Mathematik für Volks- und Betriebswirte

Arbeitsbuch für Studienanfänger

Von

Dipl.-Math. Gerd Kallischnigg

Univ.-Prof. Dr. Ulrich Kockelkorn

und

Dr. Achim Dinge

4., unwesentlich veränderte Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Druck: R. Oldenbourg Graphische Betriebe Druckerei GmbH

ISBN 3-486-27424-4

Vorwort zur vierten Auflage

Wir haben uns wiederum bemüht, Fehler aus den Vorauflagen zu verbessern. Im übrigen hat sich das Werk sehr bewährt, so daß wir uns auf eine kritische Durchsicht des ganzen Textes beschränken konnten.

Vorwort zur dritten Auflage

In der dritten Auflage wurde das Arbeitsbuch vollständig überarbeitet und erweitert. Ferner wurde eine bessere Formatierung im Textsatzprogramm LaTeX vorgenommen, so daß das Buch in einer überrsichtlicheren Form mit einer klaren Struktur erscheint und gleichzeitig der Seitenumfang verringert werden konnte.

Wir haben uns bemüht, Fehler aus den vorangegangenen Auflagen zu verbessern und Unklarheiten zu beseitigen. Da aber wahrscheinlich nie alle Fehler zu vermeiden sind, möchten wir darauf hinweisen, daß eine aktuelle Fehlerliste dieser Auflage im Internet unter `http://stat.cs.tu-berlin.de/others.html` abgerufen werden kann.

Wir bedanken uns insbesondere bei unserem ehemaligen wissenschaftlichen Mitarbeiter Herrn Dipl.-Ing. Achim Dinge für die Überarbeitung. Er hat mit großem Engagement für die Fertigstellung gesorgt und ist Co-Autor dieser Auflage. Ebenso möchten wir, stellvertretend für alle anderen Tutoren, Herrn Manfred Noack und Herrn Helge Röpke erwähnen, die einen besonderen Beitrag zu diesem Buch geleistet haben.

Dipl-Math. Gerd Kallischnigg

Prof. Dr. Ulrich Kockelkorn

Vorwort zur ersten und zweiten Auflage

Dieses Buch ist kein eigenständiges Lehrbuch, sondern als ein Arbeitsbuch für Studenten der Wirtschaftswissenschaften gedacht, die verschiedene Anwendungsbereiche der Mathematik exemplarisch im Zusammenhang mit einem mathematischen Grundverständnis erlernen wollen. Es deckt den Stoff für eine zweisemestrige Veranstaltung im Grundstudium ab. Im Unterricht des Grundstudiums an der Technischen Universität Berlin wurden die Arbeitsunterlagen entwickelt und erprobt. Dabei haben sie sich als schriftliche Lernunterstützung außerordentlich bewährt.

Zu jedem Gebiet werden kurz die mathematischen Formeln dargestellt und anschließend in den ökonomischen Anwendungsbezug gebracht und durch Aufgaben (einschl. Lösungen) systematisch vertieft.

Im Anhang ist darüber hinaus das sogenannte Praktikum zur Analysis und Linearen Algebra beigefügt, in dem zu jedem Gebiet nochmals Aufgaben (und Lösungen) bearbeitet werden können. Dieser Teil läßt sich auch in einer zusätzlichen Übungsstunde im Unterricht einsetzen und ist inhaltlich eng mit den beschriebenen Kapiteln verknüpft.

Dieses Arbeitsbuch ist als Lehrunterstützung gedacht und verzichtet weitgehend auf eine mathematische Entwicklung der einzelnen Formeln. Es kann als Grundlage und Leitfaden für die Konzeption und Durchführung einer anwendungsorientierten Lehrveranstaltung eingesetzt werden, die die Verbindung von Mathematik und Ökonomie herstellen will. Es soll aber nicht den Besuch der Lehrveranstaltung ersetzen.

An dieser Stelle möchten wir unseren wissenschaftlichen Mitarbeitern und Tutoren danken, die an der Entwicklung dieses Buches bzw. an der Erstellung und Sammlung von Material mitgearbietet haben. Hier seien insbesondere Dipl.-Ing. R. Brodowski, Dipl.-Math. C. Gerlinger, Dipl.-Ing. T. Heyer-Stuffer, Frau Dipl.-Math. S. Oellrich, Dipl.-Ing. A. Roeck, Dipl.-Ing. C. Wulff, Dipl.-Ing. J. de Veer, Dipl.-Ing. A. Schmidt, cand.-Ing. S. Steinicke, Dipl.-Inf. C. Stielow und unsere Sektretärinnen Frau R. Kummert und Frau M. Thier hervorgehoben.

Dipl.-Math. Gerd Kallischnigg Prof. Dr. Ulrich Kockelkorn

Inhaltsverzeichnis

I Mathematik 1

1 AUSSAGENLOGIK UND MENGENLEHRE **3**

1.1 AUSSAGE . . . 3
1.2 REGELN ZUR AUSSAGENLOGIK . . . 4
1.2.1 Negation . . . 4
1.2.2 Konjunktion . . . 4
1.2.3 Disjunktion . . . 4
1.2.4 Implikation . . . 4
1.2.5 Äquivalenz . . . 5
1.2.6 Gleichwertige Verknüpfungen von Aussagen . . . 6
1.3 BEWEISTECHNIKEN . . . 6
1.3.1 Der direkte Beweis . . . 6
1.3.2 Der indirekte Beweis . . . 7
1.3.3 Vollständige Induktion . . . 8
1.4 ZUSAMMENFASSUNG . . . 11
1.5 MENGENLEHRE . . . 12
1.5.1 Definitionen . . . 12
1.5.2 Beschreibung von Mengen . . . 12
1.5.3 Bezeichnungen . . . 12
1.5.4 Teilmengen . . . 12
1.5.5 Gleichheit von Mengen . . . 13
1.5.6 Anzahl der Elemente . . . 13
1.5.7 Spezielle Mengen . . . 13
1.5.8 Mengenoperationen . . . 14
1.5.9 Rechenregeln . . . 15
1.5.10 Das Veitchdiagramm . . . 16
1.6 AUFGABEN ZUR AUSSAGENLOGIK UND MENGENLEHRE . . . 17
1.6.1 Aufgaben . . . 17
1.6.2 Lösungen . . . 20

2 FOLGEN UND REIHEN **27**

2.1 FOLGEN . . . 27
2.1.1 Definition einer Folge . . . 27
2.1.2 Darstellung von Folgen . . . 27
2.1.3 Spezielle Folgen . . . 28

2.1.4 Eigenschaften von Folgen 29
2.1.5 Häufungspunkte 30
2.1.6 Konvergenz und Grenzwert 30
2.2 REIHEN UND SUMMEN 31
2.2.1 Definitionen 31
2.2.2 Bildungsgesetze für spezielle Reihen 31
2.2.3 Grenzwert einer Reihe 33
2.3 ZUSAMMENFASSUNG 34
2.4 AUFGABEN ZU FOLGEN UND REIHEN 35
2.4.1 Aufgaben 35
2.4.2 Lösungen 35

3 DIFFERENZENGLEICHUNGEN 37

3.1 DIFFERENZENGLEICHUNGEN IN DEN WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN 37
3.2 KLASSIFIKATION 37
3.3 LÖSUNGEN AUSGEWÄHLTER DIFFERENZENGLEICHUNGEN 38
3.3.1 Homogene lineare Differenzengleichung 1. Ordnung 38
3.3.2 Inhomogene lineare Differenzengleichung 1. Ordnung 38
3.3.3 Interpretation der allgemeinen Lösung 39
3.3.4 Sonderfälle der inhomogenen linearen Differenzengleichung 1. Ordnung 39
3.4 DAS COBWEB - MODELL 40
3.4.1 Analytische Herleitung 40
3.4.2 Graphische Herleitung 41
3.5 ZUSAMMENFASSUNG 42
3.6 AUFGABEN ZU DEN DIFFERENZENGLEICHUNGEN 42
3.6.1 Aufgaben 42
3.6.2 Lösungen 45

