Oldenbourg Lehrbücher für Ingenieure

Herausgegeben von
Prof. Dr.-Ing. Helmut Geupel

Das Gesamtwerk
Assmann, Technische Mechanik
umfaßt folgende Bände:

Band 1: Statik (incl. Aufgaben)
Band 2: Festigkeitslehre
Band 3: Kinematik und Kinetik
Aufgaben zur Festigkeitslehre
Aufgaben zur Kinematik und Kinetik

Technische Mechanik

Band 3: Kinematik und Kinetik

von
Bruno Assmann
Fachhochschule Frankfurt/Main
und
Peter Selke
Technische Fachhochschule Wildau

13., vollständig überarbeitete Auflage

Oldenbourg Verlag München Wien

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Lektorat: Dr. Silke Bromm
Herstellung: Rainer Hartl
Umschlagkonzeption: Kraxenberger Kommunikationshaus, München
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Druck: R. Oldenbourg Graphische Betriebe Druckerei GmbH

ISBN 3-486-27294-2

Inhalt

Teil B. KINETIK

Vorwort

In diesem dritten Band der Technischen Mechanik werden die Gebiete Kinematik und Kinetik dargestellt. Die Kinematik ist die Lehre von der Bewegung, die Kinetik die Lehre von den bei der Bewegung wirkenden Kräften. Der Umfang dieses Gebiets bringt es mit sich, daß man es in vielfältiger Weise gliedern kann. Eine zu starke Aufsplitterung des Stoffs erschwert die Übersicht und das Erkennen von Zusammenhängen. Deshalb ist es sinnvoll, die Kinematik und die Kinetik jeweils geschlossen darzustellen (Teil A und B des Buches). In der Kinematik werden, ohne nach den verursachenden Kräften zu fragen, die geradlinige und krummlinige Bewegung des Punktes sowie die Schiebung (Translation), Drehung (Rotation) und allgemeine Bewegung des starren Körpers in der Ebene behandelt. Das Ziel dabei ist, Bewegungszustände (Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung) in Gleichungen zu erfassen und, wo es sinnvoll ist, graphisch darzustellen. Besonders wichtig für das Verständnis der später behandelten Kraftwirkung ist die Erkenntnis, daß die allgemeine Bewegung aus den Elementen „Schiebung“ und „Drehung“ zusammengesetzt werden kann.

Die Berechnung der an einer bewegten Masse wirkenden Kräfte erfordert die Kenntnis einer Gleichung, die die physikalische Größe „Kraft“ mit einer physikalischen Größe der Kinematik verbindet. Diese Verbindung ist das Dynamische Grundgesetz von NEWTON, das vereinfacht „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ lautet. Deshalb ist es an den Anfang des Teils B gestellt. Die drei Umwandlungen des Dynamischen Grundgesetzes sind der Impulssatz, das d'ALEMBERTsche Prinzip und der Energiesatz, die hier jeweils auf Massenpunkt, kontinuierlichen Massenstrom und den starren Körper angewendet werden. In der Mechanik gibt es drei Erhaltungssätze, den Impulserhaltungssatz, den Drallerhaltungssatz und den Energieerhaltungssatz. Die beiden ersten folgen aus dem Impulssatz, der deshalb ein besonderes Gewicht hat. Einige Probleme (z.B. der Stoß) sind nur mit Hilfe des Impulserhaltungssatzes lösbar. Eine besondere Rolle spielt der Impulssatz in der Mechanik des kontinuierlichen Massenstromes (Strömungslehre). Aus den genannten Gründen wurde er an die erste Stelle gesetzt. Die oben diskutierte Gliederung des umfangreichen und durchaus unübersichtlichen Stoffes soll verdeutlichen, daß es für die Lösung einer Aufgabe aus der Kinetik nicht „die richtige Formel“ gibt, sondern daß grundsätzlich die Lösung mit dem Impulssatz, dem d'ALEMBERTschen Prinzip und dem Energiesatz möglich ist. Das wird an Beispielen demonstriert, die nach den drei Verfahren durchgearbeitet werden.

Das letzte Kapitel des Buches befaßt sich mit den mechanischen Schwingungen. Der Co-Autor hat es neu konzipiert und deutlich erweitert. Hinzugekommen sind u.a. die Themen Erfassung von Schwingungsparametern und aktive und passive Schwingungsisolierung. Um dieses wichtige Gebiet ausführlich darstellen zu können, ist eine Beschränkung auf das Einmassensystem notwendig. Im Zusammenhang mit der kritischen Drehzahl wird darüber hinaus die Grundschwingung einer mit mehreren Massen bestückten Welle behandelt. So ist es möglich, die Wellenmasse bei der Berechnung der kritischen Drehzahl zu berücksichtigen.

Das Buch ist als Lehrbuch vornehmlich für die Fachhochschulen konzipiert. Die ausführlich vorgerechneten Beispiele sollen an Modellen Prinzipien und Zusammenhänge erklären, Fragen aufwerfen und sie beantworten. Die Beispielauswahl soll aber auch schon den Praxisbezug herstellen und Anwendungen vor allem im Maschinenwesen zeigen. Insofern soll sich diese Darstellung von einer in einem Physikbuch unterscheiden. Erst das selbständige Lösen von Aufgaben ermöglicht eine Kontrolle, inwieweit der Stoff verstanden wurde. Deshalb haben wir eine auf dieses Buch zugeschnittene Aufgabensammlung zusammengestellt.

Die vorliegende 13. Auflage ist insgesamt überarbeitet worden. Die Kapitel sind nunmehr durch eine Einführung in die nachfolgend behandelte Thematik erweitert. Beispiele wurden ausgetauscht und Texte z.T. neu verfaßt. Solche Arbeiten geschehen immer in der Hoffnung, die Qualität des Buches zu verbessern.

Dem Verlag danken wir für das verständnisvolle Eingehen auf alle unsere Wünsche. Deren Zahl steigt mit dem Umfang der Bearbeitung, für den die Zunahme der Seitenzahl um fast 50 steht.

Frankfurt am Main / Berlin

Bruno Assmann
Peter Selke

Verwendete Bezeichnungen

(Auswahl)

A	Amplitude
A	Fläche
a	Beschleunigung
b	Dämpfungskoeffizient
c	Federkonstante
D	Drall
d	Durchmesser
E	Elastizitätsmodul
E	Energie
e	Exzentrizität
F	Kraft
f	Frequenz
G	Gleitmodul
g	Fallbeschleunigung
H, h	Höhen, allgemein
I	Flächenträgheitsmoment
i	Trägheitsradius
i	Übersetzungsverhältnis
J	Massenträgheitsmoment
k	Stoßzahl
L, l	Längen, allgemein
M	Moment
m	Masse
n	Drehzahl
P	Leistung
p	Druck
R, r	Radien, allgemein
S	Seilkraft, Stabkraft
s	Ortskoordinate
T	Schwingungsdauer
t	Zeit
U	Unwucht
V	Vergrößerungsfunktion
v	Geschwindigkeit
W	Arbeit
Z	Zentrifugalkraft
α	Winkelbeschleunigung
$\alpha, \beta, \gamma ...$	Winkel, allgemein
δ	Abklingkonstante
η	Abstimmungsverhältnis

η	Wirkungsgrad
ϑ	Dämpfungsgrad
Λ	Logarithmisches Dekrement
λ	Schubstangenverhältnis
μ	Reibungszahl
ρ	Dichte
φ	Phasenverschiebungswinkel
φ	Winkel bei Verdrehung
ω	Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz

Indizes

0	Ruhezustand
A	Ausgleichsmasse
A, B, D ...	verschiedene Massen, Punkte usw.
Cor	CORIOLIS
D	Dämpfer
d	gedämpft
e	erregt
ers	Ersatz
ext	extrem
F	Feder
F	Krafteinleitungsstelle
f	Führung
G	Gewicht
K	kritisch
k	kinetisch
m	Mittelwert
max	maximal
min	minimal
n	Normalrichtung
pot	potentiell
R	Reibung
R	Resonanz
r	radial
r	Rückstellkraft/moment
red	reduziert
rel	relativ
S	Schwerpunkt
S	Seil
St	Stoß
stat	statisch
T	Torsion
T	Trägheit
t	Tangentialrichtung

v	vertikal
x, y, z	bezogen auf die so bezeichneten Achsen
Z	zentrifugal
ξ, η	bezogen auf die so bezeichneten Achsen
φ	Umfangsrichtung

1 Einführung

1.1 Begriffsbestimmung

Im ersten Band der vorliegenden Technischen Mechanik wird die Statik behandelt. Das ist die Lehre von der Wirkung von Kräften auf starre Körper im Gleichgewicht. Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen der Statik werden z.B. Auflager- und Gelenkkräfte statisch bestimmt gelagerter Systeme ermittelt. In der Festigkeitslehre (Band 2) ist es notwendig, den idealisierten Begriff „starrer Körper" zu verlassen. Die Festigkeitslehre befaßt sich mit den auftretenden Deformationen an Bauteilen und den so verursachten Spannungen.

Diese beiden Gebiete behandeln im wesentlichen Systeme, die in Ruhe sind. Die Zeit, als eine der Grundgrößen der Mechanik, kommt deshalb in der Statik und Festigkeitslehre nicht vor. Jedoch wird bereits im Band 1 darauf hingewiesen, daß alle für die Statik abgeleiteten Beziehungen auch für geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gelten. Der Ruhezustand ist der Sonderfall der Bewegung mit $v = 0$.

Im vorliegenen Band 3 werden bewegte Massen untersucht. Aussagen über die die Bewegung verursachenden Kräfte sind erst möglich, wenn die Geometrie der Bewegung selbst erfaßt ist. Deshalb ist es notwendig, zunächst ohne nach den Ursachen zu fragen, sich mit den verschiedenen Bewegungsarten eines Punktes bzw. eines starren Körpers zu befassen. Dieses Teilgebiet nennt man Kinematik (Kapitel 2 bis 4 dieses Bandes). Nach diesen Ausführungen arbeitet die *Kinematik* als *Lehre von den Bewegungen* mit den Grundgrößen Länge und Zeit.

Erst die Vereinigung von Statik und Kinematik gestattet es, Beziehungen zwischen der Bewegung eines Systems mit den die Bewegung verursachenden Kräften aufzustellen. *Die Lehre von den Kräften und Bewegungen nennt man Kinetik* (Kapitel 5 bis 9 dieses Bandes). Sie arbeitet mit allen Grundgrößen der Mechanik, mit der Länge, der Kraft und der Zeit. Die Vereinigung von Statik und Kinematik ist nur möglich, wenn eine Beziehung bekannt ist, die eine Größe der Statik in Abhängigkeit zu einer Größe der Kinematik bringt. Diese Beziehung ist das von NEWTON aufgestellte *Dynamische Grundgesetz*. Für den starren Körper heißt es in der einfachsten Form „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung". Dieses Gesetz stellt demnach eine Verknüpfung der Größe Kraft (Statik) mit der Größe Beschleunigung (Kinematik) dar.

Der Begriff *Dynamik* wird in der Fachliteratur verschieden definiert. Es sollen ohne Stellungnahme die verschiedenen Auffassungen dargestellt werden.

Zunächst wird die Dynamik in dem Sinne festgelegt, wie es hier mit dem Begriff Kinetik geschehen ist. Eine zweite Auffassung bezieht in die Dynamik auch die Lehre von der Bewegung ein. Das entspricht einem Oberbegriff für Kinetik und Kinematik. Wenn man nur vom Wortstamm ausgeht (griechisch = Kraft), dann ist die Dynamik die Lehre von den Kräften. So gesehen ist sie ein Oberbegriff für Statik und Kinetik. Die Kinematik steht dann als selbständiger Zweig der Mechanik daneben.

1.2 Abriß der Geschichte der Mechanik

In diesem Abschnitt soll versucht werden, die Gedankengänge nachzuzeichnen, die zu unserem heutigen Bild der Mechanik geführt haben. Natürlich kann das nur soweit geschehen, wie es dem Umfang dieser Technischen Mechanik entspricht. Die Frage nach dem Grund für einen solchen Rückblick liegt nahe.

