Internationale Standardlehrbücher der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Herausgegeben von Universitätsprofessor Dr. Lutz Kruschwitz

Bisher erschienene Werke:

Bagozzi u. a., Marketing Management
Bergstrom · Varian, Trainingsbuch zu Varian, Grundzüge der Mikroökonomik, 5. A.
Blasius, Korrespondenzanalyse
Büning · Naeve · Trenkler · Waldmann, Mathematik für Ökonomen im Hauptstudium
Caspers, Zahlungsbilanz und Wechselkurse
Dixit · Norman, Außenhandelstheorie, 4. A.
Dornbusch · Fischer · Startz, Makroökonomik, 8. A.
Ethier, Moderne Außenwirtschaftstheorie, 4. A.
Gordon, Makroökonomik, 4. A.
Granvogl · Perridon, Sozioökonomie
Heike · Târcolea, Grundlagen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Hillier · Lieberman, Einführung in Operations Research, 5. A.
Horngren · Foster · Datar, Kostenrechnung, 9. A.
Hull, Einführung in Futures- und Optionsmärkte, 3. A.
Hull, Optionen, Futures und andere Derivative, 4. A.
Johnson, Kundenorientierung und Markthandlung
Keegan · Schlegelmilch · Stöttinger, Globales Marketing-Management. Eine europäische Perspektive
Kneis, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 2. A.
Kruschwitz, Finanzierung und Investition, 4. A.
Kruschwitz, Investitionsrechnung, 9. A.
Kruschwitz · Decker · Röhrs, Übungsbuch zur Betrieblichen Finanzwirtschaft, 6. A.
Mehler-Bicher, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 2. A.
Meissner, Strategisches Internationales Marketing, 2. A.
Pindyck · Rubinfeld, Mikroökonomie, 4. A.
Rübel, Grundlagen der Monetären Außenwirtschaft
Rübel, Grundlagen der Realen Außenwirtschaft
Sargent, Makroökonomik
Schäfer · Kruschwitz · Schwake, Studienbuch Finanzierung und Investition, 2. A.
Sloman, Mikroökonomie, 3. A.
Smith, Einführung in die Volkswirtschaftslehre, 2. A.
Stiglitz, Volkswirtschaftslehre, 2. A.
Stiglitz · Schönfelder, Finanzwissenschaft, 2. A.
Varian, Grundzüge der Mikroökonomik, 6. A.
Zäpfel, Grundzüge des Produktions- und Logistikmanagement, 2. A.
Zäpfel, Strategisches Produktions-Management, 2. A.
Zäpfel, Taktisches Produktions-Management, 2. A.
Zwer, Internationale Wirtschafts- und Sozialstatistik, 2. A.

Mathematik für Wirtschafts- wissenschaftler

Von

Prof. Dr. Gert Kneis
Universität Potsdam

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Für Ursula, Cordula und Philipp

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 3-486-57665-8

Vorwort zur zweiten Auflage

Gern und dankbar habe ich das Angebot des R. Oldenbourg Verlags angenommen, eine zweite Auflage dieses Lehrbuchs zu veröffentlichen, – vor allem, weil es mir die Gelegenheit für eine Überarbeitung des bisherigen Textes und eine inhaltlichen Erweiterung gegeben hat.

Neu hinzu gekommen sind neben einigen Ergänzungen vor allem eigenständige Kapitel zu linearen Differenzengleichungen und zur Integralrechnung. Der erweiterte und abgerundete Text kann jetzt als begleitendes Material auch für Lehrveranstaltungen verwendet werden, die über den mathematischen Grundkurs für Wirtschaftswissenschafler hinausgehen. Auch die neuen Kapitel wurden mit Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades versehen, und der Aufgabenteil zu den bisherigen Kapiteln ist erweitert worden. Auf vielfach geäußerten Wunsch hin sind einige Lösungen zu den Aufgaben ausführlicher gefasst worden. Bei der sprachlichen Überarbeitung ist die neue Rechtschreibung berücksichtigt, bei mehreren zugelassenen Möglichkeiten die bisherige Schreibweise beibehalten worden.

Während der Arbeit mit der ersten Auflage in meinen Lehrveranstaltungen habe ich zahlreiche Anregungen von meinen Studenten erhalten. Hierfür und für wertvolle Hinweise von Fachkollegen und von Lesern nach Erscheinen der ersten Auflage bin ich sehr dankbar.

Bei der Erarbeitung der zweiten Auflage habe ich von der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät und vom Institut für Mathematik der Universität Potsdam großzügige Unterstützung erfahren. Ein besonderer Dank gilt meinem Freund und Kollegen Prof. Hans-Gerhard Strohe für seine kritische Durchsicht des Kapitels zur Integralrechnung, in dem Hilfsmittel für die mathematische Statistik bereitgestellt werden. Vielerlei Impulse für die zweite Auflage dieses Lehrbuchs verdanke ich der Zusammenarbeit mit meinem verehrten Kollegen Prof. Klaus Schöler. In die neuen Kapitel sind einige schöne Anregungen von Dipl.-Volkswirt Mathias Brehe, der mir auch schon für die erste Auflage eine große Hilfe war, eingegangen.

Dankbar bin ich Herrn Dr. Helge Sanner, der mich, wie auch schon bei der ersten Auflage, in Fragen des Schriftsatzes mit LaTeX vielfach unterstützt hat, und meinem Sohn Philipp für eine letzte Durchsicht des Textes. Ein ganz besonderer Dank gilt meinen Studentinnen Anne Kaiser, Monique Newiak und Elena Schiefer. Sie haben jeweils das gesamte Buch einschließlich der Aufgaben und Lösungen intensiv inhaltlich durchgearbeitet, die mühevolle Arbeit des Korrekturlesens auf sich genommen und mit ihren Ideen viel zur Verbesserung des Textes beigetragen.

Schließlich danke ich wiederum herzlich meiner Familie, besonders meiner Frau Ursula, für alle Unterstützung meiner Arbeit.

Eichwalde und Potsdam, im Juli 2004

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die ich in den letzten Jahren vor Studenten der Volks- und Betriebswirtschaftslehre an der Universität Potsdam gehalten habe.

Mathematische Studienliteratur für Wirtschaftswissenschaftler ist in reichem Maße vorhanden, von einführenden Texten zum Studieneinstieg, Kompendien und Formelsammlungen bis zu mathematisch anspruchsvollen Werken. Der vorliegende Text stellt eine Ergänzung dieser Literatur dar; im Vordergrund stehen dabei

- die ausführliche Erklärung derjenigen Methoden, welche zum Standard des mathematischen Grundstudiums für Wirtschaftswissenschaftler gehören, und
- deren Demonstration an Abbildungen, Beispielen und Aufgaben vorwiegend aus dem ökonomischen Bereich.

Ich habe einerseits die Erfahrung gemacht, dass einem Anwender der Mathematik der Zugang zu einer mathematischen Methode oftmals erheblich erleichtert wird, wenn – neben den unverzichtbaren grafischen Darstellungen und Beispielen – ein Beweis oder zumindest die wesentliche Idee eines Beweises vermittelt werden kann. Andererseits kann eine Darstellung, die völlig ohne Herleitungen auskommen möchte bzw. muss, dem Hörer und Leser einen einheitlich hohen Schwierigkeitsgrad mathematischer Aussagen suggerieren und so zu einer unnötigen Scheu vor der Anwendung mathematischer Methoden führen.

Gerade bei den hier behandelten Themen können die grundlegenden mathematischen Aussagen aus denkbar einfachen Bausteinen zusammengesetzt werden:

- So beruhen die meisten Sätze der Kombinatorik und viele Aussagen der linearen Algebra auf dem Induktionsprinzip, also allein auf der Tatsache, dass die natürlichen Zahlen aus der Zahl 1 durch fortgesetzte Bildung des Nachfolgers hervorgehen.
- Die Sätze der linearen Algebra und der linearen Optimierung sind im wesentlichen Aussagen über lineare Gleichungssysteme. Solche Systeme können durch elementare Rechenschritte – die Addition von Vielfachen einzelner Gleichungen zu anderen Gleichungen – in eine Form überführt werden, an der die Lösungsstruktur bequem abgelesen werden kann.
- Lineare Funktionen – also Funktionen von einfachster Bauart – spielen eine wesentliche Rolle bei der Untersuchung des lokalen Verhaltens nichtlinearer Funktionen.

Aus diesem Grund habe ich für die meisten Aussagen Beweise oder Beweisskizzen, oft auch im Kleindruck, angegeben. Lediglich dort, wo ein Beweis den Rahmen dieses Lehrbuches sprengen würde, wird auf aktuelle Literatur verwiesen.

Ein Wort zur Darstellung: Begriffe, Aussagen, Methoden und wesentliche Erklärungen stehen in kursiver Schrift, sind dreistellig numeriert und jeweils mit einem Schlagwort versehen. Formeln, Beispiele und Abbildungen sind zweistellig numeriert, und zum leichteren Auffinden der referierten Beispiele und Abbildungen sind Verzeichnisse angefügt. Textstellen im Kleindruck, meist für Überleitungen und Details verwendet, sind für das Verständnis des nachfolgenden Stoffes nicht zwingend erforderlich.

Jedem Kapitel ist eine Sammlung von Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades beigefügt. Die Aufgaben überdecken den Text im wesentlichen und ergänzen ihn teilweise; sie sind zur leichteren Einordnung mit Stichworten versehen. Die am Schluss skizzierten Lösungen für die meisten Aufgaben sind als Kontrollmöglichkeit gedacht, – für die genauere Herleitung bleibt dem Leser noch genügend Freiraum.

Literaturhinweise im Text beziehen sich auf die angegebenen mathematischen Standardbücher bzw. die ergänzenden Lehrbücher zur Wirtschaftsmathematik. Die zitierte Literatur für das Grundstudium geht teilweise im Umfang der behandelten mathematischen Themen, der ökonomischen Anwendungsbeispiele oder auch des propädeutischen Teils weiter als der vorliegende Text. Hier sollte der Leser nach seinen Bedürfnissen auswählen.

Es ist mir ein Bedürfnis, meinem verehrten Kollegen Prof. Günter Zeidler für die Anregung zu diesem Lehrbuch zu danken.

Der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Universität Potsdam danke ich für die kontinuierliche Unterstützung meiner Arbeit und das Interesse am Entstehen dieses Buches, vor allem Herrn Prof. Hans-Gerhard Strohe und Herrn Prof. Klaus Schöler, ebenso dem Institut für Mathematik der Universität Potsdam. Ein spezieller Dank gilt Frau Alexandra Franke, die das gesamte Manuskript einschließlich der Aufgaben und deren Lösungen kritisch gelesen hat, sowie Herrn Dr. Wolfgang Rother und Herrn Dipl.-Volkswirt Helge Sanner, die mir bei vielerlei Problemen mit dem Schriftsatzsystem LaTeX eine unentbehrliche Hilfe waren.

Für eine letzte Durchsicht des Manuskripts bin ich meinem Sohn Philipp sehr dankbar. Nicht zuletzt danke ich Herrn Mathias Brehe für seine langjährige Mitwirkung bei meinen Lehrveranstaltungen, für die kritische Durchsicht des Textes und mehrerer früherer Skripten, auf denen dieser aufbaut, und für viele wertvolle Diskussionen und Anregungen, sowie den Hörern meiner Lehrveranstaltungen für zahlreiche Hinweise, die in den Text eingegangen sind.

Dem Verlag R. Oldenbourg gilt mein Dank für die freundliche Aufnahme dieses Buches in sein Lehrbuchprogramm.

Einen herzlichen Dank sage ich schließlich meinen Kindern und vor allem meiner Frau, die mich in der Arbeit an diesem Buch mit sehr viel Verständnis unterstützt haben.

Eichwalde und Potsdam, im Juli 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Aussagen und Aussagenverbindungen

- *„**Wenn** das Unternehmen X mit seinen Produkten den Umsatz gegenüber dem Vorjahr steigern will, **dann** muss es die Preise anheben **oder** für die Steigerung des Absatzes sorgen."*
- *„**Wenn** die Preise **nicht** steigen **und** der Absatz **nicht** wächst, **dann** kann das Unternehmen X mit seinen Produkten den Gewinn gegenüber dem Vorjahr **nicht** steigern."*

Obwohl man über den Sinn dieser Sätze unterschiedlicher Meinung sein kann – eine Gewinnsteigerung ist auch allein durch Kostensenkung denkbar –, so bedeuten sie doch beide logisch dasselbe: der zweite Satz folgt aus dem ersten und der erste aus dem zweiten. Die Sätze sind also entweder beide wahr oder beide falsch. Das gilt unabhängig davon, ob nun irgendeines der drei Ereignisse Gewinnzuwachs, Preissteigerung oder Absatzsteigerung tatsächlich eintritt oder nicht.