4 FINANZMATHEMATIK 49

4.1 ZINSRECHNUNG 49
4.1.1 Einführung 49
4.1.2 Fragestellungen bei jährlicher Verzinsung 50
4.1.3 Unterjährige Verzinsung 51
4.1.4 Stetige Verzinsung 51
4.2 RENTENRECHNUNG 52
4.2.1 Nachschüssige und vorschüssige Zahlungen 52
4.2.2 Fragestellungen der Rentenrechnung 52
4.3 TILGUNGSRECHNUNG 53
4.3.1 Rückzahlung in Teilbeträgen 53
4.4 ZUSAMMENFASSUNG 56
4.5 RECHNEN MIT ANLEIHEN 57
4.5.1 Finanzierung durch Schuldverschreibungen 57
4.5.2 Ausstattung einer Anleihe 57
4.5.3 Grundlagen zum Rechnen mit Anleihen 58
4.6 AUFGABEN ZUR FINANZMATHEMATIK 60

4.6.1 Aufgaben 60
4.6.2 Lösungen 63

5 FUNKTIONEN **69**
5.1 BEGRIFFE UND DEFINITIONEN 69
5.1.1 Darstellung von Funktionen 70
5.1.2 Definitionsbereich 70
5.1.3 Implizite und explizite Darstellung der Funktionen 70
5.1.4 Komposition 70
5.2 EIGENSCHAFTEN VON FUNKTIONEN 71
5.2.1 Surjektivität 71
5.2.2 Injektivität 71
5.2.3 Bijektivität 72
5.2.4 Umkehrfunktionen 72
5.2.5 Monotonie 72
5.2.6 Beschränktheit 73
5.2.7 Symmetrie 73
5.2.8 Nullstellen 73
5.2.9 Grenzwert 74
5.2.10 Stetigkeit 75
5.2.11 Polstellen 75
5.2.12 Asymptotisches Verhalten 75

6 DIFFERENTIALRECHNUNG **77**
6.1 DIFFERENZEN- UND DIFFERENTIALQUOTIENT 77
6.2 DIFFERENZIERBARKEIT VON FUNKTIONEN 78
6.3 DIFFERENTIALQUOTIENTEN ELEMENTARER FUNKTIONEN 78
6.4 DIFFERENTIATIONSREGELN 78
6.4.1 Konstanter-Faktor-Regel 78
6.4.2 Summenregel 78
6.4.3 Produktregel 78
6.4.4 Quotientenregel 78
6.4.5 Kettenregel 79
6.5 WICHTIGE SÄTZE DER DIFFERENTIALRECHNUNG 79
6.5.1 Der Satz von Rolle 79
6.5.2 Der Mittelwertsatz 79
6.6 HÖHERE ABLEITUNGEN 80
6.7 ANWENDUNGEN DER DIFFERENTIALRECHNUNG 80
6.7.1 Extremwerte 80
6.7.2 Wendepunkte 81
6.7.3 Regel von de l'Hospital 81
6.7.4 Das Newton-Verfahren 81
6.8 AUFGABEN ZU FUNKTIONEN UND DIFFERENTIALRECHNUNG 82
6.8.1 Aufgaben 82
6.8.2 Lösungen 83

7 WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHE FUNKTIONEN 87
7.1 ANGEBOTS- UND NACHFRAGEFUNKTION 87
7.2 PRODUKTIONS- (ERTRAGS-) FUNKTION 88
7.2.1 Durchschnittsertragsfunktion 88
7.2.2 Grenzertragsfunktion 89
7.3 KOSTENFUNKTION 89
7.3.1 Durchschnittskostenfunktion 89
7.3.2 Grenzkostenfunktion 90
7.4 UMSATZFUNKTION 90
7.5 GEWINNFUNKTION 90
7.6 GRAPHIKEN 91
7.7 AUFGABEN ZU DEN WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHEN FUNKTIONEN 92
7.7.1 Aufgaben 92
7.7.2 Lösungen 94

8 ELASTIZITÄTEN 99
8.1 DURCHSCHNITTSELASTIZITÄT 99
8.2 ELASTIZITÄT (PUNKTELASTIZITÄT) 99
8.3 EIGENSCHAFTEN 100
8.3.1 Allgemeine Eigenschaften 100
8.3.2 Elastizität linearer Funktionen 100
8.3.3 Funktionen mit konstanter Elastizität 101
8.4 ANWENDUNGSBEISPIELE 101
8.4.1 Preiselastizität 101
8.4.2 Zinselastizität 101
8.5 AUFGABEN ZU DEN ELASTIZITÄTEN 102
8.5.1 Aufgaben 102
8.5.2 Lösungen 104

9 FUNKTIONEN MIT MEHREREN VERÄNDERLICHEN 107
9.1 MATHEMATISCHE DEFINITION 107
9.2 DARSTELLUNGSMÖGLICHKEITEN 108
9.2.1 Lineare Funktionen 108
9.2.2 Nichtlineare Funktionen 108
9.2.3 Isolinien 108
9.2.4 Homogenität und Skalenerträge 108
9.3 ABLEITUNGEN 109
9.3.1 Partielle Ableitung 1. Ordnung 109
9.3.2 Partielle Ableitungen 2. Ordnung 109
9.4 EXTREMWERTE 110
9.5 EXTREMWERTBESTIMMUNG UNTER NEBENBEDINGUNGEN 111
9.5.1 Substitutionsmethode 111
9.5.2 Lagrangemethode 112
9.6 DIE LINEARE EINFACHREGRESSION 113
9.6.1 Problemstellung 113
9.6.2 Mathematische Lösung des Problems 114

9.7 ZUSAMMENFASSUNG 115
9.8 GRAPHIKEN 116
9.9 AUFGABEN ZU DEN FUNKTIONEN MIT MEHREREN VERÄNDERLICHEN 116
9.9.1 Aufgaben 116
9.9.2 Lösungen 119

10 INTEGRALRECHNUNG **127**
10.1 DAS UNBESTIMMTE INTEGRAL 127
10.2 INTEGRATIONSREGELN 127
10.2.1 Grundintegrale 127
10.2.2 Konstanter-Faktor-Regel 128
10.2.3 Summenregel 128
10.2.4 Partielle Integration 128
10.2.5 Integration durch Substitution 128
10.2.6 Integration mittels Partialbruchzerlegung 129
10.3 HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG 130
10.4 DAS BESTIMMTE INTEGRAL 130
10.5 AUFGABEN ZUR INTEGRALRECHNUNG 130
10.5.1 Aufgaben 130
10.5.2 Lösungen 132

11 DIFFERENTIALGLEICHUNGEN **137**
11.1 DEFINITION UND KLASSIFIKATION VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 138
11.2 LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG 138
11.2.1 Die homogene lineare DGL 1. Ordnung 138
11.2.2 Die inhomogene DGL 1. Ordnung 139
11.3 EIN DYNAMISCHES MARKTPREIS-MODELL 139
11.4 AUFGABEN ZU DEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 141
11.4.1 Aufgaben 141
11.4.2 Lösungen 142

12 VEKTOREN **145**
12.1 GRUNDBEGRIFFE UND DEFINITIONEN 145
12.1.1 Schreibweisen 145
12.2 VERGLEICH VON VEKTOREN 146
12.3 VEKTOROPERATIONEN 146
12.3.1 Vektoraddition (innere Verknüpfung) 146
12.3.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (äußere Verknüpfung) 146
12.3.3 Nullvektor 147
12.4 GEOMETRISCHE DARSTELLUNG VON VEKTOREN 147
12.5 DER VEKTORRAUM 148
12.6 EIGENSCHAFTEN VON VEKTOREN 148
12.6.1 Linearkombinationen 148
12.6.2 Lineare Ab- und Unabhängigkeit 149
12.6.3 Norm eines Vektors 150

12.7 BASIS UND EINHEITSVEKTOREN 150
12.8 SKALARPRODUKT 151

13 MATRIZEN 153
13.1 Schreibweisen 153
13.2 VERGLEICH ZWEIER MATRIZEN 154
13.3 SPEZIELLE MATRIZEN 154
13.4 MATRIZENOPERATIONEN 155
13.4.1 Addition 155
13.4.2 Multiplikation mit einem Skalar 155
13.4.3 Multiplikation von Matrizen 156
13.5 AUFGABEN UND LÖSUNGEN ZU DEN VEKTOREN UND MATRIZEN 157
13.5.1 Aufgaben 157
13.5.2 Lösungen 161

