

# Physik III

Optik, Quantenphänomene und Aufbau der Atome

von Wolfgang Zinth und Hans-Joachim Körner

3., überarbeitete Auflage

Mit 156 Bildern und 13 Tabellen

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1998

#### Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

#### **Physik** :

München; Wien: Oldenbourg 3. Zinth, Wolfgang: Optik, Quantenphänomene und Aufbau der Atome. 3., überarb. Aufl. - 1998

#### Zinth, Wolfgang:

Optik, Quantenphänomene und Aufbau der Atome : mit 13 Tabellen / von Wolfgang Zinth und Hans-Joachim Körner. – 3., überarb. Aufl. – München ; Wien : Oldenbourg, 1998 (Physik ; 3) ISBN 3-486-24054-4

© 1998 R. Oldenbourg Verlag Rosenheimer Straße 145, D-81671 München Telefon: (089) 45051-0, Internet: http://www.oldenbourg.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Andreas Türk Herstellung: Rainer Hartl Umschlagkonzeption: Kraxenberger Kommunikationshaus, München Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

# Inhalt

	Vorwort	IX
<b>A.</b>	Optik	1
1	Einführung und historischer Überblick	1
2	Die elektromagnetische Theorie des Lichtes	5
2.1	Die Wellengleichung und ihre Lösungen	5
2.2	Energie und Impuls von Licht	12
2.3	Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	14
2.4	Dispersion von Licht	17
2.4.1	Die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante	17
2.4.2	Der Brechungsindex	19
2.4.3	Die Absorption von Licht	20
2.4.4	Die Dispersion von dichten Medien	23
2.4.5	Brechungsindex und Absorption von Metallen	25
2.5	Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen	26
2.5.1	Reflexions- und Brechungsgesetz	27
2.5.2	Die Fresnelschen Formeln für den Reflexionsgrad einer Grenz-	
	fläche	30
2.5.3	Anwendungen der Totalreflexion	35
2.5.4	Totalreflexion und evaneszente Wellen	39
2.5.5	Das Reflexionsvermögen absorbierender Medien	40
2.5.6	Die Farbe von Gegenständen	42
2.5.7	Streuung von elektromagnetischen Wellen	43
3	Die Geometrische Optik	47
3.1	Das Fermatsche Prinzip	48
3.1.1	Das Reflexionsgesetz	50
3.1.2	Das Fermatsche Prinzip und das Brechungsgesetz	52
3.2	Strahlenablenkung durch ein Prisma	54
3.3	Die optische Abbildung	56
3.3.1	Reelle und virtuelle Abbildungen	57
3.3.2	Abbildung an einem Kugelspiegel	58
3.3.3	Abbildung durch brechende Kugelflächen	60

3.3.4	Abbildungsgleichung für dünne Linsen	62
3.3.5	Dicke Linsen und Linsensysteme	66
3.3.6	Linsenfehler	69
3.3.7	Begrenzungen in optischen Systemen	74
3.3.8	Design und Herstellung von Objektiven	76
3.4	Instrumente der geometrischen Optik	77
3.4.1	Der Projektionsapparat	78
3.4.2	Die photographische Kamera	79
3.4.3	Das Auge	83
3.4.4	Vergrößernde optische Instrumente	85
3.5	Elektronenoptik	96
4	Welleneigenschaften von Licht	101
4.1	Die Fresnel-Kirchhoffsche Beugungstheorie	103
4.2	Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung	106
4.2.1	Die Fresnelsche Beugung	107
4.2.2	Fraunhofersche Beugung	110
4.2.3	Das Babinetsche Prinzip	111
4.3	Spezielle Fälle der Fraunhoferschen Beugung	111
4.3.1	Beugung an einem langen Spalt	111
4.3.2	Beugung an einer Rechteckblende	114
4.3.3	Beugung an einer kreisförmigen Öffnung	115
4.3.4	Beugung am Doppelspalt	116
4.3.5	Beugung am Gitter	120
4.3.6	Gitterspektrometer	124
4.3.7	Beugung an mehrdimensionalen Gittern	126
4.4	Interferenz	130
4.4.1	Die Kohärenz von Lichtquellen	132
4.4.2	Spezielle Interferometeranordnungen	134
4.4.3	Interferenzen dünner Schichten	139
4.4.4	Vielfachinterferenzen am Beispiel des	
	Fabry-Perot-Interferometers	145
4.5	Anwendungen von Beugung und Interferenz	152
4.5.1	Das Auflösungsvermögen optischer Geräte	152
4.5.2	Die Abbesche Theorie der Bildentstehung und Fourieroptik .	159
4.5.3	Holographie	163
4.6	Die Polarisation von Licht	167
4.6.1	Polarisationszustände von Licht	168
4.6.2	Polarisatoren	171
4.6.3	Doppelbrechung	176
4.6.4	Anwendungen der Doppelbrechung	184
4.6.5	Induzierte Doppelbrechung	187

4.6.6	Optische Aktivität und Faraday-Effekt	191
4.7	Nichtlineare Optik	196
4.7.1	Phänomene, die mit der nichtlinearen Suszeptibilität zweiter	
	Ordnung verknüpft sind	197
4.7.2	Phänomene, die mit der nichtlinearen Suszeptibilität dritter	
	Ordnung verknüpft sind	201
4.7.3	Nichtlineare optische Schaltelemente	204
B.	Quantenphänomene und Aufbau der Atome	207
5	Quantenphänomene: Wellen und Teilchen	207
5.1	Einführung und Überblick	207
5.2	Photonen	210
5.2.1	Die Energie der Photonen: Der Photoeffekt	210
5.2.2	Anwendungen des Photoeffekts	215
5.2.3	Der Impuls der Photonen: Der Compton-Effekt	218
5.2.4	Anwendungen des Compton-Effekts	222
5.2.5	Erzeugung von Bremsstrahlung und charakteristischer	
	Röntgenstrahlung	226
5.2.6	Paarerzeugung	227
5.2.7	Drehimpuls der Photonen	229
5.2.8	Bemerkungen zum Welle-Teilchen-Dualismus der Photonen .	230
5.3	Emission von Licht	232
5.3.1	Temperaturstrahler und Strahlungsgesetze	232
5.3.2	Die Plancksche Strahlungsformel	235
5.3.3	Beispiele	238
5.3.4	Bemerkungen zur Funktionsweise des Lasers	240
5.4	Elektronen und Positronen	245
5.4.1	Fundamentale Eigenschaften	245
5.4.2	Quantisierung der elektrischen Ladung	246
5.4.3	Erzeugung freier Elektronen	247
5.4.4	Messung der Elektronenladung	248
5.4.5	Der klassische Elektronenradius	249
5.4.6	Spezifische Ladung $e/m_0$	250
5.4.7	Spin-Quantisierung, Stern-Gerlach-Experiment	251
5.4.8	Weiterführende Diskussion	256
5.5	Materiewellen	258
5.5.1	Einführende Bemerkungen	258
5.5.2	Interferenzphänomene mit Teilchenstrahlen	259
5.5.3	Wellenpakete	263
5.5.4	Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion $\psi(\vec{r},t)$ .	266
5.5.5	Unschärferelationen	267