In der Aussagenlogik wird die *logische Struktur* der Verknüpfung von Sätzen mit verbindenden Wörtern (*Konnektoren*) wie *„und"*, *„oder"* und *„wenn ... dann"* sowie deren Verneinung untersucht, unabhängig vom konkreten Inhalt der verknüpften Sätze. Die dabei geltenden Regeln bilden die Grundlage des logischen Denkens.

Beispiel 1.1 Die folgenden Sätze aus der Alltagssprache sollen auf ihren Wahrheitsgehalt überprüft werden:

(1) *Karl V. war deutscher Kaiser bis zu seinem Tod im Jahre* 1557.

(2) *Hoffentlich hat Karl V. gut regiert!*

(3) *Napoleon Bonaparte hat einmal gesagt, nur ein Faulpelz schliefe länger als fünf Stunden am Tag.*

(4) *Der Aktienkurs der UNSINN AG ändert sich am* 1. 1. 2010, *oder er ändert sich nicht.*

(5) *Für jede genügend kleine nicht negative reelle Zahl x gilt* $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

(6) *Die natürliche Zahl n ist durch* 3 *teilbar.*

(7) *Lohnt es sich, mathematische Fachbücher zu lesen, wenn man quantitative Zusammenhänge in den Wirtschaftswissenschaften studieren will?*

(8) *Zwischen der Höhe der Kreditzinsen und dem Niveau der Aktienkurse besteht kein absolut gesicherter Zusammenhang.*

(9) *Fallende Kreditzinsen bewirken stets einen Anstieg der Aktienkurse.*

(10) *Am Neujahrstag des Jahres* 1443 *hat es in München geschneit.*

Die Sätze (3) und (8) geben einen wahren Sachverhalt wieder, und der Satz (4) ist ebenfalls wahr, unabhängig vom Börsengeschehen im Jahr 2000.
Die Aussage des ersten Satzes ist falsch (Karl V. hatte vorzeitig zugunsten seines Bruders Ferdinand abgedankt).
Im Satz (2) wird ein Wunsch geäußert, im Satz (6) ist die Zahl n nicht konkret angegeben (n ist eine Variable), und der Satz (7) ist eine Frage, – in diesen drei Fällen stellt sich die Frage nach dem Wahrheitsgehalt nicht.
Beim Satz (5) lässt sich über die Wahrheit erst dann entscheiden, wenn die vagen Begriffe $\approx$ und „genügend klein" präzisiert sind.[1] Der Satz (9) ist, zumindest in dieser generellen Form, falsch. Dennoch wird es für einen Anleger im Allgemeinen vorteilhafter sein, sich hiernach zu richten, als nach der Binsenweisheit des Satzes (8).
Ob der letzte Satz wahr oder falsch ist, ist zwar schwer oder gar nicht zu entscheiden, – jedoch ist es sicher, dass er entweder wahr oder falsch ist.

1.1.1 (Aussagen, Wahrheitswerte) *Ein Satz, der einen wahren oder einen falschen Sachverhalt wiedergibt, heißt **Aussage**. Einer wahren Aussage wird der **Wahrheitswert „wahr"** (W) zugeordnet, einer falschen Aussage der Wahrheitswert **„falsch"** (F).*

Unter den Sätzen des Beispiels 1.1 sind demnach die Sätze (2), (6) und (7) keine Aussagen, die Sätze (3), (4) und (8) sind wahre Aussagen (Wahrheitswert W), (1) ist eine falsche Aussage (Wahrheitswert F), (5) wird erst nach einer Präzisierung, z. B. der hier angegebenen, eine Aussage, und (10) ist eine Aussage mit einem (dem Verfasser) unbekannten Wahrheitswert.

Dass Aussagen genau einen der beiden Wahrheitswerte besitzen, wird zusammengefasst in dem folgenden grundlegenden Prinzip des logischen Denkens.

1.1.2 (Gesetz der zweiwertigen Logik)
*Eine Aussage ist **entweder wahr oder falsch**. Das bedeutet:*

- *Eine Aussage kann nicht weder wahr noch falsch sein*
  *(„Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht" – **„Tertium non datur"**).*
- *Eine Aussage kann nicht wahr und falsch zugleich sein*
  *(**„Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch"**).*

In der ***Aussagenlogik*** wird der Wahrheitswert gewisser abgeleiteter Aussagen und Verbindungen von Aussagen *allein aus dem Wahrheitswert der beteiligten Aussagen*

[1] Dies ist aber möglich: So gilt für die Abweichung zwischen dem Wert der Wurzelfunktion und dem Näherungswert $1+\frac{x}{2}$ die Ungleichung $|\sqrt{1+x}-(1+\frac{x}{2})|\le\frac{x^2}{8}$ für alle $x\ge 0$, wie man mit Hilfe der *Taylor*schen Formel (8.37) der Differentialrechnung nachweisen kann. Für $0\le x\le 0,01$ hat diese Abweichung dann höchstens den Wert 0,0000125.

bestimmt, – deren konkreter Inhalt hat hierfür keine Bedeutung. Die Sätze der Aussagenlogik stellen daher nichts anderes dar als ein System von Regeln für den Umgang mit den Symbolen W und F.

Im Folgenden werden als wichtigste abgeleitete Aussagen und Aussagenverbindungen die *Negation (Verneinung)*, *Konjunktion (logisches „und")*, *Disjunktion (logisches „oder")*, *Implikation (logische Folgerung)* und *Äquivalenz (logische Gleichwertigkeit)* durch Angabe ihrer Wahrheitswerte eingeführt.

1.1.3 (Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz)

- *Die* ***Negation*** $\neg A$ ***(nicht A)*** *einer Aussage A ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist.*

- *Die* ***Konjunktion*** $A \wedge B$ ***(A und B)*** *zweier Aussagen A und B ist wahr, wenn A und B* ***beide wahr*** *sind, in allen anderen Fällen falsch.*

- *Die* ***Disjunktion (Alternative)*** $A \vee B$ ***(A oder B)*** *zweier Aussagen A und B ist wahr, wenn* ***mindestens eine*** *der Aussagen A und B wahr ist, in dem verbleibenden Fall falsch.*

- *Die* ***Implikation*** $A \Rightarrow B$ ***(wenn A, dann B; aus A folgt B)*** *zweier Aussagen A und B ist* ***falsch****, wenn* ***A wahr und B falsch*** *ist, in allen anderen Fällen wahr. Die Implikation* $B \Rightarrow A$ *heißt* ***Umkehrung*** *von* $A \Rightarrow B$*.*

- *Die* ***Äquivalenz*** $A \Leftrightarrow B$ ***(A genau dann, wenn B; A dann und nur dann, wenn B)*** *zweier Aussagen A und B ist wahr, wenn A und B den* ***gleichen Wahrheitswert*** *besitzen, andernfalls falsch.*

Die Wirkungsweise der Negation und der eingeführten Aussagenverbindungen kann in einer ***Tabelle der Wahrheitswerte*** dargestellt werden:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	W	F
F	W	W	F	W	W	F	F
F	F	W	F	F	W	W	W

(1.1)

1.1.4 (Einschließendes „oder" und ausschließendes „entweder oder ")[2]

- *Die Aussagenverbindung "**A oder B**" ist auch in dem Fall wahr, dass **A** und **B** beide wahr sind, – „oder" wird generell **einschließend** gebraucht.*

[2]Die scharfe Trennung zwischen *„oder"* und *„entweder oder"* im wissenschaftlichen Sprachgebrauch wird in der alltäglichen Sprache nicht konsequent vollzogen. Dadurch sieht man sich hier gelegentlich zur Verwendung von Ersatzkonstruktionen wie „und/oder" gezwungen.

- *Die Aussagenverbindung* ***„entweder A oder B"*** *hingegen ist wahr, wenn A wahr und B falsch oder wenn A falsch und B wahr ist, – sie ist gleichbedeutend mit der Aussagenverbindung* $\neg(A \Leftrightarrow B)$ *oder auch mit* $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

Die Wirkungsweise zusammengesetzter Aussagenverbindungen wie „entweder oder" kann mit der Tabelle der Wahrheitswerte ermittelt werden; hierin wird der Wahrheitswert einer Aussagenverbindung für jede Kombination von Wahrheitswerten der beteiligten Einzelaussagen schrittweise berechnet:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
W	W	F	F	F	F	F
W	F	F	W	W	F	W
F	W	W	F	F	W	W
F	F	W	W	F	F	F

(1.2)

1.1.5 (Hinreichende Bedingung, notwendige Bedingung)

- *Die Aussagenverbindung* $A \Rightarrow B$ *heißt auch* ***Schluss von A auf B****, A heißt die* ***Prämisse*** *und B die* ***Konklusion****.*
  Dass $A \Rightarrow B$ *falsch ist, wenn A wahr und B falsch ist, bedeutet, dass der Schluss von einer wahren auf eine falsche Aussage falsch ist, – aus einer wahren Aussage kann grundsätzlich nur auf eine wahre Aussage geschlossen werden.*

- *Ist der Schluss* $A \Rightarrow B$ *wahr, so folgt aus der Wahrheit von A die Wahrheit von B; A ist dann eine* ***hinreichende Bedingung für B*** *(genauer: A ist hinreichend für die Wahrheit von B).*
  Andererseits kann bei einem wahren Schluss $A \Rightarrow B$ *die Aussage A nur in dem Fall wahr sein, wenn B wahr ist; B ist dann eine* ***notwendige Bedingung für A*** *(genauer: B ist notwendig für die Wahrheit von A).*

- *Die Wahrheit von* $A \Leftrightarrow B$ *bedeutet, dass der Schluss* $A \Rightarrow B$ *und der* ***Umkehrschluss*** $B \Rightarrow A$ *beide wahr sind. Dann ist A eine notwendige und hinreichende Bedingung für B (und zugleich B eine notwendige und hinreichende Bedingung für A).*

Beispiel 1.2 (Notwendige und hinreichende Bedingung) Für einen Beschuldigten X in einem Strafverfahren ist die Aussagenverbindung *„X hat für die Tatzeit ein Alibi"* (Aussage A) $\Rightarrow$ *„X ist unschuldig"* (Aussage B) generell wahr. Das Alibi ist somit eine hinreichende Bedingung für die Unschuld von X, und die Unschuld ist eine notwendige Bedingung für ein Alibi. Andererseits ist ein Alibi für den Nachweis der Unschuld zwar hilfreich, aber nicht notwendig. Hingegen ist B notwendig und hinreichend für die Aussage *„Die betreffende Tat wurde von anderen Personen begangen"*.

Für Aussagenverbindungen, in denen nur eines der Symbole $\wedge$, $\vee$ oder $\Leftrightarrow$ auftritt, hängt der Wahrheitswert nicht von der Reihenfolge der Einzelaussagen oder von der Art der Klammersetzung ab. Klammern können daher zur Vereinfachung auch ganz weggelassen werden, – dies gilt jedoch nicht, wenn unterschiedliche Symbole in einer Verbindung gemeinsam auftreten.

Die entsprechenden Regeln können anhand von Tabellen der Wahrheitswerte nach dem Muster (1.2) überprüft werden.

1.1.6 (Reihenfolge und Klammern in Aussagenverbindungen)
Für beliebige Aussagen A, B und C gelten die folgenden logischen Äquivalenzen:

$$\begin{array}{rcccrcc}
A \wedge B & \Longleftrightarrow & B \wedge A & \quad & A \wedge (B \wedge C) & \Longleftrightarrow & (A \wedge B) \wedge C \\
A \vee B & \Longleftrightarrow & B \vee A & & A \vee (B \vee C) & \Longleftrightarrow & (A \vee B) \vee C \\
A \Leftrightarrow B & \Longleftrightarrow & B \Leftrightarrow A & & A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C) & \Longleftrightarrow & (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \\
A \wedge (B \vee C) & \Longleftrightarrow & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & & (A \wedge B) \vee C & \Longleftrightarrow & (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\
A \vee (B \wedge C) & \Longleftrightarrow & (A \vee B) \wedge (A \vee C) & & (A \vee B) \wedge C & \Longleftrightarrow & (A \wedge C) \vee (B \wedge C).
\end{array} \tag{1.3}$$

Beispiel 1.3 (Klammern in Aussagenverbindungen) Eine Person ist klug *und* (jung oder schön), wenn sie zunächst erst einmal klug ist und dann zusätzlich noch jung oder schön (wobei auch Jugend und Schönheit zugleich möglich ist), also kurz, wenn sie (klug und jung) oder (klug und schön) ist, – siehe die vorletzte der Regeln auf der linken Seite von (1.3).
Um aber (klug und jung) *oder* schön zu sein, reicht allein die Schönheit aus, auch wenn man alt und weniger klug ist.
Durch eine Akzentverschiebung, hier durch eine Änderung der Klammersetzung verwirklicht, wird der logische Inhalt verändert:
$\{klug \wedge (jung \vee schön)\}$ und $\{(klug \wedge jung) \vee schön\}$ sind logisch nicht gleichwertig.