14 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME 169
14.1 BEGRIFFE UND DEFINITIONEN 169
14.2 ELEMENTARE ZEILENOPERATIONEN 170
14.3 LÖSBARKEIT LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME 170
14.3.1 Bestimmung des Ranges einer Matrix 170
14.3.2 Rang als Kriterium der Lösbarkeit 170
14.4 LÖSEN VON LGS MIT DEM GAUß-ALGORITHMUS 171
14.4.1 Teilweise Elimination 171
14.4.2 Vollständige Elimination 172
14.4.3 Pivotieren 173
14.5 ZUSAMMENFASSUNG 174
14.6 INVERSIONSVERFAHREN ZUR LÖSUNG VON LGS 175
14.7 AUFGABEN ZU DEN LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMEN . . 175
14.7.1 Aufgaben 175
14.7.2 Lösungen 178

15 DETERMINANTEN 185
15.1 BERECHNUNG VON DETERMINANTEN 186
15.2 REGEL VON SARRUS 186
15.3 EIGENSCHAFTEN UND RECHENREGELN 186
15.3.1 Transponieren 186
15.3.2 Spalten vertauschen 186
15.3.3 Nullspalten 186
15.3.4 Übereinstimmen/Vielfaches von Spalten 187
15.3.5 Multiplikation einer Spalte mit einem Faktor c 187
15.3.6 Addition des c-fachen einer Spalte zu einer anderen 187
15.3.7 Produktsatz für Determinanten 187
15.4 BERECHNUNG VON DETERMINANTEN HÖHERER ORDNUNG 187
15.4.1 Entwicklungsatz von Laplace 188
15.4.2 Spezialfall: Determinante einer Dreiecksmatrix 188
15.5 CRAMERSCHE REGEL 188
15.6 BESTIMMUNG DER INVERSEN 189

15.7 AUFGABEN ZU DEN DETERMINANTEN . . . 190
15.7.1 Aufgaben . . . 190
15.7.2 Lösungen . . . 190

16 INPUT-OUTPUT-ANALYSE 193
16.1 INPUT-OUTPUT-TABELLE . . . 193
16.1.1 Elemente der Input-Output-Tabelle . . . 194
16.1.2 Bereiche der Input-Output-Tabelle . . . 194
16.1.3 Ziele der Input-Output-Darstellung . . . 196
16.2 INPUT-OUTPUT-ANALYSE (LEONTIEF-MODELL) . . . 196
16.2.1 Relative Kennzahlen . . . 196
16.2.2 Mathematische Formulierung des Leontief-Modells . . . 197
16.3 FRAGESTELLUNGEN DER INPUT-OUTPUT-ANALYSE . . . 197
16.4 KRITIKPUNKTE DES INPUT-OUTPUT-MODELLS . . . 198
16.5 ZUSAMMENFASSUNG . . . 199
16.6 GRENZEN DES INPUT-OUTPUT-MODELLS . . . 200
16.7 AUFGABEN ZUR INPUT-OUTPUT-ANALYSE . . . 200
16.7.1 Aufgaben . . . 200
16.7.2 Lösungen . . . 203

17 INNERBETRIEBLICHE LEISTUNGSVERRECHNUNG 209
17.1 GRUNDLAGEN IN ANLEHNUNG AN DIE KOSTENRECHNUNG 209
17.1.1 Zuordnung der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung (ibL) 210
17.1.2 Begriffe und Definitionen . . . 210
17.2 PROBLEMSTELLUNG UND NOTWENDIGKEIT DER IBL . . . 211
17.3 VERFAHREN DER IBL . . . 212
17.4 GESAMTKOSTEN EINER VORKOSTENSTELLE UND KONSOLIDIERUNG . . . 212
17.5 AUFGABEN ZUR INNERBETRIEBLICHEN LEISTUNGSVERRECHNUNG . . . 213
17.5.1 Aufgaben . . . 213
17.5.2 Lösungen . . . 217

18 MARKOVKETTEN 223
18.1 EINFÜHRUNGSBEISPIEL . . . 223
18.2 BEGRIFFE UND DEFINITIONEN . . . 224
18.3 BERECHNUNG DER FOLGEPERIODEN . . . 225
18.4 STATIONÄRER ZUSTAND . . . 226
18.5 ABGRENZUNG DER GRENZVERTEILUNG VON DER STATIONÄREN VERTEILUNG . . . 227
18.6 AUFGABEN ZU DEN MARKOVKETTEN . . . 228
18.6.1 Aufgaben . . . 228
18.6.2 Lösungen . . . 230

19 TEILEBEDARFSRECHNUNG **233**
19.1 STRENGE SYSTEMHIERARCHIE 234
19.2 GELOCKERTE SYSTEMHIERARCHIE 235
19.3 KEINE HIERARCHIE 236
19.4 BERÜCKSICHTIGUNG VON ZWISCHENLAGERN 237
19.5 AUFGABEN ZUR TEILEBEDARFSRECHNUNG 238
19.5.1 Aufgaben 238
19.5.2 Lösungen 240

20 LINEARE PROGRAMMIERUNG **243**
20.1 DEFINITION UND EIGENSCHAFTEN DES ALLGEMEINEN LP-PROBLEMS 243
20.2 GRAPHISCHE LÖSUNG 244
20.3 LÖSUNG MIT DEM SIMPLEX-ALGORITHMUS 246
20.3.1 Die Standardform 246
20.3.2 Ablauf des Simplex-Algorithmus 246
20.4 SONDERFÄLLE VON LP-PROBLEMEN 249
20.4.1 Degeneration 249
20.4.2 Unbeschränkte Lösung 249
20.4.3 Mehrere optimale Lösungen 250
20.4.4 Keine zulässige Lösung 250
20.5 ERWEITERUNG DES SIMPLEX-ALGORITHMUS 251
20.5.1 $\geq$ Beschränkungen 251
20.5.2 $=$ Beschränkungen 252
20.6 LÖSUNGSVERFAHREN FÜR MINIMIERUNGSPROBLEME . . . 253
20.7 AUFGABEN ZUR LINEAREN PROGRAMMIERUNG 253
20.7.1 Aufgaben 253
20.7.2 Lösungen 255

21 DAS DUALITÄTSPRINZIP **261**
21.1 INTERPRETATION DER DUALVARIABLEN 261
21.1.1 Dualvariablen als Schattenpreise 262
21.1.2 Dualvariablen als Mietpreise 262
21.1.3 Problemstellung 262
21.1.4 Mathematische Formulierung 263
21.2 VERALLGEMEINERUNG DES DUALITÄTSPRINZIPS 264
21.3 SONDERFÄLLE 264
21.4 AUFGABEN ZUM DUALITÄTSPRINZIP 264
21.4.1 Aufgaben 264
21.4.2 Lösungen 266

II Praktika **269**

22 AUFGABEN ZU MATHE 1 **271**
22.1 Praktikum 1: Aussagenlogik und Beweistechnik 271
22.2 Praktikum 2: Mengenlehre 272
22.3 Praktikum 3: Folgen und Reihen 274

22.4 Praktikum 4: Differenzengleichungen 276
22.5 Praktikum 5: Finanzmathematik 278
22.6 Praktikum 6: Funktionen 279
22.7 Praktikum 7: WiWi-Funktionen 281
22.8 Praktikum 8: Elastizitäten 284
22.9 Praktikum 9: Funktionen mit mehreren Veränderlichen 285
22.10 Praktikum 10: Wiederholung 287
22.11 Lösungen 288

23 Aufgaben zu Mathe 2 **319**
23.1 Praktikum 1: Integralrechnung 319
23.2 Praktikum 2: Differentialgleichungen 320
23.3 Praktikum 3: Matrizenrechnung 321
23.4 Praktikum 4: Lineare Gleichungssysteme / Matrizenrechnung 322
23.5 Praktikum 5: Lineare Unabhängigkeit / LGS / Rang 326
23.6 Praktikum 6: Inverse Matrix / Determinante / Rang 328
23.7 Praktikum 7: Ökonomische Anwendungen (LGS) I 330
23.8 Praktikum 8: Ökonomische Anwendungen (LGS) II 333
23.9 Praktikum 9: Ökonomische Anwendungen (LGS) III / LP I 334
23.10 Praktikum 10: Lineare Programmierung II 336
23.11 Praktikum 11: Lineare Programmierung III 338
23.12 Praktikum 12: Wiederholung 340
23.13 Lösungen 342

LITERATURVERZEICHNIS **379**

INDEX **381**

Teil I

Mathematik

Kapitel 1

AUSSAGENLOGIK UND MENGENLEHRE

1.1 AUSSAGE

Während die mathematische Logik über Jahrhunderte Domäne eines kleinen Kreises von Theoretikern war, wird sie nun einem immer breiteren Publikum zugänglich. Insbesondere die Informatik hat einen Entwicklungsstand erreicht, der zur Beschreibung von Sprach- und Datenstrukturen heute auf logische Kalküle nicht mehr verzichten kann. Die Syntax und Semantik von Programmiersprachen und Informationssystemen benötigen die Elemente der Aussagen- und Prädikatenlogik. Die formallogische Denkweise wird somit auch in andere wissenschaftliche Gebiete getragen, hauptsächlich in die Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften.

