



Grundlagen der Zeitreihenanalyse

Von
Dr. Bernd Leiner
Professor für Statistik
an der
Universität Heidelberg

4., völlig neu bearbeitete Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Dieses Werk ist bis einschließlich der 3. Auflage unter dem Titel „Einführung in die Zeitreihenanalyse“ erschienen.

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Leiner, Bernd:

Grundlagen der Zeitreihenanalyse / von Bernd Leiner. – 4., völlig neu bearb. Aufl. – München ; Wien : Oldenbourg, 1998

Bis 3. Aufl. u.d.T.: Leiner, Bernd: Einführung in die Zeitreihenanalyse
ISBN 3-486-24756-5

© 1998 R. Oldenbourg Verlag
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0, Internet: <http://www.oldenbourg.de>

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

ISBN 3-486-24756-5

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	IX
1. Kapitel: Einführung	1
1.1. Allgemeines.....	2
1.2. Die Bewegungskomponenten einer Zeitreihe.....	6
2. Kapitel: Trendschätzungen und Trendeliminationen	10
2.1. Trendfunktionstypen.....	10
2.2. Linearer Trend für die gesamte Zeitreihe.....	15
2.3. Linearer Trend für einen Stützbereich.....	21
2.4. Trendpolynom 2. Grades für die gesamte Zeitreihe.....	26
2.5. Trendpolynom 3. Grades für die gesamte Zeitreihe.....	28
2.6. Trendpolynom 2. und 3. Grades für einen Stützbereich.....	31
2.7. Trendschätzungen am aktuellen Rand eines Stützbereichs.....	39
2.7.1. Lineares Trendpolynom.....	39
2.7.2. Trendpolynom 3. Grades.....	41
2.8. Stützbereiche mit gerader Anzahl M von Elementen.....	44
2.9. Trendelimination mit Differenzen.....	46
2.10. Die variate difference-Technik.....	48
3. Kapitel: Saisonbereinigung	52
3.1. Das Phasendurchschnittsverfahren.....	52
3.2. Die X11-Variante des Census-Verfahrens II.....	56
3.3. Weitere Verfahren zur Saisonbereinigung.....	59
4. Kapitel: Grundkonzepte des ARIMA-Ansatzes	62
4.1. Einführung.....	62
4.2. Annahmen.....	63
4.3. Lineare zeitinvariante Filter.....	64
4.4. Die moving-average-Darstellung eines Filters.....	67
4.5. Die autoregressive Darstellung eines Filters.....	68
4.6. Lag-Operatoren.....	69
4.7. Komplexe Zahlen.....	72
4.8. Frequenz-Antwort-Funktion und Transferfunktion.....	75

4.9. Schwache Stationarität des Inputprozesses.....	77
4.10. Auswirkungen auf den Outputprozeß.....	77
4.11. Nutzung für die moving-average-Darstellung.....	80
4.12. Das ARMA-Modell.....	81
5. Kapitel: Autoregressive Modelle.....	84
5.1. Das AR(p)-Modell.....	84
5.2. Beispiele.....	85
5.3. Eigenschaften des AR(1)-Modells.....	86
5.4. Autokorrelationen des AR(p)-Modells.....	88
5.5. Die Yule-Walker-Gleichungen.....	90
5.6. Die Varianz des AR(p)-Modells.....	94
5.7. Eigenschaften des AR(p)-Modells.....	96
5.8. Die partiellen Autokorrelationskoeffizienten.....	96
6. Kapitel: Moving-average-Modelle.....	101
6.1. Allgemeines.....	101
6.2. Autokorrelationen des MA(q)-Modells.....	102
6.3. Eigenschaften des MA(q)-Modells.....	106
7. Kapitel: Modellmischungen.....	110
7.1. ARMA(p,q)-Modelle.....	110
7.2. ARIMA(p,d,q)-Modelle.....	113
8. Kapitel: Exponentielles Glätten.....	117
8.1. Allgemeines.....	117
8.2. Die Rekursionsformel.....	117
8.3. Der Startwert.....	118
8.4. Die Gewichtung der Beobachtungen.....	119
8.5. Die Bestimmung von α	121
8.6. Erweiterungen.....	122
9. Kapitel: Grundbegriffe der Frequenzanalyse.....	123
9.1. Periodische Funktionen.....	123
9.2. Stochastische Prozesse.....	128
9.3. Univariate Spektralanalyse.....	130
9.4. Lagfenster und Spektralfenster.....	134
9.4.1. Das Rechtecklagfenster.....	136
9.4.2. Das Dreiecklagfenster.....	137
9.4.3. Das von Hann-Tukey-Lagfenster.....	138
9.4.4. Das Hamming-Lagfenster.....	138
9.4.5. Das Parzen-Lagfenster.....	139
9.5. Beurteilungsmaße.....	140
9.5.1. Das Varianzverhältnis.....	140