1.2 Aussageformen

Sätze, in denen nicht näher spezifizierte Objekte (eine natürliche Zahl n, ein Steuerzahler NN, ein Artikel a des Warensortiments einer Firma, usw.) auftreten, kommen im alltäglichen Sprachgebrauch häufig vor.

1.2.1 (Aussageform) *Enthält ein Satz $A(x)$ eine Variable x (diese steht für Objekte einer gegebenen Gesamtheit, z. B. für Zahlen), so dass durch Einsetzen eines entsprechenden konkreten Objekts x_0 der Gesamtheit für die Variable x eine (wahre oder falsche) Aussage $A(x_0)$ entsteht, so heißt dieser Satz eine* ***Aussageform*** *mit der* ***Aussagevariablen*** *x.*
Aussageformen können auch mehrere Aussagevariable enthalten.

Eine Aussageform selbst ist keine Aussage, – erst durch Belegung aller darin auftretenden Aussagevariablen mit konkreten Objekten entsteht eine (wahre oder falsche) Aussage.

Beispiel 1.4 Die Aussageform *„x ist ohne Rest durch y teilbar"* enthält die beiden Aussagevariablen x und y, die jeweils für eine ganze Zahl stehen. Durch Belegung von x mit der konkreten Zahl 8 und von y mit 2 oder 3 entsteht die wahre Aussage *„8 ist durch 2 teilbar"* bzw. die falsche Aussage *„8 ist durch 3 teilbar"*.

Neben der Belegung der Variablen mit konkreten Objekten werden Aussage*formen* eigentlich erst durch die daraus abgeleiteten Bildungen – Existenzausssage und Allaussage – interessant.

1.2.2 (Existenz- und All-Aussage)

Für eine Aussageform $A(x)$ werden die beiden folgenden Aussagen betrachtet:

- ***Existenz-Aussage*** $\exists x\ \boldsymbol{A(x)}$: *„Es gibt ein x (aus einer Gesamtheit), so dass $A(x)$ wahr ist."*
- ***All-Aussage*** $\forall x\ \boldsymbol{A(x)}$: *„Für alle x (aus einer Gesamtheit) ist $A(x)$ wahr."*

Beispiel 1.5 Die Aussagevariable x stehe für eine Aktie des Aktienindex DAX, und $A(x)$ sei die Aussageform *„Wenn der DAX-Wert steigt, steigt der Kurs von x"*. Die Anwendung der Operationen $\forall$ und $\exists$ auf die Aussageform $A(x)$ ergibt:

$\forall x\ A(x)$: *„Wenn der* DAX-*Wert steigt, steigt der Kurs* ***aller*** *Aktien des* DAX.*"*

$\exists x\ A(x)$: *„Wenn der* DAX-*Wert steigt, steigt der Kurs (mindestens)* ***einer*** *der Aktien des* DAX.*"*

Die Verneinung von Existenz- und All-Aussagen im täglichen Sprachgebrauch führt häufig zu Mehrdeutigkeiten. So wird vielfach an Stelle der Verneinung *„nicht für alle x gilt $A(x)$"* die falsche Formulierung *„für kein x gilt $A(x)$"* verwendet. Die korrekte Verneinung wird zunächst an einem Beispiel erläutert.

Beispiel 1.6 Die Variable x stehe für eine Firma des Unternehmens *WIRTSCHAFT*, und $A(x)$ sei die Aussageform *„Die Firma x erzielt im Bilanzjahr einen Gewinn"*.

$\forall x\ A(x)$: *„Alle Firmen erzielen im Bilanzjahr einen Gewinn."*

$\exists x\ A(x :)$ *„(Mindestens) eine Firma x erzielt im Bilanzjahr einen Gewinn."*

$\neg\forall x\ A(x)$: *„(Mindestens) eine Firma x erzielt im Bilanzjahr keinen Gewinn."*

$\iff$ *„Es gibt eine Firma x, so dass die Negation von $A(x)$ zutrifft."*

$\neg\exists x\ A(x)$: *„Keine der Firmen erzielt im Bilanzjahr Gewinn."*

$\iff$ *„Für alle Firmen x trifft die Negation von $A(x)$ zu."*

Die Verneinung von *„alle Firmen erzielen Gewinn"* ist also nicht *„alle Firmen erzielen keinen Gewinn"*, – dies ist vielmehr die Verneinung von *„(mindestens) eine der Firmen erzielt Gewinn"*. Zur Vermeidung derartiger missverständlicher Formulierungen können die folgenden offensichtlichen Verneinungsregeln angewandt werden, wodurch die Verneinung gleichsam automatisiert wird.

1.2.3 (Negation von Existenz- und All-Aussagen)

Die Negation einer mit den Symbolen $\exists$ und $\forall$ gebildeten Aussage kann logisch gleichwertig durch formales ***Vertauschen der Symbole*** $\exists$ ***und*** $\forall$ *gebildet werden:*

$$\begin{aligned} \neg\,(\exists x\ A(x)) &\iff \forall x\ \neg A(x) \\ \neg\,(\forall x\ A(x)) &\iff \exists x\ \neg A(x). \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.3 Logisches Schließen

Es werden nun *formale Aussagenverbindungen*, die mit den eingeführten logischen Operationen erzeugt wurden, auf ihren Wahrheitswert untersucht; hierbei stehen $A, B, C, \ldots$ als Symbole für Aussagen.

Beispiel 1.7 Werden in die formale Aussagenverbindung $A \Rightarrow (B \vee \neg B)$ konkrete Aussagen A und B eingesetzt, so ergibt sich stets eine wahre Aussage, unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B.[3] Denn die Konklusion $B \vee \neg B$ des Schlusses $A \Rightarrow (B \vee \neg B)$ ist stets wahr, und folglich ist der gesamte Schluss wahr.
Formal ergibt sich dies auch mit Hilfe einer Tabelle der Wahrheitswerte:

A	B	$\neg B$	$B \vee \neg B$	$A \Rightarrow (B \vee \neg B)$
W	W	F	W	W
W	F	W	W	W
F	W	F	W	W
F	F	W	W	W

1.3.1 (Tautologie) *Eine formale Aussagenverbindung heißt* ***Tautologie***[4]*, wenn sie – unabhängig vom Wahrheitswert der verbundenen Einzelaussagen – den Wahrheitswert* **W** *besitzt.*

- *Bei einer Tautologie kann generell auf die inhaltliche Prüfung der beteiligten einzelnen Aussagen verzichtet werden. Tautologien sind daher zulässige* ***logische Schlussweisen****.*

Die folgenden Tautologien sind die elementaren Bausteine des logischen Schließens.[5]

$$\begin{array}{lllll}
\textit{Abtrennungsregel:}^{6} & A \wedge (A \Rightarrow B) & \Longrightarrow & B & \\
\textit{Kettenschluss:} & (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) & \Longrightarrow & (A \Rightarrow C) & \\
\textit{Kontraposition:} & A \Rightarrow B & \Longleftrightarrow & (\neg B \Rightarrow \neg A) & \\
\textit{Indirekter Beweis:} & A \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A) & \Longrightarrow & B & (1.5)\\
\textit{De Morgansche Gesetze:} & \neg(A \wedge B) & \Longleftrightarrow & (\neg A \vee \neg B) & \\
 & \neg(A \vee B) & \Longleftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B). &
\end{array}$$

Diese Tautologien werden jetzt in drei Standard-Situationen angewandt.

1.3.2 (Direkte Beweisführung für $A \Rightarrow B$) *Ist die Aussage A wahr und ist der Schluss von A auf die Aussage B korrekt, so ist auch B eine wahre Aussage.*

[3] Ein volkstümliches Beispiel hierfür ist die Aussage „*Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter, oder es bleibt wie es ist*".

[4] auch *Syllogismus* oder *Pleonasmus*

[5] Zur Herleitung vgl. Aufgabe 1.2.

[6] auch „*modus ponens*"

B e w e i s : Sind A und $A \Rightarrow B$ wahre Aussagen, so ist $C = A \wedge (A \Rightarrow B)$ und damit die linke Seite der Abtrennungsregel eine wahre Aussage. Da aber die Implikation $C \Rightarrow B$ als Tautologie insgesamt wahr ist, kann bei wahrer Prämisse C die Konklusion B nicht falsch sein. □

Beispiel 1.8 Zu einer *gegebenen* natürlichen Zahl n werden die Aussagen $A =$ *„6 ist ein Teiler von n"* und $B =$ *„6 ist ein Teiler von $2n$"* betrachtet. Dann ist der Schluss $A \Rightarrow B$ eine wahre Aussage. Ist dann n tatsächlich durch 6 teilbar (A ist wahr), so ist $2n$ durch 6 teilbar (B ist wahr).[7]

Der direkte Beweis ist die Grundlage des – direkten – logischen Schließens. Zusammen mit dem Kettenschluss lässt sich hieraus eine beliebig lange ***Schlusskette*** aufbauen:

$$\boldsymbol{A_1 \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \wedge \ldots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \implies A_n}. \tag{1.6}$$

Eine solche Schlusskette ist eine Aufeinanderfolge wahrer Aussagen, wobei jedes Glied der Folge die Wahrheit seines Vorgängers verwendet: aus einer *wahren Anfangsaussage* A_1 wird mittels korrekter Schlüsse Schritt für Schritt die *Wahrheit einer Endaussage* A_n konstruiert. In diesem Sinne ist ein direkter Beweis *konstruktiv.*

Hierbei ist darauf zu achten, dass die ***Anfangsaussage der Kette eine wahre Aussage*** ist!

Ein häufig anzutreffender Fehler beim Nachweis der Wahrheit einer Aussage A_1 besteht darin, dass A_1 erst einmal als wahr angenommen und aus dieser Annahme über eine Kette (1.6) korrekter Schlüsse eine wahre Aussage A_n abgeleitet wird. *Hieraus lässt sich nicht allgemein auf die Wahrheit von A_1 schließen,* wie das Beispiel

$$(A_1 = \text{„}1 = 0\text{"}) \Rightarrow (A_2 = \text{„}1/2 = -1/2\text{"}) \Rightarrow (A_3 = \text{„}1/4 = 1/4\text{"}) \implies A_1 \text{ ?}$$

zeigt: Aus der Annahme, dass A_1 wahr ist, ergibt sich über die korrekten Schlüsse $A_1 \Rightarrow A_2$ (Subtraktion von 1/2 auf beiden Seiten einer Gleichung) und $A_2 \Rightarrow A_3$ (Quadrieren beider Seiten einer Gleichung) die wahre Aussage A_3.
Um die Wahrheit von A_1 nachzuweisen, muss vielmehr von der wahren Aussage A_3 ausgegangen und durch die Umkehrschlüsse ($A_3 \Rightarrow A_2$) und ($A_2 \Rightarrow A_1$) auf die Wahrheit von A_1 geschlossen werden. Dies ist aber hier nicht möglich, da der Schluss von A_3 auf A_2 nicht korrekt ist.

1.3.3 (Kontraposition) *Der Schluss $A \Rightarrow B$ und seine Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$ haben den gleichen Wahrheitswert.*

Oftmals gelingt der Nachweis, dass $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr bzw. falsch ist, einfacher als für den ursprünglichen Schluss $A \Rightarrow B$, – dies ist aber logisch äquivalent. Das ist vor allem bei indirekten Formulierungen zu beachten.

Beispiel 1.9 An Stelle von *„Veranstaltungen im Freien finden nur bei günstigem Wetter statt"* ($A \Rightarrow B$) kann auch die gleichwertige Formulierung *„Bei ungünstigem Wetter finden die Veranstaltungen nicht im Freien statt"* ($\neg B \Rightarrow \neg A$) verwendet werden, nicht aber *„Bei günstigem Wetter finden die Veranstaltungen im Freien statt"* ($B \Rightarrow A$).

[7] Ist n nicht durch 6 teilbar, dann ist $A \Rightarrow B$ automatisch wahr, da die Prämisse A falsch ist.

1.3.4 (Indirekter Beweis für die Wahrheit einer Aussage B)
A sei eine wahre Aussage. Lässt sich dann aus der Annahme, die Aussage B sei falsch (also $\neg B$ wahr), nachweisen, dass $\neg A$ wahr ist, so ist B eine wahre Aussage.