Definition einer Aussage: In der Mathematik ist eine Aussage ein sinnvoller Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Man nennt „wahr" bzw. „falsch" den Wahrheitswert einer Aussage. Zu den sprachlichen Gebilden, die keine Aussagen sind, gehören unter anderem:

- Bitten, Aufforderungen oder Anweisungen („Bitte beantworten Sie das Schreiben.")
- individuelle Meinungsäußerungen („Ich finde, Mathe ist anstrengend.")
- in sich widersprüchliche Sätze („Ich lüge immer.").

Beispiele für Aussagen (mit den dazugehörigen Wahrheitswerten):

Aussage	Wahrheitswert
$3 + 5 = 8$	w
3 ist Teiler von 7	f
Die Elbe fließt durch Hamburg.	w

Durch sprachliche Verbindungen lassen sich neue Aussagen gewinnen.

1.2 REGELN ZUR AUSSAGENLOGIK

(VERKNÜPFUNGEN, VERBINDUNGEN)

1.2.1 Negation

($\neg \equiv$ „nicht"): Die Negation ist eine einstellige Operation. Sie ordnet jeder Aussage den entgegengesetzten Wahrheitswert zu. Wahrheitstafel:

A	¬A
w	f
f	w

1.2.2 Konjunktion

($\wedge \equiv$ „und"; umgangssprachlich: sowohl..., als auch...): Die Konjunktion ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Wahrheitstafel:

A	B	A∧B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

1.2.3 Disjunktion

($\vee \equiv$ „oder"): Die Disjunktion ist nur dann falsch, wenn beide Teilaussagen falsch sind. Wahrheitstafel:

A	B	A∨B
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

1.2.4 Implikation

($\Rightarrow \equiv$ „wenn..., dann..."): A ist hinreichende Bedingung für B, während B notwendige Bedingung für A ist, d.h. B folgt notwendigerweise aus A. Wahrheitstafel:

A	B	A⇒B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Um sich die bestimmt nicht sofort einleuchtende Verknüpfung Implikation klar zu machen, betrachte man die folgenden Beispiele:

1. Aussage A: „Es regnet" und Aussage B: „Die Straße ist naß". Wenn es regnet, ist die Straße sicherlich naß. Wenn es nicht regnet, so ist sie trocken. In diesen Fällen ist der Wahrheitswert „wahr" einleuchtend. Die Straße kann auch naß sein, wenn es nicht regnet, z.B. durch ein Straßenreinigungsfahrzeug oder bei einem Rohrbruch, deshalb erscheint auch hier der Wahrheitswert „wahr". Der Fall, daß es regnet und die Straße nicht naß ist, ist dagegen unmöglich und erhält den Wahrheitswert „falsch".

2. Aussage A: „Der Student ist fleißig" und Aussage B: „Der Student besteht die Klausur". Die Frage, wann das Ergebnis der Klausur gerechtfertigt ist, erleichtert die Bestimmung der Wahrheitswerte.

3. Beispiele für die 3. und 4. Zeile der Wahrheitstafel: „Aus etwas Falschem kann durchaus etwas Richtiges folgen"

   (a) $$\begin{array}{rr} & A\colon 1 = 2 \\ \text{bzw.} & 2 = 1 \quad + \\ \hline \Rightarrow & B\colon 3 = 3 \end{array}$$

   (b) $$\begin{array}{rl} & A\colon 1 = 2 \quad |+1 \\ \Rightarrow & B\colon 2 = 3 \end{array}$$

Die Aussage A heißt Voraussetzung (Prämisse), die Aussage B heißt Schlußfolgerung (Konklusion). Grundsätzlich ist darauf hinzuweisen, daß zwischen den Aussagen A und B kein sinnvoller Zusammenhang bestehen muß, wie er vom Sprachgebrauch her üblich ist. Ebenso muß kein kausaler Zusammenhang bestehen. Man hüte sich also davor, die „wenn - dann" Formulierung in jedem Fall mit einer Beziehung zwischen Ursache und Wirkung zu sehen.

1.2.5 Äquivalenz

($\Leftrightarrow \equiv$ „genau dann, wenn..."): Die Äquivalenz ist genau dann wahr, wenn entweder A und B beide wahr oder beide falsch sind. Die Aussage „A$\Leftrightarrow$B" (gesprochen: „A ist äquivalent zu B") besteht aus zwei Teilen:

1. A$\Rightarrow$B „aus A folgt B" und

2. B$\Rightarrow$A „aus B folgt A"

Es gilt also: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$. Wir betrachten diesen Sachverhalt anhand der Wahrheitstafel:

A	B	A$\Leftrightarrow$B	A$\Rightarrow$B	B$\Rightarrow$A	(A$\Rightarrow$B)$\wedge$(B$\Rightarrow$A)
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w

Jede der beiden Aussagen ist notwendig und hinreichend für die jeweils andere. Von besonderer Bedeutung sind Aussageformen, welche bei jeder Belegung der vorkommenden Variablen den Wahrheitswert „wahr" annehmen.

Wir definieren:

Eine aussagenlogische Aussageform heißt allgemeingültig (logisch wahr, tautologisch), wenn sie bei jeder Belegung aller Wahrheitswerte stets in eine wahre Aussage übergeht. Jede solche Aussageform heißt ein logisches Gesetz (bzw. eine Tautologie).

1.2.6 Gleichwertige Verknüpfungen von Aussagen

a)	$\neg(\neg A)$	$\Leftrightarrow$	A	doppelte Negation
b)	$A \wedge A$	$\Leftrightarrow$	A	Idempotenzgesetz
	$A \vee A$	$\Leftrightarrow$	A	
c)	$A \wedge B$	$\Leftrightarrow$	$B \wedge A$	Kommutativgesetz
	$A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$B \vee A$	
d)	$(A \wedge B) \wedge C$	$\Leftrightarrow$	$A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativgesetz
	$(A \vee B) \vee C$	$\Leftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$	
e)	$A \vee (B \wedge C)$	$\Leftrightarrow$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivgesetz
	$A \wedge (B \vee C)$	$\Leftrightarrow$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
f)	$\neg(A \wedge B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg A \vee \neg B$	Regeln von de Morgan
	$\neg(A \vee B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg A \wedge \neg B$	
g)	$(A \Rightarrow B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg B \Rightarrow \neg A)$	
h)	$(A \Rightarrow B)$	$\Leftrightarrow$	$((A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C))$	

Anmerkung: Die Äquivalenzen unter g) und h) stellen die Grundlage für den indirekten Beweis dar.

1.3 BEWEISTECHNIKEN

Mit Hilfe der Aussagenlogik haben wir mehrere mögliche Beweistechniken kennengelernt:

- direkter Beweis: Man zeigt die Aussage direkt, d.h. ohne sie erst in einen äquivalenten Ausdruck umzuformen ($A \Rightarrow B$).
- indirekter Beweis: Man zeigt die Negation der ursprünglichen Voraussetzung mit Hilfe der Negation der Behauptung ($\neg B \Rightarrow \neg A$), oder man nimmt an, die zu zeigende Aussage sei falsch und führt diese Annahme zu einem Widerspruch zur gegebenen Voraussetzung $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$(Widerspruchsannahme).

Als weitere Beweistechnik behandeln wir die

- vollständige Induktion: Man beweist die Gültigkeit von Aussagen für $\mathbb{N}$.

