Digitale Regelungstechnik

von
Professor Dr.-Ing. Anton Braun
Fachhochschule Regensburg

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1997

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Braun, Anton:
Digitale Regelungstechnik / von Anton Braun. - München ; Wien :
Oldenbourg, 1997
ISBN 3-486-24027-7

© 1997 R. Oldenbourg Verlag
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0, Internet: http://www.oldenbourg.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Elmar Krammer
Herstellung: Rainer Hartl
Umschlagkonzeption: Kraxenberger Kommunikationshaus, München
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

Inhalt

Vorwort

Die vorliegende Arbeit zeichnet sich durch eine umfassende Behandlung der Analyse und Synthese diskreter Regelkreise aus. Der logische Aufbau dieses Buches zeigt deutlich, daß die Behandlung digitaler Regelkreise im z-Bereich eindeutig als Fortsetzung bekannter Verfahren der analogen Regelkreissynthese im Laplace-Bereich betrachtet werden kann.

Konkret ausgesprochen heißt das, daß der Regler mit Hilfe bekannter Syntheseverfahren im Laplace-Bereich dimensioniert wird und die Übertragungsfunktion des Reglers mit den in diesem Buch vorgestellten Methoden in den z-Bereich abgebildet wird. Aus der daraus resultierenden Differenzengleichung kann dann mit geringem Aufwand der Regelalgorithmus erstellt werden. Diese Vorgehensweise hebt sich deutlich von anderen Büchern ab, die sich mit ähnlicher Materie befassen.

Die entsprechenden Kapitel sind inhaltlich und in ihrem logischen Aufbau so dargestellt, daß diese Arbeit als Begleitmaterial zu Vorlesungen bezüglich Digitaler Regelungstechnik an Fachhochschulen und Universitäten verwendet werden kann.

Der theoretische Hintergrund ist in den verschiedenen Kapiteln sehr detailliert dargestellt, so daß der Leser den entsprechenden Lehrstoff relativ leicht verstehen kann. Zum besseren Verständnis des theoretischen Teils werden die verschiedenen Kapitel mit Zahlenbeispielen ergänzt, die mit MATLAB simuliert sind und gegebenenfalls leicht nachzuvollziehen sind. An theoretischen Vorkenntnissen werden vom Leser lediglich die Grundlagen der klassischen Regelungstechnik, die wichtigsten Regeln der Laplace-Transformation sowie eine gewisse Sicherheit im Umgang mit Differentialgleichungen vorausgesetzt.

Das Buch ist in sechs Abschnitte und einen Anhang mit drei Kapiteln unterteilt. Das erste Kapitel liefert eine Einführung in die Darstellung und den mechanischen Aufbau digitaler Regelkreise. Das zweite Kapitel zeigt die zur Behandlung diskreter Systeme notwendige Theorie der z-Transformation. Im dritten Kapitel werden diskrete Systeme in der z-Ebene analysiert. Hierzu gehören insbesondere die z-Transformierte eines abgetasteten Systems, die

Abbildung der s-Ebene in die z-Ebene, Stabilitätskriterien und die verschiedenen Verfahren der Rücktransformation vom z-Bereich in den diskreten Zeitbereich. Das vierte Kapitel behandelt die Analyse von Abtastsystemen. Hier wird vor allem die Spektraldarstellung eines abgetasteten Systems detailliert untersucht, die Algebra der Blockschaltbilder im z-Bereich sowie die Übertragungsfunktion des offenen und geschlossenen Regelkreises hergeleitet. Im fünften Kapitel wird eine Einführung in die Theorie digitaler Filter aufgezeigt, die gerade bei digitalen Regelkreisen zur Beseitigung verrauschter Meßsignale notwendig sind. Weiterhin werden diverse Verfahren aufgezeigt, mit denen eine bekannte Übertragungsfunktion vom Laplace-Bereich in den z-Bereich transformiert werden kann. Das sechste Kapitel behandelt schließlich das Gebiet der Synthese digitaler Regelkreise. Hier wird zunächst die Reglerdimensionierung anhand vorgegebener Spezifikationen im Zeitbereich aufgezeigt. Dabei kommen im besonderen die Emulationsverfahren, die Polzuweisung mit Hilfe von Wurzelortskurven in der z-Ebene und die Behandlung digitaler Regelkreise mit Hilfe der w-Transformation zur Sprache. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird die Deadbeat-Regelung behandelt, die erst durch die Einführung von Mikrocomputern als regelndes Bauteil realisierbar geworden ist.Bekanntlich spielt die Partialbruchzerlegung in der z-Ebene dieselbe maßgebliche Rolle wie im Laplace-Bereich. Aus diesem Grunde wird im Anhang A die Partialbruchzerlegung echt gebrochen rationaler Funktionen für Bildfunktionen mit reellen und/oder komplexen Polstellen mit entsprechenden Beispielen in geraffter Form festgehalten. Damit sich der Leser in einfachen Fällen den meist zeitraubenden Weg der Partialbruchzerlegung bei der Rücktransformation vom z-Bereich in den diskreten Zeitbereich oder bei entsprechenden Aufgabenstellungen die Transformation vom Laplace- in den z-Bereich ersparen kann, ist im Anhang B eine umfangreiche Tabelle häufig auftretender Korrespondenzen zwischen Laplace- und z-Ebene sowie kontinuierlichem und diskretem Zeitbereich zusammengestellt. Im Anhang C ist schließlich eine Analyse des stationären Verhaltens analoger und digitaler Regelkreise zu finden. Neben einer kurzen Herleitung des stationären Fehlers und der Fehlerkonstanten für Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsregelungen wird die Bestimmung der Fehlerkonstanten in der Frequenzebene aufgezeigt.