Entscheidende Durchbrüche zu neuen allgemeingültigen Erkenntnissen sind durch exakte Beobachtungen einfacher Naturvorgänge und die daraus gezogenen Schlußfolgerungen gelungen. In diesem Zusammenhang müssen der frei fallende Körper, das mathematische Pendel und die schiefe Ebene genannt werden. Das kann geradezu als ein Beweis dafür gelten, daß man als Lernender neue Erkenntnisse nur gewinnen kann, wenn man sich physikalische Prinzipien an einfachen Modellen klar macht. Für die Technische Mechanik sind das z.B. die bewegte Punktmasse, der Balken, die Rolle, das Seil usw. Aus diesen Überlegungen und nicht nur aus Interesse für die Geschichte wurde dieser Abschnitt geschrieben.

Schon sehr frühzeitig hat man versucht, Naturvorgänge, die nach der heutigen Gliederung in das Gebiet der Mechanik fallen, zu erklären und in Gesetze zu fassen. Mechanische Vorgänge boten sich besonders an, da sie einen großen Teil der unmittelbaren Erfahrung des Menschen ausmachen. Jedes Werkzeug war zunächst ein mechanisches Werkzeug, das in irgendeiner Form Gesetze der Mechanik anwendet. Das gilt z.B. für den Hebel, den Keil, die Rolle und das Seil. Die unmittelbare Berührung mit elementaren mechanischen Vorgängen hat im Laufe der Zeit das gesamte Denken so durchdrungen, daß man noch verhältnismäßig spät alle Vorgänge in der Natur an mechanischen Prinzipien zu erklären versucht hat. Als Beispiel sei hier die von NEWTON vertretene Korpuskulartheorie des Lichts genannt.

Die Ägypter müssen schon in der Zeit 3000 bis 2000 vor unserer Zeitrechnung viele Einzelkenntnisse der Mechanik gehabt haben. Das beweisen zahlreiche Darstellungen mechanischer Geräte und Bauwerke wie die Pyramiden. Die Griechen der Antike versuchten neben exakten Einzeluntersuchungen zu einer Erklärung der Weltentstehung und einem einheitlichen Denksystem zu gelangen (Naturphilosophie). Es konnten jedoch nur Einzelprobleme gelöst werden, da die allgemeine Entwicklung noch nicht genügend weit fortgeschritten war.

ARISTOTELES (384 bis 322 v.Chr.) prägte den Namen Physik. Er erkannte unter anderem, daß alle Körper beschleunigt fallen, war jedoch der Meinung, daß ein schwerer Körper schneller falle als ein leichter. Da die Schriften des ARISTOTELES bis in das 15. Jahrhundert als unumstößliches Gesetz galten, war dieser Fehler für die Weiterentwicklung der Mechanik sehr folgenschwer.

ARCHIMEDES von Syrakus (287 bis 212 v.Chr.) entwickelte nicht nur viele mathematische Gesetze, sondern konstruierte unter anderem den Flaschenzug, die Schraube zur Wasserförderung und formulierte das nach ihm benannte Prinzip des hydrostatischen Auftriebs. Er kannte das Hebelgesetz und berechnete Flächenschwerpunkte. Auch befaßte er sich mit der schiefen Ebene.

HERON von Alexandria (1. Jahrhundert v.Chr.?) verfaßte einige physikalische Werke. Er baute unter Verwendung von Mikrometerschraube, Zahnrad und Zahnstange Meßgeräte.

Die ersten eineinhalb Jahrtausende unserer Zeitrechnung waren für die Entwicklung der Wissenschaften sehr steril. Man ist ganz allgemein über den Stand dessen, was die Griechen und Römer geschaffen haben, nicht hinausgekommen.

LEONARDO da VINCI (1452-1519) hat eine Vielzahl von mechanischen Einzelproblemen gelöst, die sich vor allem aus technischen Anwendungen ergaben. Dabei waren seine Arbeitsgebiete hauptsächlich das Bauwesen einschließlich des Wasserbaus und der Kriegsmaschinen. Er hat viele Aufzeichnungen hinterlassen, aus denen u.a. hervorgeht, daß er sich über die Reaktionswirkung einer Kraft im klaren war. Er schreibt darüber im Zusammenhang mit der Rückstoßkraft an einer Kanone. Auch spricht er bereits von der Kraft als der Ursache der Bewegung. Der Kraftbegriff, so geläufig er jetzt ist, hat erst einen sehr langwierigen Entwicklungsprozeß durchmachen müssen. Zunächst wurden ohne scharfe Trennung Begriffe wie Kraft, Stoß, Schlag, Druck, Zug verwendet. LEONARDO da VINCI nennt die Kraft ein „geistiges, unkörperliches und unsichtbares Wirkungsvermögen".

Da der Begriff „Masse" noch nicht definiert war, fehlte auch die Klarheit über einen für uns so alltäglichen Begriff wie „Gewicht", bzw. Gewichtskraft. LEONARDO da VINCI war der Meinung, diese würde kleiner wenn der betreffende Gegenstand horizontal bewegt wird. Er führte als Beweis an, daß ein galoppierendes Pferd sich mit dem Reiter kurzfristig auf einem Bein nur halten könne, weil Pferd und Reiter leichter geworden seien. Das wirft ein Schlaglicht auf die Art der damaligen Argumentation. Vor allem war es damals nicht möglich, den Einfluß der Reibung zu eliminieren. Das gilt sowohl für das Experiment als auch für die Überlegungen. Aus diesem Grunde herrschte damals ganz allgemein die Vorstellung, die Bewegung wäre ein Vorgang, der sich selbst aufzehre. Eine Weiterentwicklung war in diesem Stadium nicht möglich, da man von der falschen Aussage über den freien Fall ausging (ARISTOTELES) und noch keine Klarheit über die Rolle der Reibung für die Bewegung und über den Begriff „Kraft“ hatte.

Es bedurfte der Genialität eines GALILEO GALILEI (1564-1642), um diesen Kreis zu sprengen. Er verlangte das Experiment als Beweisgrundlage und kann wohl deshalb als der Schöpfer der modernen Physik gelten. Zunächst entwickelte er die kinematischen Grundlagen. Für eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit fand er den Zusammenhang $s = v \cdot t$ und deutete den Weg s graphisch als die Fläche im v-t-Diagramm. Er spricht von der Summe der Höhen. Die Zunahme der Geschwindigkeit beim freien Fall versuchte er zunächst durch den Ansatz

$$v \sim s, \qquad \text{(Geschwindigkeit proportional zum}$$
$$v = k \cdot s \qquad \text{zurückgelegten Weg)}$$

zu lösen. Da diese Beziehung experimentell nicht bestätigt wurde, versuchte er den uns bekannten Ansatz

$$v \sim t\,, \qquad v = g \cdot t\,.$$

Die Geschwindigkeit nimmt proportional mit der Zeit zu. In der Schlußfolgerung aus der vorher gewonnenen Erkenntnis, daß die Fläche im v-t-Diagramm (Dreieck) dem zurückgelegten Weg entspricht, erhält er das Gesetz

$$s = \frac{1}{2}\,(g \cdot t) \cdot t = \frac{g}{2}\,t^2\,.$$

GALILEI war hier schon auf dem Wege zur Differential- und Integralrechnung. Mit der Erkenntnis, daß alle Körper gleich schnell fallen, war es GALILEI endlich gelungen, die Physik von den falschen Vorstellungen des Altertums zu lösen. Für die Weiterentwicklung war die Definition des Beschleunigungsbegriffes besonders wichtig.

Die Experimente GALILEIs an schiefer Ebene und am Pendel zum Beweis der Fallgesetze können hier nicht ausführlich behandelt werden. Nur auf einen kleinen Versuch sei kurz eingegangen. Um die quadratische Abhängigkeit des Weges von der Zeit zu demonstrieren, schnitzte er in eine schiefe Ebene Kerben in Abständen ein, die sich im Verhältnis 1; 4; 9; 16; 25 verhalten. Läßt man eine Kugel herunterrollen, dann hört man die Kugeln in gleichen Zeitabständen die Kerben passieren. Man vergleiche diese Arbeitsmethode mit der „Beweis“-führung des LEONARDO da VINCI zur horizontal bewegten Masse. Das kann ohne Schmälerung der Verdienste dieses genialen Mannes gesagt werden. Die von GALI-

LEI stammende Arbeitsmethode der Wechselwirkung von Idee und Experiment wirkte bahnbrechend für die Weiterentwicklung der Physik.

Die Frage nach der Ursache der Bewegung der Himmelskörper war damals absolut zentral. GALILEI war der Meinung, daß es eine natürliche Bewegung gibt, die ein Körper beschreibt, wenn keine Kräfte angreifen. Damit ist grundsätzlich der Begriff „Trägheit“ in die Physik eingeführt. GALILEI war jedoch der Auffassung, die natürliche Bewegung eines Körpers – er meinte damit einen Himmelskörper – sei die Kreisbahn.

CHRISTIAN HUYGENS (1629-1695) hat schon auf die Bestimmbarkeit der Kraft durch die Beschleunigung hingewiesen, jedoch blieb es ihm versagt, den Begriff Masse zu definieren. Er hat u.a. die Kinematik der Kreisbewegung und in diesem Zusammenhang den Begriff der Normalbeschleunigung abgeleitet. Das war eine besonders wichtige Voraussetzung für die Arbeiten NEWTONs.

In diesem Zusammenhang muß auch der Astronom JOHANNES KEPLER (1571-1630) genannt werden, der auf Grund langjähriger Beobachtungen, die größtenteils auf TYCHO DE BRAHE (1546-1601) zurückgehen, die nach ihm benannten Planetengesetze aufgestellt hat.

ISAAC NEWTON (1642-1727) hat als erster versucht, die Physik systematisch aufzubauen. Er geht in seinem Hauptwerk von vier Definitionen aus. In der ersten legt er den Begriff Masse fest. Dabei nennt er die Masse die „multiplikative Vereinigung von Volumen und Dichte“, stellt also die uns geläufige Beziehung $m = \rho \cdot V$ auf. Nach der Definition der Begriffe stellt NEWTON drei Gesetze auf (ausführlicher im Kapitel 5). An erster Stelle steht das Trägheitsprinzip, nach dem ein Körper in Ruhe oder geradliniger Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit verharrt, wenn keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken. Das zweite Gesetz wird Dynamisches Grundgesetz genannt. In der einfachsten Form lautet es: Kraft gleich Masse mal Beschleunigung. Da eine Definition der Masse vorliegt, kann man mit seiner Hilfe die Kraft definieren. Das führt zu der Krafteinheit NEWTON. Das dritte Gesetz sagt aus, daß Kräfte paarweise auftreten (actio = reactio). Aus diesen drei Gesetzen läßt sich die gesamte Mechanik entwickeln*). NEWTON selbst stellt im gleichen Werk, von den Planetengesetzen KEPLERs ausgehend, das Gravitationsgesetz auf und begründet damit die Himmelsmechanik. An dieser Stelle lohnt es sich, einige Gedanken NEWTONs nachzuzeichnen. Die grundlegenden Überlegungen wurden dem einfachen Vorgang der Wurfbewegung entnommen. NEWTON schreibt: „Daß durch die Zentralkräfte die Planeten in ihren Bahnen gehalten werden können, ersieht man aus der Bewegung der Wurfgeschosse.“ Er vergleicht dann die durch die Gewichtskraft er-

*) Die klassische oder NEWTONsche Mechanik gilt nicht mehr für Massen, die sich mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegen (Relativitätstheorie – EINSTEIN 1879-1955).

zwungene Wurfparabel mit der gekrümmten Bahn eines Planeten und fährt fort: „So würden die von einer Bergspitze mit steigender (horizontaler) Geschwindigkeit fortgeworfenen Steine immer weitere Parabelbögen beschreiben und zum Schluß – bei einer bestimmten Geschwindigkeit – zur Bergspitze zurückkehren und auf diese Weise sich um die Erde bewegen.“ Diese Geschwindigkeit gibt NEWTON selbst aus der Bedingung Fliehkraft = Gewichtskraft mit $v = \sqrt{R \cdot g}$ an. Das ist die Geschwindigkeit eines erdnahen Satelliten von ca. 7900 m/s.

NEWTON hat mit seinen Definitionen und Gesetzen der Mechanik ein einheitliches System gegeben. Damit ist die Mechanik nicht mehr eine Sammlung von Einzelgesetzen und -erfahrungen, sondern eine exakte Wissenschaft.

Eine Weiterentwicklung der Mechanik und mit den neuen Erkenntnissen möglich gewordene Behandlung vieler Einzelprobleme bedingte einen weiteren Ausbau der Mathematik. Auch auf diesem Gebiet hat NEWTON entscheidende Impulse gegeben. Auf ihn und GOTTFRIED von LEIBNITZ (1646-1716) geht die Infinitisimalrechnung (Differential- und Integralrechnung) zurück.