1.3.1 Der direkte Beweis

Der direkte Beweis wird geführt, indem man mit Hilfe der Voraussetzung und bereits bewiesenen Sätzen oder Axiomen durch eine Kette richtiger Schlüsse die Wahrheit der Behauptung nachweist. Beispiel:

Satz: Das Produkt aus zwei ungeraden Zahlen a und b ist eine ungerade Zahl, $a, b \in \mathbb{N}$.

Voraussetzung: Die Zahlen a und b sind ungerade. Wir stellen die Zahlen a und b zunächst geeignet dar.
$a = 2n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$b = 2m + 1$ mit $m \in \mathbb{N}_0$

Behauptung: Das Produkt von a und b ist ungerade. Wir müssen daher zeigen, daß sich das Produkt $(a \cdot b)$ in der Form: $a \cdot b = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ darstellen läßt.

Beweis:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (2n+1) \cdot (2m+1) \\ &= 4nm + 2n + 2m + 1 \\ &= 2(2nm + n + m) + 1 \\ &= 2k + 1 \qquad \text{mit } k = 2nm + n + m \quad \Rightarrow \quad k \in N_0 \end{aligned}$$

Da wir für das Produkt $a \cdot b$ die Darstellung $a \cdot b = 2k + 1$ nachweisen konnten, ist der Satz damit bewiesen (weitere Beispiele siehe Praktikum).

1.3.2 Der indirekte Beweis

Die indirekte Beweisführung besteht darin, daß wir annehmen, die Negation der Aussage sei wahr und diese Annahme zu einem Widerspruch führen. Wenn aber die Negation der Aussage zu einem Widerspruch führt, dann muß nach dem Grundsatz: „Eine Aussage und ihre Negation können nicht beide falsch sein, eine von beiden muß wahr sein", die Aussage wahr sein, da es eine dritte Möglichkeit nicht gibt. Beispiele:

1. Beispiel:
Aussage: p^2 ist gerade $\Rightarrow p$ ist gerade, $p \in \mathbb{N}$

Indirekter Beweis: p ist ungerade $\Rightarrow p = 2n + 1 \quad n \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow p^2 = 4n^2 + 4n + 1$ (gerade + gerade + 1 = ungerade)
$\Rightarrow p^2$ ist ungerade

2. Beispiel:
Aussage (Satz): $\sqrt{2}$ ist nicht als Bruch darstellbar.
Wir machen nun die Annahme, daß die Negation der Aussage wahr ist, sich also $\sqrt{2}$ doch als Bruch darstellen läßt.

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$.

Wir setzen dabei voraus, daß der Bruch $\frac{p}{q}$ in der Grundform (d.h., Zähler und Nenner sind teilerfremd) vorliegt. Durch eine Kette von Schlüssen wird diese Annahme zu einem Widerspruch geführt. Es wird gezeigt, daß Zähler und Nenner doch einen gemeinsamen Teiler haben:

Aus $\sqrt{2} = \quad pq$ folgt durch Quadrieren: $2 = \frac{p^2}{q^2}$ bzw. $2q^2 = p^2$. Da sich p^2 als $2q^2$ schreiben läßt, muß wegen des Faktors 2 die Zahl p^2 eine gerade Zahl sein. Wenn aber p^2 gerade ist, dann muß auch p eine gerade Zahl sein (vgl. dazu Beispiel 1).

Wir stellen p als gerade Zahl dar ($p = 2p_* \quad$ mit $p_* \in \mathbb{N}$) und setzen dieses in die obige Gleichung ($2q^2 = p^2$) ein: $2q^2 = (2p_*)^2$ bzw. $2q^2 = 4p_*^2$ und dividieren durch 2: $q^2 = 2p_*^2$.

Nun schließen wir wieder wie vorher: q^2 ist durch den Faktor 2 eine gerade Zahl. Wenn q^2 eine gerade Zahl ist, dann muß auch q eine gerade Zahl sein und wir können schreiben: $q = 2q_*$.

Wegen $p = 2p_*$ und $q = 2q_*$ liegt ein Widerspruch vor zu der Annahme, daß die Zahlen p und q keinen gemeinsamen Teiler haben (sie lassen sich mindestens einmal durch 2 teilen, da beides gerade Zahlen sind).

Ergebnis: Da die Annahme, daß die Negation des Satzes wahr sei, zu einem Widerspruch führt, muß der Satz selbst wahr sein. Es wurde damit bewiesen, daß $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellbar ist und somit keine rationale Zahl sein kann.

1.3.3 Vollständige Induktion

Die Beweisführung der vollständigen Induktion ist durch folgende Sachverhalte gekennzeichnet:
Wenn eine Aussage A

- von einer natürlichen Zahl n abhängt,
- diese Aussage für n_0 (meistens 1) richtig ist und
- aus der Annahme, sie sei für ein festes $n \geq n_0$ richtig, ihre Richtigkeit auch für $n+1$ bewiesen werden kann,

so ist diese Aussage A für alle natürlichen Zahlen n richtig.
Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion gliedert sich in die vier Schritte:

(a) Induktionsanfang (IA)
(b) Induktionsvoraussetzung (IV)
(c) Induktionsbehauptung (IB)
(d) Induktionsschluß (IS), eigentlicher Beweis

Beispiele:

1. Beispiel

$$A(n) := \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

(a) Induktionsanfang (IA): Es wird gezeigt, daß die Aussage für $n = 1$ gilt.

$$A(1) = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

(b) Induktionsvoraussetzung (IV): $A(n)$ ist richtig für ein festes $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{für ein bestimmtes } n \in \mathbb{N}$$

(c) Induktionsbehauptung (IB): Es wird behauptet, daß die Aussage nicht nur für n gilt, sondern auch für $n+1$. Wird diese Behauptung im Induktionsschluß bewiesen, heißt dieses, daß ausgehend vom Induktionsanfang die Aussage auch für $n = 2$ gilt. Wenn sie für $n = 2$ gilt, muß sie aber auch für $n = 3$ gelten, usw. Anschaulich kann man sich dieses Vorgehen mit einer Reihe von Dominosteinen vorstellen. Wenn man allgemein zeigen kann, daß die Aussage auch für $n + 1$ gilt, bedeutet dies für die Dominosteine, daß durch das Anstoßen eines Steines auch der Nächste umfällt. Damit fallen dann auch alle anderen Dominosteine um.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(d) Induktionsschluß: $A(n) \rightarrow A(n+1)$
Der Induktionsschluß stellt den Beweis der Induktionsbehauptung dar. Das Vorgehen bei Summen kann folgendermaßen schematisiert werden:
Die Summe der Induktionsbehauptung wird in die Summe bis n und den letzten Summanden geteilt. Dann wird für die Summe bis n die Induktionsvoraussetzung, die in diesem Beispiel ja schon für $n = 1$ bewiesen wurde, eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i \quad + (n+1) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$A(n) := (1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{für } x \geq -1,\ n \in \mathbb{N}$$

(a) Induktionsanfang (IA) für $n = 1$:

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1x = 1 + x$$

(b) Induktionsvoraussetzung (IV):

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{für ein } n \in \mathbb{N}$$

(c) Induktionsbehauptung (IB):

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

(d) Induktionsschluß (IS): Es läßt sich für die Induktion bei Potenzen (und Produkten) ebenso ein Schema zur Lösung angeben: Auseinanderziehen der Potenz (des Produktes) und Einsetzen der Induktionsvoraussetzung (Schema!).

