Mathematische Propädeutik für Wirtschaftswissenschaftler

Lineare Algebra und Lineare Optimierung

Von
Universitätsprofessor
Dr. rer. nat. Arno Jaeger
und
Universitätsprofessor
Dr. rer. oec. Gerhard Wäscher

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Zur Erinnerung an unsere Eltern

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Jaeger, Arno:
Mathematische Propädeutik für Wirtschaftswissen-
schaftler : lineare Algebra u. lineare Optimierung /
von Arno Jaeger u. Gerhard Wäscher. -
München : Oldenbourg, 1998
ISBN 3-486-24586-4
NE: Wäscher, Gerhard:

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0, Internet: http://www.oldenbourg.de

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

ISBN 3-486-24586-4

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Mit dieser Veröffentlichung liegt nun ein weiterer Text zur mathematischen Propädeutik in Linearer Algebra vor. Wer dieses Buch zur Hand nimmt, mag sich fragen, ob diesem Thema überhaupt noch neue Aspekte abzugewinnen seien. Wir glauben das schon, neigen doch die bisherigen Bücher nach unserer Ansicht zu zwei Extremen:

- Entweder handelt es sich um kochrezepthafte Bücher, bei denen das numerische Rechnen, etwa im Rahmen des Anwendens von Algorithmen, im Vordergrund steht, nicht jedoch die Übung in begrifflichem mathematischen Denken und Handeln. Die Bewältigung eines solchen Textes mag ausreichen, um eine Klausur zu bestehen, fördert aber nicht gerade das Verständnis des mathematischen Hintergrundes. Das selbständige Aneignen weiterführender Texte erweist sich für die Studenten dann in der Regel als außerordentlich schwierig.
- Oder die betreffenden Bücher sind mathematisch anspruchsvoll, elegant, abstrakt, exakt. Sie ziehen vor allem die mathematisch besonders begabten und interessierten Studenten an, die große Mehrheit wird aber eher abgestoßen. Gleichzeitig wachsen ihre Vorurteile und Abneigungen gegenüber der Mathematik.

Mit dem vorliegenden Lehrbuch soll ein dritter Weg beschritten werden. Unsere Darstellung wird zwar ebenfalls exakt sein, d.h. Beweise bzw. Beweisandeutungen werden nur in ganz wenigen Fällen unterdrückt, mathematische Eleganz steht jedoch nicht im Vordergrund, sondern vielmehr Transparenz und Einfachheit. Schwierige Stellen werden deshalb langsam entwickelt und durch numerische, den Lehrtext unterbrechende Beispiele erhellt. Zur Gewährleistung des Lernerfolgs wird der Leser hiermit ermuntert, die Beispiele „per Hand" nachzuvollziehen. Eine Vielzahl von Übungsaufgaben (mit Lösungen am Ende des Buches) sollen darüber hinaus der Einübung des Gelesenen dienen. Durch fünf über das ganze Buch hin entwickelte betriebswirtschaftliche Grundbeispiele versuchen wir, immer wieder den Zusammenhang zwischen ökonomischer Wirklichkeit und mathematischen Gegebenheiten herzustellen.

Das Buch ist offensichtlich zunächst als Begleitlektüre für die mathematische Propädeutik eines Studiums der Wirtschaftswissenschaften gedacht. Es ist jedoch so aufgebaut, daß es auch für ein Selbststudium, etwa zur Vorbereitung auf ein quantitatives Fach des Hauptstudiums (Unternehmensforschung, Ökonometrie o.ä.) oder im Rahmen einer Prüfungsvorbereitung, verwendet werden kann. Wir haben dazu am Anfang eines jeden Kapitels die Lernziele und an seinem Schluß Wiederholungsfragen zur Selbstkontrolle aufgeführt. Weiterhin dienen Umrahmungen von wesentlichen Aspekten als deutliche optische Merkhilfe. Im Rahmen von längeren Beweisführungen sind außerdem bedeutsame Zwischenergebnisse durch senkrechte Balken markiert. Die wichtigsten Rechenverfahren sind schließlich unter Berücksichtigung aller Sonderfälle in Form von Algorithmen beschrieben. Sie können direkt als Vorlage zur Erstellung von entsprechenden EDV-Programmen dienen.

Abschließend möchten wir an dieser Stelle allen denjenigen danken, die uns bei der Erstellung des Buches unterstützt haben. Herr Dipl.-Ökonom Hermann Müller hat alle Entwürfe des Textes kritisch gelesen und in vielfacher Weise wertvolle Verbesserungsvorschläge eingebracht. Herr Dipl.-Mathematiker Heinz Schannath hat das Manuskript einschließlich der Übungsaufgaben sorgfältig geprüft und eine Reihe von Änderungen angeregt. Herr Dipl.-Mathematiker Manfred Meika erstellte verschiedene Abbildungen mit Hilfe eines Computerprogrammes. Diese drei Herren und Herr cand. oec. Matthias Klein haben sich an dem mühevollen Korrekturlesen beteiligt. Auch Herr Professor Dr. Helmut Reichardt, Frau Dr. Agnes Reichardt, Herr Dipl.-Mathematiker Alfred Bischoff und Frau stud. oec. Helga Trojahn gaben dankenswerte Anregungen.

Möge unser Buch nicht nur den Studenten der Wirtschaftswissenschaft die Furcht vor der Mathematik nehmen und zum erfolgreichen Bestehen der Examina beitragen, sondern auch die Verbreitung mathematischer Denkweisen im Rahmen ökonomischer Überlegungen fördern!

A. Jaeger
G. Wäscher

Kapitel I: Einleitung

Gliederung

Wenn Sie soeben mit einem Studium der Wirtschaftswissenschaft begonnen haben, so wundern Sie sich vielleicht, daß Sie sich in den ersten Semestern nicht nur mit einführenden Vorlesungen über Betriebs- und Volkswirtschaftslehre, sondern auch in einem unerwarteten Umfang mit Mathematik beschäftigen müssen, mit der Sie in Lehrveranstaltungen über „Lineare Algebra und Lineare Optimierung", „Analysis", „Statistische Methodenlehre" o.ä. konfrontiert werden. Dieses erste Kapitel soll Sie deshalb zunächst in die Beziehungen zwischen Mathematik, insbesondere der Linearen Algebra und Linearen Optimierung, und der Wirtschaftswissenschaft einführen. Wie beginnen mit einigen Bemerkungen über die Gebiete und Aufgaben der Mathematik (Abschnitt 2) und gehen dann näher auf die Prozesse des Abstrahierens und Mathematisierens ein (Abschnitt 3), die zur Bildung von mathematischen Modellen ökonomischer Gegebenheiten führen (Abschnitt 4). Danach machen wir Sie mit den ersten Grundbegriffen der Linearen Algebra und Linearen Optimierung vertraut (Abschnitt 5). Mit ihnen können in Abschnitt 6 zur Motivation und Veranschaulichung fünf ökonomische Grundbeispiele linearer Modelle vorgeführt werden, die aus Fragestellungen der betrieblichen Praxis gewonnen sind und im Verlaufe des Buches bewältigt werden, sobald jeweils das mathematische Rüstzeug entwickelt ist.

1. Lernziele

Wenn Sie dieses Kapital durchgearbeitet haben, sollten Sie in der Lage sein,
- die Begriffe Realstruktur, Realsystem, Formalstruktur, Formalsystem und ihre Unterschiede zu beschreiben sowie an Beispielen zu demonstrieren,
- die Prozesse des Abstrahierens, Mathematisierens und Konkretisierens zu erläutern und in den Aufbau und die Auswertung von mathematischen Modellen einzuordnen,
- die Vorteile der Mathematisierung einzusehen,
- zwischen drei Haupttypen von Modellen zu differenzieren,
- die Begriffe lineares Restriktionssystem, Lösung und lineares Optimierungssystem zu definieren und zu erläutern,
- Grundbeispiele linearer Modelle aus der betrieblichen Praxis aufzubauen und zu diskutieren.

2. Gebiete und Aufgaben der Mathematik

Seit mehreren Jahrzehnten hat sich die Mathematik in einem Maße entwickelt, von dem der Nichtfachmann gewöhnlich kaum eine Vorstellung besitzt. So führt etwa ein unlängst vom „Zentralblatt für Mathematik" und den „Mathematical Reviews" gemeinsam konzipiertes Schema zur Klassifizierung von wissenschaftlichen Veröffentlichungen 3398 Teilgebiete, zusammengefaßt in 61 Gebieten auf. Unter Anlehnung an dieses Schema könnte man durch weitere Zusammenfassung etwa die folgenden Obergebiete der Mathematik erhalten:

1. Allgemeines (einschl. Didaktik und Geschichte)
2. Mathematische Logik und Grundlagen
3. Mengen und Relationen
4. Algebra und Zahlentheorie
5. Analysis

6. Geometrie und Topologie
7. Mathematische Statistik und Stochastik
8. Allgemeine Angewandte Mathematik (einschl. mathematischer Informatik)
9. Physikomathematik (spezifische Mathematik der physikalischen Wissenschaften)
10. Soziomathematik (spezifische Mathematik der Gesellschaftswissenschaften, insb. Ökonomathematik, also spezifische Mathematik der Wirtschaftswissenschaft)
11. Biomathematik (einschl. Mathematik der Medizin)
12. Technomathematik (spezifische Mathematik für Ingenieure, einschl. gewisser systemtheoretischer und kybernetischer Gebiete).

Zwischen diesen Obergebieten bestehen jedoch vielfältige Wechselbeziehungen und Überlappungen, so daß bedeutsame mathematische (Er-)Kenntnisse häufig in mehreren, zum Teil weit auseinanderliegenden Gebieten zu erfassen sind. Die Lineare Algebra etwa, mit deren Grundlagen wir Sie in diesem Buch vertraut machen wollen, entstammt offensichtlich dem Obergebiet 4, das in elementaren Teilbereichen für das Lösen von linearen Gleichungssystemen, für (algebraische) Vektoren und Matrizen sowie für Determinanten zuständig ist. Schon von der Schule und z. B. der geometrischen Vektorrechnung her wissen Sie jedoch, daß diese Themenkreise auch sehr enge Beziehungen zum Obergebiet 6 besitzen. Von noch größerer Bedeutung ist dieses Obergebiet für die Lineare Optimierung, die man nur mit Einschränkungen zur Linearen Algebra rechnen kann. Logische und graphentheoretische Methoden der Linearen Algebra, die in diesem Buche nur am Rande behandelt werden können, weisen auf wichtige Zusammenhänge mit den Obergebieten 2 und 3 hin. Die Eingliederung des Gesamtstoffes dieses Buches in das Obergebiet 10 ist natürlich bereits definitorisch selbstverständlich. Man könnte so fortfahren und enge Verbindungen der Linearen Algebra mit jedem der übrigen Obergebiete herstellen. Sie spielt damit in der Mathematik eine universelle Rolle.

Die Gegenstände von wissenschaftlichen Untersuchungen in den genannten Obergebieten (abgesehen natürlich von gewissen Teilen des Obergebietes 1) sind die **Eigenschaften** der Elemente von Mengen sowie die **Beziehungen** zwischen ihren Elementen. Etwas präziser gesagt, geht es um Mengen von Relationen in einer zugrundegelegten Menge; hierfür wählen wir die Bezeichnungsweise (mathematische) *Struktur*. Die gedankliche Zusammenfassung einer Menge und ihrer Struktur nennen wir ein (mathematisches) *System*.[1] Es ist also dann die Struktur eines Systems die Menge aller (zu betrachtender) Eigenschaften und Beziehungen; und die *Grundmenge* eines Systems ist diejenige Menge, auf deren Elemente sich die Systemstruktur bezieht.