B e w e i s : Sind A und der Schluss $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr, so ist die linke Seite $C = A \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)$ der Tautologie „indirekter Beweis" wahr. Da $C \Rightarrow B$ als Tautologie insgesamt wahr ist, kann B nicht falsch sein. □

Beispiel 1.10 Von einem Buch sei bekannt, dass es Druckfehler enthält (Aussage A). Es ist nachzuweisen, dass das erste Kapitel fehlerhaft ist (Aussage B). Nimmt man das erste Kapitel als fehlerfrei an ($\neg B$ ist wahr) und findet dann im Rest des Buches keine Fehler, so müsste - im Widerspruch zu A - das gesamte Buch fehlerfrei sein ($\neg A$). Also ist das erste Kapitel fehlerhaft.

Indirekte Beweise lassen sich oft durch einen direkten Beweis ersetzen. So stellt sich die Wahrheit der Aussage B im Beispiel 1.10 auch unmittelbar durch das Auffinden eines Fehlers im ersten Kapitel heraus. Ein klassisches Beispiel für die Notwendigkeit eines indirekten Beweises ist der im Folgenden geführte Nachweis dafür, dass die Quadratwurzel aus der Zahl 2 keine rationale Zahl ist.

Beispiel 1.11 (Nachweis von B = „$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl")
Hierfür wird die Tatsache verwendet, dass sich jeder Bruch aus zwei ganzen Zahlen so lange kürzen lässt, bis Zähler und Nenner teilerfremd sind, also bis auf 1 oder -1 keine gemeinsamen Teiler haben.

Annahme, B sei falsch	$\Longleftrightarrow$	„$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl p/q."
Kürzen von p/q	$\Longrightarrow$	A = „Die Zahlen p und q sind teilerfremd." [8]
Quadrieren von $\sqrt{2} = p/q$	$\Longrightarrow$	A_1 = „$2q^2 = p^2$."
A_1	$\Longrightarrow$	A_2 = „2 ist ein Teiler von p^2."
A_2	$\Longrightarrow$	A_3 = „2 ist ein Teiler von p."[9]
A_3	$\Longrightarrow$	A_4 = „$p = 2s$ für eine geeignete ganze Zahl s."
A_1 und A_4	$\Longrightarrow$	A_5 = „$2q^2 = 4s^2$."
Kürzen von A_5	$\Longrightarrow$	A_6 = „$q^2 = 2s^2$."
A_6	$\Longrightarrow$	A_7 = „2 ist ein Teiler von q."
A_3 und A_7	$\Longrightarrow$	A ist falsch, denn 2 ist ein Teiler von p *und* q.

Die Schlusskette $\neg B \Rightarrow A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_4 \Rightarrow A_5 \Rightarrow A_6 \Rightarrow A_7 \Longrightarrow \neg A$ führt auf den Widerspruch, dass A wahr *und* falsch ist, und damit ist B wahr. □

1.4 Mengen und Elemente

Für die Anwendung mathematischer Methoden ist ein geregelter Umgang mit Mengen von erheblichem Vorteil. Eigenschaften von Objekten, Beziehungen zwischen Strukturen und komplexe Zusammenhänge lassen sich unter Verwendung der logischen Prinzipien in der Sprache der Mengen wesentlich präziser und rationeller darstellen als es

[8] Für diese Aussage A wird der Widerspruch $A \wedge \neg A$ konstruiert.
[9] Vgl. Aufgabe 1.4.

in der Umgangssprache möglich ist.
In der (naiven) Mengenlehre werden der *Mengenbegriff* und die *Beziehung zwischen Mengen und Elementen* ohne eine weitere Erklärung als gegeben vorausgesetzt.

1.4.1 (Mengen und Elemente) *Eine* ***Menge*** *M ist die Zusammenfassung von bestimmten (realen oder begrifflichen) „Objekten" zu einem Ganzen; die Objekte m der Menge M heißen deren* ***Elemente*** *(Symbol: $\boldsymbol{m \in M}$).*[10]
Ist M eine Menge und m ein Element (irgendeiner) Menge, so ist $(m \in M)$ eine Aussage und damit entweder wahr oder falsch.
Ist diese Aussage falsch, so ist m ***kein Element*** *von M (Symbol: $\boldsymbol{m \notin M}$).*

Die Zweiwertigkeit der Logik bedeutet, angewandt auf die Aussage $(m \in M)$:
Ist M eine Menge und m ein Element irgendeiner Menge, so ist m entweder ein Element von M oder kein Element von M.

Mengen können auf unterschiedliche Weise, etwa durch die Charakterisierung ihrer Elemente mittels *Text* oder *Formeln* oder manchmal auch durch konkrete Angabe ihrer Elemente in einer *Aufzählung* beschrieben werden; hierbei kommt es auf die Reihenfolge nicht an.

Beispiel 1.12

M	$=$	Menge der Einwohner der Stadt NN
M	$=$	Menge der ersten 5 ungeraden natürlichen Zahlen
	$=$	$\{1,3,5,7,9\} = \{9,7,5,3,1\} = \{1,9,5,7,3\}$
$\mathbb{N}$	$=$	Menge der natürlichen Zahlen $= \{(0),1,2,3,\ldots\}$
		(Eine Aufzählung ist nur unvollständig möglich, da $\mathbb{N}$ unendlich viele Elemente enthält.)
$\mathbb{P}$	$=$	Menge der rationalen Zahlen (endliche oder periodische Dezimalbrüche)
$\mathbb{R}$	$=$	Menge der reellen Zahlen (alle Dezimalbrüche)

1.4.2 (Teilmenge) *Eine Menge A heißt* ***Teilmenge*** *einer Menge B, wenn jedes Element von A zugleich auch Element von B ist (Symbol: $\boldsymbol{A \subseteq B}$).*
$A \subseteq B$ bedeutet: Für alle $a \in A$ ist $\Big((a \in A) \Rightarrow (a \in B)\Big)$ eine wahre Aussage.
Eine Teilmenge A von B heißt ***echte Teilmenge*** *von B, wenn B Elemente enthält, die nicht zugleich Elemente von A sind (Symbol: $\boldsymbol{A \subsetneqq B}$).*

Eine Teilmenge einer Menge M kann dadurch gebildet werden, dass alle Elemente von M mit einer gewissen Eigenschaft zusammengefasst werden.

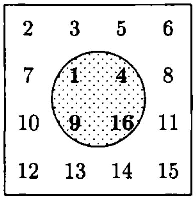
1.4.3 (Bildung von Teilmengen durch eine charakterisierende Eigenschaft) *Eine* ***Eigenschaft A*** *für die Elemente m einer Menge M ist durch eine* ***Aussageform $\boldsymbol{A(m)}$*** *mit $m \in M$ gegeben: Hierbei hat ein konkretes Element m_0 von M die Eigenschaft A, wenn die konkrete Aussage $A(m_0)$ wahr ist.*

[10]Hierdurch werden die Begriffe „Menge" und „Element" nicht erklärt, sondern lediglich mit den – ebenfalls nicht erklärten – Begriffen „Gesamtheit" und „Objekt" umschrieben.

- *Die Menge aller Elemente m von M, für die $A(m)$ wahr ist, bildet dann die* ***Teilmenge*** *M_A aller Elemente von M mit der Eigenschaft A. Hierfür wird das Symbol* $\boldsymbol{M_A = \{m \in M \;:\; A(m)\}}$ *verwendet.*

Beispiel 1.13

Die Aussageform $A(m)$ = „m ist Quadratzahl" charakterisiert in der Menge $M = \{m \in \mathbb{N} : m \leq 16\}$ die Teilmenge $M_A = \{m \in M : A(m)$ ist wahr $\} = \{1, 4, 9, 16\}$.



Die folgende nahe liegende Erklärung der Gleichheit zweier Mengen zeigt zugleich eine praktische Möglichkeit auf, wie zwei Mengen konkret auf Gleichheit überprüft werden können.

1.4.4 (Gleichheit von Mengen) *Zwei Mengen A und B heißen* ***gleich****, wenn sie die gleichen Elemente enthalten (Symbol: $A = B$).*
$A = B$ ist gleichbedeutend damit, dass $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ zugleich gelten.

Nützlich sind auch solche Mengen, die keine Elemente enthalten. So ist zum Beispiel durch die Aussageform $A(n)$ = „$n = n + 1$" diejenige Teilmenge der Menge aller natürlichen Zahlen n erklärt, für welche $A(n)$ wahr ist. Diese Menge enthält aber keine einzige natürliche Zahl.

Nun sind alle *Mengen ohne Elemente* untereinander gleich, wie sich allein mit Hilfe der logischen Regeln zeigen lässt. Daher ist es vernünftig, von *der* leeren Menge zu sprechen.

1.4.5 (Leere Menge) *Alle Mengen, die keine Elemente enthalten, bilden ein und dieselbe Menge, die so genannte* ***leere Menge*** *(Symbol: $\emptyset$).*
Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge M.

B e w e i s : Nach 1.4.4 ist zu zeigen, dass für je zwei Mengen X und Y, die beide keine Elemente enthalten, sowohl $X \subseteq Y$ als auch $Y \subseteq X$ gilt.

Die Beziehung $X \subseteq Y$ bedeutet, dass $(x \in X) \Rightarrow (x \in Y)$ für jedes $x \in X$ wahr ist. Nun ist aber $x \in X$ für kein Element x wahr, damit ist die Prämisse des Schlusses falsch, und folglich ist der gesamte Schluss wahr. Durch Vertauschung der Bedeutung von X und Y folgt entsprechend $Y \subseteq X$. Die Mengen X und Y sind daher untereinander gleich, und es kann für beide ein und dasselbe Symbol $\emptyset$ verwendet werden.
Mit dem gleichen Argument kann nun auch $\emptyset \subseteq M$ für eine beliebige Menge M gezeigt werden: Der Schluss $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in M)$ ist generell wahr, da die Prämisse für jedes Element x falsch ist. □

1.4.6 (Spezielle Mengen reeller Zahlen) *(für reelle Zahlen a und b mit $a < b$):*

$$
\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} & (\textit{\textbf{abgeschlossenes Intervall}}) \\
(a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & (\textit{\textbf{offenes Intervall}}) \\
(a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} & (\textit{\textbf{nach links halb offenes Intervall}}) \\
[a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} & (\textit{\textbf{nach rechts halb offenes Intervall}}) \\
(-\infty,a] & = & \{x \in \mathbb{R} : x \le a\} & (\textit{\textbf{nach links halb offener Strahl}}) \\
[a,\infty) & = & \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\} & (\textit{\textbf{nach rechts halb offener Strahl}}) \\
(-\infty,\infty) & = & \mathbb{R} & (\textit{\textbf{Menge aller reellen Zahlen}})
\end{array}
$$

usw.

1.5 Operationen mit Mengen

Die Operationen mit Mengen können auf die vier Grundoperationen *Durchschnitt*, *Vereinigung*, *Differenz* und *Produkt* zurückgeführt werden.

1.5.1 (Durchschnitt $A \cap B$) *Der **Durchschnitt zweier Mengen A und B** besteht aus denjenigen Elementen, die **sowohl A als auch B** angehören:*

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

1.5.2 (Vereinigung $A \cup B$) *Die **Vereinigung zweier Mengen A und B** besteht aus denjenigen Elementen, die **A oder B** angehören:*

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

1.5.3 (Differenz $A \setminus B$) *Die **Differenz zweier Mengen A und B** besteht aus denjenigen Elementen, die **A, aber nicht B** angehören:*

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

1.5.4 (Symmetrische Differenz)
*Die Menge $\{x : ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))\}$ aller derjenigen Elemente, die **entweder A oder B** angehören, hat die Darstellung*

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1.5.5 (Komplementärmenge $\overline{A}^X$ bezüglich einer festen Grundmenge X)
*Ist X eine festgelegte Menge und A eine Teilmenge von X, so ist die **Komplementärmenge von A bezüglich X** die Menge aller derjenigen Elemente von X, die der Teilmenge A nicht angehören:*[11]

$$\overline{A}^X = \overline{A} = X \setminus A.$$

[11] Steht die Grundmenge X von vornherein fest, kann in $\overline{A}^X$ das Zeichen X weggelassen werden.

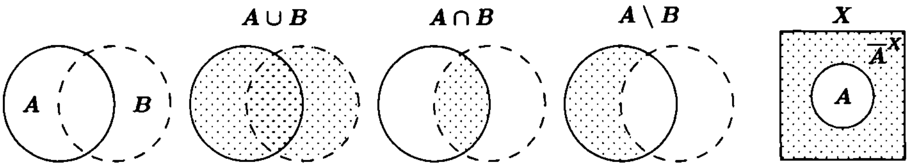


Abb. 1.1: Grafische Darstellung der Mengenoperationen

In der rechten Figur der Abbildung 1.1 ist die Grundmenge X ein Quadrat mit Berandung und A ein darin liegender Kreis ohne Berandung. Die Komplementärmenge $\overline{A}$ besteht aus dem Rand des Kreises und allen Punkten des Quadrats außerhalb des Kreises.