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) && \text{Auseinanderziehen} \\
&\overset{IV}{\geq} (1+nx) \cdot (1+x) && \text{Einsetzen} \\
&= 1+x+nx+nx^2 && \text{Ausmultiplizieren} \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 && \text{Ausklammern und Zusammenfassen} \\
&\geq 1+(n+1)x && \text{Abschätzen, q.e.d.}
\end{aligned}$$

1.4 ZUSAMMENFASSUNG

WAHRHEITSWERTE
Wahr (w), Falsch (f)

haben

AUSSAGEN

stehen für

nehmen an

AUSSAGENVARIABLEN
A, B, C, ...

enthalten

AUSSAGEN - VERKNÜPFUNGEN

(1) Negation $\neg$ "nicht"
(2) Konjunktion $\wedge$ "und"
(3) Disjunktion $\vee$ "oder"
(4) Implikation $\Rightarrow$ "wenn ..., dann ..."
(5) Äquivalenz $\Leftrightarrow$ "...genau dann, wenn..."

enthalten

AUSSAGEFORMEN
$A \Rightarrow (\neg B \wedge C)$

stets falsch | erfüllbar | stets wahr

festgelegt

heißen

WAHRHEITSTAFELN

A	B	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

LOGISCHE GESETZE (Regeln, Tautologien)

Negationen

$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

Umwandlungen

$(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B)$
$(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow B)$
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

beruhen auf

beruhen auf

BEWEISVERFAHREN

direkter Beweis

A ist als Voraussetzung wahr.
B soll bewiesen werden

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ A \Rightarrow B \end{array}}{B} \quad \text{(wahre Implikation)}$$

indirekter Beweis

A ist als Voraussetzung wahr, ,
B soll bewiesen werden, Annahme:

$$\frac{\begin{array}{l} \neg B \\ \neg B \Rightarrow \neg A \end{array}}{\neg A} \quad \text{(wahre Implikation)}$$

Widerspruch, weil A wahr ist. Da die Annahme $\neg B$ zu einem Widerspruch führt, muß sie falsch sein. Also gilt B, wegen: $\neg(\neg B) \Leftrightarrow B$

vollständige Induktion

Wenn eine Aussage A(n) von den natürlichen Zahlen abhängt, diese Aussage für $n = 1$ wahr ist und aus der Annahme, sie sei für eine beliebige natürliche Zahl n_0 wahr, ihre Gültigkeit für $(n_0 + 1)$ bewiesen werden kann, so ist die Aussage A(n) für alle natürlichen Zahlen n wahr.

1.5 MENGENLEHRE

1.5.1 Definitionen

Definition Menge:

> Unter einer Menge versteht man eine Zusammenfassung gewisser, wohl unterscheidbarer Objekte zu einem neuen, einheitlichen Ganzen.

Definition Element:

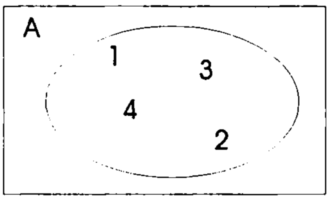
> Die Objekte der Menge werden als Elemente bezeichnet.

Im allgemeinen werden Mengen mit großen und Elemente mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

1.5.2 Beschreibung von Mengen

Die Beschreibung von Mengen kann durch folgende Darstellung erfolgen:

- Aufzählende Darstellung: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Angabe der Eigenschaften (gebräuchlich), z.B.: $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4 \wedge x \in \mathbb{N}\}$
- Graphische Darstellung (mit Hilfe des Venn-Diagramms). Beispiel:

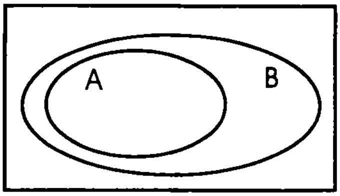


1.5.3 Bezeichnungen

$a \in A$	$\Leftrightarrow$	a ist Element der Menge A
$a \notin A$	$\Leftrightarrow$	a ist nicht Element von A
$\mid$	$\Leftrightarrow$	„mit der Eigenschaft"
$\forall x \in \mathbb{N}$	$\Leftrightarrow$	„für alle $x \in \mathbb{N}$ " (Allquantor)
$\exists x \in \mathbb{N}$	$\Leftrightarrow$	„es existiert mindestens ein $x \in \mathbb{N}$ " (Existenzquantor)

1.5.4 Teilmengen

$A \subset B$	$\Leftrightarrow$	A ist echte Teilmenge von B (A ist vollständig in B enthalten)
$A \subseteq B$	$\Leftrightarrow$	A ist Teilmenge von B (A ist vollständig in B enthalten bzw. gleich der Menge B)
$A \subseteq B$	$\Leftrightarrow$	$\forall x \in A$ gilt: $x \in A \Rightarrow x \in B$



1.5.5 Gleichheit von Mengen

Für die Gleichheit von Mengen gilt folgende Äquivalenz:
$(A = B) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \quad \forall x$

Ein weiterer Zusammenhang sieht wie folgt aus:
$(A = B) \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

1.5.6 Anzahl der Elemente

$n(A)$ heißt Mächtigkeit der Menge A und gibt die Anzahl der unterscheidbaren Elemente der Menge A an. Eine äquivalente Schreibweise für die Mächtigkeit ist: $n(A) = |A|$.

Beispiele:
a) $A = \{1,2,3,4\}$ $\quad n(A) = 4$,
b) $B = \{0,1,4,6,6,3\}$ $\quad n(B) = 5$.

1.5.7 Spezielle Mengen

1.5.7.1 Die Universalmenge Ω

Ω ist die Universalmenge, d.h. die Menge, die alle Elemente der betrachteten Problemstellung erfaßt.

1.5.7.2 Die leere Menge

$\{\,\}$ oder $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge. Sie enthält kein Element: $n(\emptyset) = 0$. Aber:

- $\{0\} \neq \emptyset \qquad$ da $n(\{0\}) = 1$,
- die Menge, die die leere Menge enthält, ist nicht die leere Menge $\{\,\} \neq \{\{\,\}\}$.

1.5.7.3 Die Potenzmenge

$P(A)$ heißt Potenzmenge der Menge A. $P(A)$ wird durch die Menge aller Teilmengen von A gebildet. Sowohl A als auch $\emptyset$ sind stets Elemente der Potenzmenge. Beispiele:

$A = \{2,3\} \qquad P(A) = \{\emptyset, A, \{2\}, \{3\}\}$
$B = \{2,4,6\} \qquad P(B) = \{\emptyset, B, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}\}$

Die Anzahl der Elemente der Potenzmenge ist 2^n mit $n = n(A)$, es gilt also: $n(P(A)) = 2^n$.

1.5.7.4 Spezielle Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	$= \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$= \{0, 1, 2, \dots\}$	
$\mathbb{Z}$	$= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	$= \{q \mid q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \land n \in \mathbb{N}\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$:		Menge der reellen Zahlen, also der (endlichen und unendlichen) Dezimalbrüche
$\mathbb{C}$:		Menge der komplexen Zahlen

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.5.7.5 Intervalle

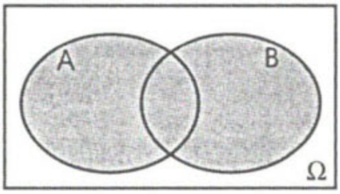
Bei den Intervallen wird unterschieden:

$[a, b] :=$	$\{x \mid a \le x \le b \land x \in \mathbb{R}\}$	geschlossenes Intervall
$(a, b]$ oder $]a, b] :=$	$\{x \mid a < x \le b \land x \in \mathbb{R}\}$	halboffenes Intervall
$[a, b)$ oder $[a, b[:=$	$\{x \mid a \le x < b \land x \in \mathbb{R}\}$	halboffenes Intervall
(a, b) oder $]a, b[:=$	$\{x \mid a < x < b \land x \in \mathbb{R}\}$	offenes Intervall

1.5.8 Mengenoperationen

1.5.8.1 Vereinigung

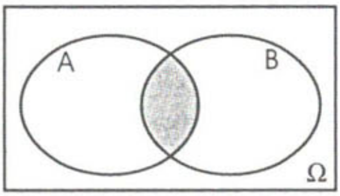
$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$



Beispiel:
$A = \{1, 2\}$
$B = \{2, 3, 4\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

1.5.8.2 (Durch-) Schnitt

$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \land x \in B\}$

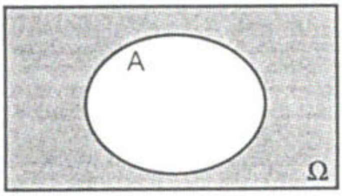


Beispiel:
$A = \{2, 3, 4\}$
$B = \{4, 5, 7\}$
$A \cap B = \{4\}$

$A \cap B = \emptyset$ bedeutet: A und B sind disjunkt.

1.5.8.3 Komplement

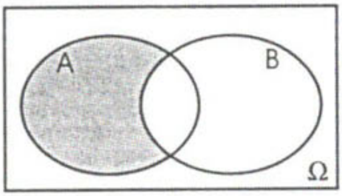
$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} \{x|(x \in \Omega) \wedge x \notin A\}$
$= \{x|x \in \Omega\backslash A\} = \Omega\backslash A$



Beispiel:
$\Omega = \{1,2,3\}$
$A = \{1,2\}$
$\overline{A} = \{3\}$

1.5.8.4 Differenz

$A\backslash B \overset{\text{def}}{=} \{x|(x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \overline{B}$



Beispiel:
$A = \{1,2\}$
$B = \{1\}$
$A\backslash B = \{2\}$

1.5.8.5 Das Produkt (Kreuzprodukt)

$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(x,y)|(x \in A) \wedge (y \in B)\}$: Menge der geordneten (Zahlen-) Paare.