Im Rahmen der Stoffauswahl der Technischen Mechanik müssen noch folgende Gelehrte genannt werden. ROBERT HOOKE (1635-1703) entwickelte die Elastizitätstheorie auf der im wesentlichen die Festigkeitslehre basiert. Von JAKOB BERNOULLI (1654-1705) stammt u.a. die Biegetheorie des Balkens (Grundgleichung der Biegung). DANIEL BERNOULLI (1700-1782) begründete die Hydromechanik. LEONHARD EULER (1707-1783) nimmt hier einen besonders breiten Raum ein. Er untersuchte erschöpfend die allgemeine Bewegung des starren Körpers und leitete die nach ihm benannten Gleichungen für den Kreisel ab. Aus der Anwendung des Dynamischen Grundgesetzes auf einen Massenstrom entwickelte er die nach ihm benannte Turbinengleichung. EULER löste das Problem der Knickung eines elastischen Stabes und damit als erster ein Eigenwertproblem aus der Elastizitätstheorie. Die Arbeiten auf dem Gebiet der Differentialgleichung und komplexen Zahlen ermöglichen die Lösung von Schwingungsproblemen.

Mit Hilfe des von d'ALEMBERT (1717-1783) formulierten Prinzips (Kapitel 7 dieses Bandes) werden Probleme der Kinetik auf die Statik zurückgeführt. Das geschieht durch Einführung von Trägheitskräften und Trägheitskräftepaaren.

Ab etwa 1800 entwickelt sich als eigener Zweig eine auf die Bedürfnisse der Technik zugeschnittene Mechanik, die Gegenstand dieser Bücher ist. Die hier zu nennenden Namen werden bzw. wurden bei der Behandlung der einzelnen Stoffgebiete angeführt.

1.3 Einiges zur Lösung von Aufgaben

Der angehende Ingenieur sollte sich möglichst früh das exakte und systematische Arbeiten beim Lösen einer technischen Aufgabe aneignen. Dadurch werden Fehler vermieden und Kontrollen werden viel leichter, auch von anderen Personen durchführbar. Nachfolgend sollen dafür einige Hinweise gegeben werden, die, sinngemäß angewendet, für alle technischen Aufgaben gelten.

Es ist zunächst zweckmäßig, die gegebenen und gesuchten Werte zusammenzustellen. Danach richtet sich die Wahl des günstigsten Lösungsweges (z.B. Impulssatz oder Energiesatz usw.). Nach diesen Überlegungen soll eine dem Lösungsverfahren angepaßte Skizze angefertigt werden. Diese sollte in den Proportionen möglichst genau und genügend groß sein. Kräfte, Momente, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden möglichst im richtigen Wirkungssinn eingetragen. Die Verwendung mehrerer Farben wird empfohlen. Auf die Bedeutung einer guten Skizze für die Lösung einer Aufgabe wird besonders dringend hingewiesen.

Die verwendeten Gleichungen sollen auf jeden Fall zunächst in allgemeiner Form hingeschrieben werden. Zur besseren Kontrolle wird, ohne Zusammenfassung, jeder einzelne Wert eingesetzt, z.B.

$$v = \sqrt{2g \cdot H + v_0^2}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\,\text{m} + 5{,}0^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

$$v = 8{,}01 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Es sollte, so weit wie möglich, mit allgemeinen Größen gearbeitet werden. Zahlenwerte sollen erst eingesetzt werden, wenn die Ausgangsgleichung nach der gesuchten Größe aufgelöst ist.

Beispiel anstatt

$$v = \sqrt{2g \cdot H}$$

$$20{,}0 = \sqrt{19{,}62 \cdot H}$$

$$400 = 19{,}62 \cdot H$$

$$H = \frac{400}{19{,}62}$$

$$H = 20{,}4\ \text{m}$$

besser

$$v = \sqrt{2g \cdot H},$$

$$H = \frac{v^2}{2g},$$

$$H = \frac{20^2}{2 \cdot 9{,}81} \frac{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{m}},$$

$$H = 20{,}4\ \text{m}.$$

Bei dem links gezeigten Weg ist bereits in der zweiten Zeile eine Dimensionskontrolle nicht mehr möglich. Diese soll unbedingt vor Einsetzen der Zahlenwerte durchgeführt werden. Es sollte bei der Ausarbeitung der Lösung kein Schritt übersprungen werden, einzelne Schritte sind u.U. durch kurze Bemerkungen zu erläutern.

Werden z.B. komplizierte Bewegungsabläufe durch Gleichungen dargestellt, dann ist es weder zweckmäßig noch üblich, alle Einheiten mitzuschreiben. Die Einheiten müssen aber am besten in Form einer Tabelle sowohl im Ansatz als auch bei Ergebnissen in allgemeiner Form aufgeführt sein. Man nennt solche Gleichungen *Zahlenwertgleichungen.* Sie entsprechen der Norm DIN 1313. Gerade im Zusammenhang mit der EDV kann man auf ihre Anwendung nicht verzichten, da der Computer nicht mit Einheiten arbeitet, sondern die Gleichungen für verschiedene Variablen zahlenmäßig auswertet.

Beispiel

$$s = 2{,}5\,t^3 - 11{,}0\,t^2 + 5\,t, \qquad \begin{array}{c|c} s & t \\ \hline \mathrm{m} & \mathrm{s} \end{array}$$

daraus z.B.

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 7{,}5 \cdot t^2 - 22{,}0\,t + 5 \qquad \begin{array}{c|c} v & t \\ \hline \mathrm{m/s} & \mathrm{s} \end{array}$$

Zur eindeutigen Angabe von Ergebnissen, sollte bei Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräften neben dem Betrag auch die Richtung angegeben werden,

$$v_x = -12{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad (\leftarrow).$$

Für Vektoren senkrecht zur Zeichenebene benutzt man

$\odot$ aus der Ebene herausragend,
$\oplus$ in die Ebene hineinragend,

Oft führen einfache Umrechnungen der Einheiten zu Dezimalstellenfehlern. Deshalb soll dazu etwas ausgeführt werden.

Beispiel

$$\omega^2 = \frac{G \cdot I}{l \cdot J}$$

G Gleitmodul, nach Normen empfohlene Einheiten $\mathrm{MN/m^2} = \mathrm{N/mm^2}$
I Flächenträgheitsmoment, lt. Normen in $\mathrm{cm^4}$ gegeben

J Massenträgheitsmoment in kg m^2
l Länge je nach Arbeitsgebiet m, cm, mm

$G = 8 \cdot 10^4\ \mathrm{N/mm^2}$ $\qquad J = 10\ \mathrm{kgm^2}$

$I = 100\ \mathrm{cm^4}$ $\qquad l = 1\ \mathrm{m}$

$$\omega^2 = \frac{8 \cdot 10^4\ \mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} \cdot \frac{10^2\ \mathrm{cm^4}}{1\mathrm{m} \cdot 10\ \mathrm{kgm^2}}$$

Für unübersichtliche Ausdrücke empfiehlt es sich, die Einheiten zusammenzufassen, wobei N auf die Grundeinheiten kg · m/s^2 zurückgeführt wird.

$$\omega^2 = 8 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{kgm\ cm^4}}{\mathrm{s^2\ mm^2 \cdot m \cdot kgm^2}}$$

Für die weitere Zahlenrechnung muß auf eine gemeinsame Längeneinheit umgerechnet werden. Vorher können kgm gekürzt werden. Es soll hier alles auf cm umgerechnet werden. Im Nenner stehen mm^2. Um diese zu „löschen" wird mit mm^2 multipliziert. Damit wäre der Term dimensionsmäßig geändert. Deshalb wird im Nenner die gewünschte Einheit cm – hier cm^2 – eingeführt. Insgesamt wird mit dem Quotienten mm^2/cm^2 multipliziert. Dieser ist jedoch nicht 1, sondern es sind (10 mm)^2 = 1 cm^2 oder 1 = 100 mm^2/cm^2 (100 mm^2 pro 1 cm^2). Analog verfährt man mit anderen Einheiten. Man erhält so

$$\omega^2 = 8 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{cm^4}}{\mathrm{s^2 \cdot mm^2 \cdot m^2}} \cdot \frac{100\ \mathrm{mm^2}}{1\ \mathrm{cm^2}} \cdot \frac{1\ \mathrm{m^2}}{100^2\ \mathrm{cm^2}}$$

$$\omega = 89{,}4\ \mathrm{s^{-1}}$$

Bei einer graphischen Lösung soll die Zeichnung wegen der notwendigen Genauigkeit nicht zu klein ausgeführt werden. Die Maßstäbe müssen eindeutig angegeben sein. Die Ergebnisse sollen getrennt herausgeschrieben werden.

Ein Ergebnis muß immer kritisch und mit gesundem Menschenverstand daraufhin untersucht werden, ob es überhaupt technisch möglich ist. Zur Kontrolle sollten nach Möglichkeit die errechneten Werte in noch nicht benutzte Gleichungen eingesetzt werden. Auch ist manchmal eine Kontrolle durch eine andere Lösungsmethode möglich.

Die *Genauigkeit einer technischen Berechnung* hängt von zwei Faktoren ab, erstens von der Genauigkeit der Ausgangsdaten, zweitens von der Genauigkeit der Rechnung. Bei Verwendung eines Rechners darf man den zweiten Faktor vernachlässigen. Das Ergebnis einer technischen Berechnung wird demnach nur von den Toleranzen beeinflußt, mit denen die Ausgangswerte gegeben sind. Ausgangswerte für eine technische Berechnung haben selten Toleranzen von 1% oder sogar weniger. Man denke z.B. an die Schwierigkeiten, Belastungen genau festzustellen oder an die Streuungen, denen die Festigkeitswerte eines Werkstoffs unterliegen.

Welche Konsequenzen ergeben sich für eine Berechnung? Der in der Materie Mitdenkende sollte nicht sinnlos die Ergebnisse des Rechners übernehmen, sondern sie kritisch auf ihre mögliche Genauigkeit untersuchen und sinnvoll runden. Dies sollte schon bei eventuellen Zwischenergebnissen erfolgen.

TEIL A. KINEMATIK

2 Die geradlinige Bewegung des Punktes

2.1 Einführung

In diesem Kapitel werden Methoden entwickelt, die das Ziel haben, den *Bewegungszustand* eines Punktes auf einer Geraden zu beschreiben. Unter Bewegungszustand versteht man z.B. folgende Aussage: Der Punkt P befindet sich zur Zeit t an der Koordinate +/– s und bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung zum (vom) definierten Null-Punkt beschleunigt (verzögert) mit a. Die Größen Ortskoordinate s, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a werden definiert. Sie stehen zueinander in Beziehungen, die abgeleitet werden. Das geschieht sowohl in Form von mathematischen Abhängigkeiten als auch in graphischen Darstellungen.

Ein Abschnitt behandelt die ungleichförmig beschleunigte Bewegung. Eine geschlossene Lösung ist nur möglich, wenn die vorliegenden Abhängigkeiten in Form von differenzierbaren/integrierbaren Funktionen vorliegen. Gerade in der Ingenieurpraxis ist das eher nicht der Fall. Deshalb werden Ansätze entwickelt, die über eine graphische Darstellung, die mit einem Computer ausführbar ist, zu einer Lösung führen.

Dieses Kapitel befaßt sich mit einem Punkt, der eine mathematische Abstraktion ist. Wenn sich ein starrer Körper geradlinig bewegt (Wagen auf Schiene) sind alle Punkte des Körpers zur gleichen Zeit im gleichen Bewegungszustand. Diese einfache Überlegung führt vom Punkt zum Körper, der eigentlich in der ingenieurmäßigen Anwendung interessiert. Darüber hinaus soll schon an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß der Schwerpunkt eines Körpers eine besondere Bedeutung in der Kinetik hat. Bei der allgemeinen Bewegung ist es oft notwendig, den Bewegungszustand des Schwerpunktes zu kennen.

2.2 Ortskoordinate, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Einleitend soll festgestellt werden, daß die nachfolgend definierten Begriffe Ortskoordinate s, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a Vektoreigenschaft haben. Da bei einer geradlinigen Bewegung die Richtung vorgegeben ist, wird auf die Vektorschreibweise verzichtet.