Beispiel I-1
Die algebraische (Grund-)Struktur des Systems der reellen Zahlen kann wie folgt zusammengefaßt werden, sobald die vier Grundrechnungsarten bereits definiert sind:
Die Null hat die Eigenschaft $0 + x = x$ für jedes reelle x. Die Eins hat die Eigenschaft $1 \cdot x = x$ für jedes reelle x. Die Inverse x^{-1} hat zu x die Beziehung $x^{-1} \cdot x = 1$ für jedes von Null verschiedene reelle x.

[1] Es muß allerdings darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Sprechweisen „System" und „Struktur" in der diesbezüglichen Literatur nicht einheitlich verwendet werden, was teilweise auch mit ihrer begrifflichen Nähe zusammenhängt.

Es gelten für alle reellen x, y und z die Beziehungen:

$x + y = y + x$ (Kommutativgesetz der Addition)
$x + (y + z) = (x + y) + z$ (Assoziativgesetz der Addition)
$x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativgesetz der Multiplikation)
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (Assoziativgesetz der Multiplikation)
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivgesetz).

Das Erkennen von Strukturen mathematischer Systeme und die Gewinnung neuer Erkenntnisse über sie kann man als erste *(kognitive)* Aufgabe der Mathematik auffassen. Daneben bildet das Entwickeln von mathematischen Methoden, z. B. von Rechenverfahren zur (numerischen) Beantwortung häufig wiederkehrender Fragen, im Rahmen von mathematischen Systemen ihre zweite *(instrumentelle)* Aufgabe, die gerade in bezug auf die Wirtschaftswissenschaft von entscheidender Bedeutung ist. Ein Verfahren, welches eine eindeutige und lückenlose, meist schematische Anleitung zum Behandeln eines genau definierten Typs einer mathematischen Fragestellung gibt, und zwar unter Berücksichtigung aller möglicherweise auftretenden Fälle, nennt man einen (mathematischen) *Algorithmus*. Dieser ist Vorstufe für einen Computeralgorithmus. Wir werden in diesem Buch eine ganze Reihe von Algorithmen in allen Details vorführen.

3. Abstrahieren und Mathematisieren

„System" und „Struktur" sind Ihnen natürlich wohlbekannte Vokabeln, die Sie jedoch vermutlich bislang nur in anderen als mathematischen Kontexten verwendet haben. Tatsächlich lassen sich unsere Definitionen unmittelbar auf außermathematische Gegebenheiten übertragen, indem man noch zusätzlich außermathematische Bedeutungen für die Elemente der zugrundeliegenden Menge, deren Eigenschaften und deren Beziehungen zuläßt. Auch für jede andere Wissenschaft, z. B. die Wirtschaftswissenschaft, lassen sich die beschriebenen kognitiven und instrumentellen Aufgaben aufzeigen. Im Gegensatz zu der absoluten begrifflichen Schärfe der Mathematik müssen Sie aber dann – wegen dieser zusätzlichen Bedeutungen – mit mangelnder Präzision, mit Unschärfen und Verschwommenheit rechnen, die durch Unzulänglichkeiten in der Umgangssprache und bis zu einem gewissen Grade auch in den entsprechenden Fachsprachen bedingt sind. Wir kommen auf diesen Aspekt noch zurück.

Zunächst wollen wir uns aber der Frage zuwenden, wie man nun überhaupt innerhalb und außerhalb der Mathematik zu einem wissenschaftlich analysierbaren System gelangt. Stark vereinfacht kann man sich die Gewinnung eines Systems mit seiner Struktur wie folgt vorstellen: Aus einer zunächst unübersehbaren Fülle von Eindrücken, die auf uns zukommen, werden gewisse (z. B. immer wiederkehrende, auffällige, interessante) Eindrücke herausgefiltert und gesammelt. Man läßt sich dabei durch Ähnlichkeiten und Analogien zu bereits bekannten Situationen – auch in ganz anderen Wissenschaften und Künsten – leiten. Auf diese Weise können die verschiedenartigsten und von Person zu Person unterschiedliche Erfahrungen einfließen. Teilaspekte (auch solche, die man nicht sehen will oder kann) werden (bewußt, unbewußt oder unterbewußt) vernachlässigt. Genauer gesagt, erfolgt bei einem Vorgehen wie diesem:

- ein Weglassen von Objekten, Gegenständen, Dingen,

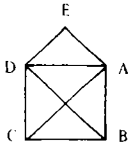
- ein Weglassen von Eigenschaften von Objekten (was Weglassen von Teilen ihrer Begriffsinhalte einschließt),
- ein Weglassen von Beziehungen und Wechselbeziehungen zwischen den Objekten (was Weglassen von Bedeutungsunterschieden einschließt).

Vielleicht die schwerwiegendste Folge ist hierbei ein **Verwischen von Unterschieden**, wodurch man zu einer Gleichsetzung von solchen Objekten, solchen Eigenschaften und solchen Beziehungen kommt, die es eigentlich (z. B. räumlich, zeitlich, sachlich) nicht sind, und eine **Vergröberung der Situation** bewirkt. Einen Prozeß derartiger und ähnlicher Vereinfachungen und Verallgemeinerungen nennt man *Abstrahieren* und das dadurch gewonnene Ergebnis ein *Abstraktum* bzw. die Ergebnisse *Abstrakta*.[1] Solche Prozesse sind nun aber keinesfalls eigens zum Aufbau einer Wissenschaft erfunden worden, sondern treten ja bereits bei all unseren Sinneswahrnehmungen (Sehen, Hören, Riechen, Tasten, Schmecken) auf. Auch die Entwicklung von Begriffssprachen mit den Übergängen zu immer abstrakteren Oberbegriffen durch Einschränkung der Begriffsinhalte und dadurch Erweiterung der Begriffsumfänge geschieht genau auf die gleiche Weise.

Beispiel I-2
Das Schwarz-Weiß-Fernsehbild einer realen Situation ist ein (hier technisch erzeugtes) Abstraktum der Wirklichkeit, welches lediglich digitalisierte Schatten zeigt. Es bringt nur einen Teil der Wirklichkeit; die Beschränkungen einerseits auf Bildpunkte und andererseits auf relative Helligkeitsunterschiede (anstatt von Farben) ergeben Vergröberungen, und es treten Verzerrungen von Längenverhältnissen und Winkeln auf.

Wir wollen nun von einem *Realsystem* und einer *Realstruktur* sprechen, wenn ihnen eine (außermathematische) Bedeutung zukommt oder sie im Rahmen einer Realwissenschaft wie der Wirtschaftswissenschaft einen unmittelbaren Realitätsbezug aufweisen. Ihnen stehen innerhalb der Mathematik *Formalsystem* und *Formalstruktur* gegenüber.

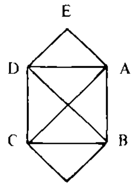
Beispiel I-3
Es seien fünf Punkte A, B, C, D, E durch Strecken wie in folgendem Diagramm verbunden:



Dadurch ist das Formalsystem auch für jeden Laien sofort verständlich als geometrisches System beschrieben. Frage: Kann man in einem Zug (z. B. in einem Bleistiftzug ohne Absetzen) jede Strecke genau einmal entlang gehen, und wenn ja, auf welche Weise? Man kann zunächst folgende elementare Überlegung anstellen: Will man zu einem Punkt und wieder von ihm fort, so braucht man zwei verschiedene mit diesem Punkt verbundene Strecken. Will man das mehrfach tun, so braucht man dazu eine gerade Zahl von entsprechenden Strecken. B und C sind aber Endpunkte von je drei, also einer ungeraden Zahl von Strecken. Folglich muß man entweder bei B oder bei C anfangen und dann zwangsläufig

[1] Das Ihnen vertrautere Wort „Abstraktion" ist leider ebenso doppeldeutig wie das Wort „Produktion". Einmal kann damit der entsprechende Prozeß und ein anderes Mal das Ergebnis dieses Prozesses gemeint sein.

mit C bzw. B aufhören. Ein möglicher Streckenzug wäre BAEDBCADC. Angenommen, es gäbe jedoch noch eine zweite Strecke von B nach C, wie in dem folgenden Diagramm beschrieben:



Dann ist jeder Punkt mit vier Strecken verbunden, und man kann von jedem Punkt eine entsprechende Route wählen, die schließlich wieder zu diesem Punkt zurückführt. Die Abkürzung „BC" ist dann aber, weil mehrdeutig, nicht mehr erlaubt. Der Vorteil dieser geometrischen Systembeschreibung (wie auch in vielen anderen Fällen bei der Verwendung der Geometrie) ist, daß dieses Formalsystem automatisch in ein Realsystem umgedeutet werden kann (wobei hier noch zusätzlich die Mehrdeutigkeit von „Punkt" und „Strecke" hilft): Man lege für „Punkt" die Bedeutung „Straßenkreuzung" und für „Strekke" die Bedeutung „Straße" fest (und mache die Zusatzannahme, daß Straße DB auf einer Brücke die Straße CA überquert), und schon hat man ein mögliches Problem für einen Straßeninspekteur. Oder aber man lege für „Punkt" die Bedeutung „Flughafen" und für „Strecke" die Bedeutung „Flugstrecke" fest, und schon hat man ein mögliches Problem für eine Fluglinie. Der Unterschied zwischen Formalsystem und Realsystem ist hier noch sehr subtil, aber die Angelegenheit wird sofort anders, sobald sie vielleicht 100 Punkte und viele Verbindungsstrecken haben, denn dann geht es schlecht mit dem Zeichnen, und Sie sind gezwungen, das geometrische Formalsystem in ein algebraisches zu übersetzen.

Ein ganz anderes, aber mit dem gleichen Typ von Diagrammen beschreibbares *Problem* ist das *des Handlungsreisenden*: Dieser soll eine Route wählen, bei der er jeden Ort einmal aufsucht,und zwar unter Zurücklegen der geringstmöglichen Gesamtstreckenlänge. Schon bei einer relativ geringen Anzahl von Orten kann das ein unzumutbar aufwendiges numerisches Problem werden. Geht die Anzahl der Orte in die Hunderte, so ist man schon froh, wenn man eine zufriedenstellende Lösung anstatt einer bestmöglichen gefunden hat.

Wie die Geschichte der Wissenschaften häufig gezeigt hat, bestehen zwischen beiden Systemarten fruchtbare Wechselbeziehungen.[1] Das Erkennen von Systemen der einen Art kann zunächst zum Entdecken von Systemen der anderen Art und dann zu wissenschaftlichen Forschungen über die letzteren führen, und umgekehrt. So führten schon in den Dreißiger und Vierziger Jahren erst volkswirtschaftliche, dann militärische und schließlich betriebliche Fragestellungen immer mehr zu Formalsystemen der Linearen Algebra und Linearen Optimierung, und dieses löste erhebliche Impulse zur gezielten Weiterentwicklung der relevanten Gebiete der Mathematik aus, die noch keinesfalls abgeschlossen ist. Umgekehrt haben die Ökonomen in den letzten Jahrzehnten u. a. aufgrund von besserer mathematischer Vorbildung z. B. in Linearer Algebra und Linearer Optimierung immer mehr erkennen können, daß beim Konzipieren von für Sie interessanten Realsystemen bereits formale „Vorbilder" mit passenden Begriffen, Theoremen und Methoden zur Verfügung stehen. Sehr begünstigt wurde diese wechselseitige Befruchtung auch durch Persönlichkeiten wie z. B. George B. DANTZIG, die gleichzeitig Ökonomen und Mathematiker waren oder ihre Berufsausbildung in der einen Fachrichtung erhielten,

[1] Siehe z. B. den interessanten Zusammenhang zwischen der Entwicklung der Differentialrechnung, der NEWTONschen Mechanik und der LEIBNIZschen Monadenlehre.

aber ihre Berufspraxis in der andern ausübten. (Als sicherlich einmaliger Sonderfall erweist sich in diesem Zusammenhang John von NEUMANN, der drittens auch noch ein sehr schöpferischer theoretischer Physiker war!)