Beispiel 1.14 (Komplementärmenge bezüglich der Menge $X = \mathbb{R}$)

$$\overline{[a,b]} = (-\infty, a) \cup (b, \infty), \ \ \overline{(a,b)} = (-\infty, a] \cup [b, \infty) \quad (a, b \text{ reelle Zahlen mit } a < b)$$

A und B seien beliebige Mengen. Die nachfolgend aufgeführten Gesetze folgen unmittelbar aus den logischen Regeln (1.3).

1.5.6 (Assoziative, kommutative und distributive Gesetze)

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{1.7}$$

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Auf Grund der assoziativen Gesetze können Durchschnitte und Vereinigungen von beliebig vielen Mengen gebildet und dabei Klammern nach Belieben gesetzt und damit zur Vereinfachung auch weggelassen werden, ohne dass sich dabei das Ergebnis ändert. So kann beispielsweise für $(A \cap B) \cap (C \cap D) = A \cap \big((B \cap C) \cap D\big)$ auch $A \cap B \cap C \cap D$ geschrieben werden.

1.5.7 (Gesetze für Teilmengen) *A und B seien Teilmengen einer festgelegten Grundmenge X. Dann gelten die folgenden Beziehungen:*

$$\begin{aligned} A \cup X &= X & A \cup \overline{A} &= X \\ A \cap X &= A & A \cap \overline{A} &= \emptyset \\ A \cup \emptyset &= A & \overline{\overline{A}} &= A \\ A \cap \emptyset &= \emptyset & A \setminus B &= A \cap \overline{B} \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (\textit{De Morgan}). \tag{1.11}$$

Die Formeln von *De Morgan* gehen unmittelbar aus den gleichnamigen logischen Tautologien (1.5) hervor:

$$x \in \overline{A \cap B} \iff \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) \iff (x \notin A) \vee (x \notin B) \iff x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$$
$$x \in \overline{A \cup B} \iff \neg((x \in A) \vee (x \in B)) \iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \iff x \in (\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Bisher spielte die Reihenfolge der Elemente in einer Menge keine Rolle, – alle Elemente sind hierin gleichberechtigt. Eine Reihenfolge zwischen den Elementen wird jetzt durch die Einführung *geordneter Paare* (a, b) von Elementen möglich: hierin ist a *das erste* und b *das zweite* Element.

1.5.8 (Produkt $A \times B$) *Für zwei Mengen A und B heißt die* ***Menge aller geordneten Paare*** (a, b) *von Elementen, wobei a ein Element der Menge A und b ein Element der Menge B ist, (**kartesisches**) **Produkt** $A \times B$ von A und B.*

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

Für $A \times A$ wird auch das Symbol A^2 verwendet.[12]

Die Produktmenge $A \times B$ kann symbolisch in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden:
Wird der erste Faktor A auf der horizontalen Achse und der zweite Faktor B auf der vertikalen Achse „abgetragen", so werden die Elemente (a, b) des Produkts $A \times B$ durch diejenigen Punkte der Ebene symbolisiert, deren „horizontale Koordinate" der Menge A und deren „vertikale Koordinate" der Menge B angehören.

Beispiel 1.15 Das Produkt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kann als Menge aller Zahlenpaare (Punkte) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgefasst werden.
In der Abbildung 1.2 sind die Produkte $A \times B$ zweier abgeschlossener Intervalle sowie einer endlichen Menge mit einem offenen Intervall dargestellt. Im ersten Fall ist das Produkt ein Rechteck (einschließlich Berandung) und im zweiten Fall eine aus drei vertikalen offenen Strecken bestehende Menge.

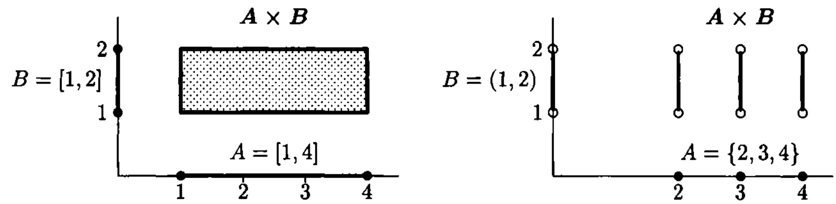


Abb. 1.2: Kartesisches Produkt zweier Mengen

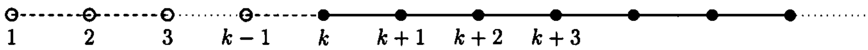
[12] Für drei Faktoren wird statt $(A \times B) \times C$ kurz $A \times B \times C$ und für das Element $((a, b), c)$ kurz (a, b, c) geschrieben. Entsprechend bezeichnet das Symbol A^3 die Produktmenge $A \times A \times A$.

Beispiel 1.16 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ und $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ seien zwei Mengen von m bzw. n Elementen.
Das Produkt $A \times B$ besteht dann aus den $m \times n$ Paaren (a_i, b_j) für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$. Diese können in einer zweidimensionalen Liste (Tabelle, Matrix) angeordnet werden:

$$\begin{pmatrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \ldots & (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \ldots & (a_2, b_n) \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ (a_m, b_1) & (a_m, b_2) & \ldots & (a_m, b_n) \end{pmatrix}.$$

1.6 Induktiver Aufbau der Menge der natürlichen Zahlen

Beim Umgang mit natürlichen Zahlen treten häufig „Abschnitte“ der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen von folgender Form auf:



$$\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\} = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$$

Ein solcher Abschnitt besitzt folgende Eigenschaften:

(1) k ist die kleinste Zahl der Menge $\mathbb{N}_k$.

(2) Ist n irgendeine Zahl von $\mathbb{N}_k$, so enthält $\mathbb{N}_k$ auch die Nachfolgerzahl $n+1$: $(n \in \mathbb{N}_k) \Longrightarrow (n+1 \in \mathbb{N}_k)$.

Es gilt aber auch das Umgekehrte: Eine Menge natürlicher Zahlen mit den beiden Eigenschaften (1) und (2) ist gerade der Abschnitt $\mathbb{N}_k$ *aller* Nachfolgerzahlen von k, einschließlich k.

1.6.1 (Induktionsgesetz für die Menge der natürlichen Zahlen)
Enthält eine Menge M von natürlichen Zahlen eine ***kleinste Zahl k*** *und* ***mit jeder Zahl n auch deren Nachfolger n + 1****, so stimmt die Menge M mit der Menge $\mathbb{N}_k$ aller natürlichen Zahlen überein, die größer oder gleich k sind.*

Das Induktionsgesetz findet vielfältige Anwendungen dort, wo Begriffe oder Aussagen mit einer natürlichen Zahl als Parameter auftreten.

1.6.2 (Induktive Definition) *Für die Erklärung aller Glieder einer unendlichen Folge $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$ von Elementen einer Menge – zum Beispiel von Zahlen oder Aussagen – genügt es,* ***das erste Element*** *a_k anzugeben sowie eine* ***Vorschrift****, wie aus einem beliebigen bereits bekannten Element a_n der Folge* ***das nachfolgende Element*** *a_{n+1} bestimmt werden kann.*

B e w e i s : Auf Grund des Induktionsgesetzes stimmt die Menge derjenigen natürlichen Zahlen i, für welche das Element a_i erklärt ist, mit der Menge $\{k, k+1, \ldots\}$ überein. Damit ist die gesamte Folge erklärt. □

Beispiel 1.17 (Fakultät) Die induktive Definition für das Produkt $\mathbf{1 \cdot 2 \cdots n}$ der ersten n natürlichen Zahlen (Symbol $\boldsymbol{n!}$, gelesen „n *Fakultät*") lautet:

- $\mathbf{1! = 1}$ (Erklärung für das erste Element).
- $\boldsymbol{(n+1)! = n!(n+1)}$ (Induktive Erklärung für das $(n+1)$-te Element).[13]

Beispiel 1.18 (Summensymbol) Für eine Zahlenfolge $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$ lautet die induktive Definition der Summe $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+n}$ von $n+1$ Summanden mit Hilfe des Summensymbols $\sum\limits_{i=k}^{k+n} a_i$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\boldsymbol{\sum_{i=k}^{k} a_i = a_k; \quad \sum_{i=k}^{k+n+1} a_i = \sum_{i=k}^{k+n} a_i + a_{k+n+1}}\,.$$

Beispiel 1.19 (Zinseszinsformel) Ein Anfangskapital K werde jährlich mit einem Zinssatz p verzinst. Die dabei anfallenden Zinsen sollen jeweils nach der Verzinsung dem Kapital hinzugefügt werden. Die induktive Definition für das nach n-maliger Verzinsung aufgelaufene Kapital K_n lautet:

$$\boldsymbol{K_0 = K; \; K_n = K_{n-1}(1+p)} \quad \text{für} \quad \boldsymbol{n = 1, 2, \ldots}$$

Die Aussage $A(n) = (n! > 2^n)$ ist für die Anfangszahl $n = 4$ und für alle natürlichen Zahlen $n > 4$ wahr. Für den Nachweis der Gültigkeit von $A(n)$ und weiterer derartiger Aussagen für *alle* natürlichen Zahlen n oberhalb einer gewissen Anfangszahl kann das Induktionsgesetz verwendet werden.

1.6.3 (Induktiver Beweis) *Es sei $A(n)$ eine von einer natürlichen Zahl n abhängige Aussageform, zum Beispiel eine Gleichung oder Ungleichung, welche n als Parameter enthält. Dabei seien die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:*

(1) *Für eine Anfangszahl k ist die Aussage $A(k)$ wahr.* (***Induktionsanfang***)

(2) *Für jede natürliche Zahl $n \geq k$ folgt aus der Annahme, $A(n)$ sei wahr, dass auch $A(n+1)$ wahr ist.* (***Schluss von n auf $n+1$***)

*Dann sind **alle Aussagen $A(n)$ für $n \geq k$ wahr**.*

B e w e i s : Auf Grund des Induktionsgesetzes enthält die Menge M derjenigen natürlichen Zahlen n, für die $A(n)$ wahr ist, die Zahl k und mit jeder Zahl n auch deren Nachfolger. Folglich enthält die Menge M alle natürlichen Zahlen $n \geq k$. □

---

[13] Oft ist es zweckmäßig, die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen hinzuzunehmen. Dann wird $0! = 1$ gesetzt. Dies ist auch die einzig sinnvolle Festsetzung, denn soll $(n+1)! = n!(n+1)$ auch für $n = 0$ gelten, so muss $0!$ wegen $1! = (0+1)! = 0! \cdot 1!$ den Wert 1 haben.

Beispiel 1.20 (Vergleich von linearem mit exponentiellem Kapitalwachstum) Ein Kapital, das jährlich um 10 % *des Startwertes* K_0 zunimmt, bildet eine linear wachsende Folge L_n mit $L_n = K_0\left(1+\frac{n}{10}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wird dagegen das Kapital jährlich um 5 % *des aktuellen Wertes* erhöht, so entsteht die exponentiell wachsende Kapitalfolge $K_n = K_0\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Für $1 \le n \le 26$ ist $L_n > K_n$. Es wird nun induktiv gezeigt, dass ab $n = 27$ die Ungleichung $K_n > L_n$ gilt.[14]

Induktionsanfang: Für die Anfangszahl $k = 27$ ist $L_k = 3,7 < K_k \approx 3,73$.

Schluss von n auf n + 1: Die Ungleichung $K_0\left(1+\frac{5}{100}\right)^n > K_0(1+\frac{n}{10})$ sei für irgendeine Zahl $n \ge 27$ erfüllt. Dann gilt:

$$(1+\frac{5}{100})^{n+1} = (1+\frac{5}{100})^n(1+\frac{5}{100}) > (1+\frac{n}{10})(1+\frac{5}{100}) = (1+\frac{n}{10}) + \frac{5}{100}(1+\frac{n}{10}).$$

Hierin ist der letzte Summand $\frac{5}{100}(1+\frac{n}{10})$ für $n > 10$ größer als $\frac{1}{10}$, also insbesondere für alle $n \ge 27$. Daher gilt:

$$K_{n+1} = (1+\frac{5}{100})^{n+1} > 1 + \frac{n}{10} + \frac{1}{10} = 1 + \frac{n+1}{10} = L_{n+1}.$$

Damit ist der Schluss von n auf $n+1$ korrekt. □

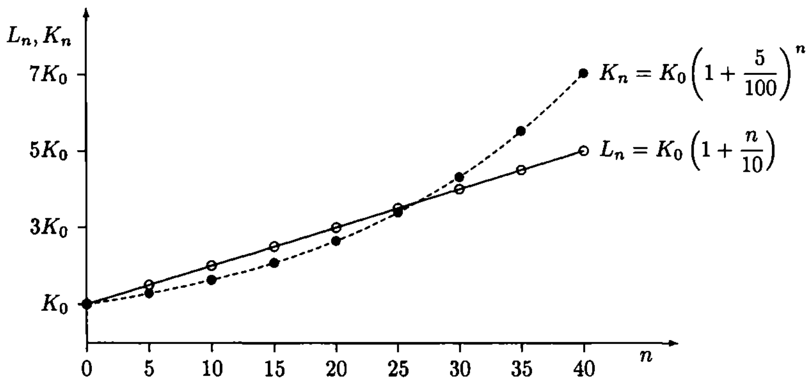


Abb. 1.3: Größenvergleich zwischen linearem und exponentiellem Wachstum durch induktiven Beweis

Beispiel 1.21 Ist der Schluss von n auf $n+1$ korrekt, so folgt aus der Wahrheit von $A(n)$ die Wahrheit von $A(n+1)$. Gibt es aber keine erste Zahl k, für welche $A(k)$ wahr ist, so hat der zweite Teil des induktiven Beweises keinen Sinn. Dies liegt daran, dass das zugrunde liegende Induktionsgesetz 1.6.1 eine solche kleinste Zahl zwingend erfordert.

