen. Stattdessen sollten Sie in Eigenregie versuchen, diese Aufgaben zu lösen, denn Übung macht bekanntlich den Meister.

Im Buch verstreut werden Sie auf verschiedene Icons stoßen, die besondere Stellen kennzeichnen. In vielen Abschnitten werden Ihnen systematische Lösungsansätze und Rechenkniffe zur Verfügung gestellt. Halten Sie nach dem Icon „Sprechblase“ Ausschau! Das Icon „Stift“ markiert Aufgaben, deren Lösungen erst am Ende des Buchs abgedruckt sind. Kernaussagen werden an gegebener Stelle getrennt aufgeführt und mit dem Icon „Ausrufezeichen“ kenntlich gemacht. Wichtige Definitionen sind mit einem hellen Raster hinterlegt und wesentliche Formeln mit einem dunklen. So kann das Buch auch nach dem Durcharbeiten als Nachschlagewerk dienen.

Bloomington M. Schreck

Frankfurt K. Kirchgessner

Inhaltsverzeichnis

Erklärung der Icons

Selbstständig üben
Die Lösung dieser Aufgabe finden Sie am Ende des Buchs.

Merken
Achtung, wichtige Kernaussage.

Hinweis der Autoren
Hier lernen Sie einen systematischen Lösungsansatz oder Rechenkniff kennen.

1 Newtonsche Gesetze

1.1 Einführung

Als Isaac Newton im Jahre 1687 sein umfangreiches Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (deutsch: Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie) veröffentlichte, lag seine Absicht darin, ein Gerüst der mathematischen Grundsätze der Naturphilosophie bereitzustellen. Jene Naturphilosophie entsprach damals dem, was man heute als Naturwissenschaft bezeichnet. Ihr Ziel war es, aus der Beobachtung der Bewegung von Körpern die grundlegenden Naturgesetze abzuleiten, auf denen sich darauf aufbauend komplexere Naturgesetze herleiten ließen.

Gegenstand dieser Wissenschaft waren alle Kräfte, die zu jener Zeit bekannt waren. Dazu gehörte zu allererst die *Schwerkraft*, die dafür sorgt, dass sich Körper mit einer Masse gegenseitig anziehen. Wenn tatsächlich jemals ein Apfel von einem Baum auf Newtons Kopf fiel, war dafür genauso die Schwerkraft verantwortlich wie sie es für Ebbe und Flut ist. Ebenso wusste man von den *Auftriebskräften* in Flüssigkeiten und Gasen oder vom *Luftwiderstand*, der beispielsweise eine Vogelfeder nur langsam schwebend zu Boden fallen lässt. Newton erwähnt darüber hinaus noch den Widerstand von Flüssigkeiten, der dafür sorgt, dass sich eine Flüssigkeit infolge einer äußeren Einwirkung kaum komprimieren lässt.

Im ersten Teil seines wegbereitenden Werks definiert Newton einige Begriffe, die für das Verständnis der klassischen Mechanik grundlegend sind. Das führt uns zur *Masse*, der wichtigsten Eigenschaft eines Körpers in der Mechanik.

> Die Masse m eines Körpers ergibt sich als das Produkt seiner *Dichte* ϱ und seines Rauminhalts, also dem Volumen V:
>
> $$m = \varrho \cdot V \,. \tag{1.1}$$

Verschiedene Körper, die denselben Rauminhalt einnehmen, können eine vollkommen unterschiedliche Masse haben. Denken Sie z.B. an eine Flasche, die mit Luft, Wasser oder Centmünzen gefüllt ist. Das hängt mit der Dichte der Körper zusammen. Je größer die Dichte ist, umso größer ist auch die Masse bei gleichem Volumen. Die Dichte selbst ist eine Eigenschaft, die mit den Bausteinen der Natur, den sogenannten *Atomen*, zusammenhängt. Je schwerer diese Bausteine sind und je näher sie beieinander liegen, umso größer ist die Dichte eines Körpers. In Luft besitzen diese kleinen Teilchen einen viel größeren Abstand zueinander als in Wasser oder gar Kupfer.

Zweitens führt Newton eine Größe ein, die in der Mechanik noch eine sehr wichtige Rolle spielen wird: den Impuls.

> Der *Impuls* p eines Körpers ist das Produkt seiner Masse m und seiner Geschwindigkeit v:
>
> $$p = m \cdot v\,. \tag{1.2}$$
>
> Die *Geschwindigkeit* wiederum ist ein Maß für die Entfernung, die in einer bestimmten Zeit zurückgelegt wird.

Trifft ein Objekt mit dem Impuls p auf ein anderes, so ist der Impuls ein Maß für die Wucht, die beim Aufprall während einer bestimmten Zeitdauer wirkt. Für diese spielt sowohl die Masse als auch die Geschwindigkeit eine Rolle. Beispielsweise ist der Impuls eines ICEs, der aus zehn Wagons besteht und mit einer Geschwindigkeit von 200 km/h dahinrast, größer als der Impuls einer kleinen Straßenbahn, die mit 40 km/h durch die Stadt bummelt. Das bekommt auch ein Baum zu spüren, der nach einem Blitzeinschlag umgefallen und auf den Schienen gelandet ist.

Newton benutzt den Ausdruck *Impuls* übrigens noch nicht direkt, sondern spricht in diesem Zusammenhang von *Bewegung*. Heutzutage meint man mit Bewegung eher den Vorgang der Änderung des Orts eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit.

Als nächstes charakterisiert Newton eine wesentliche Eigenschaft, die allen Körpern innewohnt: die sogenannte Trägheit.

> Die *Trägheit* ist das Bestreben eines Körpers, seinen gegenwärtigen Bewegungszustand beizubehalten. Dabei ist es nicht wichtig, ob der Körper in Ruhe ist oder sich mit gleich bleibender Geschwindigkeit geradeaus bewegt.