Die vorliegende Arbeit entstand aus einer einführenden Vorlesung in die Digitale Regelungstechnik, die ich an der Fachhhochschule Regensburg seit einigen Jahren halte. Meine Studenten, im besonderen Herr Dipl.-Ing.(FH) Josef Wimbauer, haben mir zahlreiche Anregungen bei der Abfassung des Manuskriptes gegeben. Ihnen allen möchte ich an dieser Stelle danken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Ing.(FH) Andreas Baumgartner, der bereit war, unter großem Zeitaufwand sämtliche Simulationen der begleitenden Beispiele mit MATLAB durchzuführen und die entsprechenden Simulationsprogramme für den Leser informativ zu dokumentieren. Des weiteren soll nicht unerwähnt bleiben, daß alle Skizzen und Zeichnungen von Herrn Baumgartner angefertigt wurden.

Schließlich danke ich an dieser Stelle auch meiner Frau, die mir so viele häusliche Pflichten abgenommen hat, daß erst dadurch die Verfassung dieser Arbeit möglich geworden ist.

Regensburg, im März 97 Prof. Dr. Anton Braun

1 Einleitung

Seit dem Beginn der sechziger Jahre werden in zunehmendem Maße Prozeßrechner und Mikrocomputer in industriellen Prozessen als Regler eingesetzt. Zur Optimierung von Regelkreisen, beispielsweise mit dem Ziel maximaler Produktivität, minimaler Kosten oder minimalem Energieverbrauch werden neuerdings vorwiegend digitale Regler eingesetzt. Vor allem durch die Entwicklung kostengünstiger Mikroprozessoren und Mikrocomputer werden in besonderem Maße digitale Regler zur optimalen Prozeßsteuerung und -regelung eingesetzt. Dies gilt für die Regelung industrieller Roboter ebenso wie für die Optimierung des Kraftstoffverbrauchs von Kraftfahrzeugen und Flugzeugen oder für die Minimierung des Wasserverbrauchs in handelsüblichen Waschmaschinen. Aus diesen Gründen soll in diesem Buch die digitale Regelung komplexer Systeme ausführlich behandelt werden.

1.1 Signaltypen

Ein kontinuierliches Signal zeichnet sich dadurch aus, daß es über einen kontinuierlichen Zeitbereich eindeutig definiert ist. Die Amplitude kann dabei einen kontinuierlichen Wertebereich oder auch nur eine endliche Zahl verschiedener Werte annehmen. Ein analoges Signal ist über einen kontinuierlichen Zeitbereich definiert, wobei die Amplitude einen kontinuierlichen Wertebereich annehmen kann. Das Bild 1.1a) zeigt ein zeitkontinuierliches analoges Signal, Bild 1.1b) zeigt hingegen ein zeitkontinuierliches und bezüglich der Amplitude quantisiertes Signal.

Dabei sollte vielleicht darauf verwiesen werden, daß es sich bei analogen Signalen um einen Spezialfall zeitkontinuierlicher Signale handelt. (Erfahrungsgemäß werden häufig die Begriffe „kontinuierlich“ und „analog“ gleichwertig verwendet.)

Ein diskretes Signal ist definitionsgemäß nur für diskrete Zeitpunkte definiert. Ein zeitdiskretes Signal, bei dem die Amplitude einen kontinuierlichen Wertebereich annehmen kann, wird als abgetastetes Signal bezeichnet. Wie man anhand von Bild 1.1 leicht sehen kann, entsteht ein zeitdiskretes Signal durch die Abtastung eines analogen Signals zu festen (diskreten) Zeitpunk-

ten und kann als amplitudenmodulierte Pulsfolge verstanden werden; siehe Bild 1.1c).