Ein Punkt bewegt sich entlang einer Linie nach Abb. 2-1. Um diesen Vorgang zu beschreiben, ist es notwendig, einen Nullpunkt zu definieren, von wo aus seine Position s gemessen wird. Diese wird *Ortskoordinate* ge-

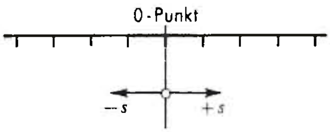

Abb. 2-1: Definition der Ortskoordinate

nannt. Der Beginn der Zeitmessung ist frei wählbar, z.B. $t = 0$ für einsetzende Bewegung. Den Bewegungsvorgang kann man jetzt mit Hilfe einer Tabelle beschreiben, in der zugeordnete Werte von s und t aufgeführt sind. Diese Tabelle ist die Grundlage für eine graphische Darstellung in einem Koordinatensystem mit t als Abszisse und s als Ordinate. Ein solcher Graph wie ihn z.B. die Abb. 2-2 zeigt stellt sehr anschaulich einen Bewegungsvorgang dar. Hier können in der Tabelle nicht enthaltene Zwischenwerte abgelesen werden. Bewegungsabläufe werden auch durch Gleichungen $s = \mathrm{f}(t)$ wiedergegeben. Solche Gleichungen können das Ergebnis theoretischer Betrachtungen sein. Liegen Tabellen $s = \mathrm{f}(t)$ vor, die Versuchsergebnisse enthalten, kann man vom Graph ausgehend zu einer Gleichung kommen. Zu diesem Problemkomplex gibt es vielfältige Computerprogramme.

Für das Verständnis ist es wichtig, sich hier klar zu machen, daß s eine Lagebezeichnung (Ortskoordinate) ist und nicht ein zurückgelegter Weg. Nur wenn im Zeitintervall Δt keine Richtungsumkehr erfolgt, ist bei geradliniger Bewegung die Differenz der Ortskoordinate Δs der während Δt zurückgelegte Weg.

Die Definition des Begriffs *Geschwindigkeit* soll von der Abb. 2-2a ausgehen. Im Zeitabschnitt $t_2 - t_1 = \Delta t$ hat der Punkt seine Lage von s_1 nach s_2 verändert und dabei einen Weg $\Delta s = s_2 - s_1$ zurückgelegt. Dabei war seine mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Die Dimension der Geschwindigkeit ist Länge/Zeit, die Einheiten z.B. m/s, m/min, km/h.

Geometrisch kann die mittlere Geschwindigkeit als der Tangens des Steigungswinkels der Sekante gedeutet werden, die die Kurve in den Punkten 1 und 2 schneidet.

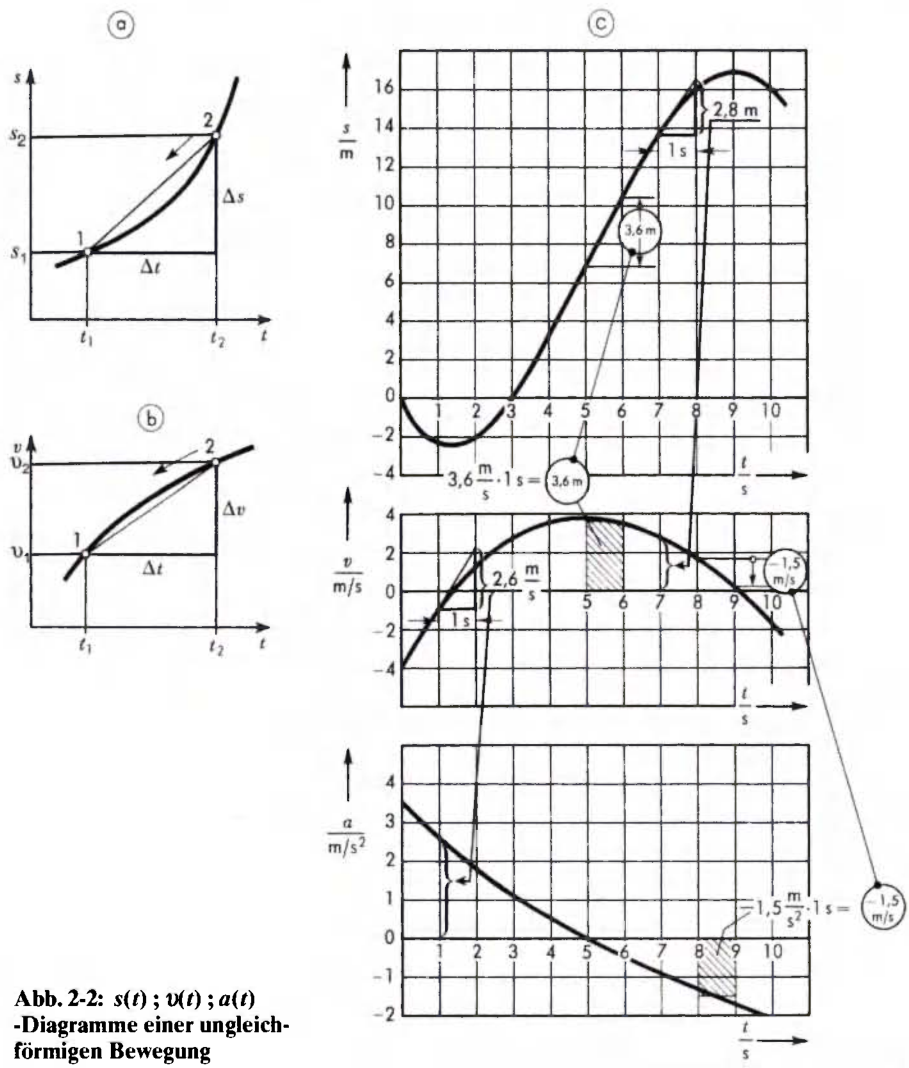

Abb. 2-2: $s(t)$; $v(t)$; $a(t)$ **-Diagramme einer ungleichförmigen Bewegung**

Je ungleichmäßiger die Bewegung des Punktes war, um so weniger wird die über ein Zeitintervall Δt gemessene mittlere Geschwindigkeit mit der momentanen, tatsächlichen Geschwindigkeit übereinstimmen. Diese *momentane Geschwindigkeit,* deren Größe sich von Punkt zu Punkt ändern kann, beschreibt demnach einen Bewegungszustand während eines beliebig kleinen Zeitintervalls Δt, für den naturgemäß Δs auch beliebig klein wird. Das betrachtete Zeitintervall Δt wird deshalb stetig kleiner, bis beim Grenzübergang $\Delta t \to 0$ geht. Geometrisch kann man diesen Vorgang als Annäherung des Punktes 2 an den Punkt 1 deuten. Im Grenzübergang wird aus der Sekante die Tangente im Punkt 1. Es gilt

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \qquad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}. \qquad \text{Gl. 2-1}$$

Die Geschwindigkeit ist die Änderung der Ortskoordinate bezogen auf die Zeit.

Geometrisch wird sie durch die Steigung der Tangente im s-t-Diagramm dargestellt. Die Geschwindigkeit-Zeit (v-t)-Funktion ist demnach gleich der ersten Ableitung der s-t-Funktion (Abb. 2-2).

Für die Definition der *Beschleunigung* wird von der Abb. 2-2b ausgegangen. Im Zeitintervall Δt hat sich die Geschwindigkeit v_1 nach v_2 um $\Delta v = v_2 - v_1$ geändert. Die mittlere Beschleunigung war dabei

$$a_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Die Dimension ist die Länge/Zeit^2, die Einheit z.B. m/s^2; m/min^2. Die *Momentanbeschleunigung,* die für die Beschreibung des augenblicklichen Bewegungszustandes notwendig ist, erhält man bei der Betrachtung eines beliebig kleinen Zeitintervalls $\Delta t \to 0$, d.h.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}, \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s}. \qquad \text{Gl. 2-2}$$

Die Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit bezogen auf die Zeit.

Geometrisch wird sie durch die Steigung der Tangente im v-t-Diagramm dargestellt. Die Beschleunigungs-Zeit (a-t)-Funktion stellt demnach die erste Ableitung der v-t-Funktion und die zweite Ableitung der s-t-Funktion dar. Die Umkehrung der Gleichungen 2-1/2 ergibt

$$s = \int v \cdot \mathrm{d}t, \qquad \text{Gl. 2-3}$$

$$v = \int a \cdot \mathrm{d}t. \qquad \text{Gl. 2-4}$$

Die Gleichungen 2-1 bis 4 sollen zusammenfassend gedeutet werden. Zur Veranschaulichung wird die Abb. 2-2c herangezogen.

1. Die Steigung der Tangente an der s-t-Kurve ergibt die Geschwindigkeit. Als Beispiel ist für $t = 7{,}0$ s eine Tangente an den Graph $s(t)$ gezeichnet. Das Steigungsdreieck kann beliebig groß ausgeführt werden, hier wurde $\Delta t = 1{,}0$ s gewählt. Die Abmessung $\Delta s = 2{,}8$ m kann man durch Abgreifen der Strecke Δs und Ansetzen an der Ordinate bei $s = 0$ ermitteln. Zur Zeit $t = 7{,}0$ s bewegt sich der Punkt mit $v = 2{,}8$ m / $1{,}0$ s $= 2{,}8$ m/s.

2. Die Steigung der Tangente an der v-t-Kurve ergibt die Beschleunigung. Als Beispiel ist die Beschleunigung zur Zeit t = 1,0 s ermittelt (a = 2,6 m/s^2).

3. Ein „Flächen"-element im v-t-Diagramm von der „Breite" Δt entspricht der Änderung der Ortskoordinate Δs während des Zeitintervalls Δt. Das folgt aus dem Begriff des Integrals als auch aus der Definition der mittleren Geschwindigkeit

$$v_\mathrm{m} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta s = v_\mathrm{m} \cdot \Delta t$$

Als Beispiel dafür ist die Lageänderung zwischen der 5. und 6. Sekunde eingetragen.

4. Ein „Flächen"-element im a-t-Diagramm von der „Breite" Δt entspricht der Geschwindigkeitsänderung während des Zeitintervalls Δt. Das folgt analog zu Punkt 3 aus

$$a_\mathrm{m} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta v = a_\mathrm{m} \cdot \Delta t$$

In der Abb. 2-2 ist als Beispiel die Änderung der Geschwindigkeit zwischen der 8. und 9. Sekunde eingetragen. Die „Fläche" ist negativ, die Geschwindigkeit verringert sich um 1,5 m/s.

Für die Punkte 3 und 4 ist besonders zu beachten, daß es sich um Änderungen der Lage und Geschwindigkeit handelt und nicht um die Werte s und v.

Die Vorzeichen der einzelnen Größen sagen etwas über den Bewegungszustand aus:

s : Das Vorzeichen gibt die Lage in bezug auf den Nullpunkt an.
v: Das Vorzeichen gibt die Bewegungsrichtung an.
a : Das Vorzeichen gibt die Art der Änderung der Geschwindigkeit an.

Wenn für s ; v ; a die gleiche Richtung als positiv festgelegt wird, kann man folgende Schlußfolgerung ziehen:

1. Haben s und v gleiches Vorzeichen, bewegt sich der Punkt vom Nullpunkt weg. Als Beispiel sei in der Abb. 2-2 der Zustand für t = 1,0 s (s und v negativ) und für t = 5,0 s (s und v positiv) betrachtet.

2. Haben s und v verschiedene Vorzeichen, bewegt sich der Punkt auf den Nullpunkt zu. Beispiel: t = 2,0 s und t = 10,0 s.

3. Haben v und a gleiches Vorzeichen, erfolgt die Bewegung beschleunigt in die Richtung, die das Vorzeichen von v angibt. Das ist einleuchtend für positive Vorzeichen, z.B. t = 3,0 s, gilt aber auch für negative Vorzeichen. Im Bereich t = 10,0 s wird die Geschwindigkeit größer. Es han-

delt sich um eine beschleunigte Bewegung nach unten. Deshalb ist auch die Beschleunigung negativ.

4. Haben v und a verschiedene Vorzeichen, erfolgt die Bewegung verzögert in die Richtung, die das Vorzeichen von v angibt. Als Beispiel sei der Bereich um $t = 7{,}0$ s genannt. Die Bewegung nach oben wird langsamer: v positiv, a negativ. Für $t = 0$ bewegt sich der Punkt nach unten (v negativ) und wird langsamer (a positiv).