Sachverzeichnis	320
Vertiefende Literatur	319
Abbildungen im Matrizenformalismus	317
Wirkung einer Linse	316
Allgemeines	313
Matrizen-Verfahren	313
Berechnung der Ausbreitung paraxialer Strahlen mit dem	
Anhang	313
Bindungsenergien der Atomkerne	309
Massenmessungen und Isotopie	307
Definitionen und Einheiten	307
Massen der Atome, Meßmethoden, Isotopie	306
Größe der Atome	305
Rutherford-Streuung	300
Einführende Bemerkungen und Nomenklatur	299
Aufbau der Atome	299
Ausgewählte Beispiele	295
Gleichung im Zentralpotential	294
Probleme in drei Dimensionen: Lösung der Schrödinger-	
Systeme	289
Quantenmechanische Analyse einiger eindimensionaler	
lekülen	286
Anregung und Zerfall diskreter Niveaus von Atomen und Mo-	
Energieeigenwerte	285
Vorbemerkung: Kontinuierliche und diskrete	200
Quantisierung gehundener Zustände	285
Fine erste Anwendung: Tunnelnhänomene	277
Formulierung	273
Semounger-Orefering	215
	Formulierung

## Vorwort

Das vorliegende Lehrbuch ist für das dritte Semester eines Experimentalphysikkurses gedacht. Es schließt die Lücke zwischen der klassischen Elektrodynamik und der Atomphysik. In diesen Teil des Studiums fällt eine ganz wesentliche Erweiterung der naturwissenschaftlichen Denkweise: Während man in der klassischen Physik noch von einer vollständigen Beschreibbarkeit eines physikalischen Systems ausgehen konnte, die letztendlich eine im Prinzip deterministische Vorhersagbarkeit von Vorgängen ermöglicht, werden in der Quantenphysik Wahrscheinlichkeiten wichtig, die keine eindeutigen Voraussagen mehr erlauben. Diese Erweiterung der Denkweise ist sehr gut in Zusammenhang mit der Optik durchzuführen, da gerade von diesem Gebiet die wesentlichen Anstöße für die Entwicklung der Quantenphysik gegeben wurden. Im vorliegenden Buch Physik III wird deshalb neben der rein klassischen Behandlung der Optik dieser Übergang zur Quantenphysik vorgestellt. Dabei können hier jedoch nur erste einführende Anstöße gegeben werden. Für ein vollständiges Verständnis der Quantenphysik ist eine ausführlichere und wiederholte Beschäftigung mit dieser Problematik notwendig, die sich in Zusammenhang mit der Atom- und Quantenmechanikvorlesung ergeben wird.

Nach einem kurzen historischen Überblick wird im Buch Physik III die Optik zunächst als Spezialgebiet der Elektrodynamik behandelt. Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen und der daraus abgeleiteten Wellengleichung werden die Eigenschaften von Licht als elektromagnetischer Welle in Kapitel 2 vorgestellt. Anschließend diskutieren wir die grundlegenden Phänomene der Lichtausbreitung im Rahmen der "Geometrischen Optik" (Kapitel 3). Die speziellen Welleneigenschaften wie Beugung, Interferenz und Polarisation sind in Kapitel 4 zu finden.

Im Kapitel 5 wird die Diskussion der Eigenschaften mikroskopischer Systeme vertieft. Dabei treten neuartige Phänomene auf: Die Teilcheneigenschaften des Lichts und die Welleneigenschaften von Teilchen mit endlicher Ruhemasse. Aus ihrer Analyse entsteht die Beschreibung mikroskopischer Systeme mittels einer Bewegungsgleichung, der Schrödinger-Gleichung. Diese wird benutzt, um die Eigenschaften einfacher mikroskopischer Systeme zu erläutern. Im Kapitel 6 wird der Aufbau der Atome aus Elektronenhülle und Atomkern beschrieben. Streuexperimente, die wichtigsten Methoden zum Studium subatomarer Struktur, werden eingeführt.

Bei der Fertigstellung dieses Manuskripts haben viele Hände mitgeholfen. W.Z. dankt insbesondere Herrn Professor Dr. Wolfgang Kaiser für wichtige inhaltliche Hinweise. H.-J. K. dankt Frau Dr. Gabriele-Elisabeth Körner für die kritische und professionelle Wertung des Texts und vor allem Herrn Andreas Stolz. Er hat die TEX-Version des Manuskriptes betreut, alle Bilder im Teil B angefertigt, die Literatur zusammengesucht und immer wieder konstruktive Kritik "aus der Sicht eines Studenten" beigesteuert.

Außerdem danken wir den Lesern der beiden ersten Auflagen für umfangreiche Korrekturvorschläge.

> W. Zinth H.-J. Körner

# A. Optik

# 1 Einführung und historischer Überblick

Das wichtigste Wahrnehmungsorgan des Menschen ist das Auge. Es erlaubt ihm, die Umgebung *zu sehen*. Dieser Sehvorgang und die Eigenschaften des beteiligten Lichtes haben seit dem Altertum die Neugierde der Menschen erregt. Die Optik, die Lehre vom Licht, wurde aus dieser Neugierde heraus entwickelt. Von unserer Kenntnis der Elektrodynamik wissen wir heute, daß Licht eine elektromagnetische Welle ist. Dabei besitzt das für den Menschen sichtbare Licht Frequenzen in einem schmalen Spektralbereich der gerade eine Oktave umfaßt: Das für das Auge sichtbare Licht erstreckt sich vom tief Dunkelroten bei einer Frequenz  $\nu$  von etwa 385 THz über das Rote, Gelbe, Grüne, Blaue bis hin zum Violetten bei  $\nu = 770$  THz (siehe Bild 1.1). In der Praxis ist jedoch die Optik nicht auf den Bereich des sichtbaren Lichtes eingeschränkt. Die Gesetzmäßigkeiten der Optik sind bei höheren Frequenzen bis weit in den Röntgenbereich anwendbar ( $\nu \approx 10^{19}$  Hz), solange man die



Bild 1.1: Das Spektrum elektromagnetischer Wellen

Sichtbares Licht:  $\lambda \approx 390 \text{ nm} - 780 \text{ nm}$  Quanten- oder Korpuskeleigenschaften des Lichtes vernachlässigen kann. Bei niedrigen Frequenzen erstreckt sich eine sinnvolle Anwendung bis in den Radiofrequenzbereich.