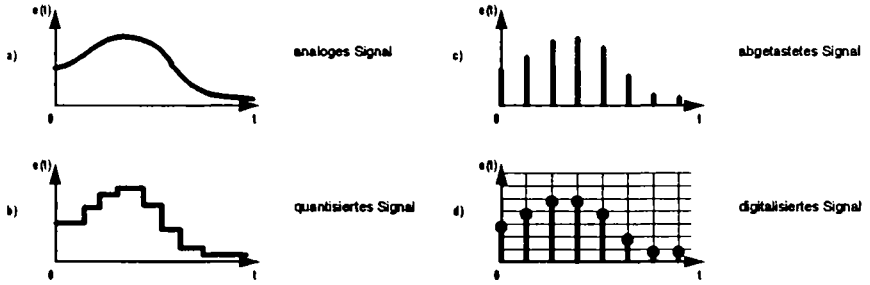

Bild 1.1: a) zeitkontinuierliches analoges Signal
b) zeitkontinuierliches quantisiertes Signal
c) Abgetastetes Signal
d) Digitales Signal

Ein digitales Signal ist ein zeitdiskretes Signal mit quantisierten Amplituden. Ein solches Signal wird in der Regel durch eine Sequenz von Zahlenwerten dargestellt, beispielsweise in Form von Binärzahlen. Bild 1.1d) zeigt ein digitales Signal. Wie man sieht ist dieses Signal bezüglich der Amplitude und der Zeit quantisiert.

Bei regelungstechnischen Problemstellungen wird das zu regelnde Objekt als Regelstrecke oder auch als Prozeß bezeichnet. Die zu regelnde physikalische Größe der Regelstrecke ist in den meisten Fällen ein zeitkontinuierliches Signal. Wenn diese Regelgröße mit einem digitalen Regler geregelt werden soll, wird eine Signalkonversion von analog zu digital und digital zu analog notwendig; siehe Kapitel 1.3.

Durch die Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals wird das ursprüngliche Signal durch eine Sequenz von Signalwerten zu diskreten Zeitpunkten ersetzt. Dem Abtastvorgang folgt gewöhnlich eine Quantisierung. Dabei wird die abgetastete analoge Amplitude durch einen digitalen Zahlenwert ersetzt. Im Anschluß daran wird dieses digitale Signal von einem Computer weiterverarbeitet. Das Computer-Ausgangssignal wird abgetastet und auf den Eingang eines Halteglieds geführt. Der Ausgang des Halteglieds ist ein zeitkontinuierliches Signal, das wiederum auf den Eingang des Stellglieds geführt wird.

1.2 Grundsätzlicher Aufbau digitaler Regelkreise

Das folgende Bild zeigt das prinzipielle Blockschaltbild eines digitalen Regelkreises mit den wesentlichen Übertragungsblöcken.

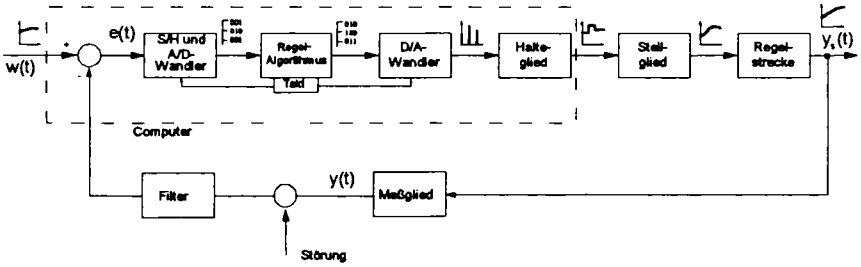

Bild 1.2: Blockschaltbild eines digitalen Regelkreises

Wie man aus obigem Bild sieht, existieren hier analoge, zeitdiskrete und numerisch kodierte Signale nebeneinander. Die Regelgröße $y_s(t)$ als Ausgangssignal der Regelstrecke ist ein zeitkontinuierliches Signal. Die Regelgröße wird vom Meßglied erfaßt und produziert ein zeitkontinuierliches Signal $y(t)$, das bei eventuell auftretenden Störungen gefiltert werden muß, bevor es dem Soll-Ist-Vergleicher zugeführt wird. Das Fehlersignal $e(t)$ wird über eine Sample-and-Hold-Schaltung und einem Analog-Digital-Umsetzer digitalisiert. Der Computer bearbeitet mit Hilfe des Regelalgorithmus die einlaufende Zahlensequenz und erzeugt damit neue Zahlensequenzen. Zu jedem Abtastzeitpunkt wird eine kodierte Zahl, geliefert vom Computer, in ein zeitkontinuierliches Stellsignal umgesetzt. Hierzu werden der Digital-Analog-Umsetzer und das Halteglied benötigt.Der Rechnertakt im Computer synchronisiert das Einlesen der Daten in den Computer sowie die Ausgabe. Der Ausgang des Halteglieds als zeitkontinuierliches Signal wird dem Stellglied zugeführt, dessen Ausgang der Regelstrecke zugeführt wird.

Das Abtast-Halteglied (S/H für Sample-and-Hold) und der Analog-Digital-Umsetzer (A/D) konvertieren das Fehlersignal in eine Sequenz numerisch kodierter Binärwörter. Man spricht in diesem Fall von einer Konvertierung. Die Kombination des Abtast-Halteglieds mit dem Analog-Digital-Konverter kann als Schalter betrachtet werden, der zu jedem Zeitintervall T infinitesimal kurz geschlossen ist und eine Sequenz numerisch kodierter Zahlen an

seinem Ausgang liefert.Der Computer erzeugt mit seinem Regelalgorithmus wieder eine numerisch kodierte Zahlensequenz, die dem D/A-Wandler zur Dekodierung zugeführt wird.