So kann z. B. für die falsche Aussage $A(n) =$ „$n = n + 1$" der Schluss von n auf $n+1$ problemlos durchgeführt werden, während es keine Anfangszahl k gibt, für welche $A(k)$ eine wahre Aussage ist.

---

[14]Der Wert von $K_0 > 0$ ist hierfür unerheblich, so dass $K_0 = 1$ angenommen werden darf.

1.7 Abbildungen und Funktionen

Durch einen funktionalen Zusammenhang f zwischen zwei Mengen A und B werden gewissen Elementen a der Menge A gewisse Elemente b der Menge B zugeordnet.

Beispiel 1.22 (Einige Abbildungen)

(1) $A = S =$ Menge der im Semester X an der Universität Y Studierenden.

(a) $B_1 =$ Buchbestand der Universitätsbibliothek, Zuordnung: $a \in A$ wird die Menge $f(a)$ der während des Semesters ausgeliehenen Bücher zugeordnet.

(b) $B_2 = \mathbb{N} =$ Menge der natürlichen Zahlen, Zuordnung: $a \in A$ wird die Körperlänge $f(a)$ (in cm) zugeordnet.

(c) $B_3 = \mathbb{N}$, Zuordnung: $a \in A$ wird die Matrikelnummer $f(a)$ zugeordnet.

(2) $A = \mathbb{R}$, $B = [0, \infty)$, Zuordnung: $f(x) = |x|$.

(3) $A = (-\frac{4}{3}, \infty)$, $B = \mathbb{R}$, Zuordnung: $f(x) = \ln(3x + 4)$.

Eine derartige Zuordnung f kann durch Angabe aller Paare (a, b), für die das Element $b \in B$ dem Element $a \in A$ zugeordnet ist, realisiert werden, und sie ist demnach eine Teilmenge des Produkts $A \times B$. Diese Teilmenge kann zum Beispiel beschrieben werden

- durch Angabe einer ***Liste aller Paare*** (a, b) zusammengehöriger Elemente,
- mit Hilfe von ***Pfeilen***, welche die Zuordnung elementweise angeben,
- durch eine ***Formel*** (Rechenvorschrift, Beispiele (2) und (3)).

In der Abbildung 1.4 sind die Lieferbeziehungen zwischen einer Menge $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ von Zulieferern und einer Menge $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ von Produzenten als Abbildung dargestellt, links durch elementweise Zuordnung und rechts durch den Graphen als Teilmenge des Produkts $Z \times P$.

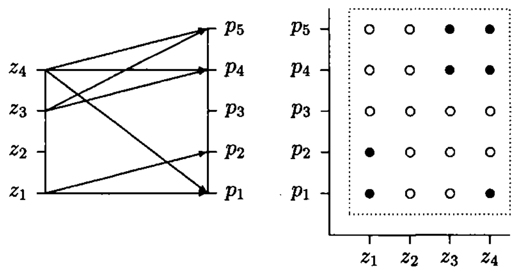


Abb. 1.4: Darstellung einer Abbildung durch elementweise Zuordnung und durch den Graphen

1.7.1 (Abbildung als Teilmenge von $A \times B$, Bezeichnungen)

*Eine **Abbildung f aus einer Menge A in eine Menge B** ist eine Teilmenge des Produkts $A \times B$. Diese Menge heißt auch **Graph von f**. Eine Abbildung f kann als eine **Zuordnung** zwischen (gewissen) Elementen von A und (gewissen) Elementen von B interpretiert werden.*[15]

[15] f heißt auch ***Funktion***, wenn A und B Mengen reeller Zahlen sind.

- *Ist $(a,b) \in f$, so heißt a (ein)* ***Urbild von b**, und b heißt (ein)* ***Bild von a**. Die Menge aller Elemente von A, die ein Bild besitzen, heißt* ***Definitionsbereich*** *oder* ***Urbildbereich*** *der Abbildung f (Symbol: $\mathrm{db}(f)$). Die Menge aller Elemente von B, die ein Urbild besitzen, heißt* ***Wertebereich*** *oder* ***Bildbereich*** *von f (Symbol: $\mathrm{wb}(f)$). Ist der Definitionsbereich die gesamte Menge A, so heißt f eine Abbildung* ***von A in B**. Ist der Wertebereich die gesamte Menge B, so heißt f eine Abbildung* ***aus A auf B**.*

- *Ist die Abbildung f auf der gesamten Menge A definiert und besteht das Bild jedes Elements von A nur aus einem einzigen Element b, so heißt f eine* ***eindeutige Abbildung von A in B**. Übliche Symbole: $\boldsymbol{b = f(a)}$ oder $\boldsymbol{a \mapsto b = f(a)}$ für die elementweise Zuordnung, $\boldsymbol{f : A \to B}$ für die gesamte Abbildung.*

1.7.2 (Umkehrbar eindeutige Abbildung, Umkehrabbildung)

Eine eindeutige Abbildung $f : A \to B$ von A auf die gesamte Menge B heißt ***umkehrbar eindeutig**, wenn jedes Element von B Bild eines eindeutig bestimmten Elements von A ist. Dies bedeutet, dass* ***für jedes Element $b \in B$ die Beziehung $b = f(a)$ eindeutig nach a „aufgelöst" werden kann**.*

Wird für eine solche Abbildung zu gegebenem $b \in B$ das eindeutig bestimmte Urbild mit $f^{-1}(b)$ bezeichnet, so ist hierdurch eine ***eindeutige Abbildung $f^{-1} : B \to A$*** *von B auf A erklärt, die* ***Umkehrabbildung*** *oder auch* ***inverse Abbildung**.*

$$A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$$

Für jedes Element $a \in A$ führt die Anwendung von f^{-1} auf das Bild $f(a)$ zum Ausgangselement a zurück, und entsprechend führt für jedes Element $b \in B$ die Anwendung von f auf $f^{-1}(b)$ zum Ausgangselement b zurück. Es gilt also:

$$\boldsymbol{f^{-1}(f(a)) = a \quad \textit{und} \quad f(f^{-1}(b)) = b \quad \textit{für alle } a \in A,\ b \in B.} \tag{1.12}$$

Zu den Beispielen 1.22:

(1a) $\mathrm{db}(f) \subseteq A$ = Menge aller Studenten, die während des Semesters ein Buch ausleihen; $\mathrm{wb}(f) \subseteq B$ = Menge aller an Studenten ausgeliehenen Bücher.
Die Abbildung f wird im Allgemeinen weder eindeutig noch umkehrbar eindeutig sein.

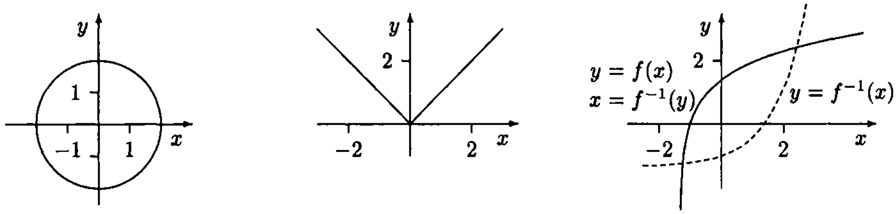
(1b) f ist eine eindeutige Abbildung von A auf die echte Teilmenge $\mathrm{wb}(f)$ der Menge derjenigen natürlichen Zahlen, die aus allen hierbei auftretenden Körperlängen besteht.
$f : A \to \mathrm{wb}(f)$ ist umkehrbar eindeutig, wenn keine Länge mehrfach auftritt.

(1c) f ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von A auf die Menge $\mathrm{wb}(f)$ der tatsächlich auftretenden Matrikelnummern. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathrm{wb}(f) \to A$ ordnet jeder Nummer den zugehörigen Studenten zu.

(2) f ist eine eindeutige Abbildung mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und dem Wertebereich $[0,\infty)$. Wegen $f(x) = f(-x)$ ist f nicht umkehrbar eindeutig. Wird der Definitionsbereich jedoch auf $(-\infty, 0]$ bzw. $[0,\infty)$ eingeschränkt, so entstehen zwei umkehrbar eindeutige Abbildungen auf die Menge $[0,\infty)$: $x \mapsto f_1(x) = -x$ für $x \leq 0$ sowie $x \mapsto f_2(x) = x$ für $x \geq 0$.
Deren Umkehrfunktionen sind durch $f_1^{-1}(y) = -y$ bzw. $f_2^{-1}(y) = y$ für $y \in [0,\infty)$ erklärt.

(3) f ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $(-\frac{4}{3},\infty)$ auf $\mathbb{R}$, da sich die Funktionsgleichung $y = f(x)$ für *jede* reelle Zahl y durch $x = f^{-1}(y) = \dfrac{e^y - 4}{3}$ eindeutig nach x auflösen lässt. Die Umkehrabbildung (Umkehrfunktion) $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{4}{3},\infty)$ ist in der Abbildung 1.5 rechts dargestellt.

Abb. 1.5: Eindeutigkeit und umkehrbare Eindeutigkeit von Abbildungen



Nicht eindeutige Abbildung: $(x, y) \in f \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

Nicht umkehrbar eindeutige Funktion: $y = f(x) = |x|$

Umkehrbar eindeutige Funktion: $y = f(x) = \ln(3x + 4)$ $x = f^{-1}(y) = \dfrac{e^y - 4}{3}$

Beispiel 1.23 (Umkehrfunktion und gespiegelte Umkehrfunktion)
Die Gesamtkosten k [€] für die Herstellung von x [t] eines Produkts seien durch eine lineare Funktion $k = f(x) = ax + b$ gegeben. Der Parameter a bedeutet hierbei den Preis in € pro t, der Parameter b die von x unabhängigen Fixkosten. In der Abbildung 1.6 ist die Kostenfunktion $k = f(x)$ (innere Achsenbezeichnungen) für $a = 2.000$ [€/t] und $b = 1.500$ [€] dargestellt.
Werden die vertikal aufgetragenen Kosten als unabhängige Veränderliche betrachtet, so kann *der gleiche Graph* für das Ablesen der Umkehrfunktion $x = f^{-1}(k)$ verwendet werden. Um k in der üblichen Weise auf der horizontalen Achse ablesen zu können, werden die Koordinatenachsen vertauscht (äußere Achsenbezeichnungen). Dem entspricht geometrisch eine Spiegelung des Koordinatensystems an der (punktierten) Winkelhalbierenden. Der Punkt $P' = (k, x)$ ist dabei der Spiegelpunkt von $P = (x, k)$. Hierbei geht der Graph der Funktion $k = f(x)$ in den Graphen der (gespiegelten) Umkehrfunktion $x = f^{-1}(k)$ über.

Der eingetragene Punkt P und sein Spiegelpunkt P' stellen den Fall $x = 3$ [t] und $k = 7.500$ [€] dar: $f(3) = 7.500$ und $f^{-1}(7.500) = 3$.