Newton bezeichnet diese Eigenschaft auch als *vis inertia*, die „Kraft zur Untätigkeit“. Sie kommt nur dann zum Tragen, wenn etwas den Bewegungszustand des Körpers ändern möchte. Man kann die Trägheit sowohl als Widerstand als auch als Drang verstehen. Um einen Widerstand handelt es sich in dem Sinne, als es Ihnen große Probleme bereiten wird, einen schweren Schrank in Ihrer Wohnung zu verrücken. Als Drang lässt sie sich verstehen, wenn ein führerloses und ohne gezogene Handbremse abgestelltes Auto einen Abhang hinunter rollt und nur schwer aufzuhalten ist.

Schlussendlich gelangt Newton zu seiner vierten Definition, welche die letzte ist, die im Rahmen dieser Einleitung aufgeführt werden soll.

> Eine auf einen Körper *wirkende Kraft* F ist ein äußerer Einfluss, um dessen Bewegungszustand zu ändern.

Eine wirkende Kraft gibt es also nur solange, wie ein äußerer Einfluss besteht. Sie unterscheidet sich deshalb grundlegend von der Trägheit, die jeder Körper von sich aus besitzt, ohne dass von außen etwas mit dem Körper passiert. Sie können also den oben erwähnten Schrank in Ihrer Wohnung nur verschieben, wenn Sie Ihre Muskeln spielen lassen und eine Kraft auf ihn ausüben. Andererseits wird ein aus dem Fenster geworfener Blumentopf erst stoppen, wenn er eine Kraft erfährt – hoffentlich übt der Gehsteig diese Kraft aus und nicht der Kopf des unbeliebten Nachbarn!

Die bisher eingeführten Begriffe werden nun durch die folgenden Grundgesetze der Natur in einen Zusammenhang gebracht.

1.2 Erstes Newtonsches Gesetz

Die Newtonschen Gesetze bezeichnet man oft als *Newtonsche Axiome*. Ein Axiom stellt eine grundlegende Gegebenheit dar, die sich nicht weiter herleiten lässt. Auf ihnen basiert ein komplettes System ableitbarer Tatsachen. Im Prinzip beruht die klassische Mechanik auf diesen grundlegenden Naturgesetzen, die Newton durch Beobachtungen und genaue Experimente aufgestellt hat.

!

Erstes Newtonsches Axiom: Jeder Körper verharrt in seinem Bewegungszustand, sofern keine äußere Kraft auf ihn wirkt. Befindet er sich in Ruhe, so bleibt er in Ruhe. Bewegt er sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit, so behält er die Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung bei. Sein Zustand lässt sich nur durch eine wirkende Kraft ändern.

Newton hatte damals bereits richtig beobachtet und angemerkt, dass ein abgefeuertes Projektil, also z.B. eine Kanonenkugel, so lange geradeaus fliegt, bis sie irgendwo einschlägt. Ansonsten wird die Kanonenkugel langsam durch den Widerstand der Luft abgebremst und durch die Schwerkraft in Richtung des Erdbodens gezogen. Ein angestoßener Kreisel wird von sich aus nicht aufhören sich zu drehen, sondern nur durch Einwirkung der umgebenden Luft. Newton wusste, dass Planeten und Kometen sich mit viel weniger Widerstand im luftleeren Raum bewegen und damit ihre kreisende Bewegung um die Sonne für sehr lange Zeiten beibehalten.

1.3 Zweites Newtonsches Gesetz

Das zweite Axiom von Newton stellt eine Formel zur Verfügung, die Grundlage aller Berechnungen ist, wie sie in der klassischen Mechanik durchgeführt werden.

!

Zweites Newtonsches Axiom: Die zeitliche Änderung des Impulses $\mathbf{p}$ eines Körpers ist gleich der wirkenden Kraft $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \,. \tag{1.3}$$

Die Änderung wirkt in dieselbe Richtung wie die wirkende Kraft.

Die zeitliche Änderung des Impulses entspricht der ersten Ableitung des Impulses $\mathbf{p}$ nach der Zeit t. Sofern die Masse des Körpers sich mit der Zeit nicht ändert, lässt sich das zweite Newtonsche Axiom auch umschreiben:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} \tag{1.4}$$

Dann ist die wirkende Kraft direkt proportional zur zeitlichen Änderung der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, wobei die Masse m der Proportionalitätsfaktor ist. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit nennt man *Beschleunigung* $\mathbf{a}$. Wie gesagt, gilt das zweite Newtonsche Axiom in der Form $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ nur im Falle konstanter Masse. Das ist zwar meistens der Fall, aber nicht immer. Es gilt z.B. dann nicht, wenn man eine in den Weltraum fliegende Rakete betrachtet, die ihren Treibstoff verbrennt und ihre Stufen abwirft oder einen schwingenden Sandsack mit einem Loch, aus dem der Sand rieselt.

Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls und Kraft sind vektorielle Größen, d.h., sie sind sowohl durch einen Betrag als auch eine Richtung charakterisiert. In diesem Buch werden Vektoren als fett gedruckte Buchstaben gekennzeichnet.

1.4 Drittes Newtonsches Gesetz

Bei den ersten beiden Newtonschen Axiomen spielt prinzipiell nur ein einziger Körper eine Rolle. Doch natürlich sind bei mechanischen Vorgängen in der Natur immer mehr als ein Körper beteiligt. Deshalb ist noch ein weiteres Grundgesetz notwendig, das die Wechselwirkung zweier Körper miteinander beschreibt.

!

Drittes Newtonsches Axiom: Jede Aktion zieht immer eine entsprechende Gegenreaktion nach sich. Die gegenseitigen Wirkungen zweier Körper aufeinander sind immer gleich, aber in entgegengesetzte Richtungen gerichtet („actio = reactio“). Es gilt

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \,, \tag{1.5}$$

mit der Kraft $\mathbf{F}_{12}$ vom ersten auf den zweiten Körper und der Kraft $\mathbf{F}_{21}$ vom zweiten auf den ersten.