Besonders wichtig ist die Erkenntnis, daß das *Vorzeichen von a alleine keine Aussage über den Zustand „beschleunigt" oder „verzögert" ermöglicht. Die Vorzeichen von a und v müssen gemeinsam betrachtet werden.* Eine Tabelle zu der Vorzeichendeutung ist im Abschnitt „Zusammenfassung" dieses Kapitels gegeben.

Ergänzend soll hier kurz auf die dritte Ableitung der $s(t)$-Funktion eingegangen werden. Diese wird *Ruck r* genannt.

$$r = \dot{a} = \ddot{v} = \dddot{s}$$

Der Ruck sagt etwas über die Änderung der Beschleunigung aus. Die Beschleunigung ist über $F = m \cdot a$ unmittelbar mit der Kraft gekoppelt. Damit ist der Ruck ein Maß für die Änderung der Beschleunigungskräfte. Diese empfindet z.B. ein Fahrgast in der Straßenbahn als Ruck. Mit diesem Begriff arbeitet man vorwiegend in der Fahrdynamik und der Getriebelehre.

2.3 Die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

In die Gleichungen des vorigen Abschnittes wird die Bedingung

$$v = \text{konst.} \qquad \mathrm{d}v = 0$$

eingesetzt. Man erhält

aus Gl. 2-2 $\quad a = 0;$

aus Gl. 2-3 $\quad s = v \cdot t + s_0.$ Gl. 2-5

Wie vorausgesetzt, erfolgt die Bewegung ohne Beschleunigung und Verzögerung. In gleichen Zeitabschnitten werden gleiche Strecken zurückgelegt. Wie in Abb. 2-3 dargestellt, erhält man im v-t-Diagramm eine Parallele zur Abszisse, im s-t-Diagramm eine Gerade. An diesen Diagrammen kann man sich die Zusammenhänge nach den Gleichungen 2-1 bis 4 klarmachen. Die Steigung der s-t-Geraden ist $v = \Delta s / \Delta t$ = konst. Die Zunahme des Abstandes s des bewegten Objektes während der Zeit t ist gleich der „Fläche" $v \cdot t$ im v-t-Diagramm. Hinzu kommt der Anfangsabstand s_0.

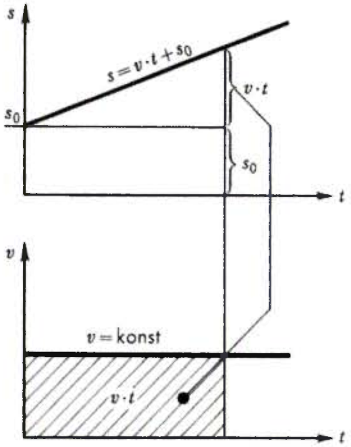

Abb. 2-3: $s(t)$; $v(t)$-Diagramme einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

Beispiel 1 (Abb. 2-4a)
Ein Zug A fährt mit konstanter Geschwindigkeit v_A durch die Position I in Richtung II. Mit einer Zeitdifferenz Δt ist vorher durch die Position II ein Zug B mit konstanter Geschwindigkeit v_B in richtung I durchgefahren. Allgemein und für die unten gegebenen Daten sind zu bestimmen:

a) die Größe der Geschwindigkeit v_B so, daß beide Züge sich an der Stelle III begegnen,
b) der Zeitpunkt t_t der Begegnung,
c) die Zahlenwertgleichung $s_A = f(t)$ und $s_B = f(t)$,
d) die Position beider Züge und deren Entfernung voneinander z.Z. $t = 2000$ s.
e) Der Vorgang ist im s-t-Diagramm darzustellen.

$l_{\text{I-II}} = 50{,}0$ km ; $l_{\text{II-III}} = 30{,}0$ km ; $\Delta t = 200$ s ; $v_A = 25{,}0$ m/s.

Lösung

Zunächst ist es notwendig, die Null-Punkte des Koordinatensystems und die positiven Richtungen festzulegen. Folgendes soll gelten: $s = 0$ an der Stelle III, $t = 0$ wenn A den Punkt I passiert, s und v in Richtung I-II positiv. Dem Leser sei empfohlen mit einer anderen Festlegung die Aufgabe zu lösen. Das Aufstellen der Gleichung ist einfacher, wenn man vorher qualitativ ein s-t-Diagramm skizziert (s. Abb. 2-4b).

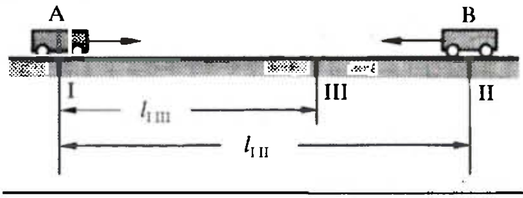

Abb. 2-4a: Zwei in entgegengesetzte Richtung fahrende Züge (Beispiel 1)

$s_A = v_A \cdot t - l_{\text{I-III}}$ (1) Kontrolle: für $t = 0$ ist $s_A = -l_{\text{I-III}}$.

$s_B = v_B\,(t + \Delta t) + l_{\text{II-III}}$ (2) Kontrolle: für $t = -\Delta t$ ist $s_B = l_{\text{II-III}}$.

Die Geschwindigkeit v_B ist in Gleichung (2) positiv eingeführt. Nach der Aufgabenstellung ist ein negatives Ergebnis für v_B zu erwarten. Man könnte bereits im Ansatz v_B negativ einführen. In diesem Falle ergibt sich als Bestätigung ein positives Ergebnis. Für den Treffpunkt in III gilt die Bedingung

$$s_A = s_B = 0 \quad \text{und} \quad t = t_t.$$

Die Gleichung (1) führt auf

$$\underline{t_t = l_{\text{I-III}}/v_A} \tag{3}$$

und die Gleichung (2) auf

$$0 = v_B\,(t_t + \Delta t) + l_{\text{II-III}}$$

Die Einführung von Gl. (3) ergibt nach einfachen Umwandlungen

$$\underline{v_B = -\frac{l_{\text{II-III}} \cdot v_A}{l_{\text{I-III}} + \Delta t \cdot v_A}}. \tag{4}$$

Die Gl. (3) und (4) sind die allgemeinen Lösungen. Die Auswertung führt auf

$$\underline{t_t = 800\text{ s}} \quad \text{und} \quad \underline{v_B = -30{,}0\text{ m/s}} \quad \leftarrow.$$

Wenn der Zug B mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30,0 m/s fährt, begegnen sich die Züge 800 s nach Beginn der Zeitzählung an der Stelle III.

Die Zahlenwertgleichungen werden für die Einheiten

t	s
s	m

aufgestellt:

$$s_A = 25{,}0 \cdot t - 20{,}0 \cdot 10^3,$$

$$s_B = -30{,}0\,(t + 200) + 30{,}0 \cdot 10^3.$$

Die Ortskoordinaten z.Z. $t = 2000$ s sind $s_{A2} = 30{,}0$ km; $s_{B2} = -36{,}0$ km. Beide Züge sind zu diesem Zeitpunkt $\Delta s = 66{,}0$ km voneinander entfernt.

Das maßstäbliche s-t-Diagramm, das innerhalb der Zeichengenauigkeit eine Kontrolle ermöglicht, zeigt die Abb. 2-4b.

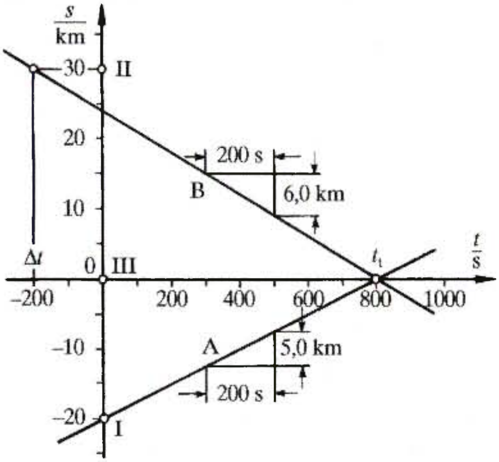

Abb. 2-4b: Das $s(t)$-Diagramm für die Bewegung der Züge von Beispiel 1

Beispiel 2
Eine lineare Bewegung besteht aus folgenden Phasen

1.	0 s	bis	5,0 s	$v = 0{,}060$ m/s
2.	5,0 s	bis	15,0 s	$v = 0{,}090$ m/s
3.	15,0 s	bis	25,0 s	$v = -0{,}120$ m/s

Das könnte die Bewegung eines Werkzeuges sein, das von der Maschine wieder auf den Ausgangspunkt zurückgeführt wird. Die Übergänge von einer Phase zur anderen erfolgen so schnell, daß diese Effekte vernachlässigbar seien.

Für einen einheitlichen Zeitmaßstab sind Ort- und Zeitabhängigkeit analytisch und graphisch darzustellen und der Bewegungszustand z.Z. $t = 20{,}0$ s zu bestimmen.

Lösung

In diesem Beispiel geht es schwerpunktmäßig um die Erfassung eines kinematischen Vorgangs, der sich aus mehreren Abschnitten zusammensetzt. Vorgänge dieser Art (z.B. Steuerung eines Werkzeuges) werden von Rechenprogrammen erfaßt. Deshalb soll hier mit Zahlenwertgleichungen gearbeitet werden. Dazu werden folgende Einheiten festgelegt.

t	s	v
s	m	m/s

Methode 1

Für jeden Abschnitt muß eine Gleichung aufgestellt werden.

1. Abschnitt $0 < t \leq 5{,}0$

$$v = 0{,}06$$

$$s = \int v \cdot \mathrm{d}t = 0{,}060 \cdot t \tag{1}$$

wegen $t = 0$; $s = 0$ ist $s_0 = 0$.

Am Ende dieser Phase befindet sich der Punkt bei $s_{1\mathrm{E}} = 0{,}06 \cdot 5{,}0 = 0{,}30\,\mathrm{m}$

2. Abschnitt $5{,}0 < t \leq 15{,}0$.

Dieser Abschnitt beginnt bei $t = 5{,}0$ s, deshalb muß die Zeitkoordinate t um diesen Betrag verschoben werden. Da die Bewegung von $s = 0{,}30\,\mathrm{m}$ ausgeht (s.o.), ist dieser Wert gleichzeitig die Integrationskonstante s_0 (Position zu Beginn dieses Zeitabschnitts).

$$v = 0{,}090$$

$$s = 0{,}090 \cdot (t - 5{,}0) + 0{,}30 \tag{2}$$

Kontrolle: $t = 5{,}0$ s ; $s = 0{,}30$ m. Am Ende dieser Phase befindet sich der Punkt bei

$$s_{2\mathrm{E}} = 0{,}090\,(15{,}0 - 5{,}0) + 0{,}30 = 1{,}20\ \mathrm{m}.$$

3. Abschnitt $15{,}0 < t \leq 25{,}0$

Zeitverschiebung $\Delta t = 15{,}0$ s ; Integrationskonstante $s_0 = 1{,}20$ m.

$$v = -0{,}12$$

$$s = -0{,}12 \cdot (t - 15{,}0) + 1{,}20. \tag{3}$$

Am Ende ist das Objekt wieder am Ausgangspunkt.

$$s_{3\mathrm{E}} = -0{,}12 \cdot (25{,}0 - 15{,}0) + 1{,}20 = 0.$$

Die Gleichungen (1) bis (3) stellen analytisch die Abhängigkeit Ort-Zeit dar. In einem Rechenprogramm muß durch Verzweigungsstellen sichergestellt sein, daß eine vorgegebene Zeit in die richtige Gleichung eingesetzt wird.

Der Bewegungszustand z.Z. $t = 20{,}0$ s wird aus den Gleichungen des dritten Abschnitts berechnet.

$$v_{20} = -0{,}120 \text{ m/s},$$

$$s_{20} = -0{,}120\,(20{,}0 - 15{,}0) + 1{,}20 = +0{,}60 \text{ m}.$$

Zur Zeit $t = 20{,}0$ s befindet sich der Punkt auf der positiven Achse in 0,60 m Entfernung vom Nullpunkt und bewegt sich mit 0,12 m/s auf diesen zu (s und v haben unterschiedliche Vorzeichen). Die graphische Darstellung zeigt die Abb. 2-5, die die Aussage bestätigt.