Abgesehen von einer Reihe anderer Abtastmethoden kommt in der Praxis vorwiegend die periodische Abtastung zum Einsatz, die auch in diesem Buch ausnahmslos behandelt werden soll. In diesem Fall liegen die Abtastzeitpunkte zeitlich konstant versetzt, das heißt $t_k = kT \quad (k = 0,1,2,\ldots)$, wobei T die sogenannte Abtastperiode ist.

1.3 Signalkonversion

Durch den verwendeten Einsatz von Prozeßrechnern und Mikrocomputern als regelndes Element kommen zwangsweise Bauelemente zur Anwendung, die bei analogen Regelkreisen nicht in Erscheinung treten. Dazu gehören insbesondere Halteglieder, Analog-Digital-Konverter sowie Digital-Analog-Konverter, die nachfolgend kurz erläutert werden sollen.

1.3.1 Halteglieder

Dem Abtaster kommt in einem digitalen Regelkreis die Aufgabe zu, ein analoges Signal in eine Kette von amplitudenmodulierten Signalen umzuformen. Das nachfolgende Halteglied speichert den Wert des abgetasteten Impulses über eine spezifizierte Zeitdauer. Das Abtast-Halteglied ist für den Analog-Digital-Umsetzer notwendig, um einen Zahlenwert zu erzeugen, der das Eingangssignal zum Moment des Abtastzeitpunktes möglichst genau repräsentiert. Abtast-Halteglieder laufen im Handel unter der Bezeichnung Sample-and-Hold und werden kurz mit S/H gekennzeichnet. Aus der Sicht der Mathematik werden die Operationen Abtasten und Halten als zwei getrennte Vorgänge betrachtet; siehe hierzu Kapitel 3.1 und 4.2.

In der Praxis ist die Dauer des Abtastvorgangs vernachlässigbar klein im Vergleich zur Abtastperiode T. In solchen Fällen wird vom sogenannten „idealen Abtaster“ gesprochen. Der ideale Abtaster erlaubt eine mathematisch einfache Beschreibung der Abtast-Halte-Operation.

1.3.2 Analog-Digital-Umsetzer

Definitionsgemäß versteht man unter der Abtastung eines analogen Signals und der Konvertierung in eine Binärzahl eine Analog-Digital-Umsetzung. Somit transformiert ein Analog-Digital-Umsetzer ein analoges Signal in ein digitales Signal als numerisch kodiertes Datenwort begrenzter Länge aus

Nullen und Einsen. Aus praktischer Sicht beinhaltet die Analog-Digital-Konversion die Operationen Abtasten und Halten, Quantisierung und Kodierung. Der Analog-Digital-Konverter sendet mit jedem Taktimpuls zu den Zeitpunkten kT ($k = 0,1,2,\ldots$) ein Binärwort an den digitalen Regler. Unter den vielen Verfahren der Analog-Digital-Umsetzung kommen die folgenden Typen am häufigsten zur Anwendung:

- Verfahren der sukzessiven Approximation
- Kaskadenumsetzer
- Zählverfahren
- Wägeverfahren

Jeder dieser vier Typen hat natürlich seine eigenen Vor- und Nachteile. Im gegebenen Fall muß natürlich die Konversionsgeschwindigkeit, die Genauigkeit und der Kostenfaktor in Betracht gezogen werden.

Der in der Praxis am häufigsten eingesetzte A/D-Wandler ist der auf dem Verfahren der sukzessiven Approximation beruhende Typ. Das folgende Bild zeigt schematisch den Aufbau dieses A/D-Konvertertyps.

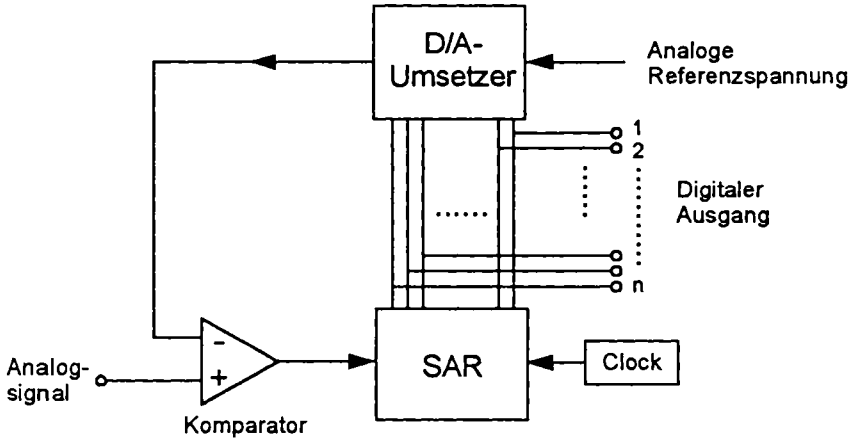

Bild 1.3: Schema des sukzessiven A/D-Konverters

Im folgenden soll die prinzipielle Funktionsweise dieses A/D-Umsetzers erläutert werden:

Bei jeder Signalkonversion setzt das sukzessive Approximations-Register (SAR) zunächst das höchstwertige Bit (entsprechend dem halben Maximum) und vergleicht diesen Wert mit Hilfe des Digital-Analog-Umsetzers und dem Komparator mit dem analogen Eingangssignal. Mit dem Komparatorausgang wird entschieden, ob dieses Bit gesetzt bleiben darf oder rückge-

setzt werden muß. Wenn das analoge Eingangssignal größer ist, bleibt das höchstwertige Bit gesetzt. Beim Eintreffen des nächsten Taktes wird das zweithöchste Bit gesetzt und das analoge Eingangssignal mit 75% des maximal konvertierbaren Signals verglichen. Im umgekehrten Fall, das heißt wenn das höchstwertige Bit zurückzusetzen ist, wird in analoger Weise in Richtung kleiner Spannungen verfahren. Durch n Vergleichsoperationen entsteht am digitalen Ausgangsregister ein Bitmuster (Datenwort), das dem analogen Eingangssignal proportional ist.

Somit benötigt dieser Konverter nur n Zyklen zur Erzeugung eines Datenwortes, wobei n der Wortlänge des A/D-Konverters entspricht. Handelsübliche A/D-Konverter benötigen etwa 2µs bei einer 12-Bit-Konversion.

1.3.3 Digital-Analog-Umsetzer

Ein Digital-Analog-Konverter transformiert ein binäres Datenwort als Eingangsgröße in ein dazu analoges elektrisches Signal. Für den vollen Bereich des digitalen Eingangs korrespondieren 2^n verschiedene Analogwerte einschließlich der Null. Somit existiert für die Digital-Analog-Konversion eine Eins-zu-Eins Korrespondenz zwischen dem digitalen Eingang und dem analogen Ausgangssignal. Das Bild 1.4 zeigt schematisch den Aufbau eines D/A-Umsetzers, der auf dem Prinzip der „Summation gewichteter Ströme" beruht.

Die Eingangswiderstände des Operationsverstärkers sind, wie man aus Bild 1.4 sieht, in Zweierpotenzen gewichtet. Wenn dieser Schaltung eine binäre Eins zugeführt wird, kippt der Schalter, ausgeführt als elektronisches Gate, und verbindet den Widerstand mit der Referenzspannung. Wird der Schaltung eine logische Null zugeführt, so verbindet der Schalter den Widerstand mit Masse.

Nun wird dieser Schaltung in der praktischen Anwendung das gesamte Datenwort parallel zugeführt, das heißt mit jedem Bit wird jeweils ein Schalter angesteuert. Somit erzeugt der D/A-Konverter eine analoge Ausgangsspannung, die mit dem gegebenen Binärwort korrespondiert. Wenn am Eingang des skizzierten D/A-Umsetzers ein 4-Bit-Datenwort b_3 b_2 b_1 b_0 anliegt, wobei die b-Koeffizienten die Werte Null oder Eins annehmen können, dann ergibt sich der analoge Ausgang zu

$$U_a = \frac{R_0}{R}\left(b_3 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_0}{8}\right) \cdot U_{ref}.$$

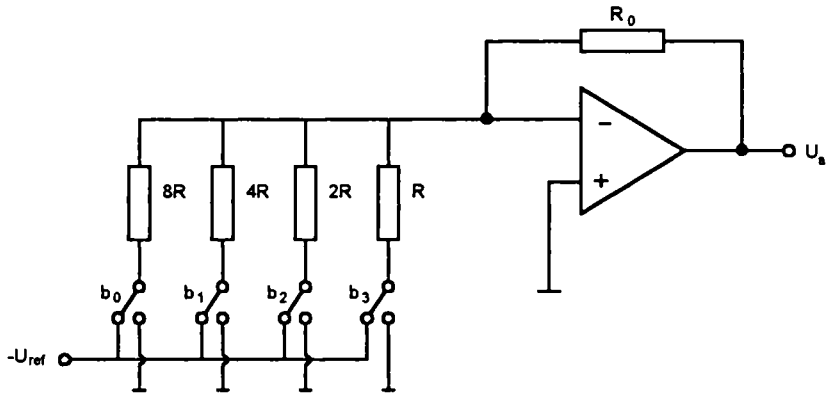

Bild 1.4: Schematischer Aufbau des D/A-Wandlers auf dem Prinzip gewichteter Ströme

Dabei sollte beachtet werden, daß mit zunehmender Wortlänge die entsprechenden Widerstände entsprechend groß werden und somit die Genauigkeit des D/A-Konversion zu wünschen übrig läßt. Die Behandlung weiterer D/A-Konverter soll jedoch der Spezialliteratur vorbehalten bleiben.