Das Vorzeichen deutet an, dass beide Kräfte in entgegengesetzter Richtung wirken, auch wenn sie vom Betrag her gleich groß sind. Prallt beim Billard also eine Kugel auf eine andere, so wirkt von der ersten Kugel ausgehend eine Kraft auf die zweite. Gleichzeitig wirkt jedoch dieselbe Kraft in entgegengesetzter Richtung von der zweiten auf die erste Kugel. Schließlich ändert sich erfahrungsgemäß der Bewegungszustand beider Kugeln. Drückt man mit dem Finger auf einen Stein, so drückt der Stein auch wiederum auf den Finger, und zieht ein Pferd einen Stein an einem Seil, so zieht der Stein ebenso an dem Pferd.

Damit wurden die Newtonschen Axiome im aktuellen Kapitel eingeführt. Wenn Sie sich nun fragen, wann und wo Sie diese in der Anwendung sehen, verweisen wir Sie auf den Rest des Buchs. Die Newtonschen Axiome bilden schließlich die Grundlage der klassischen Mechanik und werden deshalb in jedem Kapitel eine große Rolle spielen. Doch bevor sich dieses kurze einführende Kapitel dem Ende zuneigt, folgt noch ein abschließender Abschnitt darüber, wie sich mehrere auf einen Körper wirkende Kräfte kombinieren.

1.5 Superpositionsprinzip

Bereits Newton hatte beobachtet, dass sich n wirkende Kräfte $\mathbf{F}_i$, die auf einen einzigen Körper wirken, zu einer Gesamtkraft addieren, die auch resultierende Kraft genannt wird:

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n \,. \tag{1.6}$$

Gemäß des zweiten Newtonschen Axioms addieren sich dann ebenso die zugehörigen Impulsänderungen, woraus sich gewissermaßen die zeitliche Änderung eines Gesamtimpulses $\mathbf{P}$ ergibt:

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} \,. \tag{1.7}$$

Die Tatsache, dass dies gilt, ist ein weiteres wesentliches Gesetz der klassischen Mechanik. Man bezeichnet es als das *Superpositionsprinzip*. Es wird im weiteren Verlauf des Buchs noch eine wichtige Rolle spielen. Doch zunächst folgt zum besseren Verständnis noch ein anschauliches Beispiel.

Übungsaufgabe 1.1: Zug eines Frachters

In Abbildung 1.1 ist ein Kohlefrachter der Masse M dargestellt, der eine blockierte Schiffsschraube hat. Drei Schlepper werden eingesetzt, um den Frachter zur Reparatur in die Werft zu ziehen. Da die drei Schlepper unterschiedlich starke Motoren haben, unterscheiden sich die drei Kräfte betragsmäßig. Damit sich die Schlepper außerdem gegenseitig nicht behindern, ziehen sie in verschiedene Richtungen. Die Schlepper ziehen den Frachter natürlich nur entlang der Wasseroberfläche, welche in die x-y-Ebene eines *kartesischen Koordinatensystems* gelegt wird. Deshalb lassen sich die Kräfte als

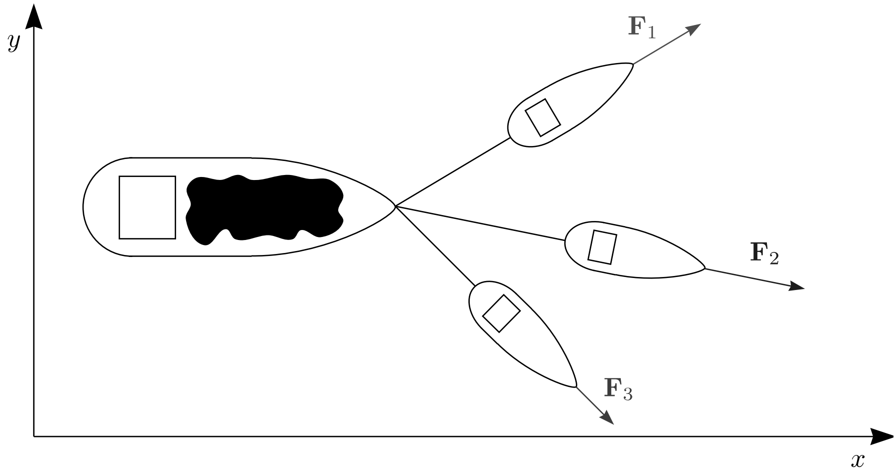

Abb. 1.1: Drei Schlepper sollen einen Kohlefrachter ziehen, wobei jeder Schlepper eine Kraft $\mathbf{F}_i$ wirkt. Das Ganze spielt sich in der x-y-Ebene ab.

zweidimensionale Vektoren beschreiben. Angenommen, diese Kraftvektoren lauten

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 150\,\mathrm{kN} \\ 100\,\mathrm{kN} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 400\,\mathrm{kN} \\ -50\,\mathrm{kN} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} 50\,\mathrm{kN} \\ -50\,\mathrm{kN} \end{pmatrix} . \tag{1.8}$$

Hierbei ist $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2$ die nach Newton benannte Einheit der Kraft. Wie lautet dann die gesamte Kraft, mit der die Schlepper den Frachter ziehen?

Lösung zu Aufgabe 1.1

Nach dem Superpositionsprinzip ergibt sich die gesamte Kraft auf den Frachter durch Addition der einzelnen Kraftvektoren:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{res}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} 150\,\mathrm{kN} + 400\,\mathrm{kN} + 50\,\mathrm{kN} \\ 100\,\mathrm{kN} - 50\,\mathrm{kN} - 50\,\mathrm{kN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600\,\mathrm{kN} \\ 0\,\mathrm{kN} \end{pmatrix} . \tag{1.9}$$

Wie Sie sehen, verschwindet die y-Komponente der resultierenden Kraft. Das wurde natürlich von den Kapitänen der Schlepper so geplant, denn schließlich soll der Frachter geradeaus und nicht zum Ufer hin gezogen werden.