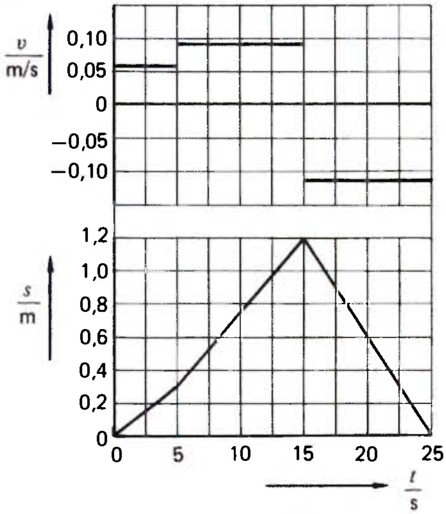

Abb. 2-5: $s(t)$; $v(t)$-Diagramme für Bewegung mit unterschiedlichen Phasen

Methode 2

Mit Hilfe der im Anhang erläuterten FÖPPL-Symbolik kann das unstetige v-t-Diagramm in einer einzigen Gleichung dargestellt werden

$$v = \langle t\rangle^0 \cdot 0{,}06 + \langle t-5\rangle^0 \cdot (0{,}09 - 0{,}06) + \langle t-15\rangle^0 \cdot (-0{,}12 - 0{,}09).$$

Wegen $\langle t - 25\rangle = 0$ für den betrachteten Zeitabschnitt braucht der letzte Sprung nicht eingeführt zu werden.

$$v = \langle t\rangle^0 \cdot 0{,}06 + \langle t-5\rangle^0 \cdot 0{,}03 - \langle t-15\rangle^0 \cdot 0{,}21. \tag{4}$$

Die Integration liefert mit $s_0 = 0$

$$s = t \cdot 0{,}06 + \langle t-5 \rangle \cdot 0{,}03 - \langle t-15 \rangle \cdot 0{,}21. \qquad (5)$$

Diese Gleichung stellt die Ort-Zeit-Abhängigkeit für den ganzen Vorgang dar. Die Programmierung ist einfach, die FÖPPL-Klammern werden durch Verzweigungen erfaßt.

Den Bewegungszustand z.Z. $t = 20{,}0$ s erhält man aus den Gl. (4) und (5).

$$v_{20} = 20^\circ \cdot 0{,}06 + (20-5)^\circ \cdot 0{,}03 - (20-15)^\circ \cdot 0{,}21,$$

$$v_{20} = 1 \cdot 0{,}06 + 1 \cdot 0{,}03 - 1 \cdot 0{,}21 = -\,0{,}120 \text{ m/s},$$

$$s_{20} = 20 \cdot 0{,}06 + 15 \cdot 0{,}03 - 5 \cdot 0{,}21 = +\,0{,}60 \text{ m}.$$

Die Deutung ist oben gegeben.

Besonders zu beachten ist, daß die obige Gleichung in einem Zug aufgestellt wurde. Es war nicht notwendig, für die Unstetigkeiten (Abschnittsgrenzen) die Lage des Punktes bzw. die Integrationskonstanten zu bestimmen. Das ist gerade für komplizierte Vorgänge eine wesentliche Erleichterung.

2.4 Die Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Für die gleichförmig beschleunigte Bewegung gilt a = konst. und damit nach Gleichung 2-4

$$v = \int a \cdot \mathrm{d}t,$$

$$v = a \cdot t + v_0. \qquad \text{Gl. 2-6}$$

und nach Gleichung 2-3

$$s = \int v \cdot \mathrm{d}t$$

$$= \int (a \cdot t + v_0)\,\mathrm{d}t,$$

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0. \qquad \text{Gl. 2-7}$$

Die Ortskoordinate ändert sich quadratisch mit der Zeit, die Geschwindigkeit linear. Das ist in den Diagrammen Abb. 2-6 dargestellt. Die Inte-

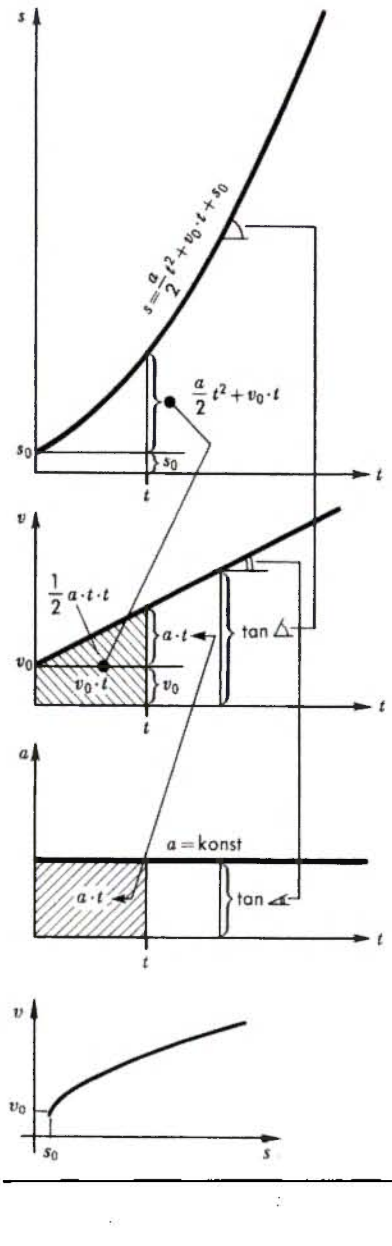

Abb. 2-6: $s(t)$; $v(t)$; $a(t)$; $v(s)$-Diagramme für gleichförmig beschleunigte Bewegung

grationskonstanten v_0 und s_0 entsprechen der bei Beginn der Zeitzählung (t = 0) schon vorhandenen Geschwindigkeit und dem Abstand vom 0-Punkt.

Auch hier ist es zweckmäßig, sich die geometrischen Zusammenhänge klar zu machen. Die Geschwindigkeit setzt sich aus der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der durch die Beschleunigung verursachten Geschwindigkeitszunahme $a \cdot t$ (Rechteck im a-t-Diagramm) zusammen. Die vom v-t-Diagramm eingeschlossene Fläche besteht aus dem Dreieck $1/2 \cdot a \cdot t \cdot t$ und dem Rechteck $v_0 \cdot t$. Das entspricht der Verlagerung während der Zeit t. Der Abstand der Ausgangslage s_0 muß hinzugezählt werden. Umgekehrt erhält man von dem s-t-Diagramm ausgehend das v-t-Diagramm als erste und das a-t-Diagramm als zweite Ableitung.

Die Gleichungen 2-6/7 sind für die Berechnung aller Geschwindigkeiten, Orte und Zeiten ausreichend. In vielen Fällen ist es zweckmäßig, mit einer Beziehung zwischen Geschwindigkeit, Beschleunigung und der Ortskoordinate zu arbeiten, d.h. die Zeit t zu eliminieren.

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v}, \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{a}.$$

Nach Gleichsetzung und Trennung der Variablen

$$v \cdot \mathrm{d}v = a \cdot \mathrm{d}s, \qquad \text{Gl. 2-8}$$

$$\int_{v_0}^{v} v \cdot \mathrm{d}v = a \cdot \int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot (v^2 - v_0^2) = a \cdot (s - s_0),$$

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot (s - s_0) + v_0^2. \qquad \text{Gl. 2-9}$$

Diese Gleichung stellt den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Lage dar. Man verwendet sie vorteilhaft, wenn der Zeitpunkt eines Zustandes nicht gegeben oder nicht gesucht ist. Für $a = g$ (Erdbeschleunigung), $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$ liefert die Gleichung 2-9 die bekannte Beziehung für die Fallgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gH}$. Im v-s-Diagramm erhält man einen Parabelast nach Abb. 2-6. Man kann diesen durch Auftragen von v und s für den gleichen Zeitpunkt t konstruieren.

Beispiel 1
Ein Schienenfahrzeug fährt nach folgendem Programm

1. $\Delta s = 130{,}0$ m von Ruhe aus gleichmäßige Beschleunigung auf 20,0 m/s,
2. $\Delta t = 20{,}0$ s Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit
3. $\Delta s = 70{,}0$ m gleichmäßige Verzögerung bis zum Stillstand

Dieser Bewegungsablauf ist analytisch und graphisch im einheitlichen Zeitmaßstab darzustellen und der Bewegungszustand für $t = 35{,}0$ s zu bestimmen.

Lösung (Abb. 2-7)

In diesem Beispiel soll vor allem die einheitliche Darstellung eines Bewegungsablaufs behandelt werden, der sich aus mehreren Abschnitten zusammensetzt. Folgende Einheiten werden für die Zahlenwertgleichungen festgelegt

t	s	v	a
s	m	m/s	m/s²

Methode 1

Für alle Abschnitte werden Gleichungen aufgestellt, wobei Zeitverschiebung und Übergangsbedingungen (Integrationskonstanten) zu beachten sind.

1. Abschnitt (Beschleunigung)

Zunächst müssen Beschleunigung und Zeitdauer ermittelt werden. Da nach Aufgabenstellung die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Ort gegeben ist, empfiehlt sich die Anwendung der Gleichung 2-9

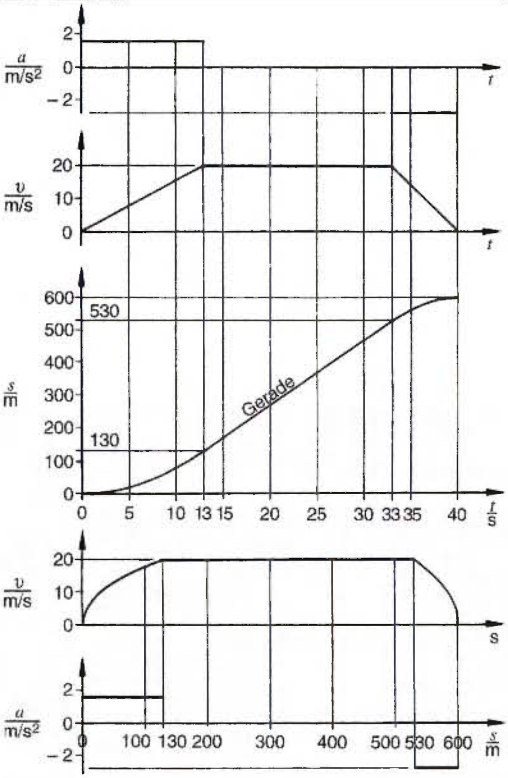

Abb. 2-7: Fahrdiagramme für Bewegung mit a = konst. in mehreren Phasen

$$v^2 = 2a(s - s_0) + v_0 \quad \text{mit} \quad v_0 = 0 \quad ; \quad s_0 = 0$$

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{20^2 (\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 130\,\mathrm{m}} = 1{,}54\,\mathrm{m/s^2}$$

Mit diesem Ergebnis kann aus der Gl. 2-6 die Zeitdauer für diesen Abschnitt berechnet werden

$$v = a \cdot t + v_0 \quad \text{mit} \quad v_0 = 0\,; t = t_1\,; v = v_1 = 20\,\mathrm{m/s}$$

$$t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{20\,\mathrm{m/s}}{1{,}54\,\mathrm{m/s^2}} = 13{,}0\,\mathrm{s}$$

Unter Beachtung der Einheiten erhält man

$$a = 1{,}54 \quad \Rightarrow \quad v = \int a \cdot \mathrm{d}t = 1{,}54 \cdot t + v_0$$

Mit $v_0 = 0$ ist $\qquad v = 1{,}54 \cdot t$

$$s = \int v \cdot \mathrm{d}t = \frac{1{,}54}{2} t^2 + s_0$$

Mit $s_0 = 0$ ist $\qquad s = 0{,}77 \cdot t^2$

Zusammenfassend wird geschrieben

$$\left.\begin{aligned} a &= 1{,}54 && (1) \\ v &= 1{,}54 \cdot t && (2) \\ s &= 0{,}77 \cdot t^2 && (3) \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 13{,}0\,\mathrm{s}$$

2. Abschnitt (Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit)

Dieser Abschnitt beginnt bei s = 130 m; t = 13,0 s, wobei eine Geschwindigkeit von 20 m/s erreicht ist. Er endet nach t_2 = 13,0 s + 20,0 s = 33,0 s.

$$\left.\begin{aligned} a &= 0 \\ v &= 20 && (4) \\ s &= 20(t - 13{,}0) + 130 && (5) \end{aligned}\right\} \quad 13{,}0\,\mathrm{s} \le t \le 33{,}0\,\mathrm{s}$$

Kontrolle: $\quad t = 13$ s $\quad ; \quad s = 130$ m.