In der Geschichte der Naturwissenschaften spielte die Lehre vom Licht eine zweifache Rolle: Die Optik war zum einen eine Wegbereiterin neuer Vorstellungen, die auf dem Gebiet der Optik erarbeitet wurden; zum anderen stellte sie wichtige Hilfsmittel für die Entwicklungen anderer Gebiete der Naturwissenschaften zur Verfügung. Bereits sehr früh wurden in der Antike einfache optische Geräte wie Brennglas, Lupe und Hohlspiegel eingesetzt. Wichtige Gesetze der geometrischen Optik wie die geradlinige Ausbreitung von Licht in homogenen Medien und das Reflexionsgesetz waren bekannt. Ebenso wurden Messungen zur Brechung durchgeführt. Im 1. Jahrhundert v. Chr. stellte Heron von Alexandria für die Lichtausbreitung ein Prinzip des kürzesten Weges auf. Im Mittelalter wurde die Optik hauptsächlich in der arabischen Welt weiterentwickelt. Um das Jahr 1000 präsentierte Alhazen wichtige Erkenntnisse zur Reflexion und über die Abbildung im Auge. Ab dem 13. Jahrhundert wurden dann Linsen zur Korrektur von Sehfehlern auch im Abendland eingesetzt. Die wichtigsten Prinzipien und Instrumente der geometrischen Optik und die darauf basierenden Instrumente wurden im 17. Jahrhundert entwickelt und führten zu einer Revolution des damaligen Weltbildes: 1608 wurde von H. Lippershey (1587-1619) das erste Fernrohr zum Patent angemeldet, das dann von G. Galilei (1564-1642) und J. Kepler (1571-1630) weiterentwickelt und zur Beobachtung der Sterne eingesetzt wurde. Zur selben Zeit erfand Z. Janssen (1588-1632) das erste Mikroskop. Kepler entdeckte die Totalreflexion und die Näherung des Brechungsgesetzes für kleine Einfallswinkel. 1621 fand W. Snell (1591-1626) das Snelliussches Brechungsgesetz, das dann von R. Descartes (1596-1650) in der heute gebräuchlichen Form formuliert wurde. Die Beugung von Licht wurde von F.M. Grimaldi (1618-1663), erste Interferenzerscheinungen von R. Boyle (1626-1691) und R. Hooke (1635-1703) beobachtet. Die spektrale Zerlegung des weißen Lichtes entdeckte I. Newton (1642-1727); O. Römer (1644-1710) führte die erste erfolgreiche Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit durch und C. Huygens (1629 – 1695) entdeckte bei der Erklärung der Doppelbrechung die Polarisation des Lichtes. Die Natur des Lichtes wurde zu dieser Zeit durch zwei sich offensichtlich ausschließende Theorien beschrieben: Von Huygens wurde die Undulationstheorie entwickelt, bei der Licht als eine sich wellenförmig ausbreitende Erregung aufgefaßt wurde. Die Emissionstheorie, bei der Licht als ein Strom von Korpuskeln beschrieben wird, wurde von Newton ausgebaut und aufgrund der Autorität Newtons allgemein akzeptiert. Erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts setzte sich die Wellentheorie der klassischen Optik endgültig durch. Entscheidend dafür waren die Beobachtung der polarisationsabhängigen Reflektivität durch E.L.

Prinzip des kürzesten Weges

17. Jahrhundert: alle wesentlichen Gesetze der klassischen Optik werden bekannt

Malus (1775-1812), die Entdeckung des Interferenzprinzips und der Transversalität des Lichtes durch T. Young (1773-1829) sowie die zusammenfassende Behandlung von Lichtpropagation, Interferenz und Beugung durch A.J. Fresnel (1788 – 1827). Die endgültige Bestätigung der Wellentheorie erreichte J.C. Maxwell (1831-1879) als er Licht mit den Wellenlösungen der Maxwell-Gleichungen identifizierte. Der erste experimentelle Nachweis dieser elektromagnetischen Wellen gelang dann H. Hertz (1857-1894). Am Ende des 19. Jahrhunderts waren sämtliche Probleme der Propagation von Licht geklärt. Gleichzeitig traten jedoch die Grenzen der elektromagnetischen Beschreibung des Lichtes bei der Erzeugung und Absorption von Licht in den Vordergrund: Zur Erklärung der Emission eines schwarzen Strahlers mußte M. Planck (1858-1947) einführen, daß die Energieabgabe eines schwingenden Systems an das Lichtfeld diskontinuierlich in Form von Ouanten erfolgt. Bei der Erklärung des Photoeffektes nahm dann A. Einstein (1879-1955) an, daß diese Lichtquanten oder Photonen real existieren. Paradoxerweise verhält sich also Licht bei der Propagation wie eine Welle, bei der Emission oder Absorption jedoch wie ein Strom von Korpuskeln. Eine einheitliche Beschreibung von Licht war somit durch eine klassische Modellvorstellung – Licht als Welle oder Licht als Teilchen – nicht möglich. Es dauerte noch Jahrzehnte, bis die Erkenntnis, daß die klassischen Anschauungen der makroskopischen Welt nicht auf die Physik der mikroskopischen Atome und Elementarteilchen anwendbar sind, voll in das Bewußtsein der Physiker drang. Erst mit der Entwicklung und der allgemeinen Akzeptanz der Quantenphysik muß die gleichzeitige Gültigkeit von Wellen- und Teilchenbild nicht mehr als Paradoxon verstanden werden.

Seit der Erfindung des Lasers im Jahre 1960 haben optische Meßmethoden in den verschiedensten Gebieten der Physik große Bedeutung erlangt. Mit Hilfe von Lasern als intensive, maßgeschneiderte Lichtquellen sind konventionelle optische Verfahren entscheidend verbessert und neue Meßprinzipien entwickelt worden. So ist z.B. optische Spektroskopie mit höchster Frequenzauflösung von besser als 1 Hz ebenso möglich geworden wie die direkte Beobachtung schnellster molekularer Vorgänge auf der Zeitskala von  $10^{-14}$  s.

19. Jahrhundert: Licht ist Wellenphänomen

Quantennatur des Lichts

1960: Laser

## 2 Die elektromagnetische Theorie des Lichtes

Dieses Kapitel behandelt die Eigenschaften von Licht als elektromagnetischer Welle. Es wiederholt und vertieft dabei einen Teil der Elektrodynamik aus Physik II und schafft die Grundlagen für die Behandlung von Licht im Rahmen der elektromagnetischen Theorie. Wir gehen dabei von den Maxwellgleichungen im Medium aus, leiten daraus die Wellengleichung ab und betrachten die Ausbreitung von Licht in einem dispersiven Medium. Mit Hilfe der Randbedingungen beim Durchgang von Licht durch Grenzflächen werden wir abschließend die Gesetze für Reflexion und Brechung erhalten.

#### 2.1 Die Wellengleichung und ihre Lösungen

In praktisch allen Anwendungsgebieten der Optik beschäftigt man sich mit der Lichtausbreitung in nichtmagnetischen Medien, in denen wir für die relative Permeabilität den Wert  $\mu = 1$  verwenden können. Für den Fall nichtleitender Materialien verschwinden Ladungsdichte  $\varrho$  und Stromdichte  $\vec{j} : \varrho = 0$ und  $\vec{j} = 0$ . Das Medium wird durch die Verwendung der dielektrischen Verschiebung  $\vec{D}$  anstelle des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  berücksichtigt. Für  $\vec{D}$  nimmt man im hier behandelten Fall der linearen Optik eine Proportionalität zum elektrischen Feld  $\vec{E}$  an:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \tag{2.1}$$

 $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{m}^{-2} \text{N}^{-1}$  ist die elektrische Feldkonstante,  $\varepsilon$  ist die relative Dielektrizitätskonstante des Mediums. In optisch isotropen Medien, dies sind neben Gasen und Flüssigkeiten auch kubische Kristalle, ist die Lichtausbreitung unabhängig von der Richtung, und die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  ist ein Skalar. Für optisch anisotrope Medien erfordert die spezielle Symmetrie des Mediums, daß  $\varepsilon$  durch den Tensor  $\vec{\varepsilon}_{jk}$  zu ersetzen ist (siehe Abschnitt 4.6.3). In dem hier behandelten Fall eines optisch isotropen, isolierenden Mediums erhalten wir unter Verwendung des Nablaoperators  $\vec{\nabla}$  die Maxwellgleichungen in der Form:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \tag{2.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
(2.4)
(2.5)

Dabei ist  $\mu_0 = 1.2566 \cdot 10^{-6} \text{ NA}^{-2}$  die magnetische Feldkonstante. Man bildet nun die Rotation ( $\vec{\nabla} \times$ ) von Gl. (2.4) und verwendet die Identität  $\vec{\nabla} \times$  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$ . Mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  (Gl. 2.2) und  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  ergibt sich aus Gl. (2.5) die Wellengleichung für das elektrische Feld  $\vec{E}$ :

$$\begin{vmatrix} \Delta \vec{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{B} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{vmatrix}$$
 Wellengleichung für  
elektromagnetische Wellen (2.6b)

Die entsprechende Gleichung für das magnetische Feld  $\vec{B}^{1}$  kann in gleicher Weise unter Vertauschung von Gl. (2.4) und (2.5) abgeleitet werden. Die Gl. (2.6) beschreiben elektromagnetische Wellen (siehe Physik II).