2 Raumkurven und Kinematik

In diesem Kapitel werden Sie lernen, die Bewegung punktförmiger Körper zu verstehen. Solche Körper besitzen keine Länge, Breite oder Höhe und sind daher eine starke Idealisierung; in Wirklichkeit gibt es derartige Körper nicht. Dennoch beschreiben solche Idealisierungen unter bestimmten Bedingungen die Natur hinreichend genau und bieten ein gutes Verhältnis aus Nutzen und Aufwand.

Im Folgenden werden punktförmige Körper als *Punktmasse*, *Teilchen* oder manchmal auch einfach *Masse* bezeichnet. Man nennt diesen Teil der Mechanik, der sich mit solchen Körpern befasst, auch *Punktmechanik*. Um die Bewegung einer Punktmasse zu beschreiben, benötigt man ein Koordinatensystem. Dann lässt sich der Ort P der Punktmasse durch einen Vektor $\mathbf{r}$ angeben, der vom Ursprung O des Koordinatensystems ausgeht. Solche Vektoren heißen Ortsvektoren:

$$\mathbf{r} := \overrightarrow{OP}\,. \tag{2.1}$$

Bewegt sich die Punktmasse, so ändert sich dieser Ortsvektor in Abhängigkeit von der Zeit: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Die Pfeilspitzen der einzelnen Vektoren laufen somit einer Kurve im Koordinatensystem entlang. Oft nennt man $\mathbf{r}(t)$ auch das *Orts-Zeit-Gesetz* und den Betrag $r(t) \equiv |\mathbf{r}(t)|$ das *Weg-Zeit-Gesetz* der Punktmasse.

Die grundlegende Problemstellung wird es zunächst sein, Orts-Zeit-Gesetze für Punktmassen aufzustellen. Da jedes Orts-Zeit-Gesetz $\mathbf{r}(t)$ eine Kurve im Raum beschreibt, lässt es sich auch als *Raumkurve* auffassen. Es stellt sich dann die Frage, wie man eine solche Kurve mathematisch darstellt. Das soll im Folgenden anhand zahlreicher Beispiele demonstriert werden.

2.1 Parametrisierung von Raumkurven

Das einfachste Orts-Zeit-Gesetz ist das einer Punktmasse, die sich stets am selben Punkt befindet. Handelt es sich bei diesem Punkt z.B. um $P = (1{,}2{,}3)$, dann lautet der zugehörige Ortsvektor $\mathbf{r} = (1{,}2{,}3)^T$, und das Orts-Zeit-Gesetz ist

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\,. \tag{2.2}$$

Wie Sie sehen, hängen die einzelnen Komponenten nicht von der Zeit ab. Das ist klar, denn die Punktmasse befindet sich ja stets an ein und demselben Punkt.

2.1.1 Bewegung auf einer Geraden

Die nächste noch relativ einfache Möglichkeit ist, dass sich eine Punktmasse entlang einer Geraden bewegt. Um eine Gerade vektoriell aufzustellen, benötigt man einen *Aufpunkt* und ihren *Richtungsvektor*, wie das in Abbildung 2.1 dargestellt ist.

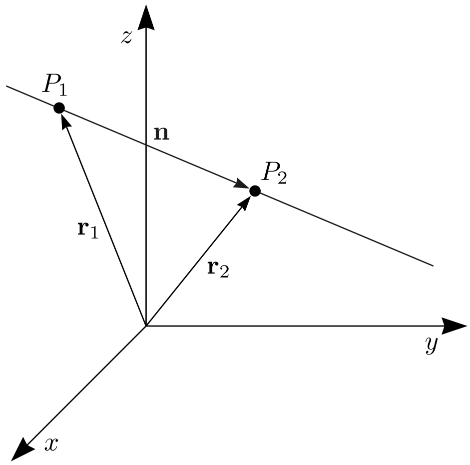

Abb. 2.1: Eine Gerade in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit zwei Punkten P_1, P_2 und deren Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$.

Als Aufpunkt P_1 kann ein beliebiger Punkt auf der Geraden dienen. Geschickterweise nimmt man am besten einen möglichst einfachen. Um den Richtungsvektor $\mathbf{n}$ der Geraden zu bestimmen, benötigt man einen zweiten Punkt P_2. Dann ist $\mathbf{n}$ nichts anderes als die Differenz der Ortsvektoren der beiden Punkte; nennen wir diese $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$. Zuletzt ist noch ein *Parameter* notwendig, dessen Wahl zu einem bestimmten Punkt auf der Geraden führt. Da es um Orts-Zeit-Gesetze geht, ist es zunächst sinnvoll, die Zeit t als diesen Parameter zu wählen. Dann gilt für das Orts-Zeit-Gesetz einer Punktmasse:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + \mathbf{n}t = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)t\,. \tag{2.3}$$

Stellt man eine Kurve im Raum mittels eines Parameters in einer solchen Form dar, spricht man auch von der *Parameterdarstellung* der Kurve. Bewegt sich der Punkt speziell auf einer Geraden parallel zur x-Achse, welche die y-z-Ebene im Punkt $P_1 = (0{,}1{,}1)$ durchstößt, dann lässt sich der Ortsvektor $\mathbf{r}_1 = (0{,}1{,}1)^T$ als Aufpunkt verwenden. Da der Richtungsvektor parallel zur x-Achse verläuft, handelt es sich dabei um den Basisvektor, der entlang der x-Achse zeigt: $\mathbf{n} = \widehat{\mathbf{e}}_x = (1{,}0{,}0)$. Dann lautet die entsprechende Parameterdarstellung:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} t = \begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix}\,. \tag{2.4}$$

Auf diese Weise lässt sich eine Gerade im dreidimensionalen Raum mathematisch aufstellen. Einige der nun folgenden Betrachtungen sollen jedoch auf eine Ebene beschränkt werden. Für viele Problemstellungen ist das auch sinnvoll, denn es gibt genügend Beispiele für physikalische Bewegungen in der Natur, die in einer Ebene ablaufen, weil die Bewegung durch bestimmte gegebene Bedingungen derart eingeschränkt wird. Ein Beispiel dafür ist die Bewegung eines Planeten um das zugehörige Zentralgestirn.