Am Ende des zweiten Abschnitts befindet sich der Wagen bei

$$s_2 = 20\,(33 - 13) + 130 = 530 \text{ m}$$

3. Abschnitt (Bremsen)

Dieser Abschnitt beginnt bei $s = 530$ m; $t = 33{,}0$ s, wobei die Geschwindigkeit 20 m/s beträgt. Zunächst werden Verzögerung und Dauer analog zu Punkt 1 berechnet

$$v^2 = 2a \cdot s + v_0^2 \quad \text{mit} \quad v = 0\,;\, v_0 = 20\,\text{m/s}$$

$$a = -\frac{v^2}{2s} = -\frac{20^2 (\text{m/s})^2}{2 \cdot 70\,\text{m}} = -2{,}86\,\text{m/s}^2$$

$$v = a \cdot t + v_0 \quad \text{mit} \quad v = 0\,;\, v_0 = 20\,\text{m/s}$$

$$\Delta t = \frac{-20\,\text{m/s}}{-2{,}86\,\text{m/s}^2} = 7{,}0\,\text{s}$$

Der Abschnitt endet bei $t_3 = 33{,}0$ s + 7,0 s = 40,0 s. Insgesamt erhält man

$$\left.\begin{aligned} a &= -2{,}86 \\ v &= -2{,}86\,(t - 33{,}0) + 20 \\ s &= -1{,}43\,(t - 33{,}0)^2 + 20\,(t - 33{,}0) + 530 \end{aligned}\right\} \quad 33\,\text{s} < t < 40\,\text{s} \qquad \begin{aligned} &(6) \\ &(7) \\ &(8) \end{aligned}$$

Kontrollen: $t = 33{,}0$ s ; $v = 20{,}0$ m/s ; $s = 530$ m
$t = 40{,}0$ s ; $v = 0$

Die gesamte Fahrstrecke errechnet sich aus Gleichung (8) mit $t = 40{,}0$ s

$$l = -1{,}43 \cdot 7{,}0^2 + 20 \cdot 7 + 530 = 600 \text{ m}$$

Die graphische Darstellung der Gleichungen (1) bis (8) zeigt die Abb. 2-7. Das Diagramm $v(s)$ und $a(s)$ erhält man durch Auftragen der Werte v und a über s für jeweils die gleiche Zeit t.

Der Bewegungszustand z.Z. $t = 35{,}0$ s wird aus den Gl. (6), (7), (8) berechnet.

$$a_{35} = -2{,}86 \text{ m/s}^2,$$

$$v_{35} = -2{,}86\,(35 - 33) + 20 = +14{,}3 \text{ m/s},$$

$$s_{35} = -1{,}43\,(35 - 33)^2 + 20 \cdot 2 + 530 = +564 \text{ m}.$$

Im Zeitpunkt $t = 35{,}0$ s befindet sich das Fahrzeug 564 m vom Nullpunkt entfernt und bewegt sich mit 14,3 m/s von diesem weg (s und v haben gleiches Vorzeichen). Dabei wird es mit 2,86 m/s^2 verzögert (v und a haben unterschiedliche Vorzeichen).

Methode 2 (FÖPPL)

Dieser Rechenformalismus ist im Anhang erklärt. Auch hier ist es notwendig, die Dauer der einzelnen Abschnitte zu berechnen, wenn diese nicht vorgegeben sind. Das ist oben bereits geschehen. Das Ergebnis ist das a-t-Diagramm nach Abb. 2-7, von dem ausgegangen wird. Die Integrationskonstanten sind nach Aufgabenstellung $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$.

$$a = \langle t\rangle^0 1{,}54 + \langle t-13\rangle^0 (0-1{,}54) + \langle t-33\rangle^0 (-2{,}86-0)$$

$$a = \langle t\rangle^0 1{,}54 - \langle t-13\rangle^0 1{,}54 - \langle t-33\rangle^0 2{,}86 \tag{9}$$

$$v = \int a \cdot \mathrm{d}t = t \cdot 1{,}54 - \langle t-13\rangle 1{,}54 - \langle t-33\rangle 2{,}86 \tag{10}$$

$$s = \int v \cdot \mathrm{d}t = t^2 \cdot 0{,}77 - \langle t-13\rangle^2 0{,}77 - \langle t-33\rangle^2 1{,}43 \tag{11}$$

Diese drei Gleichungen erfassen den gesamten Bewegungsablauf.

Kontrollen:	$t = 0$;	$v = 0$;	$s = 0$
	$t = 13{,}0$ s ;	$v = 20{,}0$ m/s ;	$s = 130$ m
	$t = 33{,}0$ s ;	$v = 20{,}0$ m/s ;	$s = 530$ m
	$t = 40{,}0$ s ;	$v = 0$;	$s = 600$ m

Werden die Gleichungen (1) bis (8) mit einem Rechenprogramm ausgewertet, muß durch eine Verzweigungsstelle sichergestellt werden, daß eine vorgegebene Zeit t in die richtige Gleichung eingesetzt wird. Analoges gilt für die FÖPPL-Klammer. Wenn deren Inhalt negativ wird, muß <> = 0 gesetzt werden.

Die Gleichungen (9), (10), (11) werden für $t = 35{,}0$ s ausgewertet.

$$a_{35} = 35^\circ \cdot 1{,}54 - (35-13)^\circ \cdot 1{,}54 - (35-32)^\circ \cdot 2{,}86,$$

$$a_{35} = 1 \cdot 1{,}54 - 1 \cdot 1{,}54 - 1 \cdot 2{,}86 = -2{,}86 \text{ m/s}^2,$$

$$v_{35} = 35 \cdot 1{,}54 - 22 \cdot 1{,}54 - 2 \cdot 2{,}86 = +14{,}3 \text{ m/s},$$

$$s_{35} = 35^2 \cdot 0{,}77 - 22^2 \cdot 0{,}77 - 2^2 \cdot 1{,}43 = +564 \text{ m}.$$

Die Beschreibung des Bewegungszustandes ist oben gegeben.

Beispiel 2 (Abb. 2-8)
Zwei PKW fahren in entgegengesetzte Richtung in ein einspuriges Teilstück einer Straße ein. Wenn die Wagen einen Abstand l_{AB} haben, bremsen beide gleichzeitig. Dieser Vorgang ist unter Annahme gleichmäßiger Verzögerung analytisch und graphisch darzustellen und zu diskutieren. Die Bewegungsgleichungen sind für folgende Daten auszuwerten.

Anfangsgeschwindigkeit	$v_{A0} = 20{,}0\ \mathrm{m/s}$	;	$v_{B0} = 18{,}0\ \mathrm{m/s}$
Verzögerung	$\lvert a_A \rvert = 5{,}0\ \mathrm{m/s^2}$	;	$\lvert a_B \rvert = 6{,}0\ \mathrm{m/s^2}$
Abstand	$l_{AB} = 60\ \mathrm{m}$.		

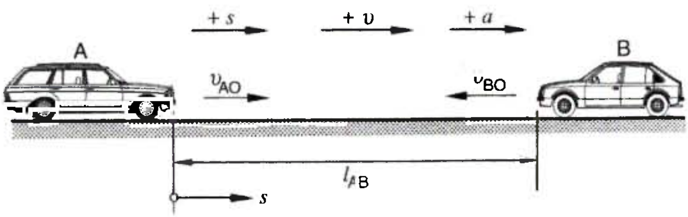

Abb. 2-8: Zwei PKW auf Kollisionskurs

Lösung (Abb. 2-9)

Zunächst müssen die Nullpunkte für die Koordinaten festgelegt werden. Die Zeitzählung soll bei einsetzender Bremsung beginnen, die Ortskoordinate wird von A z.Z. $t = 0$ (Ausgangslage von PKW A) gemessen.

Dieses Beispiel soll vornehmlich die Vorzeichenfragen in Zusammenhang mit Geschwindigkeiten und Beschleunigungen klären helfen. Da s von A nach rechts gemessen wird, ist es sinnvoll, auch v und a in diese Richtung positiv festzulegen. Damit ergeben sich folgende Vorzeichen:

PKW A fährt verzögert nach rechts:	v positiv, a negativ.
PKW B fährt verzögert nach links:	v negativ, a entgegengesetzt gerichtet, demnach positiv!

Hier zeigt sich, daß das Vorzeichen von a alleine keine Aussage über den Zustand „verzögert“ oder „beschleunigt“ ermöglicht. Darauf wurde ausführlich bereits im Abschnitt 2.1 eingegangen. Aus diesen Überlegungen folgt

$$v_A = -a_A \cdot t + v_{A0} \tag{1}$$

$$s_A = -\frac{a_A}{2} t^2 + v_{A0} \cdot t \tag{2}$$

$$v_B = +a_B \cdot t - v_{B0} \tag{3}$$

$$s_B = \frac{a_B}{2} t^2 - v_{B0} \cdot t + l_{AB} \tag{4}$$

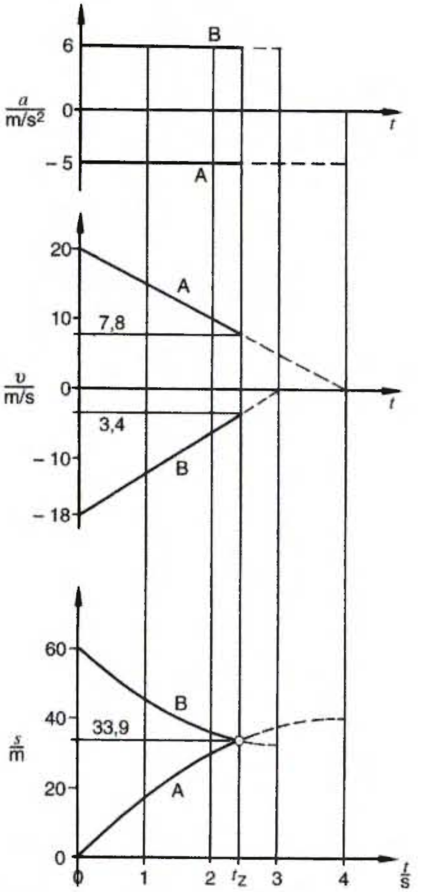

Abb. 2-9: $s(t)$; $v(t)$; $a(t)$-Diagramme für PKWs auf Kollisionskurs

In diesem Ansatz sind die Vorzeichenüberlegungen bereits eingearbeitet. Bei der Zahlenauswertung werden alle Größen positiv eingesetzt, z.B. $v_{B0} = 18$ m/s. Grundsätzlich kann man die Gleichungen als Formeln (Gl. 2-6/7/9) schreiben. In diesem Falle müssen die Vorzeichen beim Einsetzen der Zahlenwerte festgelegt werden: $v_{B0} = -18$ m/s; $a_B = +6{,}0$ m/s^2. Der erste Weg soll hier weiter verfolgt werden, denn man würde z.B. sagen, der Wagen B fährt mit 18 m/s und nicht, er fährt mit minus 18 m/s.