9.5.2. Die Anzahl der Freiheitsgrade.....	141
9.5.3. Die Bandbreite.....	142
9.5.4. Vergleichende Betrachtung.....	144
9.6. Bivariate Spektralanalyse.....	145
9.6.1. Autokovarianzen und Kreuzkovarianzen.....	145
9.6.2. Kreuzspektren.....	147
9.6.3. Kospektrum und Quadratspektrum.....	149
9.6.4. Amplitude und Phase.....	150
9.6.5. Quadratische Kohärenz.....	152
9.6.6. Die Gains.....	153
Anhang	
A1. Transformationen des Zeitindexes.....	155
A1.1. Additive Transformationen.....	155
A1.2. Multiplikative Transformationen.....	157
A2. Trendschätzungen am aktuellen Rand.....	159
A2.1. Linearer Trend.....	159
A2.2. Polynomialer Trend 2. Grades.....	160
A2.3. Polynomialer Trend 3. Grades.....	161
Literaturverzeichnis.....	162
Sachverzeichnis.....	168

Vorwort

Meine im R. Oldenbourg Verlag erschienene *Einführung in die Zeitreihenanalyse* ist in die Jahre gekommen. An die Stelle der anstehenden 4. Auflage soll nun, nach einer gründlichen Überarbeitung, ein Lehrbuch treten, das den Titel *Grundlagen der Zeitreihenanalyse* trägt. Zu diesem Zweck wurden überholte Teile des älteren Werkes (etwa die Darstellung des Berliner Verfahrens) eliminiert, wie man in der Zeitreihenanalyse sagt. Dies schuf Platz für moderne Aspekte der Zeitreihenanalyse, die der Leser nun vor allem im umfangreichen 9. Kapitel (Grundbegriffe der Frequenzanalyse) findet.

Auch sonst wurde die Präsentation gestrafft, so daß damit ein Werk geschaffen wurde, daß auch für Praktiker und fortgeschrittene Anwender von Interesse sein wird. Im Anhang findet man methodische Betrachtungen zur Verschiebung des Zeitindex und zu aktuellen Trendschätzungen. Interessierte Leser darf ich darauf hinweisen, daß meine im gleichen Verlag erschienenen *Grundlagen statistischer Methoden* sich unter anderem mit multivariaten Ansätzen befassen und daher als Ergänzung zu diesem Buch geeignet sind.

Herrn Diplom-Volkswirt Martin Weigert danke ich stellvertretend für die nun schon bald zwei Jahrzehnte dauernde ausgezeichnete Zusammenarbeit mit dem R. Oldenbourg Verlag.

Meiner 12. Monographie, die jetzt dem von mir seit Jahren gehaltenen zweisemestrigen Kurs an der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Heidelberg entspricht, gebe ich alle meine guten Wünsche mit auf den Weg und danke an dieser Stelle meinen Leserinnen und Lesern für ihr meinen Werken gegenüber gezeigtes Interesse.