Den Abstraktionsprozeß von einem bereits erkannten oder gedanklich noch verschwommenen Realsystem zu einem entsprechenden Formalsystem wollen wir *Mathematisieren*[1)] nennen. Durch das Mathematisieren werden Fragen oder ganze Komplexe von Fragen (Fragestellungen) der Ökonomie durch Fragen der Mathematik ersetzt, wobei selbst innerhalb der Mathematik noch weitere Abstraktionen erfolgen können oder müssen. Charakteristischerweise werden bei einem solchen Prozeß – wie bereits erwähnt – auf jeden Fall die den Elementen, ihren Eigenschaften und den Beziehungen zukommenden Bedeutungen unterdrückt. Damit der Bezug zu dem zugrundeliegenden Realsystem nicht verloren geht, ist für jede der in dem Formalsystem vorkommenden Größen die jeweilige Bedeutung zu protokollieren. Weiterhin sollten die beim Abstrahieren zugrundegelegten Meß- und Bewertungsvorschriften aufgeschrieben werden.

Beispiel I-4

Ein Student soll von den Professoren A, B und C je eine Stunde lang nachmittags um 1 Uhr, 2 Uhr und 3 Uhr mündlich geprüft werden. Professor A ist von 13 bis 14 Uhr, B von 14 bis 15 Uhr und C von 15 bis 16 Uhr verhindert. Welche Möglichkeiten ergeben sich für die Aufstellung des Prüfungszeitplans? Für die Beantwortung dieser Frage braucht man wegen der zugrundeliegenden banalen Situation kein großartiges System aufzustellen, sondern kann wie folgt vorgehen: Man schreibe sich das Schema

	1	2	3
A			
B			
C			

auf, das sich von selbst versteht, schwärze die „unzulässigen" Kästchen A1, B2 und C3 und suche in dem Schema alle Konstellationen auf, bei denen sowohl jede Zeile als auch jede Spalte jeweils nur in einem Kästchen markiert sind. Beginnt man die Markierung mit A2, so erlaubt die C-Zeile nur noch C1, und zwangsläufig bleibt in der B-Zeile dann nur noch B3 übrig. Wählt man jedoch zunächst A3, so bleibt in der B-Zeile nur noch B1 übrig, und dann ist schließlich nur noch C2 möglich. Es gibt also lediglich die zwei Möglichkeiten A2, B3, C1 und A3, B1 und C2.

Hat man nun aber etwa 16 Prüfer, zwei Prüfungstage von je acht Stunden und zeitlich unterschiedliche und unterschiedlich lange Verhinderungen, so wird man mit „Common Sense" schlecht zurecht kommen, sondern vielleicht nach einigem Nachdenken das folgende Formalsystem aufstellen und seine Lösungen zu bestimmen suchen.

Grundmenge der mathematischen Größen

Indexmengen $I := \{A, B, C, \dots\}$, $J := \{1, 2, 3, \dots\}$, Variablen $x_{ij} \in \{0, 1\}$ für $i \in I$ und $j \in J$.

1) Die leider häufig für einen derartigen Prozeß gebräuchliche Bezeichnungsweise „Quantifizieren" ist in doppelter Weise irreführend, weil erstens Quantifizierung wesentlich mehr als Zuordnung von Zahlen bedeutet und zweitens die Mathematik noch ganz andere als quantitative Strukturen betrachtet, z. B. die mit Symbolen wie „<" oder „≦" arbeitenden Ordnungs- und Vergleichsstrukturen.

Mathematische Struktur

$$
\begin{aligned}
&x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + \ldots = 1\\
&x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + \ldots = 1\\
&\vdots\\
&x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} + \ldots = 1\\
&x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} + \ldots = 1\\
&x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} + \ldots = 1\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Bezug zum Realsystem

I: Menge der Prüfer
J: Menge der zur Verfügung stehenden Stunden
$x_{ij} = 1$: Prüfer i wird der Zeitstunde j zugeordnet
$x_{ij} = 0$: Prüfer i wird nicht der Zeitstunde j zugeordnet
Wir setzen im vorab $x_{ij} := 0$, d.h. lassen diese Variable aus, wenn Prüfer i während der Zeitstunde j nicht zur Verfügung steht.

Entscheidend für den studentischen Leser ist hierbei im Augenblick nicht, daß er die Übertragung der realen Situation in das mathematische System unverzüglich verstanden hat, sondern daß er bereits an diesem Beispiel einsieht, daß man aus dem Formalsystem nicht unbedingt Rückschlüsse auf eine zugrundeliegende Fragestellung ziehen kann, ohne daß ein Bezug zum Realsystem festgelegt ist. (Die Bestimmung der Lösungsgesamtheit dieses Beispiels kann schon den Rahmen dieses Buches sprengen, weil die Variablen nur die Werte 1 oder 0 annehmen dürfen. Außerdem ergibt sich aus der realen Fragestellung bereits, daß nicht mal eine einzige Lösung zu existieren braucht, wenn nämlich die Konstellation der Verhinderungen zu unglücklich ist.)

Realistische Prüfungsplan-Probleme sind wesentlich komplexer, da man nicht nur für einen Studenten, sondern für eine große Anzahl von ihnen gleichzeitig einen solchen Plan aufstellen muß, wobei noch die Prüfer wechseln.

Das Rückgängigmachen eines Abstraktionsprozesses wollen wir *Konkretisieren* nennen. Hierbei handelt es sich im wesentlichen um die Interpretation der Ergebnisse einer Analyse des Formalsystems im Hinblick auf das zugehörige Realsystem (*originäres* Konkretisieren) bzw. des Realsystems im Hinblick auf die reale Gegebenheit (*sekundäres* Konkretisieren). Anders ausgedrückt: Aus den mathematisch gewonnenen Antworten werden Rückschlüsse auf die in den Realwissenschaften bzw. der Realität gesuchten Antworten gezogen.

Die soeben skizzierten gegenseitigen Beziehungen zwischen Realität, Realwissenschaft (insbesondere hier der Wirtschaftswissenschaft) und Mathematik lassen sich idealtypisch wie folgt veranschaulichen:

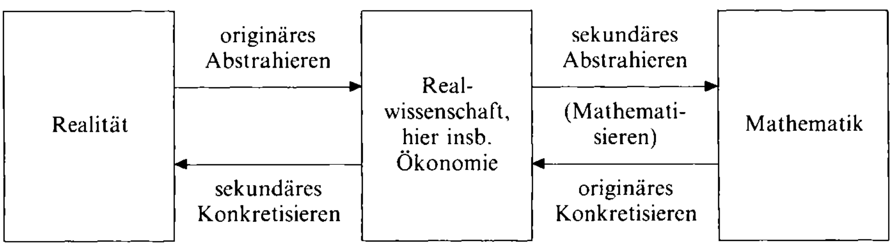


Abb. I-1: Das zweistufige Abstrahieren von Realität zu Mathematik, das zweistufige Konkretisieren von Mathematik zu Realität

Die schon bei grober Sicht offenkundige Zweistufigkeit des Abstrahierens von der Realität zur Mathematik bzw. des umgekehrten Vorgangs des Konkretisierens wird sehr oft (bewußt oder unbewußt) vernachlässigt.[1] Das erste (*originäre*) Abstrahieren hängt vorwiegend von sachlichen Gesichtspunkten, z. B. dem Fachverständnis, der Zugehörigkeit zu einer Schule und dem Kenntnisstand des Ökonomen ab; das zweite (*sekundäre*) überwiegend von mathematischen Gesichtspunkten, z. B. auch erheblich von subjektiven mathematischen Kenntnissen. Jede der beiden Abstraktionsstufen wird nun meist auch nicht unmittelbar erreicht, sondern erst als Ergebnis von hintereinandergeschalteten abstrahierenden Zwischenschritten und unter Anwendung des Prinzips von „trial and error". Dabei muß nachdrücklich betont werden, daß man natürlich die beiden Umformungsrichtungen in Abb. I-1 nicht isoliert voneinander sehen darf, denn sie bedingen und beeinflussen sich wechselseitig.

Die Mathematisierung bietet die folgenden Vorteile:

- Zwang zur Präzision, zur Protokollierung aller Einzelheiten und zur lückenlosen Offenlegung aller Prämissen (einschl. aller vorgenommenen Vereinfachungen),
- keine Möglichkeit des Ausweichens durch geschickte, z. B. bewußt mehrdeutige Formulierungen und damit auch keine semantische Möglichkeit des Entschuldigens im Nachhinein,
- weitgehendes Ausschalten von logischen Fehlschlüssen,
- Hilfe für das Aufdecken und Verstehen von verborgenen Zusammenhängen,
- Ausnutzen der jahrhundertelangen Erfahrungen des Anwendens der Mathematik,
- Erreichen einer notwendigen Vorstufe zur Benutzung des Computers.

Für die fachbezogene Beurteilung des Übergangs zur und (noch mehr) von der Mathematik sind aber möglichst adäquate **Mathematikkenntnisse für den Ökonomen** unabdingbar, insbesondere **Kenntnisse der Linearen Algebra**, da man wegen ihrer strukturellen Unkompliziertheit wenn irgend möglich versucht, mit ihr auszukommen.

4. Modelle von ökonomischen Gegebenheiten

Ähnlich wie bei den Worten „System" und „Struktur" besteht sowohl in den Fachsprachen als auch in der Umgangssprache eine gewisse begriffliche Verwirrung im Zusammenhang mit dem Wort „Modell". Wir wollen im folgenden unter einem *Modell* ein System verstehen, das mit Hilfe von Abstraktionsprozessen **zu einem fachspezifischen Zweck** aus einer tatsächlichen oder auch nur gedachten realen, möglicherweise noch recht unstrukturierten Situation gewonnen wurde. Dabei kann es sich um ein Realsystem innerhalb einer Realwissenschaft wie der Wirtschaftswissenschaft oder um ein Formalsystem innerhalb der Mathematik handeln. Im zweiten Fall, der uns in diesem Buch besonders beschäftigen wird, wollen wir allgemein von einem *mathematischen Modell* oder fachspezifisch auch von einem *ökonomathematischen Modell* sprechen. Dieser Modellbegriff umfaßt auch die zugehörigen Abbildungsvorschriften, also Abstraktions- und Konkretionsvorschriften und insbesondere Bedeutungsfestlegungen für die im Formalsystem auftreten-

[1] Vgl. z. B. selbst Jaeger [1972a]. Dahinter steckt allerdings noch eine wohl unlösbare Frage: Existieren die realen Strukturen der Welt an sich, sind sie gewissermaßen „gottgeschaffen", oder sind sie vom Menschen der Realität aufgezwungen?

den mathematischen Größen. Dabei kann ein solches Modell alle Zwischenstufen einschließen, von der bloßen Verwendung der Buchstabenrechnung zur Gewinnung von anderen Zahlen, über prinzipiell sehr durchsichtige Situationen mit der einzigen Komplikation sehr großer Datenmengen bis zur Aufdeckung von verborgenen, möglicherweise sehr überraschenden Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten bei recht undurchsichtiger Situation.
Für die Untersuchung von ökonomischen Fragestellungen werden nach ihrem jeweiligen Zweck drei Haupttypen von Modellen unterschieden:

- **Beschreibungsmodelle**
  Diese Modelle abstrahieren lediglich ökonomische Gegebenheiten, ohne daß sie unmittelbar zur Herleitung von Aussagen vorhersagender oder empfehlender Art beitragen. Mit ihnen können aber an großen Datenbänken numerische Auswertungen vorgenommen und viele neu definierte abgeleitete Größen wie etwa Mittelwerte berechnet werden. Zum Beispiel eignen sie sich dazu, aus Tausenden von Informationen über Güterpreise eine quantitative Aussage über die jährliche Inflationsrate in einer Volkswirtschaft (in der Vergangenheit) zu gewinnen.
- **Prognosemodelle**
  Diese Modelle dienen zur Voraussage zukünftiger ökonomischer Gegebenheiten. Mit ihnen wird z. B. versucht, die spezifischen Absatzchancen eines Produktes oder die Auswirkungen neuer Steuergesetze gesamtwirtschaftlich oder einzelwirtschaftlich zu ergründen.
- **Entscheidungsmodelle**
  Diese Modelle dienen der Auswahl von Maßnahmen zur Gestaltung von ökonomischen Gegebenheiten. In sie gehen in starkem Umfang solche Informationen ein, die vorher aus Beschreibungs- und/oder Prognosemodellen gewonnen wurden. Sie werden in stets wachsendem Maße als Entscheidungshilfe bei Unternehmungen und staatlichen Stellen benutzt.