Aus der Behandlung der Wellenphänomene in Physik I wissen wir, daß der Proportionalitätsfaktor  $\varepsilon\varepsilon_0\mu_0$  in der Wellengleichung mit der Phasengeschwindigkeit  $v_{\rm ph}$  der elektromagnetischen Welle im Medium verknüpft ist:

$$v_{\rm ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} c \tag{2.7}$$

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  $\approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  Dabei verwenden wir für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum die allgemein übliche Bezeichnung  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2.9979 \cdot 10^8$  m/s. In der historischen Entwicklung gab die Identität der experimentell bestimmten Lichtgeschwindigkeit c mit dem Ausdruck  $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ , in dem  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  aus rein elektrischen bzw. magnetischen Messungen bestimmt worden waren, den Anstoß dafür,

 $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Auch in diesem Buch wird wie bereits in Physik II die Größe *B* als Magnetfeld bezeichnet. Andere Lehrbüchern bezeichnen häufig  $H = B/(\mu_0 \mu)$  als magnetische Feldstärke, die Größe *B* hingegen als magnetische Flußdichte oder magnetische Induktion. Da wir in der Optik immer  $\mu = 1$  setzen können, ist *B* zu *H* parallel und alle Richtungsaussagen gelten ebenso für *B* wie für *H*.

Licht als elektromagnetische Welle zu betrachten. Der Einfluß des Mediums wird durch den Faktor  $1/\sqrt{\varepsilon} = 1/n$  beschrieben. Für  $n = \sqrt{\varepsilon}$  führt man den Begriff Brechungsindex des Mediums ein.

Als einfachste Lösung der Wellengleichung erhalten wir eine ebene Welle, die sich in der Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  ausbreitet:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)$$
(2.8)

Hier ist eine konstante Amplitude  $\vec{E}_0$  der Feldstärke angenommen worden. Der konstante Phasenterm  $\varphi$  dient dazu, den Nulldurchgang der Oszillation festzulegen. Setzt man Gl. (2.8) in die Wellengleichung (2.6) ein, so erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen  $\vec{k}$  und  $\omega$ :

$$\vec{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = n^2 \omega^2 / c^2$$
Dispersions  
für Licht
(2.9)

Eine Beziehung der Art von Gl. (2.9) die den Betrag des Wellenvektors mit der Kreisfrequenz der Welle verknüpft, bezeichnet man als Dispersionsrelation. Mit Hilfe der Maxwellgleichungen lassen sich Beziehungen zwischen  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$  und  $\vec{k}$  aufstellen. Dabei verwenden wir, daß für ebene Wellen  $\vec{A}$ (bei Verwendung der Schreibweise von Gl.(2.12)) gilt:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \propto \vec{k} \cdot \vec{A}$  und  $\vec{\nabla} \times \vec{A} \propto \vec{k} \times \vec{A}$ .

$$\vec{k} \perp \vec{D}, \ \vec{k} \perp \vec{B} \quad \text{aus Gl. (2.2) und (2.3)}$$

$$\vec{E} \perp \vec{B}, \ \vec{D} \perp \vec{B} \quad \text{aus Gl. (2.4) und (2.5)}$$

$$|\vec{E}| = \frac{c}{n} |\vec{B}| = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0}} |\vec{B}| \quad \text{aus Gl. (2.5)}$$

Für optisch isotrope Medien gilt zusätzlich  $\vec{E} \perp \vec{k}$ . Diese Beziehungen zeigen, daß elektromagnetische Wellen transversale Wellen sind, bei denen die Auslenkungen von  $\vec{B}$  bzw.  $\vec{D}$  (oder  $\vec{E}$ ) in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen. Die relativen Orientierungen von  $\vec{k}$ ,  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$  bilden dabei ein rechtshändiges System. Durch diese Bedingungen erhält man für einen vorgegebenen Wellenvektor  $\vec{k}$  zwei Möglichkeiten der Wahl von  $\vec{D}$ (oder  $\vec{E}$ ), die man als die beiden möglichen Polarisationen des Lichtes bezeichnet (näheres siehe Kapitel 4). Da die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie im allgemeinen über die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  geschieht und das magnetische Feld  $\vec{B}$  gemäß Gl. (2.10) direkt proportional zu  $\vec{E}$  ist, werden wir uns bei der weiteren Behandlung häufig auf das elektrische Feld  $\vec{E}$  beschränken. Einige weitere Begriffe, die im Zusammenhang mit Wellen wichtig sind, wollen wir hier nun zusammenfassen: Die Wellenlänge  $\lambda$  der

Transversalität von elektromagnetischen Wellen

Brechungsindex



**Bild 2.1:** Ausbreitung von Licht. Momentaufnahme des elektrischen Feldes als Funktion des Ortes. Im Vakuum ist die Wellenlänge  $\lambda = c/\nu$ , im Medium (oberer Bildteil rechts) wird die Wellenlänge auf  $\lambda_m = c/(n\nu)$  verkürzt.

Welle (siehe Bild 2.1) ist mit der Wellenzahl k, d.h. mit dem Betrag des Wellenvektors  $\vec{k}$  verknüpft über:

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{2\pi n}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu}$$
(2.11)

Als Wellenlänge  $\lambda$  bezeichnete man dabei die Wellenlänge im Vakuum. Ist jedoch im Spezialfall die Wellenlänge im Medium  $\lambda_m = \lambda/n$  gemeint, so wird dies i.a. explizit angegeben. Neben der Kreisfrequenz  $\omega$  verwendet man auch den Begriff der Frequenz  $\nu = \omega/2\pi$  oder in der älteren Literatur auch die "Wellenzahl" als  $\tilde{\nu} = \nu/c = 1/\lambda$  in Einheiten von cm<sup>-1</sup>. Anstelle der in Gl. (2.8) benützten Schreibweise der Wellenamplitude mit trigonometrischen Funktionen wendet man häufig auch die komplexe Exponentialschreibweise an:

$$\vec{E}_{c}(\vec{r},t) = \vec{E}_{oc} \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)]$$
(2.12)

Die komplexe Schreibweise für Wellen vereinfacht häufig das Rechnen Diese Schreibweise führt zu einer erheblichen Rechenvereinfachung. Da jedoch das elektrische Feld als physikalische Meßgröße nur reelle Werte annehmen kann, ist am Ende der Rechnung der Realteil von  $\vec{E}_{\rm c}(\vec{r},t)$  zu bilden: d.h. die physikalisch meßbaren Felder  $\vec{E}(\vec{r},t)$  entsprechen dem Realteil der komplexen "Felder"  $\vec{E}_{\rm c}(\vec{r},t)$ :  $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\vec{E}_{\rm c}(\vec{r},t)$ +c.c. Dabei bezeichnen wir mit c.c. das konjugiert Komplexe des vorstehenden Ausdrucks.