Bernd Leiner

1. Kapitel

Einführung

Die Zeitreihenanalyse ist ein Teilgebiet der Statistik, das in fast allen Wissensgebieten Anwendung finden kann. Wir begegnen ihr überall in den Naturwissenschaften, wenn natürliche Phänomene im Zeitverlauf beobachtet werden. So zählen die Aufzeichnungen über Temperatur, Luftdruck und Niederschlagsmengen zu den Zeitreihen, die schon seit Jahrhunderten zur Verfügung stehen.

In früheren Jahrhunderten kam der Astronomie große Bedeutung zu. Ihre Erkenntnisse, wie etwa die Bestimmung der Umlaufbahn von Planeten und Asteroiden, waren von Interesse nicht nur für Wissenschaftler, sie erfreuten sich allgemeiner Beachtung und führten dazu, daß Mathematiker wie Gauß sich einen Namen machten, wenn sie hier Methoden der Zeitreihenanalyse erfinden und einsetzen konnten.

Zahlreiche andere naturwissenschaftliche Anwendungen, die vor allem mit der zeitlichen Auswertung von Versuchen und Versuchsanordnungen verbunden sind, sind hier zu nennen. Hervorzuheben ist der Einsatz von Methoden der Zeitreihenanalyse in der Medizin, so daß heute z.B. eine Fieberkurve schon zum allgemeinen Kenntnisstand zu zählen ist.

Mit der Entwicklung der Verhaltenswissenschaften begann in einem anderen Wissenschaftsgebiet das Interesse für diese Form der Analyse der gewonnenen Daten. So gehören heutzutage laufende Befragungen von Probanden zu den Anwendungsmöglichkeiten der Zeitreihenanalyse in der Psychologie. Daß die Auswertung soziologischer Zeitreihen mittels Computereinsatz mittlerweile Standard ist, bedarf eigentlich keiner Erwähnung.

Die in den Betrieben erstellten Gewinnzeitreihen sind in ihren Grafiken schon Bestandteil der üblichen Cartoons, wenn der Chef voll Entsetzen feststellen muß, daß diese Kurven schon die Tafel verlassen und sich dem Boden seines Büros nähern.

Ernsthaft setzte sich die Volkswirtschaftslehre schon zu Zeiten des Harvard-Barometers mit Zeitreihen auseinander. Dessen Unfähigkeit, die Weltwirtschaftskrise des Jahres 1929 vorherzusagen, führte zur Begründung einer neuen Disziplin, der Ökonometrie, die ohne multivariate Zeitreihenanalyse unvorstellbar ist.

So wollen wir uns diesem Methodenarsenal zuwenden und zunächst einmal hinterfragen, was eine Zeitreihe ist.

1.1. Allgemeines

Zeitreihen können in der Statistik exakt definiert werden:

Eine *Zeitreihe* ist eine nach dem Zeitindex geordnete Menge von Beobachtungen x_t einer Zufallsvariablen X_t mit $t = 1, \dots, T$, d.h. es liegen T Beobachtungen vor.

Hierbei geht man davon aus, daß das betrachtete Phänomen (beispielsweise das Volkseinkommen eines Landes) mit der Zeit variiert und in irgendeiner Weise Zufallseinflüssen unterworfen ist, so daß dem Phänomen diese *Zufallsvariable* zugeordnet werden kann. Genauer betrachtet, werden dem Phänomen in insgesamt T zu untersuchenden Zeitperioden T Zufallsvariablen zugeordnet, d.h. im Beispiel, daß die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_T$ für die zeitlich aufeinanderfolgenden T Werte des Volkseinkommens dieses Landes stehen. In der Periode t nimmt dann die zu beobachtende Zufallsvariable X_t den tatsächlichen Wert x_t an, d.h. dies ist der Wert, der sich unter allen vorstellbaren reellen Werten in der Periode t (etwa im Jahre 1997) realisiert hat. Man spricht daher in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch von den *Realisationen* einer Zufallsvariablen, was in der Praxis bedeutet, daß in unserem Beispiel sich im Jahre 1997 auch ein anderer als der gemessene Wert des Volkseinkommens hätte ergeben können. Wer die Datenproduktion hochaggregierter ökonomischer Makrodaten verfolgt, die in neuerer Zeit auf Hochrechnungen von Stichprobenerhebungen zurückgreifen, kann sich nicht dem Gedanken verschließen, daß hier öfters der Zufall eine Rolle spielt, als daß man ernsthaft von einer Abfolge streng logischer Prozesse reden kann, die letzten Endes auf den rationalen Willensentscheidungen