2.1.2 Bewegung auf einem Kreis

Bewegt sich eine Punktmasse auf einer kreisförmigen Bahn in der x-y-Ebene, so lässt sich mit Hilfe von Abbildung 2.2 die zugehörige Parameterdarstellung ermitteln. Der Kreis wird so in ein kartesisches Koordinatensystem gelegt, dass dessen Mittelpunkt gleich dem Ursprung ist. Dann kann man ein rechtwinkliges Dreieck einzeichnen, dessen waagerechte Kathete auf der x-Achse und dessen senkrechte Kathete parallel zur y-Achse verläuft. Die Hypotenuse des Dreiecks liegt auf dem Radiusvektor $\mathbf{r}$, der vom Ursprung zu einem Punkt auf dem Kreis zeigt. Deren Länge entspricht außerdem dem Radius r des Kreises. Auf diese Weise lässt sich der Kreis mit dem Winkel φ zwischen der positiven x-Achse und der Hypotenuse des Dreiecks parametrisieren. Nutzt man aus, dass die Länge der waagerechten Kathete gleich $r\cos\varphi$ und die der senkrechten gleich $r\sin\varphi$ ist, so lautet der Radiusvektor in Abhängigkeit des Winkels φ:

$$\mathbf{r}(\varphi) = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} . \tag{2.5}$$

Hier ist man schon fast fertig. Das ist die Parameterdarstellung eines Kreises in kartesischen Koordinaten. In einer physikalischen Problemstellung interessiert man sich jedoch meistens für die Parametrisierung in Abhängigkeit von der Zeit. Das bringt jedoch glücklicherweise keinerlei neue Probleme mit sich, da man den Winkel als zeitabhängige Funktion betrachten kann: $\varphi = \varphi(t)$. Diese Funktion soll also den vom Radiusvektor

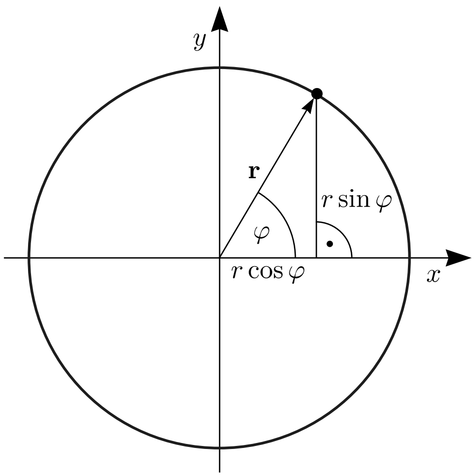

Abb. 2.2: Kreis in der x-y-Ebene mit Radiusvektor $\mathbf{r}$ und einem rechtwinkligen Dreieck.

zeitlich überstrichenen Winkel angeben. Man erhält somit

$$\mathbf{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} . \tag{2.6}$$

Wie genau $\varphi(t)$ aussieht, hängt vom jeweiligen Problem ab. Oft ist es jedoch so, dass sich eine Punktmasse auf einem Kreis mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit v bewegt. Dann ist der vom Radiusvektor überstrichene Winkel proportional zur Zeit; in der n-fachen Zeit wird also auch der n-fache Winkel überstrichen. Die zugehörige Proportionalitätskonstante ist die sogenannte *Winkelgeschwindigkeit* ω. Sie gibt an, welcher Winkel in einer bestimmten Zeitdauer erreicht wird. Meistens liegen Winkel im Bogenmaß vor, und damit besitzt ω die Einheit 1/s. Mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit lässt sich dann der nach einer bestimmten Zeit erhaltene Winkel über $\varphi(t) = \omega t$ berechnen. Die Winkelgeschwindigkeit selbst ergibt sich aus der Zeitdauer T für einen Umlauf, da nach dieser Zeitdauer der komplette Winkel 2π im Bogenmaß überstrichen wird. Nutzt man außerdem, dass der Kehrwert von T gleich der Anzahl der Umläufe pro Zeiteinheit ist, was einer *Umlauffrequenz* (oder einfach *Frequenz*) ν entspricht, dann gelten die folgenden wichtigen Beziehungen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu\,. \tag{2.7}$$

Wegen $\varphi(t) = \omega t$ ist die Winkelgeschwindigkeit außerdem nichts anderes als die erste zeitliche Ableitung der Funktion $\varphi(t)$: $\dot{\varphi} = \omega$.

2.1.2.1 Spiralen

Der Radius eines Kreises ist konstant, sonst wäre es kein Kreis! Dennoch kann sich eine Punktmasse auch kreisend bewegen, ohne dass dies auf einem Kreis passieren muss. In diesem Falle ist die Länge der Hypotenuse des Dreiecks in Abbildung 2.2 nicht mehr konstant, sondern hängt vom Winkel φ ab. Was sich dann als Kurve ergibt, ist eine

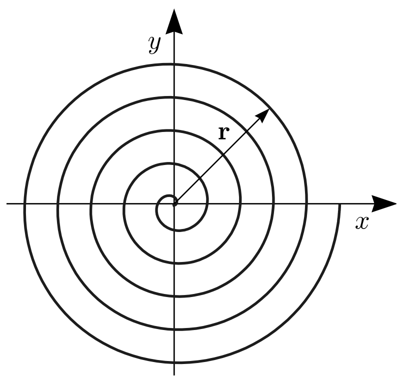

Abb. 2.3: Spirale in der x-y-Ebene mit linear ansteigendem Radiusvektor $\mathbf{r}$.