2 Die diskrete Übertragungsfunktion

Für die Analyse und Synthese diskreter Regelkreise ist die z-Transformation das am meisten verwendete mathematische Rüstzeug. Die z-Transformation spielt für diskrete Systeme die gleiche maßgebliche Rolle wie die Laplace-Transformation für kontinuierliche Systeme. Das dynamische Verhalten eines linearen diskreten Regelkreises wird durch eine lineare Differenzengleichung beschrieben. Zur Bestimmung der Systemantwort ist bei bekannter Eingangsgröße eine solche Differenzengleichung zu lösen. Unter Verwendung der z-Transformation wird die lineare Differenzengleichung zu einer algebraischen Gleichung. (In Analogie dazu wird mit Hilfe der Laplace-Transformation aus einer linearen zeitinvarianten Differentialgleichung eine algebraische Gleichung in s.)

Zeitdiskrete Signale entstehen dann, wenn in einem System ein kontinuierliches Signal abgetastet wird. Das abgetastete Signal soll mit $e(0), e(T), e(2T), \ldots$, bezeichnet werden, wobei T die sogenannte Abtastperiode ist.

Die diskrete Wertefolge wird mit $e(kT)$, oder auch e_k bezeichnet, wobei $k = 0,1,2,\ldots$ laufende Variable ist. Die Wertefolge $e(k)$ ist eine Zahlensequenz, die als Abtastwerte eines kontinuierlichen Signals $e(t)$ betrachtet werden kann.

2.1 Die z-Transformation

Im folgenden wird die z-Transformierte einer Zeitfunktion $e(t)$ oder einer Zahlensequenz $e(kT)$ definiert. Soll eine Zeitfunktion $e(t)$ in den z-Bereich transformiert werden, so werden von dieser Funktion nur die Abtastwerte $e(0), e(T), e(2T), \ldots$, herangezogen. Die z-Transformierte einer Zeitfunktion $e(t)$ mit $t \geq 0$ oder einer Wertesequenz $e(kT)$ mit $k = 0,1,2,\ldots$ ist durch folgende Gleichung

$$E(z) = Z\{e(t)\} = Z\{e(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)\, z^{-k} \tag{2.1}$$

definiert.

Dabei ist z eine komplexe Variable, für die Gleichung (2.1) konvergiert.

Mit Hilfe der Laplace-Transformation bekommt die Variable z folgendes Aussehen:

Die kontinuierliche Zeitfunktion $e(t)$ wird über

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \cdot \delta(t - kT)$$

zur Impulsfolge.

Die Laplace-Transformierte der Impulsfolge liefert die komplexe Funktion

$$E^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \cdot e^{-kTs}.$$

Setzt man nun

$$z = e^{sT},$$

so wird aus der komplexen Funktion $E^*(s)$ eine Potenzreihe in z

$$\left[E^*(s)\right]_{e^{sT}=z} = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \cdot z^{-k} = E(z),$$

allerdings mit negativem Exponenten.

Diese komplexe Funktion nennt man die z-Transformierte der Impulsfolge $e^*(t)$ und bezeichnet sie mit $E(z)$,

$$E(z) = \left[\mathcal{L}\left\{e^*(t)\right\}\right]_{e^{sT}=z} = \left[E^*(s)\right]_{e^{sT}=z} = \sum_{0}^{\infty} e_k \cdot z^{-k}$$

In Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise der Laplace-Transformation schreibt man auch

$$e^*(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; E(z)$$

beziehungsweise

$$(e_k) \circ\!\!-\!\!\bullet\; E(z).$$

Beispiel 2.1:

Zur Illustration der Gleichung (2.1) gehen wir davon aus, daß die Impulsfolge e_k aus Abtastwerten des kontinuierlichen Zeitsignals $\varepsilon(t)\cdot e^{-at}$ mit der Abtastperiode T entstanden ist.

Damit gilt: $(e_k) = e^{-akT}\cdot\varepsilon(t)$.

Die z-Transformierte der Impulsfolge ergibt sich somit zu

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-aT}\cdot z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

mit $e^{-aT} < |z| < \infty$. □

Die Analyse weiterer Signale soll noch in einem späteren Kapitel fortgesetzt werden.

2.2 Rechenregeln der z-Transformation

Um die Korrespondenz-Tabellen optimal nutzen zu können, muß man imstande sein, einige Eigenschaften der z-Transformation anwenden zu können, die sich direkt aus der Definition der z-Transformation ergeben.

Die Rechenregeln der z-Transformation geben an, wie sich eine Operation, angewandt auf die Zeitfunktionen, in den zugehörigen z-Transformierten widerspiegelt.

2.2.1 Linearität

Eine Funktion $f(x)$ ist bekanntlich linear, wenn

$$f(\alpha\cdot x_1 + \beta\cdot x_2) = \alpha\cdot f(x_1) + \beta\cdot f(x_2)$$

ist.