Wellenzahl und Wellenvektor Eine wichtige Eigenschaft der Wellengleichung (2.6) ist, daß gemäß dem Superpositionsprinzip neben zwei Lösungen  $\vec{E}_2$  und  $\vec{E}_1$  der Wellengleichung auch deren Summe  $\vec{E}_s = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  eine Lösung ist. Dadurch wird es möglich, durch Kombination von ebenen Wellen geeigneter Amplitude und Frequenz Wellenpakete mit definiertem zeitlichen und räumlichen Verlauf zu konstruieren. Der dabei verwendete mathematische Formalismus ist der der Fouriertransformation (siehe auch Physik I): Addiert man eine Vielzahl von ebenen Wellen mit den Frequenzen  $\omega_j = \omega_0 j$  und den Amplituden  $E_{0j}$ , so läßt sich dadurch jeder beliebige (zeitlich oder räumlich) periodische Feldverlauf  $E(\vec{r}, t)$  darstellen<sup>2</sup>. Speziell für den Ursprung  $\vec{r} = 0$  erhalten wir den Zeitverlauf:

$$\vec{E}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \vec{E}_{0j} \exp(i\omega_j t)$$
(2.13)

Verwendet man kontinuierlich verteilte Frequenzkomponenten, so wird aus der Fourierreihe (2.13) ein Fourierintegral, das auch die Darstellung von nichtperiodischen Zeitverläufen gestattet:

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0(\omega) \exp(i\,\omega t) d\omega$$
(2.14)

Da E(t) eine reelle Größe ist, kann man die Feldstärke für negative Frequenzen wie folgt angeben:  $E_0(\omega) = E_0^*(-\omega)$ . Durch Umkehrung der Fouriertransformation lassen sich die Fourierkomponenten  $\vec{E}_0(\omega)$  aus einem vorgegebenen Zeitverlauf des Feldes berechnen:

$$\vec{E}_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \exp(-i\omega t) dt$$
(2.15)

Die Darstellung des elektrischen Feldes durch seinen Zeitverlauf  $\vec{E}(t)$  oder durch seinen Frequenzverlauf  $\vec{E}_0(\omega)$  ist also äquivalent. Beide Darstellungen sind in der Physik in gleicher Weise verwendbar. In Analogie kann man auch bei festgehaltener Zeit die entsprechende Komplementarität zwischen Ortsdarstellung und Impuls- (Wellenvektor-) darstellung des Feldverlaufes zeigen. Wellenpakete

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> In analoger Weise kann man auch die Fouriertransformation vom Ortsraum in den "Impulsraum" durchführen. Dadurch erhält man den Übergang von einer räumlichen Verteilung in eine Richtungs- oder Impulsverteilung. Man spricht dabei auch von Raumfrequenzen. Dies wird im Zusammenhang mit der Beugung in Abschnitt 4.1 vertieft.

Als Beispiel wollen wir einen Frequenzverlauf des Feldes gemäß der Gaußschen Glockenkurve mit einer Zentralfrequenz  $\omega_0$  annehmen (siehe Bild 2.2a):

$$E(\omega) = A \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta\omega}\right)^2\right] + A \exp\left[-\left(\frac{-\omega - \omega_0}{\delta\omega}\right)^2\right]$$
(2.16)

Den zweiten Teil auf der rechten Seite von Gl. (2.16) benötigen wir, um mit Hilfe von Gl. (2.14) eine reelle Feldstärke E(t) zu erzielen. Setzen wir Gl. (2.16) in Gl. (2.14) ein, so ergibt sich der Zeitverlauf des Feldes zu:

$$E(t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta\omega}\right)^2\right] \exp(\mathrm{i}\,\omega t) \mathrm{d}\omega + \mathrm{c.c.} \quad (2.17)$$
$$= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \frac{\delta\omega}{2} \exp\left[-\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 t^2\right] \exp(\mathrm{i}\,\omega_0 t) + \mathrm{c.c.}$$

Wir erhalten also ein Wellenpaket mit einer Schwingungsfrequenz  $\omega_0$  und einer zeitlich modulierten Amplitude mit gaußförmigem Verlauf (siehe Bild 2.2 b). Die Breite des Zeitverlaufs  $\delta t$  ist dabei mit der Breite  $\delta \omega$  des Frequenzverlaufs korreliert; es gilt  $\delta \omega \cdot \delta t = 2$ . Unter Benützung der vollen Halbwertsbreiten (der Feldverläufe)  $\Delta t$  und  $\Delta \omega$  ergibt sich:

$$\Delta\omega\Delta t = 8\ln(2) = 5.54\tag{2.18}$$

Ein zeitlich gaußförmiger Lichtimpuls ist also mit einer bestimmten Frequenzbreite verknüpft, die mit fallender Dauer des Impulses zunimmt. Betrachtet man im Experiment anstelle der Feldverläufe die entsprechenden Intensitätsverläufe (siehe Abschnitt 2.2), so ist dies bei der Berechnung zu berücksichtigen. Bei den hier beobachteten gaußförmigen Impulsen ist das mit den vollen Halbwertsbreiten des Intensitätsverlaufs berechnete Bandbreitenprodukt halb so groß wie das für die Feldverläufe von Gl. (2.18). Verwendet man andere Lichtimpulsformen, so hängt im Detail das Bandbreitenprodukt  $\Delta\omega\Delta t$  von der speziellen Impulsform ab. Für die Feldstärken glockenförmiger Lichtimpulse gilt dabei als Abschätzung:

$$\Delta \omega \cdot \Delta t \cong 2\pi \text{ oder } \Delta \nu \cdot \Delta t \cong 1$$
(2.19)

Die Beziehung Gl. (2.18) oder (2.19) ist eine für Wellen charakteristische Eigenschaft, die wie folgt verstanden werden kann: Beobachtet man ein Wellenpaket, so kann man seinen Eintreffzeitpunkt nur mit einer Genauigkeit

Bandbreitenprodukt für glockenförmige Lichtimpulse:  $\Delta \nu \Delta t = 1$ 



**Bild 2.2:** Frequenzverlauf (a) und Zeitverlauf (b) des elektrischen Feldes eines gaußförmigen Wellenpaketes. Für die Halbwertsbreiten  $\Delta \omega$  und  $\Delta t$  gilt die Unschärfebeziehung  $\Delta \omega \cdot \Delta t = 5.54$  (siehe Gl. (2.18)). Die Darstellung im Bild benützt normierte Zeiten und Frequenzen. Dabei wurden die Größen  $\delta \omega = 2/\delta t$  aus Gl. (2.16) bzw. (2.17) verwendet.

in der Größenordnung seiner zeitlichen Breite  $\Delta t$  bestimmen (siehe Bild 2.2). Will man nun seine spektrale Position festlegen, so muß man dazu möglichst viele Maxima des Wellenzuges abzählen. Dies ist aber nur während der Dauer  $\Delta t$  des Wellenpaketes möglich, so daß dadurch eine Frequenzunschärfe von  $\Delta \nu \approx 1/\Delta t$  auftritt. Die Unmöglichkeit einer gleichzeitigen Frequenz- und Zeitbestimmung ist für ein Wellenphänomen offensichtlich und einsehbar. Die Erweiterung dieser Unschärfebeziehung auf die Physik von Teilchen in der Heisenbergschen Unschärferelation ist in der Betrachtungsweise der klassischen Physik unverständlich. Sie ist eng mit der Entwicklung der Quantenmechanik verknüpft und wird in Kap. 5 behandelt.