Im ökonomischen Bereich hat man beim Modellbau, der Modellanalyse und der praktischen Verwertung von Modellen mit einer prinzipiellen Schwierigkeit zu kämpfen, die bei naturwissenschaftlich-technischen Modellen eigentlich überhaupt nicht (oder nur in extremen Sonderfällen) auftritt: den vielseitigen, oft schlecht und manchmal gar nicht abzuschätzenden Einflüssen von Seiten des Menschen. Der Aufbau eines anspruchsvollen (und noch nicht allgemein bekannten oder verwendeten) ökonomathematischen Modelles kann bereits deshalb eine große Aufgabe bedeuten, die erhebliche Kenntnisse nicht nur der Wirtschaftswissenschaft und der Mathematik, sondern möglicherweise auch anderer Realwissenschaften wie etwa der Psychologie und der Soziologie erfordert.

Wenn irgend möglich, werden erfahrene Modellbauer versuchen, ökonomathematische Modelle zu konstruieren, die aus Grundbausteinen der Linearen Algebra und Linearen Optimierung zusammengesetzt sind, wie sie im Verlaufe dieses Buches in Form von Begriffen, theoretischen Zusammenhängen zwischen diesen Begriffen (Lehrsätzen, Eigenschaften) und präzisierten Verfahrensvorschriften (Algorithmen) skizziert werden. Diese sind nämlich, im Vergleich zu Bausteinen anderer mathematischer Gebiete, sowohl begrifflich besonders einfach als auch besonders leicht zu handhaben. Wir wollen hier in diesem Buch solche Modelle *lineare Modelle* nennen. Einige ökonomathematische Grundmodelle aus dem betrieblichen Bereich werden noch in diesem Kapitel vorgestellt und in späteren Kapiteln näher behandelt. Sie sollen nicht nur der Motivation dienen, sondern auch immer wieder unterstreichen, daß sich Ökonomen mit Linearer Algebra und Linearer Optimierung befassen müssen. Wegen ihrer Ausgereiftheit können diese Grundbeispiele allerdings den irreführenden Eindruck erwecken, die Benutzung linearer Modelle reduziere sich auf eine Verwendung von mathematischen Rezepten oder gar nur der mathematischen Sprache und Symbolik.

Modellbau und Modellanalyse sind jedoch keinesfalls Gegenstände dieses Buches. Für die Behandlung derartiger Themen eignen sich elementare Einführungen wegen mehrerer Schwierigkeiten nicht: Erstens sind praxisbezogene mathematische Modelle in der Regel sehr umfangreich (viele Elemente) und sehr komplex (viele Zusammenhänge), so daß sie bereits aus Zeit- und Platzgründen drastisch vereinfacht werden müssen. Aufgrund solcher Vereinfachungen klingen sie dann häufig so banal, daß beim Uneingeweihten der Eindruck erweckt werden kann, es werde künstlich „Verwissenschaftlichung" betrieben und etwas Einfaches durch etwas Gekünsteltes, sehr Unverständliches ersetzt. Zweitens erfordern solche realistischen Modelle meist erhebliche Sachkenntnisse aus den jeweiligen ökonomischen und möglicherweise außerökonomischen Sachgebieten, die erst mühevoll gewonnen werden müssen, wozu keine Zeit ist und wozu das zusätzliche Hintergrundwissen des Studenten noch gar nicht vorhanden sein kann. Drittens fehlen auch die mathematischen Grundkenntnisse, die – wie hier in Linearer Algebra und Linearer Optimierung – vorher vermittelt werden müssen. Wenn die entsprechenden Kenntnisse vollständig fehlen, kann es in der Praxis leicht geschehen, daß das geeignetste mathematische Modell nur deshalb nicht akzeptiert wird, weil es dem für die Benutzung Verantwortlichen völlig undurchsichtig erscheint (während die Konkurrenz aus ihrer Benutzung erhebliche Vorteile zieht).

5. Erste Grundbegriffe der Linearen Algebra und Linearen Optimierung

Eine mathematische Bedingung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \square b$$

mit den (numerisch festgelegten oder noch nicht festgelegten) Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$, bei der das Quadrat „$\square$" für eines der Zeichen

„$=$" (sprich: „gleich" oder „genau so groß wie),
„$\leqq$" (sprich: „kleiner gleich" oder „höchstens so groß wie"),
„$\geqq$" (sprich: „größer gleich" oder „mindestens so groß wie"),
„$<$" (sprich: „kleiner" oder „echt kleiner" oder „strikt kleiner"),
„$>$" (sprich: „größer", „echt größer" oder „strikt größer")

steht und den Zahlenbereich der *Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf solche Zahlenwerte einengen soll, die dieser Einschränkung genügen, heiße *lineare Restriktion*. Lineare Restriktionen zeichnen sich durch zwei Eigenschaften aus:

- Sämtliche Variablen kommen nur in der ersten Potenz vor.
- Es kommen keine Produkte von Variablen vor.

Die Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bezeichnet man als *Koeffizienten*, b als *absolutes Glied* oder als *rechte Seite* der Restriktion.

Beispiel I-5
Die folgenden mathematischen Formeln R_1–R_5 definieren lineare Restriktionen:

$$\begin{array}{ll}
R_1: 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 & = 220 \\
R_2: \quad x_2 & \geqq 0 \\
R_3: \quad x_5 & < -7 \\
R_4: \quad x_3 + x_4 - x_6 & = 2{,}25 \\
R_5: \quad x_4 + x_6 & > 0.
\end{array}$$

Keine linearen Restriktionen sind durch $R_6 - R_8$ gegeben:

$$\begin{array}{ll}
R_6: 2x_1 + 4x_2^2 + x_3 & \leqq 40 \\
R_7: x_1 + x_2 \cdot x_3 + x_4 & = 7 \\
R_8: \quad x_4^2 & \geqq 100.
\end{array}$$

Steht in einer linearen Restriktion das Gleichheitszeichen „=“, so spricht man natürlich auch von einer *linearen Gleichung*, ansonsten von einer *linearen Ungleichung*. Ein weiterer spezieller Restriktionstyp ergibt sich, wenn man für eine Variable x_i fordert, sie solle ausschließlich nichtnegative Werte annehmen. In diesem Fall schreibt man

$$x_i \geqq 0$$

und spricht von einer *Nichtnegativitätsrestriktion* oder auch kurz von einer *NN-Restriktion.*

Beispiel I-6

Bei den Restriktionen R_1 und R_4 aus dem letzten Beispiel handelt es sich um lineare Gleichungen, bei R_2 um eine NN-Restriktion.

Restriktionen, bei denen die Zeichen „<“ und „>“ vorkommen, erweisen sich als rechentechnisch ungünstig, lassen sich jedoch vermeiden. So kann etwa die Ungleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n < b$$

durch

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leqq b - \varepsilon$$

ersetzt werden, wobei ε im Rahmen der Rechengenauigkeit beliebig klein gewählt werden kann. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich deshalb hauptsächlich auf Restriktionen der Form „=“, „≦“, „≧“.

In der Regel sollen Zahlenwerte für die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so gesucht werden, daß sie gleichzeitig mehreren linearen Restriktionen

$$\text{(I-1)} \quad \left\{\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \,\square_1\, b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \,\square_2\, b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \,\square_m\, b_m
\end{array}\right.$$

genügen. In diesem Fall heiße die Zusammenfassung dieser $m\,(m \geqq 1)$ Restriktionen *lineares Restriktionssystem.* Bei einer Darstellung von linearen Restriktionssystemen des Typs (I-1) gibt normalerweise, wie hier, der erste Index der Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ also die jeweilige Restriktion an, in der dieser Koeffizient steht, der zweite Index die Variable, auf die er sich bezieht. Entsprechend beziehen sich die Indices der Quadrate $\square_1, \square_2, \ldots, \square_m$ bzw. die Indices der rechten Seiten $b_1, b_2, \ldots, b_m$ auf die betreffenden Restriktionen.

Beispiel I-7

$$RS_1: \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \geqq 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_4 \geqq 0 \\ 7x_2 + x_3 - 9x_4 \leqq 110 \end{cases}$$

stellt ein lineares Restriktionssystem für die Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 dar.

Steht jedes der Zeichen „$\square_i$" ($i = 1, \ldots, m$) für das Gleichheitszeichen „$=$", so heiße (I-1) ein *(allgemeines) lineares Gleichungssystem.*

Beispiel I-8

Bei folgenden Restriktionssystemen handelt es sich um lineare Gleichungssysteme:

$$RS_2: \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 16 \\ 2x_1 - 4x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 24. \end{cases}$$

$$RS_3: \quad x_1 + x_2 = 2.$$

$$RS_4: \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Neben der oben verwendeten *ausführlichen Schreibweise* (I-1) ist für lineare Restriktionssysteme auch die kürzere *Summenschreibweise* (I-2) gebräuchlich:

$$\text{(I-2)} \quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \square_1 b_1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \square_2 b_2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \square_m b_m. \end{cases}$$

Häufig kürzt man sogar noch knapper das ganze System durch eine Gleichung mit variablem Index i ab:

$$\text{(I-3)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \square_i b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Sind nun $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ derartige reelle Zahlen, daß sämtliche Restriktionen von (I-1) erfüllt sind, wenn man die Variablen x_j auf die entsprechenden Werte x_j^* *fixiert*, d.h. die Ersetzung

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^* \\ x_2 &= x_2^* \\ &\vdots \\ x_n &= x_n^* \end{aligned}$$

vornimmt, dann heiße die durch die Numerierung geordnete vertikal oder horizontal geschriebene Zusammenfassung

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

dieser Zahlen $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ kurz eine *Lösung* oder ausführlicher ein *Lösungsvektor* des linearen Restriktionssystems (I-1). Ganz allgemein bezeichnet man nämlich jede solche Zusammenfassung in der durch die Numerierung festgelegten Reihenfolge als n-*Vektor* oder kürzer als *Vektor* (siehe Kapitel III, wo Vektoren systematisch eingeführt und behandelt werden). Die Frage, ob bestimmte Zahlenwerte für die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Lösung eines Restriktionssystems darstellen, untersucht man gemäß unserer Definition dadurch, daß man diese Zahlen einfach in jede Restriktion des Restriktionssystems einsetzt, die linke Seite numerisch ausrechnet und überprüft, ob das jeweilige Restriktionszeichen $\square_i$ zwischen der ausgerechneten Zahl auf der linken Seite und derjenigen auf der rechten Seite tatsächlich Gültigkeit besitzt.