Beispiel: $A = \{1,2\}$ $B = \{3,4\}$ $A \text{ x } B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

1.5.9 Rechenregeln

a)	$\overline{\overline{A}}$	$= A$	doppeltes Komplement
b)	$A \cap A$	$= A$	Idempotenzgesetz
	$A \cup A$	$= A$	
c)	$A \cap B$	$= B \cap A$	Kommutativgesetz
	$A \cup B$	$= B \cup A$	
d)	$(A \cap B) \cap C$	$= A \cap (B \cap C)$	Assoziativgesetz
	$(A \cup B) \cup C$	$= A \cup (B \cup C)$	
e)	$A \cup (B \cap C)$	$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivgesetz
	$A \cap (B \cup C)$	$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
f)	$\overline{(A \cap B)}$	$= \overline{A} \cup \overline{B}$	Regeln von de Morgan
	$\overline{(A \cup B)}$	$= \overline{A} \cap \overline{B}$	
g)	$n(A \cup B)$	$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$	Additionssatz

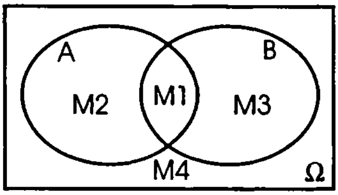
1.5.10 Das Veitchdiagramm

Das Veitch-Diagramm dient zur Ermittlung der Mächtigkeit von Mengen. Es ermöglicht eine disjunkte Zerlegung der Universalmenge. Jeder Mengenbereich wird in der Tabelle angesprochen. Beispiel für zwei Basismengen:

	B	$\overline{B}$	
A	$n(A \cap B) = n(M1)$	$n(A \cap \overline{B}) = n(M2)$	$n(A)$
$\overline{A}$	$n(\overline{A} \cap B) = n(M3)$	$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(M4)$	$n(\overline{A})$
	$n(B)$	$n(\overline{B})$	$n(\Omega)$

Hieraus wird deutlich, daß:

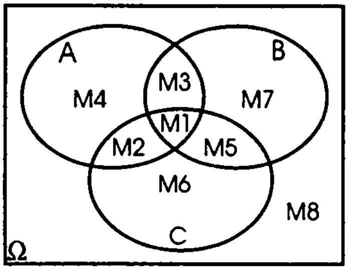
$n(A) = n(M1) + n(M2), \quad n(B) = n(M1) + n(M3),$
$n(A \cup B) = n(M1) + n(M2) + n(M3)$



Beispiel für drei Basismengen:

	C		$\overline{C}$		
	B	$\overline{B}$	B	$\overline{B}$	
A	$n(A \cap B \cap C)$ $= n(M1)$	$n(A \cap \overline{B} \cap C)$ $= n(M2)$	$n(A \cap B \cap \overline{C})$ $= n(M3)$	$n(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ $= n(M4)$	$n(A)$
$\overline{A}$	$n(\overline{A} \cap B \cap C)$ $= n(M5)$	$n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$ $= n(M6)$	$n(\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$ $= n(M7)$	$n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ $= n(M8)$	$n(\overline{A})$
	$n(C)$		$n(\overline{C})$		$n(\Omega)$
	$n(B)$				
		$n(\overline{B})$			

Es gilt z.B.: $n(C) = n(M1)+n(M2)+n(M5)+n(M6), \quad n(B \cap C) = n(M1)+n(M5)$



1.6 AUFGABEN ZUR AUSSAGENLOGIK UND MENGENLEHRE

1.6.1 Aufgaben

Aufgabe 1: Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion.

1. $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

Aufgabe 2: Beweisen Sie die Ungleichungen mit Hilfe der vollständigen Induktion.

1. $2^n > n$ für $n \in \mathbb{N}$
2. $2^n > n^2$ für $n \geq 5$
3. $2^n > n^3$ für $n \geq 10$
4. $(1+a)^n > 1+n \cdot a$ für $a > -1\,, a \neq 0\,, n \geq 2$ Bernoullische Ungleichung

Aufgabe 3: Beweisen Sie direkt oder indirekt.

1. a^2 ist durch 3 teilbar $\Leftrightarrow$ a ist durch 3 teilbar , $\forall a \in \mathbb{N}$.
2. $\sqrt{3}$ ist irrational.

Aufgabe 4: Prüfen Sie die Äquivalenz und tautologische Implikation folgender Aussagen mit Hilfe einer Wahrheitstafel:

1. $((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$
2. $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow P \vee Q$
3. $((P \vee Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

Aufgabe 5:

1. In einer Schule mit 600 Schülern wird eine Umfrage veranstaltet, welche Zeitschriften abonniert werden. Es werden gelesen: „Bravo" (50 Schüler), „Spiegel" (40 Schüler) und „Bild der Wissenschaft" (25 Schüler).
   Weiter wird festgestellt, daß 15 Schüler zugleich „Bravo" und „Spiegel" abonniert haben, 10 Schüler zugleich „Bravo" und „Bild der Wissenschaft" und 5 Schüler zugleich „Spiegel" und „Bild der Wissenschaft". Kein Schüler hat zugleich alle drei Zeitschriften abonniert.

   Wieviel Schüler dieser Schule haben genau eine der drei Zeitschriften abonniert und wieviel gar keine?

2. An einer Hochschule seien 450 Studenten im 1. Semester (Menge A). An dieser Hochschule gebe es 320 VWL-Studenten (Menge B). Es gilt also $n(A)+n(B) = 770$. 80 VWL-Studenten sind im 1. Semester.

   Wie groß ist $n(A \cup B)$? Wodurch erklärt sich der Unterschied zu $n(A) + n(B)$?

Aufgabe 6:

1. 100 Studenten werden nach der Zusammensetzung ihres Frühstücks befragt, und zwar im Hinblick auf die Unterscheidung zwischen Müsli (M), Vollkornbrot (VK) und Auszugsmehlprodukte, also Brötchen, Weißbrot etc. (AM). Ergebnisse der Befragung:

   Ein Frühstück mit M und VK und AM wird von einer Person bevorzugt; zehn essen ausschließlich M; neun favorisieren VK und AM sowie zwei M und VK; M wird von zwölf Studenten, VK von 28 und AM von 70 gegessen.

   Erstellen Sie ein Venn- (oder Veitch-) Diagramm und beantworten Sie folgende Fragen:

   (a) Wie viele der befragten Studenten verzehren keines der genannten Nahrungsmittel?

   (b) Wie viele essen M und AM, aber kein VK?

2. Wie heißen folgende Mengen?

   (a) $\{x|x \in A \vee x \in B\}$

   (b) $\{x|x \in A \wedge x \in B\}$

   (c) $\{x|x \in A \wedge x \notin B\}$

Aufgabe 7: Ein Warenhaus befragte 200 Kunden, um festzustellen, an welche Personen es seine Werbung richten soll. Dabei interessierte Einkommen, Alter und Geschlecht der befragten Personen.
- 84 Personen hatten ein Einkommen unter DM 2000.
- 110 Personen waren älter als 30 Jahre.
- Insgesamt wurden 117 Frauen befragt.
- 74 Personen unter 30 Jahren hatten ein Einkommen von mehr als DM 2000.
- 20 Frauen waren älter als 30 Jahre und verfügten über ein Einkommen von über DM 2000.
- 73 Frauen hatten ein Einkommen von weniger als DM 2000.
- 55 Männer waren jünger als 30 Jahre.

1. An wen richtet das Warenhaus die Werbung, wenn es die am stärksten vertretene Gruppe ansprechen möchte?
2. Wie viele Männer unter 30 Jahren hatten ein Einkommen von weniger als DM 2000? Hinweis: Empfehlenswert ist die Verwendung eines Veitch-Diagramms.