Wir wollen nun noch ein Zahlenbeispiel zur Unschärfebeziehung am Beispiel kurzer Lichtimpulse angeben: Technisch können mit sichtbarem Licht bei  $\lambda_0 = 600$  nm,  $\omega_0 = 3.14 \cdot 10^{15}$  Hz Lichtimpulse mit einer Dauer von etwa 5 fs =  $5 \cdot 10^{-15}$  s erzeugt werden. Diese Lichtimpulse bestehen also aus wenigen Schwingungsperioden (Der Zeitverlauf in Bild 2.2 b entspricht diesen Bedingungen). Ihre Frequenzbreite  $\Delta \omega$  läßt sich nach Gl. (2.18) für einen gaußförmigen Zeitverlauf zu  $\Delta \omega = 1.1 \cdot 10^{15}$  Hz, bzw.  $\Delta \lambda = 212$  nm bestimmen. D.h. diese "roten" Lichtimpulse (die Zentralwellenlänge war  $\lambda_0 =$ 600 nm) besitzen spektrale Komponenten die sich bis weit in den grünen Spektralbereich erstrecken. Unschärfebeziehung

## 2.2 Energie und Impuls von Licht

Eine wichtige Eigenschaft von Licht ist seine Fähigkeit, Energie zu transportieren. Nur aufgrund dieses Energietransportes von der Sonne zur Erde konnte sich das heutige Leben auf der Erde entwickeln. In der Elektrodynamik wurde gezeigt, daß die Energiestromdichte einer elektromagnetischen Welle durch den Poynting-Vektor  $\vec{S}$  beschrieben wird (siehe Physik II, Kap. 10.4).

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B})$$
 Poynting-Vektor (2.20)

Lichtintensität oder Strahlungsflußdichte:  $I = \varepsilon_0 nc \langle |\vec{E}|^2 \rangle$  Durch zeitliche Mittelung von  $\vec{S}$  über eine Schwingungsperiode des Feldes erhält man die Strahlungsflußdichte oder Lichtintensität *I*. Die Strahlungsflußdichte ist also die mittlere Lichtenergie pro Sekunde und pro (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehender) Fläche. Unter Verwendung von Gl. (2.10) kann man die Strahlungsflußdichte *I* für ein optisch isotropes Medium schreiben als:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \varepsilon_0 nc \langle |\vec{E}|^2 \rangle \qquad \text{Strahlungsflußdichte}$$
(2.21)

Wir verwenden hierbei die spitzen Klammern  $\langle A \rangle$  als Zeichen dafür, daß das zeitliche Mittel einer Größe A über eine Schwingungsperiode zu bilden ist. Für den Fall eines Wellenpaketes erhält man so eine zeitabhängige Strahlungsflußdichte I(t), die experimentell z.B. über Calorimetrie gemessen werden kann. Bei der Berechnung des Mittelwertes  $\langle |\vec{E}|^2 \rangle$  ist die Polarisation des Lichtes zu berücksichtigen. Für ein reales physikalisches Feld E(r, t) nach Gl. (2.8) berechnen wir bei linearer Polarisation die Strahlungsflußdichte zu:

$$I = \varepsilon_0 nc |E_0|^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 nc |E_0|^2$$
(2.22)

Bei einer direkten Verwendung der komplexen Schreibweise der Felder  $E_c(r, t)$  nach Gl. (2.12) fällt jedoch bereits bei der Betragsbildung der schnell oszillierende Term heraus. Hier ist der durch die Mittelung in Gl. (2.22) zustandekommende Term "1/2" explizit einzufügen:

$$\begin{split} I &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 nc |E_{\rm oc}|^2 \quad \text{da} \\ \langle |\vec{E}_{\rm c}(\vec{r},t)|^2 \rangle &= E_{\rm oc} E_{\rm oc}^* \exp[\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)] \exp[-\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)] \\ &= |E_{\rm oc}|^2 = 2\langle |\vec{E}|^2 \rangle \end{split}$$

Neben der Energiestromdichte besitzt Licht auch eine Impulsdichte, die bei der Absorption oder der Reflexion von Licht wichtig werden kann. Das Zustandekommen dieses "Strahlungsdruckes" läßt sich einfach anhand der Wechselwirkung eines elektromagnetischen Feldes mit einer zunächst ruhenden freien Ladung q erklären (siehe Bild 2.3). Aufgrund der Coulomb-Kraft erfährt die Ladung eine Beschleunigung parallel zum E-Feld, die zu einer Geschwindigkeit v<sub>q</sub> der Ladung führt. Dabei wird aus dem Lichtfeld die Leistung  $L = q \cdot E \cdot v_q$  aufgenommen. Die Bewegung des Elektrons im magnetischen Feld B des Lichtes, das senkrecht zu E und k steht, führt nun zu einer Lorentzkraft  $\vec{F}_1$ , die in Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  zeigt:

$$|F_{\rm L}| = q|v_{\rm q}| |B| = q|v_{\rm q}| \frac{E}{c} = \frac{L}{c}$$
(2.23)

Bild 2.3: Schema zur Verdeutlichung des Strahlungsdrucks: Durch das elektrische Feld  $\vec{E}$  der Welle erfährt die Ladung q eine Beschleunigung, die zu einer Geschwindigkeit  $\vec{v}_{q}$ führt. Über das magnetische Feld  $\vec{B}$  der Welle wirkt so die Lorentzkraft auf die bewegte Ladung, die in Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  der Welle zeigt.

Verbunden mit der Absorption der Strahlungsleistung L aus dem Lichtfeld wird also eine Kraft in Ausbreitungsrichtung auf die Ladung ausgeübt. Bezieht man diese Kraft auf die bestrahlte Fläche, so erhält man den Strahlungsdruck P<sub>S</sub>, der bei der Absorption von Licht der Intensität I auf den Absorber ausgeübt wird:

Strahlungsdruck

Strahlungsdruck des Lichtes  $P_{\rm s} = \frac{I}{c}$ (2.24)

Bei einer vollständigen Reflexion von Licht an einem Spiegel tritt aufgrund der Impulserhaltung ein doppelt so großer Strahlungsdruck auf. Als Beispiel soll kurz der Strahlungsdruck, der vom Sonnenlicht am Ort der Erdumlaufbahn verursacht wird, bestimmt werden. Bei einer Bestrahlungsstärke durch Sonnenlicht von  $I_{\rm S} = 1.500 \text{ W/m}^2$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  errechnen wir einen Strahlungsdruck  $P_{\rm S} = I_{\rm S}/c = 5 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$ . Dieser Druck ist sehr klein und ist so für das tägliche Leben vernachlässigbar. Trotzdem ist dieser Strahlungsdruck für eine Reihe von Phänomenen im sonnennahen Bereich verantwortlich: z.B. bewirkt er die Ausrichtung der Kometenschweife und beeinflußt erheblich die Verteilung der geladenen Teilchen in der Ionosphäre