Beispiel I-9
Wir überprüfen, ob

$$(4, 3, 5, 2)$$

eine Lösung des Restriktionssystems RS_1 aus Beispiel I-7 darstellt. Dazu ersetzen wir in diesem Restriktionssystem die Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 jeweils durch die Zahlen 4, 3, 5, 2 und erhalten:

Überprüfung für die 1. Restriktion

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \overset{?}{\geqq} 1$$
$$\curvearrowright \quad 12 + 12 - 25 + 4 \overset{?}{\geqq} 1$$
$$\curvearrowright \quad 3 \geqq 1 \quad \surd$$

Überprüfung für die 2. Restriktion

$$4 + 3 - 5 \overset{?}{=} 2$$
$$\curvearrowright \quad 2 = 2 \quad \surd$$

Überprüfung für die 3. Restriktion

$$2 \geqq 0 \quad \surd$$

Überprüfung für die 4. Restriktion

$$7 \cdot 3 + 5 - 9 \cdot 2 \overset{?}{\leqq} 110$$
$$\curvearrowright \quad 21 + 5 - 18 \overset{?}{\leqq} 110$$
$$\curvearrowright \quad 8 \leqq 110 \quad \surd$$

Das Fragezeichen „?“ soll deutlich machen, daß die Gültigkeit des darunterstehenden Zeichens noch zu prüfen ist. Entsprechend steht ein Haken „$\surd$ “ neben derjenigen Restriktion, aus der die Gültigkeit des entsprechenden Restriktionszeichens klar hervorgeht. Schließlich ist das Zeichen „$\curvearrowright$" wie „folglich" zu lesen.

$$(4, 3, 6, -2)$$

ist dagegen keine Lösung des Restriktionssystems, weil die Zahlenwerte schon der ersten Restriktion nicht genügen:

Überprüfung für die 1. Restriktion

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) \overset{?}{\geqq} 1$$
$$\curvearrowright \quad 12 + 12 - 30 + (-4) \overset{?}{\geqq} 1$$
$$\curvearrowright \quad -10 \ngeqq 1\,.$$

Das Zeichen „$\ngeqq$" besagt dabei, daß das Ungleichheitszeichen „$\geqq$" keine Gültigkeit besitzt.

Sofern wir in einer Restriktion oder in einem ganzen Restriktionssystem alle auftretenden Variablen x_j mit einem Stern * versehen, meinen wir mit dieser *Fixierung der Variablen auf Zahlenwerte* x_j^*, daß $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ eine Lösung sein soll. Insbesondere repräsentieren dann Gleichungen mit allseits fixierten Variablen Identitäten und nicht mehr Restriktionen.

Im Sinne der Mengenlehre kann man die Menge aller Lösungen eines linearen Restriktionssystems (I-1) auch folgendermaßen interpretieren: Es sei $\mathscr{L}_i$ die Menge aller Lösungen der Restriktion mit Nummer (präziser: Index) i ($i = 1, \ldots, m$). Die Menge $\mathscr{L}_{RS}$ aller Lösungen des Restriktionssystems ergibt sich dann als Schnittmenge der Lösungsmengen $\mathscr{L}_i$ ($i = 1, \ldots, m$):

$$\mathscr{L}_{RS} = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \cap \ldots \cap \mathscr{L}_m\,.$$

Ihnen dürfte klar sein, daß eine Restriktion und entsprechend auch ein Restriktionssystem durchaus mehrere Lösungen besitzen kann. Wegen dieser Möglichkeit der Existenz mehrerer Lösungen ist es zweckmäßig, die Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nicht – wie Sie es aus der Schulmathematik kennen mögen – als Unbekannte anzusehen, sondern sie vielmehr – wie wir es bereits getan haben – als Variablen (im Sinne der Analysis) aufzufassen, die gewissen Einschränkungen unterliegen. Im übrigen ist dieser Fall aus ökonomischer Sicht von besonderem Interesse, und zwar vor allem im Zusammenhang mit Entscheidungssituationen. Bildet unser Restriktionssystem nämlich die jeweiligen Handlungsmöglichkeiten ab, so folgt daraus, daß ein gewisser Handlungsspielraum besteht. Im Wirtschaftsleben zeitigen nun unterschiedliche Handlungsweisen aber auch unterschiedliche ökonomische Folgen im Hinblick auf angestrebte Ziele, wie die Erzielung eines möglichst hohen Unternehmungsgewinnes, einer möglichst großen Kapitalverzinsung, eines möglichst hohen Umsatzes usw. Es liegt nun nahe, die Auswirkungen der verschiedenen Handlungsmöglichkeiten im Hinblick auf ihre jeweilige Zielerreichung ebenfalls innerhalb des Modells zu erfassen. Bei einem linearen Modell geschieht das durch eine *lineare Zielfunktion*. Das ist in der Sprechweise der Schulmathematik eine Funktion

$$\text{(I-4)} \qquad x_0 = b_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n\,,$$

mit der unabhängigen Variablen x_0, hier *Zielvariable* genannt, und den abhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, in diesem Zusammenhang auch *Restriktionsvariablen* genannt, die jedem Vektor

$$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

von reellen Zahlen $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ (also insbesondere auch jeder Lösung eines linearen Restriktionssystems (I-1)) mit Hilfe des linearen Polynoms

$$b_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

eine Zahl

$$x_0^* = b_0 + c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \ldots + c_n x_n^*$$

zuordnet. x_0^* nennt man in diesem Zusammenhang auch den *Zielwert* von $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$.

Beispiel I-10
Durch

$\mathscr{L}_1^{\mathrm{I}}$: (4, 3, 5, 2)
$\mathscr{L}_1^{\mathrm{II}}$: (3, 3, 4, 5)

sind zwei Lösungen für das Restriktionssystem RS_1 aus Beispiel I-7 gegeben. Die Zielfunktion

$$x_0 = 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 30x_4$$

ordnet der Lösung $\mathscr{L}_1^{\mathrm{I}}$ den Zielwert

$$x_0 = 210$$

und der Lösung $\mathscr{L}_1^{\mathrm{II}}$ den Zielwert

$$x_0 = 280$$

zu.

Die Zielvariable wird auch manchmal implizit durch die *Zielgleichung*

$$\text{(I-5)} \qquad x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2 + \ldots + a_{0n} x_n = b_0$$

eingeführt. Dabei ist der Zusammenhang zwischen beiden Darstellungsformen durch

$$a_{01} = -c_1,\ a_{02} = -c_2, \ldots, a_{0n} = -c_n$$

gegeben. Die (definitorische) Zielfunktion und die daraus abgeleitete Zielgleichung faßt man (zumindest in der hier zu behandelnden elementaren Theorie) nicht als Restriktion auf, sondern betrachtet und schreibt sie bewußt gesondert.

Im Rahmen ökonomischer Problemlösungsprozesse sucht man – wie bereits erwähnt – nach ganz bestimmten Lösungen eines Restriktionssystems, nämlich nach solchen, die extrem günstig sind, d.h. zu denen es keine günstigeren gibt. Das sind meistens Lösungen, die in bezug auf eine bestimmte Zielfunktion entweder einen möglichst großen oder einen möglichst kleinen Zielwert aufweisen. Im ersten Fall spricht man von einer *Maximierungs-*, im zweiten Fall von einer *Minimierungs-* bzw. allgemein von einer *Optimierungsaufgabe*, und derartige Lösungen nennt man entsprechend *optimal*.

Eine Maximierungsaufgabe (Minimierungsaufgabe) wird gewöhnlich in der Form

$$\text{(I-6)} \quad \begin{cases} x_0 = b_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \Box_i b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ x_0 \to \max! \ (\min!) \end{cases}$$

oder noch kürzer

$$\text{(I-7)} \quad \begin{cases} x_0 = b_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max! \ (\min!) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \Box_i b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

aufgeschrieben. Jedes formale System des Typs (I-6) bzw. (I-7), bestehend aus einer Zielfunktion (I-4) oder einer äquivalenten Zielgleichung (I-5), einem System von Restriktionen (I-3) sowie einer *Zielvorschrift*

$$x_0 \to \max! \quad \text{oder} \quad x_0 \to \min!$$

bezeichnet man als *lineares Optimierungssystem.* Für $x_0 \to \max!$ spricht man auch genauer von einem *linearen Maximierungssystem*, für $x_0 \to \min!$ von einem *linearen Minimierungssystem.*

Beispiel I-11

Unterstellt sei wieder das Restriktionssystem RS_1 aus Beispiel I-7. Gesucht sei eine Lösung dieses Restriktionssystems, deren Zielwert in bezug auf die in Beispiel I-10 angegebene Zielfunktion möglichst groß wird. Die entsprechende Maximierungsaufgabe können wir dann folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned} x_0 = 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 30x_4 &\to \max! \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 &\geqq 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_4 &\geqq 0 \\ 7x_2 + x_3 - 9x_4 &\leqq 110. \end{aligned}$$

Die Frage, wie sich für lineare Restriktionssysteme Lösungen und insbesondere möglichst gute Lösungen finden lassen, bildet einen zentralen Punkt in diesem Buch.

6. Grundbeispiele linearer Modelle aus dem betrieblichen Bereich

Mathematische und insbesondere lineare Modelle werden Sie in vielen ökonomischen Bereichen vorfinden. Die linearen Modelle in der Volkswirtschaftslehre erfordern jedoch leider eine Reihe ökonomischer Vorkenntnisse, die wir bei Ihnen noch nicht voraussetzen können. Deshalb beschränken wir uns in diesem Buch auf die Vorstellung und Behandlung von sechs Grundbeispielen aus dem betrieblichen Bereich, die Sie auch ohne ökonomische Spezialkenntnisse verstehen werden. Es sei allerdings darauf hingewiesen, daß wir diese Beispiele aus praktischen und didaktischen Gründen gegenüber den tatsächlichen Gegebenheiten der Praxis erheblich vereinfacht und verkleinert haben. Dadurch ergibt sich lediglich ein gradueller, jedoch kein wesensmäßiger Unterschied zu den zugrundeliegenden realen Fragestellungen.

6.1. Grundbeispiel 1: Prozeßanalyse

Wie beginnen mit einem abstrakten Beispiel, das seine Entsprechung in der Realität vor allem bei Montageprozessen findet. Auf dieses Grundbeispiel werden wir bereits im nächsten Kapitel im Zusammenhang mit einem Gleichungs- und Ungleichungssystem zurückkommen.

Darstellung der Ausgangssituation

Betrachtet sei ein zweistufiger Produktionsprozeß, der in Abb. I-2 vereinfacht dargestellt ist.

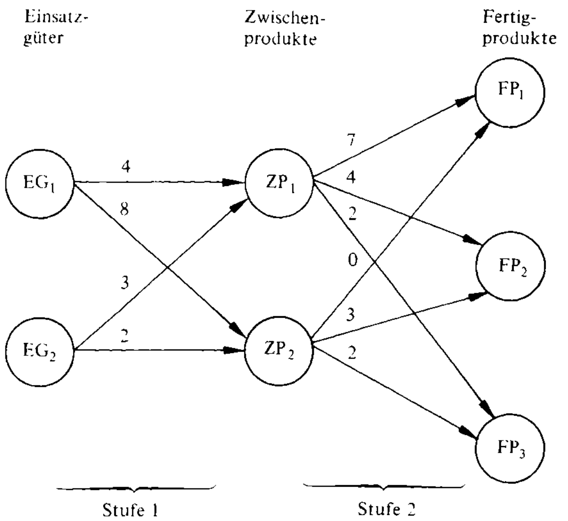


Abb. I-2: Vereinfachte Darstellung eines zweistufigen Produktionsprozesses

Eine Darstellung, wie sie durch Abb. I-2 gegeben ist, bezeichnet man in Anlehnung an VAZSONYI ([1962], S. 383) als *Gozinto-Graph* (eine Verballhornung der Aussprache von „goes into").