Wendet man diesen Satz auf die Definition der z-Transformation an, so folgt sofort

$$\begin{aligned} Z\{\alpha\cdot f_1(kT) + \beta\cdot f_2(kT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty}\{\alpha\cdot f_1(k) + \beta\cdot f_2(k)\}z^{-k} \\ &= \alpha\cdot Z\{f_1(k)\} + \beta\cdot Z\{f_2(k)\} \\ &= \alpha\cdot F_1(z) + \beta\cdot F_2(z). \end{aligned}$$

Somit gilt die <u>Korrespondenz</u>

$$\alpha \cdot f_1(k) + \beta \cdot f_2(k) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha \cdot F_1(z) + \beta \cdot F_2(z) \tag{2.2}$$

2.2.2 Faltung

$$Z\left\{\sum_{l=0}^{\infty} f_1(l) \cdot f_2(k-l)\right\} = F_1(z) \cdot F_2(z) \tag{2.3}$$

(Die Herleitung dieses Satzes ist in der Spezialliteratur nachzulesen).

In Analogie zur Faltung kontinuierlicher Systeme, bei denen aus der Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich das Produkt der Laplace-Transformierten wird, ergibt die Faltung zweier Impulsfunktionen das Produkt der entsprechenden z-Transformierten.

2.2.3 Verschiebungssatz

Für $F(z) = Z\{f(t)\}$ und $f(t) = 0$ für $t < 0$ wird der Rechtsverschiebungssatz zu

$$Z\{f(t-nT)\} = z^{-n} F(z) \tag{2.4}$$

und der Linksverschiebungssatz zu

$$Z\{f(t+nT)\} = z^{n}\left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)\, z^{-k}\right], \tag{2.5}$$

wobei $n \geq 0$ und ganzzahlig.

Herleitung der Gleichung (2.4):

$$\begin{aligned} Z\{f(t-nT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)\, z^{-k} \\ &= z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)\, z^{-(k-n)}. \end{aligned}$$

Setzt man $j = k - n$, so wird obige Gleichung zu

$$Z\{f(t-nT)\} = z^{-n} \sum_{j=-n}^{\infty} f(jT)\, z^{-j} = z^{-n} F(z).$$

Weil jedoch $f(jT) = 0$ für $j < 0$ ist, kann die untere Grenze der Summation auf $j = 0$ abgeändert werden. Damit ist

$$Z\{f(t-nT)\} = z^{-n}\sum_{j=0}^{\infty} f(jT)z^{-j} = z^{-n}F(z). \quad \text{(q.e.d.)}$$

Die Multiplikation einer z-Transformierten mit z^{-n} wirkt sich somit als zeitliche Rechtsverschiebung der Funktion $f(t)$ um n Abtastschritte aus.

Den Nachweis der Gleichung (2.5) erhält man mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}
Z\{f(t+nT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT+nT)z^{-k} \\
&= z^{n}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT+nT)z^{-(k+n)} \\
&= z^{n}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(kT+nT)z^{-(k+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right. \\
&\qquad \left. -\sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}\right] \\
&= z^{n}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}\right] \\
&= z^{n}\left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}\right]. \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned}$$

Beispiel 2.2:

Gesucht ist die z-Transformierte der Wertefolgen $f(k+1)$, $f(k+2)$, $f(k+n)$, $f(k-n)$. Dabei ist zu beachten, daß die ersten drei Sequenzen eine Linksverschiebung und die letzte Sequenz eine Rechtsverschiebung auf die Zeitachse bedeuten. Die z-Transformierte von $f(k+1)$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
Z\{f(k+1)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f(k)z^{-k+1} \\
&= z\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} - f(0)\right] \\
&= zF(z) - zf(0).
\end{aligned}$$

Wenn speziell $f(0) = 0$ ist, erhält man

$$Z\{f(k+1)\} = z \cdot Z\{f(k)\}.$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} Z\{f(k+2)\} &= z \cdot Z\{f(k+1)\} - z f(1) \\ &= z^2 F(z) - z^2 f(0) - z f(1). \end{aligned}$$

Im verallgemeinerten Fall erhält man

$$\begin{aligned} Z\{f(k+n)\} = z^n F(z) - z^n f(0) - z^{n-1} f(1) \\ - z^{n-2} f(2) - \cdots - z f(n-1) \end{aligned}$$

mit $n \geq 0$ und ganzzahlig.

Wie man sieht, werden die Anfangswerte automatisch mit erfaßt, wenn eine Differenzen-gleichung in den z-Bereich transformiert wird.

Die z-Transformierte von $f(k-n)$ wird gemäß Gleichung (2.4) zu

$$Z\{f(k-n)\} = z^{-n} F(z). \qquad \square$$

Beispiel 2.3:

Gesucht ist die z-Transformierte der $\varepsilon(t)$-Funktion, die um eine Abtastperiode, bzw. im anderen Fall um 4 Abtastperioden zeitlich nach rechts verschoben ist.

Gemäß Gleichung (2.4) gilt

$$Z\{\varepsilon(t-T)\} = z^{-1} Z\{\varepsilon(t)\} = z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}.$$

Im zweiten Fall erhält man

$$Z\{\varepsilon(t-4T)\} = z^{-4} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-4}}{1-z^{-1}}. \qquad \square$$

2.2.4 Dämpfungsregel

Die Dämpfungsregel stellt ein weiteres Analogon zur Laplace-Transformation dar.