Spirale mit der Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} . \tag{2.8}$$

Der Betrag $r(t)$ des Radiusvektors ändert sich also im Laufe der Zeit. Dennoch besitzt die Winkelgeschwindigkeit auch in diesem Falle dieselbe Bedeutung wie beim Kreis. Steigt z.B. $r(t)$ linear mit der Zeit gemäß $r(t) = v_0 t$ und ist die Winkelgeschwindigkeit ω eine Konstante, dann ergibt sich eine sogenannte archimedische Spirale:

$$\mathbf{r}(t) = v_0 t \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} . \tag{2.9}$$

Hierbei ist v_0 eine konstante Geschwindigkeit, die beschreibt, wie schnell sich die Punktmasse radial nach außen bewegt. Dargestellt ist diese Spirale in Abbildung 2.3.

2.1.2.2 Ellipsen

Drückt man einen Kreis in einer Richtung zusammen oder zieht ihn auseinander, dann entsteht daraus eine *Ellipse*. Eine solche ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Der Betrag der Radiusfunktion einer Ellipse variiert ebenso mit dem Winkel φ. Der Unterschied zu einer Spirale ist jedoch, dass eine Punktmasse nach einem vollständigen Umlauf wieder zum anfänglichen Punkt zurückkehrt. Dahingegen entfernt sich die Punktmasse bei einer Spirale immer weiter vom Ursprung, sofern sie im Ursprung startet.

Der Betrag von $r(\varphi)$ nimmt während eines Umlaufs einer Ellipse zweimal ein Maximum und zweimal ein Minimum an. Man nennt das Maximum *große Halbachse* und das Minimum *kleine Halbachse*. Bezeichnet man die große Halbachse mit a und die kleine mit b, so lautet die Parameterdarstellung der zugehörigen Ellipse:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi(t) \\ b\sin\varphi(t) \end{pmatrix} . \tag{2.10}$$

In diesem Falle zeigt die große Halbachse entlang der x-Achse und die kleine entlang der y-Achse. Das wird klar, wenn man für den Winkel φ nacheinander die Werte $\varphi \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ einsetzt:

$$\mathbf{r}|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{r}|_{\varphi=\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} , \tag{2.11a}$$

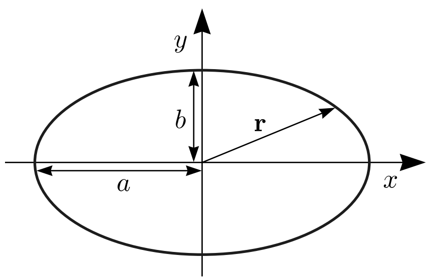

Abb. 2.4: Ellipse in der x-y-Ebene mit großer Halbachse a und kleiner Halbachse b.

$$\mathbf{r}|_{\varphi=\pi} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{r}_{\varphi=3\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix} . \tag{2.11b}$$

Die Ellipse an sich besitzt eine große Bedeutung in der Himmelsmechanik, was Sie im Abschnitt 5.4 sehen werden.

2.1.3 Bewegung entlang einer Schraubenlinie

Aus den Parameterdarstellungen von Kreis und Spirale ergibt sich die Parameterdarstellung einer weiteren wichtigen Klasse von Kurven im Raum. Dazu wird eine dritte Komponente hinzugefügt, bei der es sich um eine monoton steigende oder fallende Funktion $f(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit handelt. Die hieraus entstehenden Kurven heißen *Schraubenlinien*. Im allgemeinsten Falle besitzen sie die folgende Parameterdarstellung:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi(t) \\ r(t)\sin\varphi(t) \\ f(t) \end{pmatrix} . \tag{2.12}$$

Man kann sich die Entstehungsgeschichte einer Schraubenlinie gewissermaßen so vorstellen, dass man den Kreis oder die Spirale in der x-y-Ebene in Richtung der z-Achse des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems auseinanderzieht. Steigt die Funktion $f(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit an, bewegt sich die Punktmasse in Richtung der positiven z-Achse. Im entgegengesetzten Fall geschieht die Bewegung in Richtung der negativen z-Achse. Speziell aus dem Kreis mit Radius r bzw. der archimedischen Spirale von zuvor ergeben sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und $f(t) = vt$:

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ vt \end{pmatrix} , \quad \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} v_0 t\cos\omega t \\ v_0 t\sin\omega t \\ vt \end{pmatrix} . \tag{2.13}$$

Hierbei ist v die Geschwindigkeit, mit der sich die Punktmasse allein entlang der z-Achse bewegt. Beide Schraubenlinien sind in Abbildung 2.5 zeichnerisch dargestellt. Die erste Schraubenlinie ist ein Orts-Zeit-Gesetz, das so für eine Punktmasse gelten kann, die sich durch ein magnetisches Feld bewegt.

Es ist sinnvoll, sich die Parameterdarstellung von einfachen Kurven zu merken:

- Gerade durch Punkte mit Ortsvektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)t$
- Kreis mit Radius r, Spirale und Ellipse:

$$\mathbf{r}(t) = r\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} , \quad \mathbf{r}(t) = r(t)\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} , \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi(t) \\ b\sin\varphi(t) \end{pmatrix} .$$

- Schraubenlinie:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi(t) \\ r(t)\sin\varphi(t) \\ f(t) \end{pmatrix} .$$

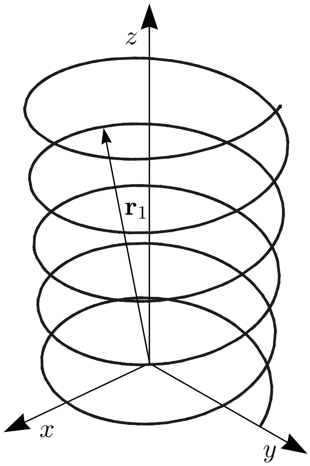

Abb. 2.5: Bildliche Darstellung der Schraubenlinien aus Gleichung (2.13).