Sie besagt hier folgendes: Aus den Einsatzgütern EG_1 und EG_2 werden zunächst die Zwischenprodukte ZP_1 und ZP_2 gefertigt, aus denen wiederum die Fertigprodukte FP_1, FP_2 und FP_3 hergestellt werden. Die Pfeile zeigen jeweils die Produktionsrichtung an. Die Zahlen an den Pfeilen stehen für die Mengeneinheiten eines Einsatzgutes bzw. Zwischenproduktes, die für die Herstellung einer Mengeneinheit (ME) eines nachfolgenden Zwischenproduktes bzw. Fertigproduktes einzusetzen sind. Beispielsweise werden zur Herstellung einer Mengeneinheit von FP_2 4 ME von ZP_1 und 3 ME von ZP_2 benötigt. Für eine Mengeneinheit von ZP_1 sind wiederum 4 ME von EG_1 und 3 ME von EG_2 einzusetzen.

Für einen Planungszeitraum liegen uns in bezug auf den Produktionsprozeß noch die folgenden Informationen vor: Von den Fertigprodukten FP_1, FP_2 und FP_3

seien 20, 10 bzw. 5 ME herzustellen; Lagerbestände bestehen weder für die Einsatzgüter noch für die Zwischenprodukte und sollen auch nicht gebildet werden. Bei den Zwischenprodukten sei außerdem sowohl ein Zu- als auch ein Verkauf ausgeschlossen. Die Einstandspreise der Einsatzgüter EG_1 und EG_2 betragen 40 und 60 Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit.

Typische Fragestellungen sind nun:

- Wie viele Mengeneinheiten der Einsatzgüter sind in einer Mengeneinheit der Fertigprodukte enthalten?
- Wie viele Mengeneinheiten der Einsatzgüter sind für das vorgegebene Produktionsprogramm zu beschaffen?
- Wie viele Mengeneinheiten der Zwischenprodukte sind herzustellen?
- Wie hoch sind die Kosten pro Mengeneinheit der Fertigprodukte, die durch die Einsatzgüter verursacht werden?

Vorbemerkung
Die Beantwortung der oben gestellten Fragen ist wegen der geringen Anzahl der aufgeführten Produkte natürlich schon anhand von Abb. I-2 möglich. Wir wollen uns das dadurch klarmachen, daß wir zunächst die für die Herstellung einer Mengeneinheit von FP_2 benötigten Mengeneinheiten von EG_1 ermitteln.

Zur Herstellung von FP_2 sind die Zwischenprodukte ZP_1 und ZP_2 einzusetzen, die beide EG_1 enthalten, und zwar enthält jede Mengeneinheit von ZP_1 4 ME, jede Mengeneinheit von ZP_2 8 ME von EG_1. Für eine Mengeneinheit von FP_2 werden aber 4 ME von ZP_1 und 3 ME von ZP_2 benötigt, insgesamt also

$$4 \cdot \boxed{4} + 8 \cdot \boxed{3} = 40.$$

In jeder Mengeneinheit von FP_2 sind also 40 Mengeneinheiten von EG_1 enthalten. In Tab. I-1 sind die Rechnungen für die übrigen Fertigprodukte und Einsatzgüter enthalten:

	FP_1	FP_2	FP_3
EG_1	$4 \cdot \boxed{7} + 8 \cdot \boxed{0} = 28$	$4 \cdot \boxed{4} + 8 \cdot \boxed{3} = 40$	$4 \cdot \boxed{2} + 8 \cdot \boxed{2} = 24$
EG_2	$3 \cdot \boxed{7} + 2 \cdot \boxed{0} = 21$	$3 \cdot \boxed{4} + 2 \cdot \boxed{3} = 18$	$3 \cdot \boxed{2} + 2 \cdot \boxed{2} = 10$

Tab. I-1: Gehalt (in ME) an Einsatzstoffen EG_1 und EG_2 pro ME der Fertigprodukte FP_1, FP_2 und FP_3

Quadrate und Kreise sollen das Typische an der Zusammensetzungsvorschrift verdeutlichen, die in Kapitel IV unmittelbar als Grundlage für die Definition der Matrizenmultiplikation dienen wird. In den Kreisen stehen immer diejenigen ME des Einsatzgutes EG_i $(i = 1, 2)$, die pro ME des Zwischenproduktes ZP_k $(k = 1, 2)$ einzusetzen sind. Entsprechend geben die Zahlen in den Quadraten an, wieviel ME des Zwischenproduktes ZP_k pro ME des Fertigproduktes FP_j $(j = 1, 2, 3)$ benötigt werden.

Ganz analog ließen sich die übrigen Fragen beantworten. Es dürfte aber auch klar sein, daß eine solche Analyse bei realen Produktionsprozessen mit einer Vielzahl von Produktionsstufen und vielleicht Hunderten von Einsatzgütern, Zwischen-und Endprodukten nicht mehr oder nur in sehr aufwendiger Weise durchführbar ist. Wir wollen deshalb versuchen, mit dem folgenden mathematischen Modell einen anderen Weg zu finden.

Mathematische Größen und ihre Bedeutung im Modell

Für das zu erstellende Modell wählen wir die folgenden Symbole mit der jeweils zugeordneten Bedeutung:

x_1: zu beschaffende Mengeneinheiten des Einsatzgutes EG_1;
x_2: zu beschaffende Mengeneinheiten des Einsatzgutes EG_2;
x_3: herzustellende Mengeneinheiten des Zwischenproduktes ZP_1;
x_4: herzustellende Mengeneinheiten des Zwischenproduktes ZP_2;
x_5: herzustellende Mengeneinheiten des Fertigproduktes FP_1;
x_6: herzustellende Mengeneinheiten des Fertigproduktes FP_2;
x_7: herzustellende Mengeneinheiten des Fertigproduktes FP_3.

Modellformulierung

Zunächst sei lediglich die zweite und dritte Frage betrachtet, zu deren simultaner Beantwortung wir hier ein Modell formulieren. In bezug auf die beiden anderen Fragen wird ein geeignetes Instrumentarium erst in Kapitel IV entwickelt. Wir kommen dort darauf zurück.

Jeder Knoten in Abb. I-2 läßt sich als Darstellung einer Aktivität bei einer gewissen Normalleistung interpretieren, die in der Beschaffung bzw. in der Produktion einer Mengeneinheit des in dem jeweiligen Knoten genannten Gutes besteht.

- Durch den Knoten EG_1 wird beispielsweise die Aktivität zur Beschaffung einer Mengeneinheit des Einsatzgutes EG_1 repräsentiert.
- Durch den Knoten ZP_2 wird die Aktivität zur Herstellung einer Mengeneinheit des Zwischenproduktes ZP_2 repräsentiert.
- Durch den Knoten FP_1 wird die Aktivität zur Herstellung einer Mengeneinheit des Fertigproduktes FP_1 repräsentiert.

Derartige *Einheitsaktivitäten* lassen sich leicht durch Listen beschreiben, bei denen sich jedes Glied auf ein Gut bezieht und die Mengenangaben eines hergestellten Gutes mit positiven, die eines eingesetzten Gutes mit negativen Vorzeichen versehen sind. Dabei werden nur die bei der betreffenden Aktivität **direkt** eingehenden und hergestellten Gütermengen betrachtet. Für die Aktivität zur Herstellung **einer** Mengeneinheit von FP_2, kurz Einheitsaktivität für FP_2, ergibt sich beispielsweise:

Aktivität / Gut	FP_2
EG_1	0
EG_2	0
ZP_1	−4
ZP_2	−3
FP_1	0
FP_2	1
FP_3	0

Tab. I-2: Liste der Einheitsaktivität für das Produkt FP_2

Faßt man sämtliche Einheitsaktivitäten eines Produktionsprozesses zu einer Tabelle zusammen, so erhält man eine sog. *Aktivitätstabelle*, die für das Beispiel aus Abb. I-2 folgendermaßen aussieht:

Gut \ Aktivität	EG_1	EG_2	ZP_1	ZP_2	FP_1	FP_2	FP_3
EG_1	1		−4	−8			
EG_2		1	−3	−2			
ZP_1			1		−7	−4	−2
ZP_2				1		−3	−2
FP_1					1		
FP_2						1	
FP_3							1

Tab. I-3: Aktivitätstabelle 1 (Einheitsaktivitäten)

Zur weiteren Interpretation einer derartigen Tabelle sei zunächst eine **Vergangenheitsbetrachtung** vorgenommen. Die in einem vergangenen Planungszeitraum tatsächlich beschafften und hergestellten Gütermengen (*Aktivitätsgrade*) seien mit $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_7$ bezeichnet. Sie geben an, wie oft in dem betrachteten Planungszeitraum die betreffende Einheitsaktivität durchgeführt wurde.

Multipliziert man nun die in der Aktivitätstabelle 1 von Tab. I-3 gegebenen Einheitsaktivitäten mit dem jeweiligen Aktivitätsgrad, so gelangt man zu einer neuen Aktivitätstabelle (Tab. I-4):

Gut \ Aktivität	EG_1	EG_2	ZP_1	ZP_2	FP_1	FP_2	FP_3
EG_1	$1\bar{x}_1$		$-4\bar{x}_3$	$-8\bar{x}_4$			
EG_2		$1\bar{x}_2$	$-3\bar{x}_3$	$-2\bar{x}_4$			
ZP_1			$1\bar{x}_3$		$-7\bar{x}_5$	$-4\bar{x}_6$	$-2\bar{x}_7$
ZP_2				$1\bar{x}_4$		$-3\bar{x}_6$	$-2\bar{x}_7$
FP_1					$1\bar{x}_5$		
FP_2						$1\bar{x}_6$	
FP_3							$1\bar{x}_7$

Tab. I-4: Aktivitätstabelle 2 (mit Aktivitätsgraden im Planungszeitraum)

Eine derartige Aktivitätstabelle läßt sich nun auch zeilenweise lesen. Dazu sei die erste Zeile betrachtet. $1\bar{x}_1$ gibt die insgesamt beschaffte Gütermenge des Einsatzgutes EG_1 an. Hiervon wurden $4\bar{x}_3$ Mengeneinheiten zur Herstellung von $\bar{x}_3$ ME von ZP_1 und $8\bar{x}_4$ Mengeneinheiten zur Herstellung von $\bar{x}_4$ ME von ZP_2 verbraucht. Summiert man die Elemente einer beliebigen Zeile der Aktivitätstabelle 2 auf, so bedeutet allgemein

- ein positives Ergebnis, daß von dem betreffenden Gut mehr beschafft bzw. produziert wurde, als im gesamten Produktionsprozeß benötigt wurde. Der Überschuß konnte auf Lager genommen oder verkauft werden;
- ein negatives Ergebnis, daß von dem betreffenden Gut weniger beschafft bzw. produziert wurde, als im gesamten Produktionsprozeß benötigt wurde. Das Defizit mußte durch Lagerbestandsverringerungen ausgeglichen werden;

- das Ergebnis Null, daß gerade soviel von dem betreffenden Gut beschafft bzw. produziert wurde, wie im gesamten Produktionsprozeß beschafft wurde.

Die Ergebnisse könnte man in einer zusätzlichen Spalte der Aktivitätstabelle 2 festhalten und deren Elemente als rechte Seiten eines Gleichungssystems interpretieren. In dieser Vergangenheitsbetrachtung stellen diese rechten Seiten zunächst Unbekannte dar, die aus den vorgegebenen Aktivitätsgraden zu ermitteln waren.

Die oben aufgeworfene Fragestellung beinhaltet dagegen eine **Zukunftsbetrachtung**, bei der – genau umgekehrt – die rechten Seiten des Gleichungssystems bekannt, die Aktivitätsgrade aber zu ermitteln sind.