von Wirtschaftssubjekten beruhen sollen. So ist es durchaus legitim, für die Makroökonomie in ökonomischen Gleichungen Zufallsvariablen zu verwenden. Die Ökonometriker tun dies schon seit der Begründung ihrer Wissenschaft. Es ist weiterhin unmittelbar klar, daß sich in einem anderen Jahr dem gleichen Phänomen (etwa dem Volkseinkommen des Vorjahres) eine andere Zufallsvariable zuordnen läßt, denn die Einflüsse auf die Höhe eines Volkseinkommens sind sicherlich in jedem Jahr anders. In der Praxis konzentrieren wir uns auf die T Beobachtungen $x_1, \dots, x_T$, wie wir unsere Realisationen hinfert bezeichnen wollen.

In der Zeitreihenanalyse sind die Beobachtungen zumeist *äquidistant*, d.h. der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Perioden ist konstant.

So unterscheidet man nach diesem zeitlichen Abstand z.B. zwischen Jahresdaten, Halbjahresdaten, Quartalsdaten, Monatsdaten und börsentäglichen Daten. Für viele makroökonomische Größen bilden Jahresdaten immer noch die Regel, nur für wenige ökonomisch relevante Daten liegen Monatsdaten vor. Da die zeitliche Erfassung z.B. im Monatsabstand strenggenommen nicht äquidistant ist, weil die Monate unterschiedliche Anzahlen von Tagen aufweisen, sind im einzelnen Korrekturen vorzunehmen, auf die noch einzugehen sein wird.

Die Beobachtungen eines ökonomischen Phänomens sind ihrer Natur nach *diskrete Daten*.

Insbesondere makroökonomische Daten verursachen gewaltige Kosten, so daß Erhebungen nur in großem zeitlichen Abstand möglich sind. In den Naturwissenschaften können oft Daten eines Phänomens kontinuierlich erhoben werden. Beispiele hierfür liefern etwa die Physik mit astronomischen Beobachtungen, die Chemie mit der fortlaufenden Beobachtung eines chemischen Prozesses, die Ingenieurwissenschaften mit Crashtests oder auch die Medizin mit einem an einem Patienten vorgenommenen Elektrokardiogramm, wobei diese Messungen direkt analog von Computern verarbeitet werden können. Diese Beispiele mögen zugleich veranschaulichen, daß die Zeitreihenanalyse universell in allen Wissenschaftsbereichen Anwendung findet. Gleichwohl zwingt zuweilen die Datenfülle auch Naturwissenschaftler zu einer Dezimierung ihres Datenmaterials. Um noch den Überblick zu behalten, werden dann nur zu festen Zeitpunkten Beobachtungen ausgewertet, d.h. die eigentlich kontinuierlichen Daten werden diskretisiert. Mit der Einschränkung auf den diskreten Datentyp können wir einen großen Teil der Beiträge zur Zeitreihenanalyse vernachlässigen. Dies ist zumindest für die Ökonomen eine große Erleichterung, die nicht gerne mit Integralen arbeiten.

Im Unterschied zu Daten, die man als Querschnittsdaten bezeichnet, weil sie zu einem fixierten Zeitpunkt etwa einen Querschnitt der Bevölkerungsstruktur vermitteln sollen (z.B. eine Volkszählung als Vollerhebungen ebenso wie der Mikrozensus als Stichprobenerhebung), beruhen Zeitreihen auf *Längsschnittdaten*.