Man erhält sie, wenn man die Zeitfunktion $f(t)$ mit dem „Dämpfungsfaktor“ e^{at} multipliziert und dann z-transformiert:

$$Z\{f(t)\cdot e^{\alpha t}\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot e^{\alpha kT} z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot\left(e^{-\alpha T}\cdot z\right)^{-k} = F\left(e^{-\alpha T}\cdot z\right).$$

Somit gilt die Korrespondenz

$$f(t)\cdot e^{\alpha t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F\left(e^{-\alpha T}\cdot z\right) \tag{2.6}$$

Um aus der z-Transformierten von $f(t)$ die z-Transformierte von $f(t)\cdot e^{\alpha t}$ zu erhalten, hat man lediglich das Argument z durch $z\cdot e^{-\alpha T}$ zu ersetzen.

Die zu $f(t)\cdot e^{\alpha t}$ gehörige Wertefolge ist $f(kT)\cdot e^{\alpha kT}$.

Beispielsweise sei die Funktion $f(t) = \varepsilon(t)\cdot e^{\alpha t}$ gegeben.

Die z-Transformierte von $\varepsilon(t)$ ist bekanntlich

$$F(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Damit gilt nach der Dämpfungsregel

$$e^{\alpha t} = \varepsilon(t)\cdot e^{\alpha t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z\cdot e^{-\alpha T}}{z\cdot e^{-\alpha T}-1}.$$

2.2.5 Grenzwertsätze

2.2.5.1 Anfangswertsatz der z-Transformation

Der Anfangswertsatz der z-Transformation lautet

$$f_0 = \lim_{z\to\infty} F(z). \tag{2.7}$$

Dieser Satz folgt sofort aus

$$F(z) = f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \cdots,$$

indem man gliedweise $z \to \infty$ gehen läßt, was ja zulässig ist, da diese Laurent-Reihe außerhalb eines genügend großen Kreises um Null konvergiert.

2.2.5.2 Endwertsatz der z-Transformation

Der Endwertsatz kann folgendermaßen formuliert werden:

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot F(z) \tag{2.8}$$

Die Bedingungen bezüglich $F(z)$ stellen sicher, daß der einzige mögliche Pol von $F(z)$, der nicht innerhalb des Einheitskreises liegt, auf dem Einheitskreis liegen muß.

Somit tendieren alle Komponenten von $f(k)$ gegen Null für große k-Werte mit der einen Ausnahme des konstanten Terms, gemäß der Polstelle bei $z = 1$.

Der Wert dieser Konstanten ergibt sich über die Partialbruchzerlegung von $F(z)$ zu

$$C = \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot F(z) \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiel 2.4:

$$F(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{0{,}58 \cdot (1+z)}{z+0{,}16}$$

$e(t) = 1$ für $k \geq 0$ bzw.

$$E(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}};$$

$$U(z) = \frac{0{,}58 \cdot (1+z)}{\left(1-z^{-1}\right)(z+0{,}16)};$$

$$u(t \to \infty) = \lim_{z \to 1} (z-1)\, U(z);$$

$$u(t \to \infty) = \lim_{z \to 1} \left[\frac{0{,}58(1+z)}{z+0{,}16} \right];$$

$$\underline{\underline{u(t \to \infty) = 1}}.$$

□

Beispiel 2.5:

Gegeben sei das Signal

$$U(z) = \frac{z}{z-0{,}5} \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

Damit wird

$$\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{z}{z-0{,}5} \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1};$$

$$\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{z \to 1} \frac{z}{z-0{,}5} \cdot \frac{T}{2} \cdot (z+1)$$

$$\frac{1}{1-0{,}5}\cdot\frac{T}{2}\cdot(1+1)=2T. \qquad \square$$

Der praktische Nutzen des Endwertsatzes besteht darin, daß man bei vielen Anwendungen zunächst die z-Transformierte kennt und aus ihr sofort auf den Grenzwert der Zahlenfolge schließen kann, ohne diese explizit zu berechnen. Allerdings muß man wissen, daß dieser Grenzwert auch tatsächlich existiert und endlich ist.

Dazu ein einfaches Gegenbeispiel:

Beispiel 2.6:

Es sei

$$f(t)=e^{t}.$$

Dann ist

$$F(z)=\frac{z}{z-e^{T}};$$

Also ist

$$f_{k\to\infty}=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)=0.$$

Demgegenüber gilt aber:

$$\lim_{k\to\infty} f_k=\lim_{k\to\infty} e^{kT}=\infty. \qquad \square$$

2.3 Die Übertragungsfunktion im z-Bereich

Die z-Transformation spielt bei diskreten Systemen die gleiche wichtige Rolle wie die Laplace-Transformation bei kontinuierlichen Systemen.

Als Beispiel wird zunächst die diskrete Approximation einer Integration betrachtet:

Dabei wird von einem kontinuierlichen Signal $e(t)$ als Eingang ausgegangen, von dem die Approximation eines Integrals

$$J=\int_0^t e(t)dt \tag{2.9}$$

erstellt werden soll.