- Fertigprodukte
  Von FP_1, FP_2 und FP_3 sind 20, 10 und 5 ME herzustellen. Folglich muß entsprechend unserer Bedeutungsfestlegung für die Symbole

$$\begin{aligned} x_5 \qquad\qquad &= 20 \\ x_6 \qquad &= 10 \\ x_7 &= 5 \end{aligned}$$

  gelten.

- Zwischenprodukte
  Für die Zwischenprodukte ZP_1 und ZP_2 soll voraussetzungsgemäß weder Lagerbildung noch ein Zukauf möglich sein. Es sind deshalb genau so viele Mengeneinheiten von diesen Produkten herzustellen, wie für die Produktion von x_5 ME von FP_1, x_6 ME von FP_2 und x_7 ME von FP_3 benötigt werden. Anders ausgedrückt gilt für ZP_1: Die Differenz zwischen den hergestellten Mengeneinheiten von ZP_1 einerseits und den zur Produktion von FP_1, FP_2 und FP_3 benötigten Mengeneinheiten dieses Gutes andererseits soll genau gleich Null sein:

$$x_3 \qquad - 7x_5 - 4x_6 - 2x_7 = 0$$

  Entsprechend ergibt sich für ZP_2:

$$x_4 - \qquad 3x_6 - 2x_7 = 0.$$

- Einsatzgüter
  Analog müssen von den Einsatzgütern EG_1 und EG_2 genau soviel Mengeneinheiten hergestellt werden, wie zur Herstellung von ZP_1 und ZP_2 benötigt werden:

$$\begin{aligned} x_1 \quad - 4x_3 - 8x_4 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

- NN-Restriktionen
  Schließlich sollen negative Werte für die Unbekannten $x_1, \ldots, x_7$ ausgeschlossen werden.

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqq 0.$$

  Diese NN-Restriktionen besagen insbesondere, daß eine Vernichtung vorhandener Lagerbestände an Einsatzgütern, Zwischen- und Endprodukten nicht zulässig sein soll. Dabei steht der zuletzt angeführte Ausdruck als Abkürzung für das Restriktionssystem

$$\begin{aligned}
x_1 \quad & \geqq 0 \\
x_2 \quad & \geqq 0 \\
& \;\vdots \\
x_7 & \geqq 0.
\end{aligned}$$

Wir fassen sämtliche Restriktionen, die ja gleichzeitig erfüllt sein sollen, zu einem Restriktionssystem zusammen:

$$\begin{array}{lllllllll}
x_1 & & -4x_3 & -8x_4 & & & & = & 0 \\
& x_2 & -3x_3 & -2x_4 & & & & = & 0 \\
& & x_3 & & -7x_5 & -4x_6 & -2x_7 & = & 0 \\
& & & x_4 & & -3x_6 & -2x_7 & = & 0 \\
& & & & x_5 & & & = & 20 \\
& & & & & x_6 & & = & 10 \\
& & & & & & x_7 & = & 5 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geqq & 0.
\end{array}$$

Sie sehen, daß Tab. I-3 unmittelbar die Koeffizienten des Systems dieser Gleichungen in ihren jeweiligen Positionen wiedergibt.

6.2. Grundbeispiel 2: Absatzprognose

Im Anschluß an das Beispiel aus dem Produktionsbereich wollen wir uns nun näher mit Fragestellungen aus dem Absatzbereich beschäftigen. Es soll zunächst untersucht werden, wie sich der zukünftige Marktanteil eines Anbieters abschätzen läßt.

Darstellung der betrachteten Ausgangssituation

Es sei ein Markt für einen bestimmen Zeitschriftentyp, nämlich Reisemagazine, betrachtet. Wir nehmen an, daß monatlich etwa 50000 Exemplare verkauft werden, wodurch das Marktvolumen nahezu ausgeschöpft sei. Die 50000 Exemplare teilen sich vollständig auf drei monatlich erscheinende Magazine A, B und C auf. Ihre Marktanteile haben sich bei etwa 20%, 50% und 30% eingependelt. Trotzdem ist zu beobachten, daß stets ein Teil der Käufer beim Kauf im folgenden Monat zu einem anderen Magazin überwechselt. Die Herausgeber des Magazins A überlegen nun, ob sie nicht auf das Übergangsverhalten Einfluß nehmen sollen, um so ihren Marktanteil zu vergrößern. So könnte man etwa über eine verstärkte Abonnentenwerbung versuchen, einen größeren Teil von Käufern an ihr Magazin zu binden. Das von der Marktforschungsabteilung geschätzte neue Übergangsverhalten ist in Abbildung I-3 auf der folgenden Seite veranschaulicht.

Die Zahlen an den Pfeilen geben dabei an, welche Anteile der Käufer der Zeitschrift i (i = A, B, C) in dem folgenden Monat zur Zeitschrift j (j = A, B, C) überwechseln.

Folgende Fragen sollen – unter der Annahme gleichbleibender Übergangshäufigkeiten – beantwortet werden:

- Wie hoch sind die Marktanteile der Zeitschriften im nächsten Monat (t = 1)?

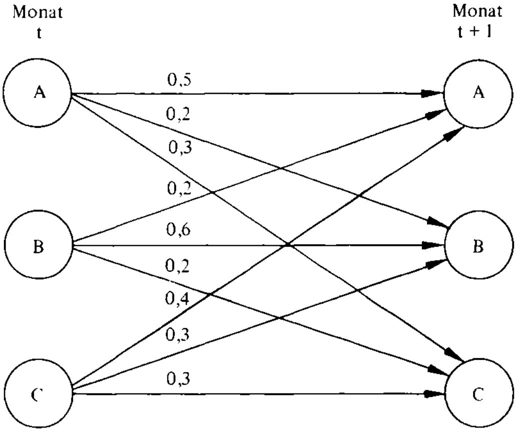


Abb. I-3: Darstellung der (relativen) Übergangshäufigkeiten zwischen den Magazinen A, B und C

- Wie hoch sind die Marktanteile der Zeitschriften in den folgenden Monaten?
- Pendeln sich die Marktanteile der Zeitschriften längerfristig bei bestimmten Werten ein?

Vorbemerkung

Auch im vorliegenden Fall können die gestellten Fragen durch einfache Überlegungen beantwortet werden. So läßt sich der Marktanteil $x_A^{(1)}$ des Magazins A im nächsten Monat (t = 1) anhand von Abb. I-3 ausrechnen:

$$x_A^{(1)} = 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}32\,.$$

Entsprechend für die übrigen Marktanteile $x_B^{(1)}$ und $x_C^{(1)}$:

$$x_B^{(1)} = 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}43$$
$$x_C^{(1)} = 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}25\,.$$

Ausgehend von diesen Werten lassen sich analog die neuen Marktanteile $x_A^{(2)}$, $x_B^{(2)}$, $x_C^{(2)}$ für den übernächsten Monat (t = 2), daraus wieder die Marktanteile in dem darauffolgenden Monat (t = 3) usw. errechnen. Die Ergebnisse sind in Tab. I-5, auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, zusammengestellt.

Nach der Periode 3 ändern sich die Marktanteile kaum noch. In einem Fall wie diesem, in dem kein Unterschied zwischen den Anteilen in den Perioden $\bar{t} - 1$ und $\bar{t}$ mehr festzustellen ist, wollen wir von einem *Gleichgewichtszustand* sprechen. Man erhält im vorliegenden Fall bereits für kleine Werte von t Näherungswerte für die Marktanteile im Gleichgewichtszustand, der hier existiert.

Offensichtlich erweisen sich die dargestellten Rechnungen als sehr aufwendig, wenn eine Vielzahl von Magazinen zu betrachten ist. Es versagt außerdem, wenn kein Gleichgewichtszustand erreicht wird. Wir wollen deshalb ein Modell entwerfen, mit dem wir feststellen können, ob überhaupt ein solcher Gleichgewichtszustand existiert und wie er ggf. aussieht.

Anteil von / in	A	B	C
$t = 0$	0,20	0,50	0,30
$t = 1$	0,32	0,43	0,25
$t = 2$	0,35	0,40	0,25
$t = 3$	0,36	0,38	0,26
	⋮		
$t = \bar{t}$	0,36	0,38	0,26

Tab. I-5: Marktanteile der Magazine A, B und C in den Monaten $t = 0, 1, 2, 3, \ldots, \bar{t}$.

Mathematische Größen und ihre Bedeutung im Modell

$x_i^{(t)}$: Marktanteil des Magazins i ($i = A, B, C$) in der Periode t ($t = 0, 1, 2, \ldots, \bar{t}$).

Modellformulierung

- Gleichgewichtszustand

  Unter Verwendung der angegebenen Symbole lassen sich unsere Überlegungen zur Entwicklung der Marktanteile von der Periode $t-1$ zur Periode t wie folgt formulieren:

$$
\begin{aligned}
0{,}5x_A^{(t-1)} + 0{,}2x_B^{(t-1)} + 0{,}4x_C^{(t-1)} &= x_A^{(t)} \\
0{,}2x_A^{(t-1)} + 0{,}6x_B^{(t-1)} + 0{,}3x_C^{(t-1)} &= x_B^{(t)} \\
0{,}3x_A^{(t-1)} + 0{,}2x_B^{(t-1)} + 0{,}3x_C^{(t-1)} &= x_C^{(t)}.
\end{aligned}
$$

  Existiert ein Gleichgewichtszustand, dann soll er – ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit – im Monat $\bar{t}-1$ eintreten. Für einen Gleichgewichtszustand muß aber

$$x_i^{(\bar{t})} = x_i^{(\bar{t}-1)} \quad \text{für} \quad i = A, B, C$$

  gelten. Zur Vereinfachung lassen wir für den Gleichgewichtszustand außerdem die zeitliche Indizierung fort:

$$x_i := x_i^{(\bar{t})} = x_i^{(\bar{t}-1)}; \quad i = A, B, C.$$

Somit erhalten wir das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
0{,}5x_A - 0{,}2x_B - 0{,}4x_C &= 0 \\
-0{,}2x_A + 0{,}4x_B - 0{,}3x_C &= 0 \\
-0{,}3x_A - 0{,}2x_B + 0{,}7x_C &= 0.
\end{aligned}
$$

- Gesamtmarkt
  Die Summe aller Marktanteile muß Eins ergeben:

$$x_A + x_B + x_C = 1\,.$$

- NN-Restriktionen

$$x_A,\ x_B,\ x_C \geqq 0\,.$$

Zusammengefaßt: Zu untersuchen ist das Restriktionssystem

$$\begin{aligned} 0{,}5x_A - 0{,}2x_B - 0{,}4x_C &= 0 \\ -0{,}2x_A + 0{,}4x_B - 0{,}3x_C &= 0 \\ -0{,}3x_A - 0{,}2x_B + 0{,}7x_C &= 0 \\ x_A + \quad x_B + \quad x_C &= 1 \\ x_A, \quad x_B, \quad x_C &\geqq 0\,. \end{aligned}$$

Hat dieses System keine Lösung, so existiert offensichtlich kein Gleichgewichtszustand unseres Prozesses. Hat es genau eine Lösung, so liegt damit der gesuchte Gleichgewichtszustand mit den jeweiligen Marktanteilen vor. Wir kommen auf dieses System in Kapitel II und IV noch eingehend zurück.

6.3. Grundbeispiel 3: Innerbetriebliche Leistungsverrechnung

Während die bisher vorgestellten Fallstudien vor allem Fragestellungen aus der Such- bzw. Planungsphase behandelten, betrifft das folgende Grundbeispiel die Kontrollphase.