2.1.4 Abrollkurven

Nachdem bisher die Parameterdarstellung einfacher Kurven wie die des Kreises und der Spirale hergeleitet wurden, soll nun eine kompliziertere Klasse behandelt werden. Dadurch können Sie Ihre Fertigkeiten zur Bestimmung solcher Darstellungen verfeinern. Die Kurven, von denen die Rede ist, sind die sogenannten *Abrollkurven*, die man auch als *Zykloiden* bezeichnet. Wie der Name schon verrät, entstehen solche Kurven, indem man einen Punkt auf einem Rad betrachtet, das entlang einer anderen Kurve abgerollt wird. Die Abrollkurve ist für den einfachsten Fall, bei dem die andere Kurve eine Gerade ist, in Abbildung 2.6 dargestellt.

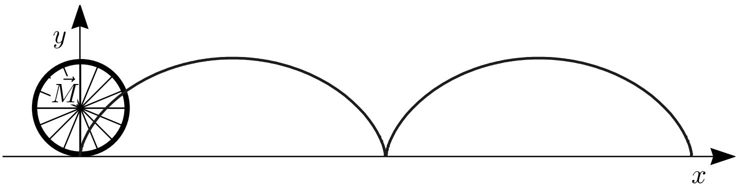

Abb. 2.6: Abrollkurve, die beim Abrollen eines Rads entlang einer Geraden entsteht.

Übungsaufgabe 2.1: Die Kurve kommt ins Rollen

Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der ebenen Zykloide in Abbildung 2.6.

Übungsaufgabe 2.2: Zykloide entlang eines Kreises

Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Zykloide eines Rads, das auf der Innenseite eines Kreises abrollt, wobei R_1 der Radius des Kreises und R_2 der Radius des Rads sei, dessen Mittelpunkt sich anfangs im Punkt $(0, -(R_1 - R_2))$ befinde (siehe Abbildung 2.7).

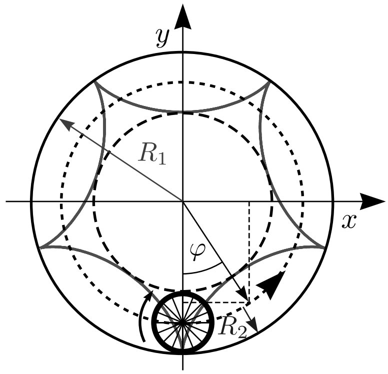

Abb. 2.7: Abrollen eines Rads auf dem Inneren eines Kreises.

2.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Bereits Newton verwendete den Begriff der *Geschwindigkeit* für seine Definition des Impulses, ohne jedoch zu sagen, was die Geschwindigkeit überhaupt ist. Dies zeigt, dass bereits Ende des 17. Jahrhunderts die Geschwindigkeit als so alltäglicher Begriff im Sprachgebrauch benutzt wurde, dass er nach Newtons Meinung keine eigene Definition benötigte. Dennoch lässt sich die Geschwindigkeit sauber aus dem Orts-Zeit-Gesetz herleiten. Dazu überlegt man sich, dass die Differenz zweier Ortsvektoren $\mathbf{r}(t_0)$ und $\mathbf{r}(t)$ zu verschiedenen Zeitpunkten t_0 und t einen neuen Vektor $\Delta\mathbf{r}$ ergibt, der wie in Abbildung 2.8 dargestellt entlang der geraden Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten liegt:

$$\Delta\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)\,. \tag{2.14}$$

Sofern beide Punkte nicht zu weit voneinander entfernt sind, stellt der Betrag des Vektors $\Delta\mathbf{r}(t)$ einen Näherungswert für die zurückgelegte Entfernung der Punktmasse zwischen den beiden Zeitpunkten t_0 und t dar. Dividiert man anschließend durch die Differenz der Zeitpunkte $\Delta t \equiv t - t_0$, so folgt daraus eine grobe Näherung für die Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}(t) \approx \frac{\Delta\mathbf{r}(t)}{\Delta t}\,. \tag{2.15}$$

Nähert sich t_0 dem Zeitpunkt t an, dann beschreibt die geradlinige Verbindung immer besser das Orts-Zeit-Gesetz zwischen $\mathbf{r}(t_0)$ und $\mathbf{r}(t)$. Somit lässt sich durch Bilden des Grenzwertes $t_0 \mapsto t$, was $\Delta t \mapsto 0$ entspricht, exakt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t berechnen:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{t\mapsto t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t\mapsto 0} \frac{\Delta\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}}(t)\,. \tag{2.16}$$

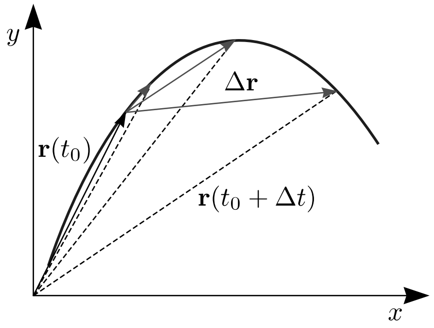

Abb. 2.8: Konstruktion eines Tangentenvektors an $\mathbf{r}(t_0)$ als Grenzübergang $\Delta t \mapsto 0$.

Im Limes $\Delta t \mapsto 0$ entspricht die Geschwindigkeit also der ersten Ableitung des Orts-Zeit-Gesetzes. Die zeitliche Ableitung eines Vektors, dessen Komponenten von der Zeit abhängen, ist wieder ein Vektor. Dieser ergibt sich durch Ableiten der einzelnen Komponenten nach der Zeit. Erinnern Sie sich daran, dass die erste Ableitung $f'(x_0)$ einer eindimensionalen Funktion $f(x)$ am Punkt x_0 die Steigung der Tangente angibt, welche die Funktion an x_0 berührt? Das gilt ebenso für die komponentenweise Ableitung eines Vektors nach einer Variablen; also berührt der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ das Orts-Zeit-Gesetz bei $\mathbf{r}(t)$. Dieser ist nichts anderes als der *Tangentenvektor* an $\mathbf{r}(t)$. Zeitliche Ableitungen in der Physik schreibt man oft mit einem Punkt anstelle des in der Mathematik üblichen Strichs, was auch hier so gemacht werden soll.