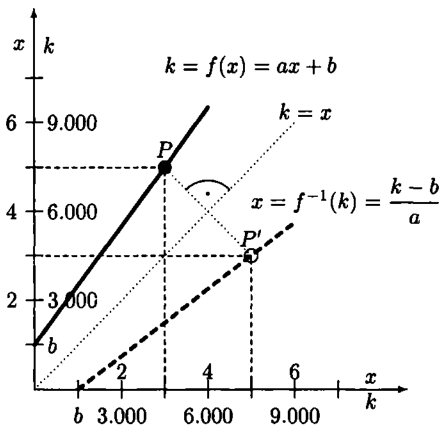


Abb. 1.6: Lineare Kostenfunktion und gespiegelte Umkehrfunktion

1.8 Aufgaben zum Kapitel 1

Aufgabe 1.1 (Umkehrung und Kontraposition)
Suchen Sie logische Zusammenhänge innerhalb der folgenden Gruppen von Aussagen:

(A1) *„Gute Arbeit wird gut bezahlt.“*
(A2) *„Schlechte Arbeit wird schlecht bezahlt.“*
(A3) *„Wer gut bezahlt wird, hat gute Arbeit geleistet.“*
(A4) *„Wer schlecht bezahlt wird, hat schlechte Arbeit geleistet.“*

(B1) *„Wenn der Hahn kräht, ändert sich das Wetter.“*
(B2) *„Wenn der Hahn kräht, ändert sich das Wetter nicht.“*
(B3) *„Wenn der Hahn nicht kräht, ändert sich das Wetter.“*
(B4) *„Wenn der Hahn nicht kräht, ändert sich das Wetter nicht.“*
(B5) *„Wenn sich das Wetter ändert, kräht der Hahn.“*
(B6) *„Wenn sich das Wetter ändert, kräht der Hahn nicht.“*
(B7) *„Wenn sich das Wetter nicht ändert, kräht der Hahn.“*
(B8) *„Wenn sich das Wetter nicht ändert, kräht der Hahn nicht.“*

Aufgabe 1.2 (Tautologien)
Zeigen Sie anhand von Tabellen der Wahrheitswerte, dass die Schlussregeln (1.5) Tautologien sind.

Aufgabe 1.3 (Verneinung)
Was bedeuten die Verneinungen der folgenden Aussagen?

(a) *„Alle Produkte der Marke XY sind von guter Qualität oder sind bei minderer Qualität im Preis reduziert.“*

(b) *„Alle Zimmer des Hotels NN haben Balkon und Blick zum Meer.“*

Aufgabe 1.4 (Indirekter Beweis)
Beweisen Sie folgende Aussage: *Für je zwei natürliche Zahlen n und p ist die Potenz n^p dann und nur dann eine gerade Zahl, wenn n eine gerade Zahl ist.*

Aufgabe 1.5 (Mengenoperationen)
Gegeben seien die Grundmenge $X = (0,3] \subseteq \mathbb{R}$ und deren Teilmengen $A = (0,1)$, $B = (\frac{1}{2},2)$, $C = (\frac{3}{2},3)$ und $D = [1,2]$. Beschreiben Sie die Mengen

$$A\cap(B\cup C),\ A\cup(B\cap C),\ (D\setminus C)\cap A,\ (D\setminus C)\cup A,\ (C\setminus D)\cap B,\ (C\setminus D)\cup B$$

sowie deren Komplementärmengen (bzgl. der Grundmenge X) mit Hilfe von Ungleichungen bzw. Gleichungen; stellen Sie die Mengen als Vereinigungsmengen von Intervallen bzw. Punkten dar.

Aufgabe 1.6 (Ungleichungen)
In den folgenden Beziehungen steht n für eine *natürliche* und x für eine *reelle* Zahl.

Für welche Werte von n bzw. x sind die folgenden Bedingungen (a), (b), (c), (d) erfüllt bzw. **nicht** erfüllt?

(a) $\lg n - 1 \le 0{,}7$ ***und*** $\sqrt[3]{\sqrt[2]{n+1}-1} \ge 1{,}7$ (b) $\dfrac{2n^2-3n-3}{n^2-n+4} \ge 1$

(c) $-1 \le \dfrac{3x+2}{2x-3} \le 2$ (d) $x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1 < 0$ ***und*** $x \ge 0$

Aufgabe 1.7 (Mengenoperationen)
Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengenbeziehungen für beliebige Mengen gelten; führen Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

(a) $(A\setminus B)\cup C = (A\cup C)\setminus B$ $(A\setminus B)\cup C = A\setminus(B\cup C)$
(b) $(A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus B$ $(A\setminus B)\cap C = A\setminus(B\cap C)$
(c) $(A\times B)\cup(C\times D) = (A\cup C)\times(B\cup D)$ $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$

Aufgabe 1.8 (Mengenoperationen, Formeln von *de Morgan*)
Es sollen x Einheiten einer Ware P zum Preis von $p = 2$ € pro Einheit und y Einheiten einer Ware Q zum Preis $q = 3$ € pro Einheit verkauft werden; dabei sind x und y reelle Zahlen mit $0 \leq x \leq 8$ und $0 \leq y \leq 8$. Die Menge aller Verkaufssituationen (x, y) stellt eine Teilmenge M von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ dar. Durch drei weitere Bedingungen sind Teilmengen A_1, A_2 und A_3 von M definiert:

$$A_1: \text{ Der Verkaufserlös beträgt mindestens } 12\,€, \quad A_2: \; 2x + y \leq 16, \quad A_3: \; 2y \leq 8 + x.$$

Bestimmen Sie – durch Ungleichungen und grafisch – folgende Teilmengen von M (die Bildung der Komplementärmenge ist hierbei bezüglich der Grundmenge M zu verstehen):

(a) Es gelten alle drei Bedingungen.

(b) Die dritte Bedingung ist erfüllt, aber mindestens eine der ersten beiden Bedingungen ist verletzt.

(c) Die ersten beiden Bedingungen sind verletzt.

(d) $\overline{A_1 \cap (A_2 \setminus A_3)}$

Aufgabe 1.9 (Induktionsprinzip)

(a) Beweisen Sie *induktiv* die Formeln (6.11) und (6.14) für die Summe einer arithmetischen bzw. geometrischen Folge.

(b) *Logarithmisches Wachstum ist schwächer als lineares Wachstum, lineares Wachstum ist schwächer als exponentielles Wachstum, aber $n!$ wächst stärker als exponentiell.*
So sind für alle hinreichend großen Zahlen n die Ungleichungen $5 \ln n < n$, $50n < 2^n$ und $10^n < n!$ erfüllt.

Untersuchen Sie, für welche natürlichen Zahlen diese Ungleichungen gelten.

Aufgabe 1.10 (Abbildungen)
Bestimmen Sie die Anzahl aller eindeutigen Abbildungen der Menge $\{£, \$, €\}$ in die Menge $\{\oplus, \odot, \bigcirc, \otimes\}$ und geben Sie unter diesen die umkehrbar eindeutigen konkret an.

Aufgabe 1.11 (Umkehrabbildung)
Durch die Zuordnung $(u, v) = f(x, y) = (1 + 2x + 3y, 2 + 3x - 2y)$ ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erklärt, die dem Paar (x, y) ein Paar (u, v) zuordnet.

Zeigen Sie, dass f eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ ist und geben Sie eine Formel für die Umkehrabbildung $(x, y) = f^{-1}(u, v)$ an. Bestimmen Sie hiermit diejenige Menge, die durch die Abbildung f auf die Gerade $v = u$ abgebildet wird.

Aufgabe 1.12 (Monotonie und Umkehrfunktion)
Begründen Sie, dass eine streng monoton steigende bzw. streng monoton fallende Funktion (vgl. (8.11)) eine umkehrbar eindeutige Abbildung ihres Definitionsbereichs auf den Wertebereich ist.
Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 1.13 (Umkehrfunktion)
Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich der nachfolgenden Funktionen an und skizzieren Sie deren Kurvenverlauf.

Untersuchen Sie die Funktionen auf umkehrbare Eindeutigkeit, geben Sie die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ in denjenigen Intervallen an, in denen die Funktion umkehrbar eindeutig ist, und skizzieren Sie den Graphen der gespiegelten Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$.

(1) $y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 1}$ (2) $y = f(x) = 2|x - 1| + 1$ (3) $y = f(x) = 10^{5x^2} - 4$

(4) $y = f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{3x - 2}}$ (5) $y = f(x) = 2 \ln x + \lg x$ (6) $y = f(x) = \ln\left(2 - \dfrac{3}{x}\right)$

Kapitel 2

Grundaufgaben der Kombinatorik

Wie oft kann man die Perlen einer bunten Kette vertauschen, so dass sich stets ein neues Muster ergibt? Wie viele Möglichkeiten der Auswahl von 5 Äpfeln aus 12 Apfelsorten gibt es? Wie viele Möglichkeiten hat man, aus einer großen Gruppe einen Vorstand „auf gut Glück“ auszuwählen? Wie groß sind meine Chancen beim Lotto?

Derartige Fragen, die sich beim Anordnen und Auswählen stellen, werden mit den elementaren Aussagen der Kombinatorik beantwortet. Das mathematische Hilfsmittel bei der Herleitung der entsprechenden Formeln ist das Induktionsprinzip. Die Ideen und Formeln der Kombinatorik finden vielfältige Anwendungen in der Mathematik und Statistik.

2.1 Permutationen (Vertauschungen)

Eine Menge M aus n Elementen kann in einer Reihe angeordnet werden, indem ein Element die Nummer 1, ein weiteres die Nummer 2, ein weiteres die Nummer 3 erhält, usw. Eine solche Anordnung sei jetzt fest ausgewählt: a_1 = erstes Element, a_2 = zweites Element, ...
Eine umkehrbar eindeutige Abbildung von M auf sich führt dann zu einer neuen Anordnung: das neue erste Element ist das Bild von a_1, das neue zweite Element ist das Bild von a_2, usw. Aber auch das Umgekehrte ist richtig: je zwei Anordnungen von M gehen durch eine umkehrbar eindeutige Abbildung von M auseinander hervor, zum Beispiel dadurch, dass je zwei Elemente mit der gleichen Nummer einander zugeordnet werden. Anordnungen einer Menge können daher auch als umkehrbar eindeutige Abbildungen der Menge auf sich interpretiert werden.

2.1.1 (Permutation) *Eine Anordnung einer aus endlich vielen Elementen bestehenden Menge M in irgendeiner Reihenfolge (bzw. eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge M auf sich) heißt* ***Permutation*** *(****Vertauschung****) von M.*

- ***Anzahl der Permutationen:*** *Zu einer aus n Elementen bestehenden Menge gibt es genau*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n \tag{2.1}$$

verschiedene Permutationen.

B e w e i s (mit Hilfe des Induktionsprinzips):
1. Für die Anfangszahl $k = 1$ ist die Aussage des Satzes wahr: Ein einziges Element kann nur auf eine Weise angeordnet werden.

2. Die Aussage des Satzes sei für Mengen mit $n \geq 1$ Elementen wahr. Es ist zu zeigen, dass die Aussage des Satzes dann auch für Mengen mit $n+1$ Elementen gilt.
Es sei also $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ eine Menge mit $n+1$ Elementen. Alle Anordnungen werden jetzt nach der Position des Elements a_{n+1} sortiert. Zunächst werden alle Anordnungen gezählt, bei denen a_{n+1} an der ersten Stelle steht. Hiervon gibt es so viele, wie es Anordnungen der Restmenge $M \setminus \{a_{n+1}\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ aus n Elementen gibt. Dies sind aber wegen der Induktionsannahme genau $n!$ Anordnungen. Entsprechend gibt es jeweils $n!$ Anordnungen von M, bei denen a_{n+1} an zweiter Stelle, an dritter Stelle, ..., an $(n+1)$-ter Stelle steht.
Insgesamt ergibt dies $(n+1) \times n! = (n+1)!$ Anordnungen. □

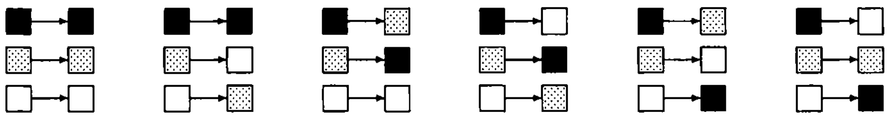


Abb. 2.1: Permutationen einer Menge von drei Elementen als umkehrbar eindeutige Abbildungen und als Anordnungen

2.1.2 (Permutation mit Wiederholung)

Eine Menge M von n Elementen sei vollständig in k ***paarweise elementfremde*** *Teilmengen M_i mit jeweils n_i Elementen ($i = 1, \ldots, k$; $n = n_1 + \ldots + n_k$) eingeteilt:*

$$\begin{aligned} M &= M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k \\ M_i \cap M_j &= \emptyset \text{ für } i \neq j. \end{aligned}$$

Zwischen Anordnungen der Elemente der Menge M, die durch eine Reihe von Vertauschungen ***innerhalb der Teilmengen*** *$M_1, \ldots, M_k$ ineinander überführt werden können, wird jetzt nicht unterschieden. Die verbleibenden - in diesem Sinne voneinander verschiedenen - Anordnungen heißen* ***Permutationen mit Wiederholung*** *(bezüglich der betrachteten Zerlegung der Menge).*

- *Wird für jede der Teilmengen M_i ein Symbol (Platzhalter) s_i gewählt, so ist eine Permutation mit Wiederholung charakterisiert durch eine Folge der Länge n, in denen für $i = 1, \ldots, k$ das Symbol s_i an n_i Stellen auftritt.*