Darstellung der betrachteten Ausgangssituation

Wir wollen uns als nächstes einer Fahrradfabrik zuwenden. Neben dem eigentlichen Hauptbetrieb der Radfertigung weist die Unternehmung auf dem Fabrikgelände noch drei Hilfsbetriebe auf, die bestimmte, bei der Radfertigung benötigte Leistungen bereitstellen. Es handelt sich dabei um einen Instandhaltungsbetrieb (I), einen Betrieb zur Dampferzeugung (D) sowie den betrieblichen Fuhrpark (F). Diese drei Hilfsbetriebe geben nun aber nicht nur Leistungen an den Hauptbetrieb, sondern auch untereinander ab. So führt etwa der Instandhaltungsbetrieb Wartungs- und Reparaturarbeiten an den Fertigungsanlagen, aber auch an den Fahrzeugen des Fuhrparks sowie an den Dampferzeugungsanlagen durch. Die Anzahl der in einem ausgewählten Betrachtungszeitraum untereinander und nach außen (d.h. an den Hauptbetrieb) abgegebenen Leistungseinheiten sind für die Hilfsbetriebe in der folgenden Abbildung aufgeführt (vgl. Abb. I-4).

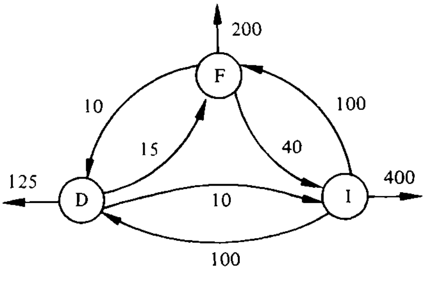


Abb. I-4: Von den Hilfsbetrieben abgegebene Leistungseinheiten

Der Dampferzeugungsbetrieb stellte danach 15 Leistungseinheiten für den Fuhrpark, 10 Leistungseinheiten für den Instandhaltungsbetrieb und 125 für den Hauptbetrieb bereit. Dadurch entstanden natürlich gewisse Kosten. So sind an Löhnen und Gehältern, anteiligen Abschreibungen sowie für von außen bezogene Materialien bei der Dampferzeugung 10000 DM, im Instandhaltungsbetrieb 20000 DM und im Fuhrpark 25000 DM angefallen.

Die Abteilung für das Rechnungswesen möchte nun eine Kalkulation durchführen, die der Ermittlung der durchschnittlichen Kosten pro Stück der verschiedenen Radtypen dient. In diese (durchschnittlichen) Stückkosten sollen auch sämtliche von den Hilfsbetrieben verursachten Kosten eingehen. Für die verschiedenen Radtypen kennt man bereits die jeweils erforderliche Anzahl von Leistungseinheiten der Hilfsbetriebe, die zur Herstellung eines Exemplares erforderlich ist. Das Rechnungswesen hat deshalb die folgende Frage:

- Welche Kosten sind pro Einheit der von den Hilfsbetrieben bezogenen Leistungen anzusetzen?

Die Bestimmung dieser Kosten gestaltet sich nicht so einfach, wie es vielleicht auf den ersten Blick erscheinen mag. Sicherlich wäre es falsch, die oben angeführten Kostenbeträge einfach durch die jeweilige, für den Hauptbetrieb bereitgestellte Leistungsmenge zu dividieren. So kommen für jeden Hilfsbetrieb zu diesen Kosten (*Primärkosten*) noch Kosten für die von den anderen Hilfsbetrieben bezogenen Leistungen (*Sekundärkosten*) hinzu. Dieser neue Kostenbetrag ist dann aber nicht nur auf die an den Hauptbetrieb abgegebenen Leistungen zu verteilen, sondern auch auf diejenigen Leistungen, die von den übrigen Hilfsbetrieben beansprucht werden. Zur Ermittlung der auf einen Hilfsbetrieb entfallenden Sekundärkosten müssen aber die Kosten pro Leistungseinheit der beiden übrigen Hilfsbetriebe schon bekannt sein. Die Kosten des Dampferzeugungsbetriebes lassen sich etwa erst berechnen, wenn die Kosten pro Leistungseinheit des Fuhrparks und die Kosten pro Leistungseinheit des Instandhaltungsbetriebes bekannt sind. Die Kosten des Fuhrparks sind gleichermaßen aber wieder abhängig von denjenigen der Dampferzeugung und des Instandhaltungsbetriebes. Diese wechselseitigen Abhängigkeiten verhindern offensichtlich eine **sukzessive** Berechnung der auf eine Leistungseinheit bezogenen Kosten der Hilfsbetriebe. Wir werden stattdessen ein Modell formulieren, mit dessen Hilfe sich diese Kosten **simultan** bestimmen lassen.

Mathematische Größen und ihre Bedeutung im Modell

x_j: Kosten pro Leistungseinheit des Hilfsbetriebes j ($j = D, F, I$).

Modellformulierung

- Gesamtkosten eines Hilfsbetriebes
  Betrachten wir zunächst den Hilfsbetrieb „Dampferzeugung“. Er hat insgesamt 150 Leistungseinheiten bereitgestellt, so daß ein Kostenbetrag in Höhe von $150\,x_D$ DM auf die anderen Hilfsbetriebe und den Hauptbetrieb zu verteilen sind. Dieser Kostenbetrag setzt sich zusammen aus den Primärkosten in Höhe von 10000 DM sowie den Sekundärkosten für die von den übrigen Hilfsbetrieben bezogenen Leistungen in Höhe von $10\,x_F + 100\,x_I$ DM. Da sämtliche Kosten der Dampferzeugung auf die bereitgestellten Leistungen umgelegt werden sollen, muß gelten:

$$150\,x_D = 10000 + 10\,x_F + 100\,x_I\,.$$

Analog ergibt sich für die beiden anderen Hilfsbetriebe

$$250\,x_F = 25000 + 100\,x_I + 15\,x_D$$
$$600\,x_I = 20000 + 10\,x_D + 40\,x_F.$$

- Insgesamt umzulegende Kosten
  Die dem Hauptbetrieb zuzurechnenden Kosten müssen identisch sein mit der Summe aller in den Hilfsbetrieben angefallenenen Kosten:

$$125\,x_D + 200\,x_F + 400\,x_I = 55000.$$

- NN-Restriktionen
  Negative Kosten pro Leistungseinheit müssen als Komponenten der Lösung ausgeschlossen werden:

$$x_D,\ x_F,\ x_I \geqq 0.$$

Zusammengefaßt: Es muß eine Lösung des folgenden Restriktionssystems gefunden werden:

$$\begin{aligned} 150\,x_D - 10\,x_F - 100\,x_I &= 10000 \\ -15\,x_D + 250\,x_F - 100\,x_I &= 25000 \\ -10\,x_D - 40\,x_F + 600\,x_I &= 20000 \\ 125\,x_D + 200\,x_F + 400\,x_I &= 55000 \\ x_D,\quad x_F,\quad x_I &\geqq 0. \end{aligned}$$

Erstmalig werden wir in Kapitel II auf dieses Grundbeispiel eingehen. Wir kommen dann später noch einmal in Kapitel VI darauf zurück.

6.4. Grundbeispiel 4: Produktionsprogrammplanung

Beispiele der folgenden Art dienen üblicherweise zur Einführung in die Lineare Optimierung. Wir kommen dabei noch einmal auf den Ihnen bereits bekannten Fahrradhersteller zurück.

Darstellung der Ausgangssituation

Die Fahrradfabrik produziert von einem Leichtmetallrad zwei Typen, ein Herrenrad (H) und ein Damenrad (D). Beide Typen unterscheiden sich konstruktionsmäßig im wesentlichen nur in zwei Punkten, dem Rahmen und der Gangschaltung. Auch der Fertigungsprozeß ist weitgehend identisch. Gangschaltung, Lichtanlage und Tretlager sowie verschiedene Kleinteile werden von Zulieferern bezogen, alle übrigen Teile (Rahmen, Schutzbleche etc.) selbst hergestellt. Die Montage, die sich in zwei Stufen gliedert, erfolgt zentral:

In einer ersten Werkstatt werden hauptsächlich vorbereitende Tätigkeiten ausgeführt. Der Rahmen wird zunächst auf ein fahrbares Gerüst gespannt. Dann werden Gewinde gebohrt, Leitungen für die Lichtanlage verlegt, die Führungen für die Gangschaltung angebracht usw. Alle diese Tätigkeiten werden Zug um Zug hintereinander von einer Arbeitskraft ausgeführt. Sie benötigt dafür bei einem Herrenrad im Durchschnitt etwa 15 Minuten, bei einem Damenrad – aufgrund des anders gearteten Rahmens – etwas länger, nämlich 20 Minuten. Insgesamt sind sechs Personen mit solchen vorbereitenden Tätigkeiten betraut.

Zur Durchführung der verbleibenden Montagearbeiten (Anbringen des Lenkers, der Pedale und der Schutzbleche, Einbau der Räder etc.) werden die Gerüste dann in eine zweite Abteilung gerollt. Auch dort übernimmt wieder jeweils eine Arbeitskraft sämtliche anfallenden Montagevorgänge. Im Durchschnitt benötigt sie hierfür – gleichgültig ob es sich um ein Damen- oder um ein Herrenrad handelt – 20 Minuten. Fünf Personen sind in dieser Werkstatt beschäftigt.

Gegenwärtig werden die Räder zum Preis von DM 200,— (Herrenrad) bzw. DM 150,— (Damenrad) ausschließlich an Händler – abgegeben. Es stellt sich nun im Rahmen der monatlichen Produktionsplanung die Frage:

- Welche Stückzahlen der Radtypen H und D sollen im kommenden Monat (20 Arbeitstage von jeweils acht Stunden) hergestellt werden, damit der Umsatz möglichst groß wird?

Dabei ist zu beachten, daß der Rahmenhersteller monatlich höchstens 800 Rahmen für Herrenräder und 2000 für Damenräder liefern kann. Weiterhin soll es wegen der unterschiedlichen Ansprüche an die Qualifikation der Beschäftigten nicht möglich sein, Arbeitskräfte aus der ersten Werkstatt in der zweiten Werkstatt zu beschäftigen und umgekehrt. Wegen der beengten Verhältnisse am gegenwärtigen Standort ist auch keine Lagerung der Fertigprodukte möglich. Somit sind Produktions- und Absatzmengen identisch.

Mathematische Größen und ihre Bedeutung im Modell

x_0: zu maximierender Umsatz des Planungszeitraums;
x_H: zu produzierende Anzahl von Herrenrädern;
x_D: zu produzierende Anzahl von Damenrädern.

Modellformulierung

- Zielfunktion und Zielvorschrift
  Der zu maximierende Umsatz im Planungszeitraum ergibt sich als Summe der mit den jeweiligen Verkaufspreisen multiplizierten Absatzmengen der Fertigprodukte. Damit lauten die Zielfunktion

  $$x_0 = 200x_H + 150x_D$$

  und die zugehörige Zielvorschrift

  $$x_0 \rightarrow \max!$$

- Restriktionen
  - Produktion
    Es muß für alle Werkstätten gewährleistet sein, daß für das zu realisierende Produktionsprogramm die jeweils benötigte Personalkapazität die tatsächlich vorhandene Kapazität nicht überschreitet. Letztere beträgt in dem betrachteten Monat für Werkstatt 1 (W_1) ($6 \cdot 8 \cdot 20 =$) 960 Personenstunden und für Werkstatt 2 (W_2) ($5 \cdot 8 \cdot 20 =$) 800 Personenstunden. Damit läßt sich formulieren:

    $$W_1\colon \tfrac{1}{4}x_H + \tfrac{1}{3}x_D \leqq 960$$
    $$W_2\colon \tfrac{1}{3}x_H + \tfrac{1}{3}x_D \leqq 800.$$

    Die linke Seite jeder Ungleichung gibt für das zu realisierende Produktionspro-