Impuls des Lichts

der Erde. Andererseits kann der Strahlungsdruck von Licht auch riesige Werte annehmen: Bei den höchsten Lichtintensitäten von ca.  $3 \cdot 10^{22}$  W/m<sup>2</sup>, die mit Kurzpulslasern (Pulsdauer <  $10^{-12}$  s) zur Zeit hergestellt werden können berechnet man nach Gl. (2.24) einen Strahlungsdruck  $P_{\rm S}$  von  $P_{\rm S} = 3 \cdot 10^{22}$  W/m<sup>2</sup>/ $3 \cdot 10^8$  m/s =  $10^{14}$  Pa. Dieser Druck,  $10^{14}$  Pa oder 1 Gbar, übersteigt alle technisch herstellbaren stationären Drucke und reicht bis auf den Faktor 1000 an typischerweise im Zentrum von Sternen wirkende Drucke heran.

## 2.3 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Wir wollen uns nun mit der Ausbreitung von Licht, speziell von Lichtimpulsen, zuwenden. Dazu schreiben wir im Ansatz für das Wellenpaket von Gl. (2.14) explizit die Ortsabhängigkeit der Phase. Für ein in x-Richtung polarisiertes elektrisches Feld, das sich längs der z-Achse ausbreitet, ergibt sich damit:

$$E_{\mathbf{x}}(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\mathbf{x}}(\omega) \exp[\mathrm{i}\,\omega t - \mathrm{i}\,k(\omega)z] \mathrm{d}\omega$$
(2.25)

 $k(\omega)$  kann über die Dispersionsrelation Gl. (2.9) bestimmt werden. Dabei ist eine mögliche Frequenzabhängigkeit des Brechungsindexes  $n(\omega)$  (siehe Abschnitt 2.4) explizit zu berücksichtigen. Betrachtet man ein Wellenpaket mit einem Spektrum  $E_{0x}(\omega)$ , das nur in unmittelbarer Umgebung einer Resonanzfrequenz  $\omega_0$  von Null verschieden ist, so kann man  $k(\omega)$  in der Nähe von  $\omega_0(\omega = \omega_0 + \Omega \text{ mit } \Omega \ll \omega_0)$  in eine Potenzreihe entwickeln. Wir berechnen damit näherungsweise das elektrische Feld:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \Omega \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} + \frac{1}{2}\Omega^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}\omega^2}\right)_{\omega_0} + \dots$$
(2.26)  
$$= k_0 + \Omega k'(\omega_0) + \frac{1}{2}\Omega^2 k''(\omega_0) + \dots$$
  
$$E_{\mathbf{x}}(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[\mathrm{i}\,\omega_0 t - \mathrm{i}\,k_0 z] \int E_{\mathbf{x}}(\omega_0 + \Omega)$$
(2.27)  
$$\times \exp[\mathrm{i}\,\Omega(t - z(k'(\omega_0) + \Omega k''(\omega_0)/2) + \dots)] \,\mathrm{d}\Omega$$
  
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[\mathrm{i}\,\omega_0 t - \mathrm{i}\,k_0 z] A(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\mathrm{i}\,\Phi(z,t)] A(z,t)$$

Wir haben dabei das Wellenpaket in einen mit der Frequenz  $\omega_0$  schnell oszillierenden Anteil und in eine zeit- und ortsabhängige Amplitudenfunktion A(z,t), die sich aufgrund der Bedingung  $\Omega \ll \omega_0$  nur langsam ändert,



**Bild 2.4:** Phasen- und Gruppengeschwindigkeit: Momentaufnahmen eines Wellenpaketes zu Zeiten  $t_0$  (oben) und  $t_0 + \Delta t$  (unten). Ein Maximum der Amplitude des Feldes breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit  $v_{\rm ph}$  aus. Das Maximum der Impulseinhüllenden läuft mit der langsameren Gruppengeschwindigkeit  $v_{\rm gr}$ .

aufgespalten. Die Ausbreitung der Oszillation erfolgt dabei mit der Phasengeschwindigkeit  $v_{\rm ph}$ . Formal läßt sich die Phasengeschwindigkeit über die Bedingung  $\Phi(z,t) = \Phi_0$  berechnen (siehe auch Bild 2.4). Dabei ist z(t) der Ort, an dem zu einem Zeitpunkt t die Phase gerade  $\Phi_0$  ist.

$\Phi(z,t) = \omega_0 t - k_0 z(t) = \Phi_0$	oder	der Phase (v <sub>ph</sub> ) und der Einhüllenden
$z(t)=\frac{\omega_0 t}{k_0}-\frac{\varPhi_0}{k_0}$	damit	des Wellenpakets $(v_{ m gr})$
$v_{\rm ph} = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n}$	Phasengeschwindigkeit	(2.28)

Für die Bestimmung der Ausbreitung der Amplitude des Wellenpakets verwenden wir wieder Gl. (2.27). Dabei vernachlässigen wir zunächst zweite und höhere Ableitungen des Wellenvektors. In diesem Fall ergibt das Integral in Gl. (2.27) eine Amplitudenfunktion  $A(\xi)$  mit dem Argument  $\xi = t - zk'(\omega_0) = t - z\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}$ . Diese Amplitudenfunktion  $A(\xi)$ , d.h. die Einhüllende des Wellenpakets breitet sich in z-Richtung mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_{gr}$  aus. Da die Bewegung eines festen Punktes auf der

pengeschwindigkeit  $v_{gr}$  aus. Da die Bewegung eines festen Punktes auf der Einhüllenden durch die Beziehung  $\xi = \xi_0 = \text{const. gegeben ist, berechnet}$ man  $v_{gr}$  zu:

$$t-z(t)\left(rac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}
ight)_{\omega_0}=\xi_0$$

Ausbreitungsge-

schwindigkeiten von Licht:

Geschwindigkeit

Phasengeschwin-

Gruppengeschwin-

 $v_{\rm ph} = \omega/k$ ,

 $v_{
m gr} = {
m d}\omega/{
m d}k$ 

digkeit:

digkeit:

$$v_{\rm gr} = \left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{\xi_0} = 1/\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{\omega_0} \tag{2.29}$$

Will man mit Licht Informationen übertragen, so kann man dazu die Amplitude des Feldes modulieren. Dieses, der Amplitude aufgeprägte Signal, wird sich dann gemäß Gl. (2.29) gerade mit der Gruppengeschwindigkeit ausbreiten. Die Signalgeschwindigkeit der Relativitätstheorie ist also in der Regel mit der Gruppengeschwindigkeit und nicht mit der Phasengeschwindigkeit zu identifizieren. Unter Benutzung der Dispersionsrelation (2.9) erhält man verschiedene Schreibweisen für die Gruppengeschwindigkeit:

$$\begin{split} v_{\rm gr} &= \left(\frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}k}\right)_{\omega_0} = \frac{c}{n} - \frac{k\cdot c}{n^2}\frac{{\rm d}n}{{\rm d}k} \\ \frac{1}{v_{\rm gr}} &= \frac{1}{v_{\rm ph}}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\frac{{\rm d}n}{{\rm d}\lambda}\right) \end{split}$$