- ***Anzahl der Permutationen mit Wiederholung:***

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}. \tag{2.2}$$

B e w e i s : m bezeichne die gesuchte Anzahl aller Permutationen *mit Wiederholung*, und es sei eine beliebige dieser m Permutationen fest ausgewählt.
Durch ausschließliche Vertauschung der Elemente von M_1 entstehen hieraus $n_1!$ Vertauschungen von M. Aus diesen wiederum erhält man durch anschließendes Vertauschen

der Elemente von M_2 zusammen $n_1!n_2!$ Vertauschungen usw., durch Vertauschen der Elemente von M_k schließlich insgesamt $n_1!n_2!\dots n_k!$ Vertauschungen.
Führt man diesen Prozess für jede der m Permutationen (mit Wiederholung) aus, so erhält man alle Permutationen (ohne Wiederholung) der Elemente von M, und zwar jede genau einmal.
Also ist $n! = \boldsymbol{m} \times n_1!\dots n_k!$, und hieraus folgt die behauptete Formel. □

Beispiel 2.1 (Permutation mit Wiederholung) Die aus 5 Elementen bestehende Menge $M = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$ wird in die beiden elementfremden Teilmengen $M_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ und $M_2 = \{b_1, b_2\}$ zerlegt. Dann gibt es $\frac{5!}{3!2!} = 10$ Permutationen mit Wiederholung, bei denen es auf die Anordnung der Elemente innerhalb von M_1 und innerhalb von M_2 nicht ankommt.
Beispielsweise können die beiden Anordnungen $(a_1, b_2, a_3, a_2, b_1)$ und $(a_3, b_1, a_2, a_1, b_2)$ durch Vertauschung von a_1 mit a_3, anschließend von a_1 mit a_2 und schließlich von b_2 mit b_1 ineinander überführt werden; die Vertauschungen finden nur jeweils innerhalb der Teilmengen M_1 und M_2 statt. Dagegen können die Anordnungen $(a_1, b_2, a_3, a_2, b_1)$ und $(b_1, b_2, a_3, a_2, a_1)$ nur ineinander überführt werden, wenn Elemente von M_1 und M_2 miteinander vertauscht werden.

In der Abbildung 2.2 sind diese 10 Permutationen für den Fall dargestellt, dass M_1 aus gleichartigen weißen und M_2 aus gleichartigen schwarzen Kugeln besteht.

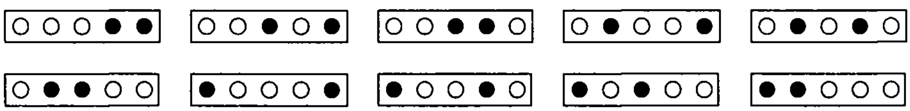


Abb. 2.2: Permutationen mit Wiederholung von 5 Elementen mit $n_1 = 3$ und $n_2 = 2$

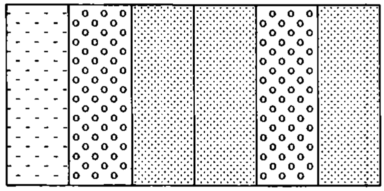
Bemerkung: In einer Menge sind die einzelnen Elemente sämtlich voneinander verschieden, so dass „Wiederholungen" von Elementen ausgeschlossen sind. Bei Permutationen mit Wiederholung treten lediglich Elemente unterschiedlicher Sorten auf, wobei deren unterschiedliche Anordnung innerhalb ein und derselben Sorte nicht registriert wird.

Werden jedoch die Elemente gleicher Sorte M_i nur als verschiedene Exemplare ein und desselben Elements a_i $(i = 1, \dots, k)$ aufgefasst, so kann tatsächlich von Wiederholungen gesprochen werden:

- *Eine Permutation mit Wiederholung der Ordnung $n = n_1 + \ldots + n_k$ ist dann eine Anordnung der k Elemente $a_1, \ldots, a_k$, bei der das Element a_1 an n_1 Stellen, das Element a_2 an n_2 Stellen, …, das Element a_k an n_k Stellen vorkommt.*

Beispiel 2.2

Es sind die unterschiedlichen Muster anzugeben, die aus sechs nebeneinander angeordneten Rechtecken dreier Sorten gebildet werden können, wovon ein Rechteck zur ersten Sorte (Striche), zwei Rechtecke zur zweiten Sorte (Kreise) und drei zur dritten Sorte (Punkte) gehören.



Die 6 Rechtecke bilden die Menge M, das mit Strichen versehene die Teilmenge M_1, die mit Kreisen versehenen die Teilmenge M_2 und die mit Punkten versehenen die Teilmenge M_3. Bei einer Änderung der Anordnung nur zwischen den Rechtecken gleicher Sorte bleibt das Muster unverändert. Also ist die Anzahl aller Permutationen mit Wiederholung zu bestimmen. Diese beträgt $\frac{6!}{1!2!3!} = 60$.

2.2 Variationen (Auswahl mit Anordnung)

Beispiel 2.3 Zur Besetzung einer Position habe eine dafür gebildete Kommission die Aufgabe, aus einem Kreis von fünf Bewerbern drei Kandidaten auszuwählen und eine Rangfolge für diese Kandidaten vorzuschlagen (Dreierliste).

Hierfür gibt es theoretisch 60 verschiedene Möglichkeiten: Stehen die Nummern 1, 2, 3, 4, 5 für die Bewerber, so sind dies zunächst die Listen (1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5), (2,3,4), (2,3,5), (2,4,5) und (3,4,5), wobei die Reihenfolge innerhalb der Listen die Rangfolge angibt. Aus diesen 10 Listen ergeben sich schließlich alle $60 = 3! \times 10$ Listen durch Vertauschung innerhalb der einzelnen Listen.

2.2.1 (Variation der Ordnung k)

Eine angeordnete Auswahl $(a_1, \ldots, a_k)$ von k Elementen aus einer Menge M von $n \geq k$ Elementen heißt ***Variation der Ordnung k aus n Elementen.***

- *Eine solche Auswahl kommt dadurch zustande, dass jedem der Plätze $1, \ldots, k$ genau ein Element der Menge M zugeordnet wird.*
- *Eine Variation der Ordnung k ist folglich eine* ***umkehrbar eindeutige Abbildung*** *der Menge $\{1, \ldots, k\}$ von natürlichen Zahlen auf eine Teilmenge von M aus k Elementen.*
- ***Anzahl der Variationen der Ordnung k:*** *Die Anzahl der Variationen von k Elementen aus einer Menge von n Elementen beträgt*

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1). \tag{2.3}$$

B e w e i s : Es sei M eine Menge mit n Elementen, und m bezeichne die Anzahl *aller* Variationen der Ordnung k von Elementen von M.
Werden an eine fest gewählte Variation $(a_1, \ldots, a_k)$ die verbleibenden $n-k$ Elemente von M nach der k-ten Stelle in irgendeiner Reihenfolge „angehängt", so entsteht daraus eine Permutation $(a_1, \ldots, a_k;\ a_{k+1}, \ldots, a_n)$ der gesamten Menge M. Durch alle möglichen Vertauschungen der hinzugefügten $n-k$ restlichen Elemente entstehen $(n-k)!$ Permutationen von M.
Wird so mit *jeder* der m Variationen verfahren, ergibt dies $(n-k)! \times m$ voneinander verschiedene Permutationen. Da andererseits jede der $n!$ Permutationen von M auf diese Weise gebildet werden kann und bei diesem Verfahren keine mehrfach vorkommt, gilt $n! = (n-k)! \times \boldsymbol{m}$.
Die gesuchte Anzahl stimmt folglich mit der linken Seite der Gleichung (2.3) überein; die rechte Seite ergibt sich aus $n! = n(n-1)\cdots(n-[k-1])\cdot(n-k)!$ □

Beispiel 2.4 Wie groß ist die Chance, bei einem Rennen den Einlauf der ersten drei unter 10 Teilnehmern korrekt vorherzusagen?
Es gibt $\frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ Variationen der Ordnung 3 einer 10-elementigen Menge. Die Chance beträgt daher $1 : 720 \approx 0,14\,\%$.

Variationen *mit Wiederholung* entstehen dadurch, dass ein und dasselbe Element mehrfach in einer Variation aufgeführt werden kann.

2.2.2 (Variation der Ordnung k mit Wiederholung)

Eine angeordnete Aufzählung $(a_1, \ldots, a_k)$ von k Exemplaren der Elemente einer Menge M von n Elementen, wobei jedes Element in mehreren (also bis zu k) Exemplaren aufgeführt werden kann, heißt ***Variation mit Wiederholung der Ordnung k aus n Elementen.***[1]

- *Eine solche angeordnete Aufzählung von k Elementen kommt dadurch zustande, dass den Plätzen $1, \ldots, k$ irgendwelche Elemente der Menge zugewiesen werden, wobei zugelassen ist, dass unterschiedlichen Plätzen das gleiche Element zugewiesen wird.*

- *Eine Variation der Ordnung k mit Wiederholung ist daher eine* ***eindeutige*** *Abbildung der Menge $\{1, \ldots, k\}$ von natürlichen Zahlen auf eine Teilmenge von M, also ein Element der Produktmenge $M \times M \times \ldots \times M = M^k$.*

- ***Anzahl der Variationen der Ordnung k mit Wiederholung:***
Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung von k Elementen aus einer Menge von n Elementen beträgt

$$\boldsymbol{n^k = n \cdot n \cdots n =} \ \textbf{\textit{Anzahl der Elemente von }} \boldsymbol{M^k}. \qquad (2.4)$$

[1]Im Unterschied zu den Variationen ohne Wiederholung darf bei Variationen mit Wiederholung die Zahl k eine beliebige natürliche Zahl sein.

B e w e i s : Die Variationen der Ordnung k entstehen dadurch, dass der erste Platz, der zweite Platz, ..., der k-te Platz unabhängig voneinander von den n Elementen der Menge M besetzt wird. Dies ergibt $n \times n \times \ldots \times n = n^k$ Möglichkeiten. □

Beispiel 2.5 Die Variationen mit Wiederholung der Ordnung 2 der vierelementigen Menge $\{A, B, C, D\}$ sind die $16 = 4^2$ geordneten Paare (A, A), (A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, B), (B, C), (B, D), (C, A), (C, B) (C, C), (C, D), (D, A), (D, B), (D, C) und (D, D).

Beispiel 2.6 Ein System von Schaltern bestehe aus 7 einzelnen Schaltelementen, die unabhängig voneinander jeweils die Schalterstellungen ON und OFF haben können. Wie groß ist die Chance, durch einmaliges Probieren eine festgelegte Einstellung des gesamten Systems zu finden?
Hierzu ist die Anzahl aller Variationen mit Wiederholung der Ordnung 7 aus der Menge $M = \{ON, OFF\}$ zu bestimmen. Diese beträgt $2^7 = 128$ und die Chance damit $1 : 128 \approx 0,78\,\%$.

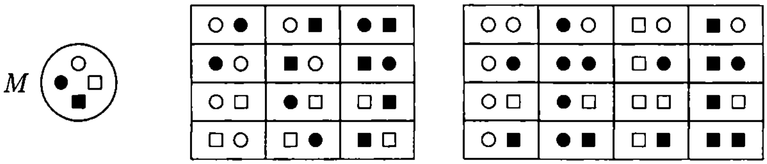


Abb. 2.3: Variationen der Ordnung 2 einer Menge von 4 Elementen (in der Mitte ohne Wiederholung, rechts mit Wiederholung)

2.3 Kombinationen (Auswahl ohne Anordnung)

Bei einer Auswahl von k aus n Elementen ist die Anordnung der Elemente in dieser Auswahl oftmals ohne Belang. So können etwa die k Mitglieder des Vorstands eines Vereins gleichberechtigt sein, und ihre Auswahl bedeutet dann die Bestimmung einer Teilmenge von k Personen aus einem bestimmten Personenkreis.

2.3.1 (Kombination der Ordnung k, Binomialkoeffizient)

Eine (ungeordnete) ***Teilmenge*** *oder auch* ***Auswahl von $k \leq n$ Elementen*** *aus einer Menge von n Elementen heißt* ***Kombination von k aus n Elementen*** *(Kombination der Ordnung k).*[2]

- ***Anzahl der Kombinationen der Ordnung k:*** *Die Anzahl der Kombinationen (Teilmengen) von k Elementen aus einer Menge von n Elementen beträgt*

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-(k-1)}{k}. \tag{2.5}$$

  Sie wird als ***Binomialkoeffizient*** *bezeichnet; dafür wird das Symbol $\binom{n}{k}$, gelesen als „n über k", verwendet.*

[2]Eine Kombination von $k = 0$ Elementen ist die leere Menge.