Die Gleichungen (1) bis (4) gelten bis zum Stillstand der Wagen. Die Zeit t_S bis dahin berechnet sich aus (1) und (3)

$$\text{A:} \quad \text{aus} \quad v_A = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{AS} = \frac{v_{A0}}{a_A} \tag{5}$$

$$\text{B:} \quad \text{aus} \quad v_B = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{BS} = \frac{v_{B0}}{a_B} \tag{6}$$

Setzt man diese Zeiten in (2) und (4) ein, erhält man die Positionen der Wagen nach der Bremsung, vorausgesetzt, es ist kein Zusammenstoß erfolgt. Nach einer einfachen Umwandlung ergibt sich

$$s_{AS} = \frac{v_{A0}^2}{2a_A} \quad ; \quad s_{BS} = -\frac{v_{B0}^2}{2a_B} + l_{AB}$$

Das sind Positionen und nicht Bremswege. Wenn beide Wagen unmittelbar – aber nicht gleichzeitig! – voreinander zum Stehen kommen, gilt $s_{AS} = s_{BS}$. Aus dieser Bedingung kann man den mindestens erforderlichen Abstand $l_{AB\,min}$ berechnen

$$l_{AB\min} = \frac{v_{A0}^2}{2a_A} + \frac{v_{B0}^2}{2a_B}$$

Im vorliegenden Fall

$$l_{AB\min} = \frac{20^2 (m/s)^2}{2 \cdot 5{,}0\,m/s^2} + \frac{18^2 (m/s)^2}{2 \cdot 6{,}0\,m/s} = 67{,}0\,m$$

Insgesamt fehlen 7,0 m, es erfolgt ein Zusammenstoß. Am einfachsten ist es anzunehmen, daß dabei beide Wagen fahren und die Gleichungen (1) bis (4) gelten. Der Zusammenstoß ist dann gekennzeichnet durch $s_A = s_B$ für $t = t_Z$

$$-\frac{a_A}{2} t_Z^2 + v_{A0}\, t_Z = \frac{a_B}{2} t_Z^2 - v_{B0}\, t_Z + l_{AB}$$

Das führt auf die quadratische Gleichung für t_Z

$$t_Z^2 - \frac{2(v_{A0} + v_{B0})}{a_A + a_B} t_Z + \frac{2 l_{AB}}{a_A + a_B} = 0$$

mit der Lösung

$$t_Z = \frac{v_{A0} + v_{B0}}{a_A + a_B} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{A0} + v_{B0}}{a_A + a_B}\right)^2 - \frac{2 l_{AB}}{a_A + a_B}}$$

Dieser Wert muß kleiner sein, als die unter (5) und (6) berechneten Zeiten. Trifft das nicht zu, fährt ein Fahrzeug auf ein bereits stehendes auf. In allgemeiner Form ist die Untersuchung sehr aufwendig, deshalb sollen Zahlenwerte berechnet werden

$$t_{AS} = \frac{v_{A0}}{a_A} = \frac{20\text{m/s}}{5{,}0\text{m/s}^2} = 4{,}0\text{s}$$

$$t_{BS} = \frac{v_{B0}}{a_B} = \frac{18\text{m/s}}{6{,}0\text{m/s}^2} = 3{,}0\text{s}$$

$$t_Z = \frac{(20+18)\,\text{m/s}}{(5+6)\text{m/s}} \pm \sqrt{\left(\frac{38\,\text{m/s}}{11\,\text{m/s}^2}\right)^2 - \frac{2\cdot 60\text{m}}{11\,\text{m/s}^2}}$$

$$t_{Z1} = 4{,}47\text{s} \quad \underline{t_{Z2} = 2{,}44\text{s}}$$

Die erste Lösung hat keine physikalische Bedeutung, die zweite zeigt, daß beide Wagen unmittelbar vor dem Zustammenstoß in Bewegung sind. Dieser erfolgt an der Stelle (Gl. (2))

$$\underline{s_{AZ}} = -\frac{5{,}0\text{m/s}^2}{2}\cdot 2{,}44^2\text{s}^2 + 20(\text{m/s})\cdot 2{,}44\,\text{s} \underline{= 33{,}9\,\text{m}}$$

Kontrolle (Gl. (4))

$$s_{BZ} = +\frac{6{,}0\text{m/s}^2}{2}\cdot 2{,}44^2\text{s}^2 - 18(\text{m/s})\cdot 2{,}44\text{ s} + 60\text{ m} = 33{,}9\text{ m}$$

Dabei betragen die Geschwindigkeiten ((1) und (3))

$$\underline{v_{AZ}} = -5{,}0(\text{m/s}^2)\cdot 2{,}44\text{s} + 20\text{m/s} = \underline{+7{,}8\,\text{m/s}\,(\rightarrow)}$$

$$\underline{v_{BZ}} = 6{,}0(\text{m/s}^2)\cdot 2{,}44\text{s} - 18\text{m/s} = \underline{-3{,}36\,\text{m/s}\,(\leftarrow)}$$

Die graphische Darstellung des Vorgangs zeigt die Abb. 2-9. Die Gleichungen (1) bis (4) sind für die gegebenen Daten ausgewertet. Den Diagrammen kann man folgendes entnehmen: bei größerem Abstand l_{AB} fährt A auf den bereits stehenden Wagen B auf (3,0 s < t < 4,0 s). Bei noch größerem Anfangsabstand (l_{AB} > 67 m) schneiden sich die Linien $s(t)$ nicht, es erfolgt kein Unfall.

Es wird dringend empfohlen, schon vor der bzw. parallel zur Lösung, qualitative Diagramme nach Abb. 2-9 anzufertigen. Die Zusammenhänge kann man in den Diagrammen besonders gut erkennen.

Beispiel 3 (Abb. 2-10)
Zwei PKW fahren auf der Autobahn mit v_0 = konst. = 144 km/h im Abstand ca. „halber Tacho" Δs = 70 m in eine Nebelbank mit einer Sichtweite von l = 120 m. Der Fahrer A erkennt ein Stauende C und bremst nach

einer Reaktionszeit Δt = 1,0 s mit einer mittleren Verzögerung von $|a|$ = 6,0 m/s^2. Der nachfolgende Fahrer B bremst seinerseits mit gleicher Reaktionszeit und Verzögerung. Für diesen Vorgang sind die Bewegungsgleichungen im einheitlichem Zeitmaßstab aufzustellen und graphisch darzustellen.

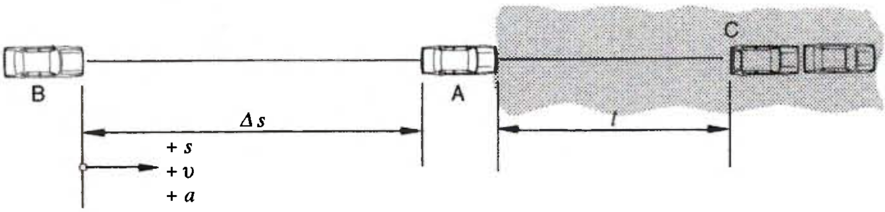

Abb. 2-10: Nebelbank auf Autobahn (Beispiel 3)

Lösung (Abb. 2-11)

Die Nullpunkte werden definiert. Die Zeitmessung beginnt (t = 0), wenn der Fahrer A das Stauende erblickt. Die Ortskoordinate wird vom Wagen B z.Z. t = 0 gemessen. Der Vorgang besteht für jedes Fahrzeug aus zwei Abschnitten, zunächst erfolgt die Bewegung während der Reaktionszeit mit v = konst., anschließend mit a = konst. Das Verfahren nach FÖPPL eignet sich besonders gut und soll deshalb angewendet werden. Dem Leser sei die konventionelle Methode als Übung empfohlen (s. Beispiel 1). Für die Zahlenwertgleichungen werden folgende Einheiten festgelegt.

t	s	v	a
s	m	m/s	m/s^2

Ausgegangen wird vom a-t-Diagramm nach Abb. 2-11

$$a_A = -\langle t-1\rangle^0 \cdot 6{,}0 \tag{1}$$

$$v_A = \int a_A \cdot dt = -\langle t-1\rangle \cdot 6{,}0 + v_{A0}$$

$$v_A = -\langle t-1\rangle \cdot 6{,}0 + 40{,}0 \tag{2}$$

$$s_A = \int v_A \cdot dt = -\langle t-1\rangle^2 \cdot 3{,}0 + 40t + s_{A0}$$

$$s_A = -\langle t-1\rangle^2 \cdot 3{,}0 + 40t + 70 \tag{3}$$

$$a_B = -\langle t-1\rangle^0 \cdot 6{,}0 \tag{4}$$

$$v_B = -\langle t-2 \rangle \cdot 6{,}0 + 40 \tag{5}$$

$$s_B = -\langle t-2 \rangle^2 \cdot 3{,}0 + 40t \tag{6}$$

Diese Gleichungen stellen die Bewegungszustände der beiden Wagen dar. Bis zu welcher Zeit sie gelten, ist zunächst unbekannt. Entweder bis zum Zeitpunkt des freien Ausbremsens oder des Aufpralls. Für die weitere Berechnung wird ein Aufprall angenommen. Der Wagen A ist an der Stelle C z.Z. t_{AC}. Dabei hat er bei Vernachlässigung der Wagenlänge die Position $s_{AC} = \Delta s + l = 190$ m. Den Zeitpunkt des Aufpralls erhält man aus der Gleichung (3) mit $\langle t_{AC} - 1 \rangle = (t_{AC} - 1)$ wegen $t_{AC} > 1$

$$190 = -(t_{AC} - 1)^2 \cdot 3 + 40 \cdot t_{AC} + 70$$

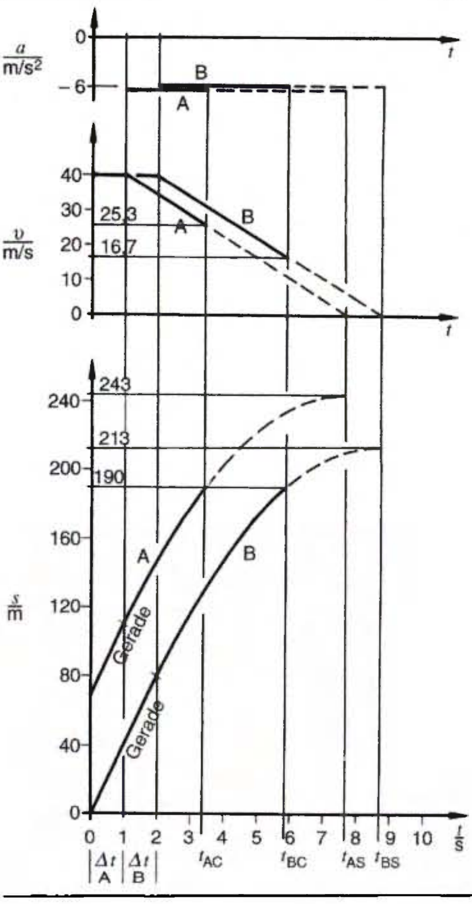

Abb. 2-11: $s(t)$; $v(t)$; $a(t)$-Diagramme für Auffahrunfall nach Beispiel 3

Das ist eine quadratische Gleichung für t_{AC}. Einfache Umwandlungen führen auf

$$t_{AC}^2 - \frac{46}{3} t_{AC} + \frac{123}{3} = 0$$

mit der Lösung t_{AC} = 3,45 s. Die Annahme eines Aufpralls ist richtig. Käme der Wagen vor dem Stauende zum Stillstand ergäbe sich für t_{AC} kein reeller Wert. Unter der Wurzel der Lösung stände ein negativer Wert. Die Aufprallgeschwindigkeit beträgt nach Gleichung (2)

$$\underline{v_{AC}} = -(3{,}45 - 1) \cdot 6{,}0 + 40 = 25{,}3\,\text{m/s} \mathrel{\hat{=}} \underline{91\,\text{km/h!}}$$

Analog berechnet man für B mit (6) und (5)

$$190 = -(t_{BC} - 2)^2 \cdot 3 + 40 \cdot t_{BC}$$

$$t_{BC}^2 - \frac{52}{3} t_{BC} + \frac{202}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{t_{BC} = 5{,}88\,\text{s}}$$

$$\underline{v_{BC}} = -(5{,}88 - 2) \cdot 6 + 40 = 16{,}7\,\text{m/s} \mathrel{\hat{=}} \underline{60\,\text{km/h}}$$

Die Rechnung zeigt, daß der als sicher geltende Abstand „halber Tacho" eine genügend lange freie Bahn des Vordermannes voraussetzt. Zum Schluß soll berechnet werden, an welcher Stelle die Wagen auf freier Strecke zum Stillstand gekommen wären. Dieser Zeitpunkt t_S wird aus der Bedingung $v = 0$ ermittelt. Dabei gilt <> = () wegen des positiven Klammerinhalts

A: Gl. (2) $0 = -(t_{AS} - 1) \cdot 6 + 40 \Rightarrow t_{AS} = 7{,}67$ s

B: Gl. (5) $0 = -(t_{BS} - 2) \cdot 6 + 40 \Rightarrow t_{BS} = 8{,}67$ s

Diese Werte werden in die Gleichungen (3) und (6) eingesetzt

$$s_{A\,max} = -6{,}67^2 \cdot 3 + 40 \cdot 7{,}67 + 70 = 243\ \text{m}$$

$$s_{B\,max} = -6{,}67^2 \cdot 3 + 40 \cdot 8{,}67 = 213\ \text{m}$$

Dem Fahrer A fehlen 243 m – 190 m = 53 m Bremsweg, dem Fahrer B 23 m.

Der Vorgang ist graphisch in der Abb. 2-11 dargestellt. Zwischenwerte der Parabeläste $s(t)$ können mit (3) und (6) berechnet werden. Die Lösung wird erleichtert, wenn man parallel zur Rechnung qualitativ die Diagramme $v(t)$ und $s(t)$ zeichnet.