Aufgabe 8: In einem Urlaubsort werden 70 Touristen befragt, welches der Verkehrsmittel Auto (PKW), Bahn und Omnibus sie zur Anreise benutzt hätten. Dabei ergaben sich folgende Informationen:

20 Touristen benutzten das Auto, 30 die Bahn, 40 den Omnibus, 5 das Auto und Omnibus, 4 Bahn und Auto, 12 reisten nur mit dem Auto an und 4 benutzten keines der genannten Verkehrsmittel.

1. Wie viele der befragten Touristen benutzten alle drei genannten Verkehrsmittel, d.h. Auto, Bahn und Omnibus?
2. Wie viele Touristen haben die Bahn und den Omnibus benutzt?
3. Wie viele Touristen benutzten die Bahn oder den Omnibus, ohne das Auto zu benutzen?

Aufgabe 9: An einer Abstimmung in Nordrhein-Westfalen beteiligten sich 600 Abgeordnete.
300, die den Koalitionsparteien angehörten und rheinische Abgeordnete sind, stimmten dafür.
25, die den Oppositionsparteien angehörten und westfälische Wähler vertraten, stimmten dagegen.
Die Koalition hatte 96 Stimmen mehr als die Opposition.
135 Abgeordnete vertraten westfälische Wähler.
18 Mitglieder der Koalitionsparteien stimmten dagegen.
102 westfälische Abgeordnete stimmten dafür.
Der Antrag wurde mit 310 Stimmen Vorsprung durchgebracht.

Die Abstimmung ist nach der Herkunft und Parteizugehörigkeit der Abgeordneten zu analysieren (keine Enthaltungen).

Aufgabe 10: Man beweise bzw. widerlege folgende Äquivalenzen:

1. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge A)$
2. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
3. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow \neg A)$
4. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$

1.6.2 Lösungen

zu Aufgabe 1:
Als IA wird der Induktionsanfang, IV Induktionsvoraussetzung, IB Induktionsbehauptung und IS Induktionsschluß abgekürzt:

1.

$$\text{IA: } n = 0 \quad \sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$$

$$\text{IV: } \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für ein festes } n \in \mathbb{N} \text{ und } q \neq 1$$

$$\text{IB: } \sum_{i=0}^{n+1} q^i = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$$\text{IS: } \sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} \overset{IV}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q}$$
$$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q \cdot q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \qquad \text{q.e.d.}$$

2.

$$\text{IA: } \quad n = 1 \quad \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

$$\text{IV: } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{für ein festes } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{IB: } \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\text{IS: } \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{IV}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n+1}{n+2} \qquad \text{q.e.d.}$$

3.

$$\text{IA: } n = 1 \quad \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = (2\cdot 1 - 1) = 1 = 1^2$$

$$\text{IV:} \quad \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \quad \text{für ein festes } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{IB:} \quad \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$\text{IS:} \quad \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) \ + (2(n+1) - 1 \overset{IV}{=} n^2 + 2n + 2 - 1$$
$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \qquad \text{q.e.d.}$$

zu Aufgabe 2:

1. IA: $n = 1: \quad 2^1 > 1$, da $2 > 1$

   IV: $2^n > n$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$

   IB: $2^{n+1} > n + 1$

   IS: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = 2^n + 2^n$ (Einsetzen von IV und $2^n > 1$ ergibt:)
   $2^n + 2^n > n + 1 \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1} > n + 1$

2. IA: $n = 5: \quad 2^5 > 5^2$, da $32 > 25$

   IV: $2^n > n^2$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 5$

   IB: $2^{n+1} > (n+1)^2$

   IS: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ (Einsetzen von IV und $2 > (\frac{n+1}{n})^2$ ergibt:)
   $2 \cdot 2^n > (\frac{n+1}{n})^2 \cdot n^2 = (n+1)^2 \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1} > (n+1)^2$

   (Nachweis: $(\frac{n+1}{n})^2 = (1 + \frac{1}{n})^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{25} < 2$ für $n \geq 5$.)

3. IA: $n = 10: \quad 2^{10} > 10^3$, da $1024 > 1000$

   IV: $2^n > n^3$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 10$

   IB: $2^{n+1} > (n+1)^3$

IS: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ (Einsetzen von IV und $2 > (\frac{n+1}{n})^3$ ergibt:)
$2^n \cdot 2 > n^3 \cdot (\frac{n+1}{n})^3 = (n+1)^3 \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1} > (n+1)^3$

(Nachweis für $n \geq 10$):
$(\frac{n+1}{n})^3 = (1+\frac{1}{n})^3 = 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} < 2$.)

4. IA: $n = 2$: $\quad (1+a)^2 > 1 + 2 \cdot a \quad$, da $(1+a)^2 = 1 + 2 \cdot a + a^2 > 1 + 2 \cdot a$

   IV: $(1+a)^n > 1 + n \cdot a \qquad$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und $a > -1, a \neq 0, n \geq 2$

   IB: $(1+a)^{n+1} > 1 + (n+1) \cdot a$

   IS: $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) > (1 + n \cdot a) \cdot (1+a) = 1 + n \cdot a + a + n \cdot a^2$
   $= 1 + (n+1) \cdot a + n \cdot a^2 > 1 + (n+1) \cdot a$

zu Aufgabe 3:

1. Widerspruchsbeweis
   "$\Rightarrow$", d.h. a^2 ist durch 3 teilbar und wir nehmen an, daß a nicht durch 3 teilbar ist: $a \neq 3 \cdot n$, $\quad n \in \mathbb{Z}$
   (a) $a = 3 \cdot n - 1 \Rightarrow a^2 = (3n-1)^2 = 9n^2 - 6n + 1$
   $\rightarrow$ nicht durch 3 teilbar, Widerspruch.
   (b) $a = 3 \cdot n - 2 \Rightarrow a^2 = (3n-2)^2 = 9n^2 - 12n + 4$
   $\rightarrow$ nicht durch 3 teilbar, Widerspruch.

   "$\Leftarrow$", d.h. a ist durch 3 teilbar: $a = 3 \cdot n \Rightarrow a^2 = (3n)^2 = 9n^2$ durch 3 teilbar.

2. Annahme der indirekten Beweisführung: $\sqrt{3}$ ist rational, läßt sich also darstellen als: $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ unter der Voraussetzung, daß p, q teilerfremd sind.
   Aus $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ folgt $3 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 3q^2$. p^2 ist also durch 3 teilbar, demzufolge ist auch p durch 3 teilbar (siehe 1.) und kann geschrieben werden als $p = 3n$, $n \in \mathbb{Z}$ und $p^2 = 9n^2 \Rightarrow 9n^2 = 3q^2 \Rightarrow 3n^2 = q^2$.
   Somit ist q^2 und auch q durch drei teilbar. Dieses steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, daß p und q teilerfremd sind.

zu Aufgabe 4:

1. Wahrheitstafel:

P	Q	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$\neg P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$
w	w	f	w	f	f	w
w	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Tautologie

2. Wahrheitstafel:

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$P \vee Q$	$\neg(P \wedge Q) \Rightarrow P \vee Q$
w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w
f	f	f	w	f	f

keine Tautologie

3. Wahrheitstafel:

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$	$P \wedge R$	$Q \wedge R$	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	$\Leftrightarrow$
w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	f	w
w	f	w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	f	w	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f	w
f	f	w	f	f	f	f	f	w
f	f	f	f	f	f	f	f	w

Tautologie

zu Aufgabe 5:

1. „Bravo" wird mit „B", „Spiegel" mit „S" und „Bild der Wissenschaft" mit „BdW" abgekürzt. Die Werte, die aus dem Text entnommen wurden sind fett gedruckt, die anderen Werte ergeben sich durch Saldenbildung. In den Klammern sind die Schritte angegeben, in denen der jeweilige Wert berechnet wurde (diese Reihenfolge ist aber nicht die einzige, die zu einer richtigen Lösung führt).

	BdW		$\overline{BdW}$		
	S	$\overline{S}$	S	$\overline{S}$	
B	**0**	**10**	**15**	25 (6)	**50**
$\overline{B}$	**5**	10 (3)	20 (10)	515 (11)	550 (1)
	5 (4)	20 (5)	35 (8)	540 (9)	
	25		575 (2)		**600**
	40	560 (7)			

25 + 10 + 20 = 55 Schüler haben genau eine der 3 Zeitschriften abonniert.
600 - 55 - 10 -15 - 5 = 515 Schüler haben keine der 3 Zeitschriften abonniert.