Eine interessante Mischung von Querschnittsdaten mit Längsschnittdaten stellen die Daten dar, die mit Panel-Studien gewonnen werden. Hierbei werden Kohorten von zu befragenden Personen in bestimmten Zeitabständen die gleichen Fragen vorgelegt, um etwa in Haushaltsbefragungen mit derartigen Wellen von Befragungen festzustellen, wie sich die Situation dieser Haushalte verändert hat.

Die Zeitreihenanalyse sollte grundsätzlich auf vollständigen Datensätzen beruhen.

Das Problem fehlender Daten (*missing values*), das sich bei Querschnittsdaten aus der Nichtbeantwortung eines Fragebogens oder einzelner Fragen desselben ergibt, tritt in der Zeitreihenanalyse normalerweise nicht direkt auf, da solche in Zeitabständen durchgeführten Erhebungen, wenn sie einmal im Gange sind, so leicht nicht unterbrochen werden. Fehlt dennoch einmal ein Wert, so kann man ihn etwa durch das arithmetische Mittel seiner beiden benachbarten Werte schätzen. In der amtlichen Statistik z.B. wurde nach dem Volkszählungsurteil des Bundesverfassungsgerichts im Jahre 1983 der Mikrozensus für zwei Jahre ausgesetzt. Ein anderes Beispiel liefert die Waldschadenserhebung, die zum Zeitpunkt der deutschen Wiedervereinigung in einzelnen alten Bundesländern nicht durchgeführt wurde.

Wie auch das Thema „Umwelt“ veranschaulicht, scheint es eher schwierig zu sein, die notwendigen statistischen Erfassungen erst einmal im gebotenen Ausmaß zu starten. Derartigen Problemen sehen sich auch Betriebsstatistiker gegenübergestellt, die für interessierende Variablen keine langen Zeitreihen im Unternehmen vorfinden. Hier ist im Zweifel die Pionierarbeit selbst vorzunehmen, um in Zukunft auf die benötigten Zeitreihen zurückgreifen zu können. Dies können dann auch die seltenen Fälle sein, wo Daten in arbeitstäglichster Form geschaffen werden.

Sogenannte *Strukturbrüche* sind für die langfristige Beobachtung eines Phänomens von besonderer Bedeutung. Hierunter versteht man abrupte Veränderungen eines Phänomens aufgrund von Veränderungen seiner verursachenden Grundlagen.

Hiermit ist das Problem angesprochen, daß es nur Sinn macht, ein Phänomen längere Zeit zu beobachten, wenn der Kausalzusammenhang, in den das Phänomen eingebettet ist, sich im Laufe der Zeit nicht gravierend verändert. Ansonsten würde man dann eigentlich ein ganz anderes Phänomen zu beobachten haben, das keine Ähnlichkeiten mehr mit dem zuvor betrachteten Phänomen aufweist. So ist im Jahresvergleich langer Zeitreihen der bundesrepublikanischen Daten zu berücksichtigen, daß Gebietsstandsänderungen eingetreten sind. Seit dem Jahre 1960 enthalten die Daten der amtlichen Statistik auch die Werte für Westberlin und das Saarland, so daß die Makrodaten deswegen vorher um wenige Prozentpunkte kleiner ausfallen. Gravierender sind statistisch die Folgen der deutschen Wiedervereinigung vom 3.10.1990: Entweder hat man in langfristigen Betrachtungen weiter mit den alten Bundesländern zu arbeiten oder man kann in der nächsten Zeit Untersuchungen erst mit dem Jahr 1991 für die gesamte Bundesrepublik beginnen lassen. Auch die beiden Erdölkrisen (in den Jahren 1973 und 1980) haben seinerzeit deutliche strukturelle Veränderungen der Makrodaten bewirkt.

Für makroökonomische Daten gibt es keine Angaben über die Größenordnung von Erfassungsfehlern.