Oft bewegt sich ein Körper nicht mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Das kann einerseits daran liegen, dass äußere Kräfte die Geschwindigkeit des Körpers verringern oder dass auf der anderen Seite ein Antrieb die Geschwindigkeit erhöht. Wie sich die Geschwindigkeit zeitlich ändert, wird durch die erste Ableitung des Geschwindigkeitsvektors beschrieben; wie im vorherigen Kapitel bereits erwähnt, bezeichnet man diese als *Beschleunigung* $\mathbf{a}(t)$:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{t \mapsto t_0} \frac{\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)\,. \tag{2.17}$$

Da die Beschleunigung der ersten zeitlichen Ableitung der Geschwindigkeit entspricht, ist sie gleich der zweiten Ableitung des Orts-Zeit-Gesetzes. Analog zum Ort und der Geschwindigkeit handelt es sich ebenso bei der Beschleunigung allgemein um einen Vektor, dessen Spitze entlang einer Kurve im Koordinatensystem läuft. Sie ist wiederum ein Tangentenvektor an die Kurve, welche durch die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ beschrieben wird.

Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ berechnet sich als erste Ableitung des Orts-Zeit-Gesetzes und die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ über die zweite Ableitung:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)\,, \quad \mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)\,.$$

Übungsaufgabe 2.3: Geschwindigkeit und Beschleunigung

Bestimmen Sie das Orts-Zeit-Gesetz, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung für die folgenden Fälle der Bewegung einer Punktmasse.

a) Die Punktmasse befinde sich dauerhaft am Punkt $P = (1,2,3)$.
b) Betrachten Sie nun eine Punktmasse, die sich entlang einer Geraden parallel zur x-Achse bewegt. Diese Gerade soll die y-z-Ebene im Punkt $(0,1,1)$ durchstoßen.
c) Eine Punktmasse beschreibe eine Parabel $z(t) = at^2/2$, deren Projektion auf die x-y-Ebene der Geraden $y(x) = x$ mit $x = t/\sqrt{2}$ entspricht. Hier sei a eine konstante Beschleunigung in Richtung der z-Achse.

Lösung zu Aufgabe 2.3

Allgemein folgt die Geschwindigkeit durch einmaliges Ableiten des Orts-Zeit-Gesetzes nach der Zeit und die Beschleunigung durch zweimaliges Ableiten.

a) Da sich die Punktmasse dauerhaft am Punkt P im Raum befindet, wird das Orts-Zeit-Gesetz durch einen zeitlich konstanten Ortsvektor beschrieben: $\mathbf{r}(t) = (1,2,3)^T$. Die Geschwindigkeit ergibt sich durch einmaliges und die Beschleunigung durch zweimaliges Ableiten nach der Zeit:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{2.18}$$

Da sich die Punktmasse nicht bewegt, verschwindet natürlich auch deren Geschwindigkeit und sowieso die Beschleunigung.

b) Der Durchstoßpunkt der x-y-Ebene kann als Aufpunkt der Geraden dienen, wobei der Richtungsvektor dem Basisvektor $\widehat{e}_x = (1,0,0)$ entspricht. Somit sieht das zugehörige Orts-Zeit-Gesetz folgendermaßen aus:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{2.19}$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung ergeben sich wieder durch komponentenweises Ableiten:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{2.20}$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist zeitlich konstant: $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = 1$. Ersichtlicherweise verschwindet dann die Beschleunigung. Man bezeichnet eine solche Bewegung als *gleichförmig*.

c) Das Orts-Zeit-Gesetz lässt sich aus den gegebenen Annahmen wie folgt zusammensetzen:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t/\sqrt{2} \\ t/\sqrt{2} \\ at^2/2 \end{pmatrix} . \tag{2.21}$$

Die Geschwindigkeit und Beschleunigung lauten damit:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ at \end{pmatrix} , \quad \mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} . \tag{2.22}$$

Die Beschleunigung ist ein Vektor (ungleich dem Nullvektor) mit konstanten Komponenten. Derartige Bewegungen heißen *gleichmäßig beschleunigt*.

!

Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit v nennt man gleichförmig. Das Weg-Zeit-Gesetz für eine gleichförmige Bewegung ist $r(t) = vt$. Bewegt sich eine Masse mit einer konstanten Beschleunigung, dann ist von einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung die Rede. Diese haben das Weg-Zeit-Gesetz $r(t) = at^2/2$.

2.3 Bogenlänge

Bisher wurden Orts-Zeit-Gesetze in Abhängigkeit der verstrichenen Zeit t untersucht – es wurde also der Ort $\mathbf{r}$ bestimmt, an dem sich ein betrachtetes Teilchen zur Zeit t befindet. Diese Art der Parametrisierung erweist sich als sinnvoll, sofern man sich als Beobachter in einem ortsfesten Koordinatensystem befindet und die Bahn des Teilchens von außen verfolgt.

Jedoch gibt es auch andere Arten der Parametrisierung, die Vorteile gegenüber der Parametrisierung nach der Zeit haben können. Angenommen, ein Teilchen bewege sich auf einer Raumkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} , \tag{2.23}$$

dann lässt sich diese in einzelne Stückchen unterteilen. Macht man diese Stückchen klein genug, so kann man sie gut durch geradlinige Verbindungen zwischen den beiden Randpunkten nähern. Je feiner die Unterteilung wird, desto besser ergibt sich auf diese Weise die ursprüngliche Kurve. Selbst wenn sich die Geschwindigkeit des Teilchens entlang der Kurve zeitlich ändert, kann man dann annehmen, dass sich das Teilchen entlang eines Stückchens betragsmäßig mit konstanter Geschwindigkeit $v(t) \equiv |\mathbf{v}(t)|$ bewegt, sofern die Stückchen hinreichend kurz gewählt sind.

Man unterteile die Kurve zwischen zwei Zeitpunkten t_0 und t in N gleiche Stückchen, für die das Teilchen jeweils die Zeit $\Delta t \equiv (t - t_0)/N$ benötigt, um ein solches Stück zu