Im Gegensatz zu den Naturwissenschaften läßt sich im wirtschaftswissenschaftlichen Bereich ein zu betrachtendes Phänomen nicht durch zusätzliche Beobachtungen genauer bestimmen. In dem langen Zeitraum, der von einer Beobachtung bis zur nächsten vergeht, kann sich ein ökonomisches Phänomen, wie wir gesehen haben, grundsätzlich ändern. Es wird geschätzt, daß makroökonomische Daten Fehler in einer Größenordnung von gut 5% aufweisen. So bewirkt das von der amtlichen Statistik verwendete Konzentrationsprinzip, daß stellvertretend für eine ganze Branche nur Großunternehmen befragt werden und sodann die Ergebnisse auf die ganze Branche hochgerechnet werden. Geben dann einzelne dieser Großunternehmen ihre Rohdaten verspätet an die Statistischen Landesämter bzw. an das Statistische Bundesamt ab, so sind die publizierten Daten um einige Prozentpunkte zu niedrig und werden als *vorläufig* gekennzeichnet. Erst in späteren Jahrbüchern finden sich dann vollständige Daten, die als endgültig bezeichnet werden. Zur Erstellung von Prognosen mit möglichst aktuellem Bezugsrahmen benötigt man die neuesten Daten der amtlichen Statistik und kann nicht warten, bis man für ein Jahr endgültige Daten erhält. Gravierender wird dieser Konflikt bei den rekursiven Prognosemethoden, die nicht allen Daten das gleiche Gewicht geben, sondern den neuesten Daten ein höheres Erklärungsgewicht geben als früheren Daten. Diesem Vorgehen liegt die Idee zugrunde, daß ab einem bestimmten zeitlichen Abstand Daten der Vergangenheit einen geringeren Aussagewert haben als aktuellere Daten.

Die *univariate* Zeitreihenanalyse ist zu unterscheiden von der *multivariaten* Zeitreihenanalyse.

Die univariate Zeitreihenanalyse befaßt sich mit der Untersuchung und Auswertung einer einzigen Zeitreihe. Dagegen können mit der multivariaten Zeitreihenanalyse Zusammenhänge zwischen mehreren Zeitreihen und damit mehreren ökonomischen Variablen untersucht werden. Wir wollen uns zunächst der univariaten Zeitreihenanalyse intensiver zuwenden, weil damit zugleich die Kenntnisse erworben werden können, die für das Verständnis komplizierter mathematischer Abhängigkeiten erforderlich sind.

1.2. Die Bewegungskomponenten einer Zeitreihe

Aus der Sicht der klassischen Zeitreihenanalyse läßt sich eine Zeitreihe mit x_t , $t = 1, \dots, T$ in folgende Komponenten zerlegen:

1. Die glatte Komponente g_t .

Darunter versteht man den *Trend* (die Grundrichtung einer Zeitreihe, d.h. die Zeitreihe hat entweder ansteigende Tendenz, absteigende Tendenz oder sie bewegt sich um ein konstantes Niveau) unter Einschluß langfristiger Schwingungen. Derartige Schwingungen mit einer Periode von 50 bis 100 Jahren, die nach ihrem Entdecker Kondratieff-Zyklen genannt werden (Kondratieff (1935)), sind besonders für Wirtschaftshistoriker von großem Interesse. Sie erfordern allerdings, wie man sich vorstellen kann, zu ihrer Untersuchung beachtliche Datenmengen. Immerhin kann z.B. ein aufsteigender Trend als Teilstück einer derartigen langfristigen Schwingung angesehen werden.

2. Die Konjunkturkomponente k_t .

Hierunter fallen kurz- und mittelfristige Konjunkturschwankungen mit einer Periode von zwei bis zu zehn Jahren. Aus dem Index der industriellen Nettoproduktion der Bundesrepublik Deutschland gebildete Zeitreihen weisen eine starke Konjunkturkomponente mit einer Periode von vier bis fünf Jahren auf.

3. Die Saisonkomponente s_t .

Diese enthält die Saisonschwankungen, deren Periode mit Monatsdaten im Bereich zwischen zwei Monaten und einem Jahr bestimmt werden kann.

4. Die irreguläre Komponente u_t .

Sie steht für den Einfluß von Störfaktoren und wird auch als unsystematische Komponente bezeichnet, wenn die anderen Komponenten syste-

matische Einflüsse auffangen sollen. Sie hat den Status einer Zufallsvariablen.

Zu den einfachsten Formen des Zusammenwirkens dieser Komponenten zählen die additive und die multiplikative Verknüpfung.

In der *additiven Verknüpfung*

$$(1.1) \quad x_t = g_t + k_t + s_t + u_t, \quad t = 1, \dots, T$$

überlagern sich die einzelnen Einflüsse additiv.

Werden die Beobachtungen x_t in einem Diagramm gegen den Zeitindex t aufgetragen (geplottet), wobei der Zeitindex auf der Abszisse abgetragen wird, so lassen sich zu jedem Zeitpunkt die einzelnen Komponenten, unter Berücksichtigung des Vorzeichens, senkrecht einzeichnen.

In der *multiplikativen Verknüpfung*

$$(1.2) \quad x_t = g_t \cdot k_t \cdot s_t \cdot u_t, \quad t = 1, \dots, T$$

verstärken die einzelnen Einflüsse einander.

Durch Logarithmieren von Gleichung (1.2) erhält man formal wieder eine additive Verknüpfung, deren Darstellung im Diagramm einfacher ist:

$$(1.3) \quad \log x_t = \log g_t + \log k_t + \log s_t + \log u_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

In der Zeitreihenanalyse interessiert man sich für das Verhalten einer oder mehrerer dieser Komponenten. Um diese Komponenten herausarbeiten zu können, sie also zu *isolieren*, muß der Einfluß der unerwünschten Komponenten ausgeschaltet werden, d.h. letztere werden *eliminiert*.

Im additiven Modell geschieht die Elimination einfach durch Subtraktion der unerwünschten Komponente.

Wird beispielsweise der Trend einer Zeitreihe geschätzt und die jeweilige Trendschätzung zu einem Zeitpunkt t von der zugehörigen Beobachtung x_t subtrahiert, so kann man die Restgröße auf Konjunktur- und Saisoneinflüsse hin untersuchen. In einem nächsten Schritt könnte man die Saisonkomponente eliminieren und hätte so, abgesehen von Zufallseinflüssen, die Konjunkturkomponente isoliert.

Schon an diesem einfachen Beispiel erkennt man, daß eine nachgelagerte Operation von der Qualität der ihr vorangehenden Operationen (im Beispiel der Trendbereinigung) abhängig ist.

Im multiplikativen Modell wird die unerwünschte Komponente herausdividiert, was im logarithmischen Ansatz wieder einer Subtraktion entspricht.

Während die irreguläre Komponente in der traditionellen Zeitreihenanalyse nur eine untergeordnete Rolle spielte, ist die moderne Zeitreihenanalyse geprägt durch das Konzept der Zufallsvariablen.

Das Konzept der Zufallsvariablen wird dann nicht mehr nur auf die Restkomponente beschränkt. Es wird im multivariaten Fall zum stochastischen Prozeß verallgemeinert. In der Spektralanalyse schließlich wird das klassische Modell der Bewegungskomponenten einer Zeitreihe, das von der Frankfurter Schule der Wirtschafts- und Sozialstatistik begründet wurde, durch ein Modell ersetzt, in dem einzelne Frequenzbereiche unterschieden werden.

Weiterführende Literatur

Kendall-Stuart (1966)
Kendall (1976)
Davis (1963)
Anderson (1958)
Quenouille (1957)
Wold (1954)
Wold (1965)
Menges (1967)
Hannan (1970)
Anderson (1971)
Chisholm-Whitaker (1971)