Gruppengeschwindigkeit

(2.30)

Die bisher vernachlässigten höheren Entwicklungsglieder in Gl. (2.27) bewirken, daß sich die Form der Amplitudenfunktion bei der Ausbreitung verändert. Dieses Phänomen kann man qualitativ darauf zurückführen, daß für verschiedene Frequenzkomponenten des Lichtimpulses unterschiedliche Werte der Gruppengeschwindigkeit existieren; die verschiedenen Frequenzkomponenten eines Lichtimpulses breiten sich unterschiedlich schnell aus und verlängern so den Lichtimpuls. Diese "Dispersion der Gruppengeschwindigkeit" führt in der Regel zu einer Verbreiterung der Lichtimpulse bei der Ausbreitung durch ein dispersives  $(dn/d\lambda \neq 0)$  Medium. Für den Spezialfall von gaußförmigen Lichtimpulsen (ohne Phasenmodulation) mit  $E_{0x}(t) = \exp(-(t/\delta t_0)^2)$  erhält man nach Propagation durch ein dispersives Medium  $(k'' \neq 0)$  der Schichttiefe *D* eine Vergrößerung der Impulsdauer auf:

$$\delta t(D) = \delta t_0 \sqrt{1 + 4(Dk'')^2/(\delta t_0)^4}$$
(2.31)

Diese Verlängerungen der Impulsdauer sind bei langen Lichtimpulsen mit einer Dauer von über einer Mikrosekunde praktisch immer zu vernachlässigen. Verkürzt man jedoch die Dauer der Lichtimpulse unter eine Nanosekunde, so werden bei den in der Datenübertragung mit Glasfasern relevanten Entfernungen (einige 10 km) die Verlängerungen der Impulse meßbar und können die übertragbare Informationsbandbreite (die proportional zu  $1/\delta t(D)$  ist) begrenzen. Aus diesem Grund verwendet man in der modernen Datenübertragung spezielle Glasfasern und Übertragungswellenlängen  $\lambda_0$  bei denen besonders kleine Werte der Dispersion  $k'' = d^2k/d\omega^2$  auftreten. Bei

Signalausbreitung erfolgt mit Gruppengeschwindigkeit

Verbreiterung von Lichtimpulsen durch Gruppengeschwindigkeitsdispersion einer Lichtausbreitung durch ein Vakuum treten keine Dispersionseffekte auf. Hier gilt n = 1 und nach Gl. (2.9)  $k = \omega/c$ . Außerdem sind im Vakuum Gruppengeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit gleich groß:  $v_{\rm gr} = v_{\rm ph} = c$ .

## 2.4 Dispersion von Licht

Die Ausbreitung von Licht wird entscheidend vom Brechungsindex  $n(\omega)$  des durchleuchteten Mediums bestimmt:  $n(\omega)$  beeinflußt die Geschwindigkeit des Lichtes, das Auseinanderfließen von Lichtimpulsen, aber auch Ablenkung und Reflexion von Licht beim Übergang von einem Material in ein anderes. Die physikalischen Grundlagen des Brechungsindexes und seine speziellen Eigenschaften werden in diesem Kapitel behandelt. Wir werden dazu zunächst das Modell der Polarisierbarkeit eines Isolators, wie es in Physik II vorgestellt wurde, erweitern und beschreiben damit die wesentlichen Phänomene der Dispersion von elektromagnetischen Wellen.

#### 2.4.1 Die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante

In vielen Experimenten der Elektrodynamik behandelt man die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  eines Mediums als eine konstante Größe. Dies ist dann gerechtfertigt, wenn nur Frequenzen aus einem schmalen Bereich weit von Resonanzfrequenzen entfernt benutzt werden. Als Beispiel für die praktisch auftretende Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante oder des Brechungsindexes vergleichen wir die Werte des Brechungsindexes n(589 nm), der im sichtbaren Spektralbereich bei  $\lambda = 589$  nm gemessen wird, mit der Wurzel aus der statischen Dielektrizitätskonstante  $n_0 = \sqrt{\varepsilon(\omega = 0)}$ . Dabei treten häufig markante Unterschiede auf, die auf eine ausgeprägte Frequenzabhängigkeit hindeuten. In Tabelle 2.1 sind entsprechende Zahlenwerte für einige Flüssigkeiten angeführt.

Normalerweise ist der Brechungsindex für sichtbares Licht kleiner als der statische Brechungsindex

**Tabelle 2.1:** Vergleich der statischen Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon(\omega = 0)$  mit dem optischen Brechungsindex *n* (589 nm)

	$\sqrt{\varepsilon(\omega=0)}$	n (589 nm)
Tetrachlorkohlenstoff	4.63	1.46
Schwefelkohlenstoff	5.04	1.628
Ethylalkohol	5.08	1.361
Wasser	8.96	1.333
Benzol	1.51	1.501

Berechnung von Dielektrizitätskonstante und Brechungsindex Die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindexes kann durch verschiedene mikroskopische Phänomene hervorgerufen werden: In allen Atomen oder Molekülen wird durch ein äußeres elektrisches Feld eine Auslenkung der Elektronen gegenüber den Atomkernen erzeugt. Die damit verknüpfte Dispersion werden wir im folgenden ausführlicher behandeln. Häufig kann eine starke Frequenzabhängigkeit des Brechungsindexes in Medien beobachtet werden, in denen die Moleküle ein permanentes Dipolmoment besitzen, das durch ein äußeres Feld ausgerichtet werden kann (z.B. in Wasser, H<sub>2</sub>O). Der damit verbundene Orientierungsbeitrag zum Brechungsindex, bzw. zur Dielektrizitätskonstante, wird im Rahmen der Festkörperphysik näher behandelt. Wir wollen uns nun mit der durch die Auslenkung der Elektronen verursachten Polarisation beschäftigen, die für die Dispersion vieler optischer Materialien im sichtbaren Spektralbereich verantwortlich ist. Hierzu verwenden wir ein Atommodell, bei dem ein negativ geladenes Elektron mit der Masse  $m_{\rm e} = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg und der Ladung  $q = -e = -1.60 \cdot 10^{-19}$ C durch harmonische Kräfte an einen ruhenden (unendlich schweren) positiv geladenen Kern gebunden ist. Wir stellen dazu die Bewegungsgleichung auf und berechnen das mit der Auslenkung in einem äußeren Feld verbundene Dipolmoment. Aus der entsprechenden makroskopischen Polarisation  $\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$  kann dann die Dielektrizitätskonstante bestimmt werden. Die treibende Kraft  $\vec{F}(t)$  auf das Elektron wird durch das elektrische Feld  $\vec{E}(t)$  hervorgerufen:

$$\vec{F}(t) = -e\vec{E}(t) = -e\vec{E}_0 \exp[i\omega t]$$
(2.32)

Wir haben dabei die komplexe Schreibweise des elektrischen Feldes gewählt. Das Feld zeige parallel zur x-Koordinate.  $\vec{E_0}$  ist eine reelle Größe. Die Bewegung des Elektrons folge der Gleichung eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Resonanzfrequenz  $\omega_0$  und einer schwachen Dämpfungskonstante  $\gamma \ll \omega_0$  (vergleiche dazu Physik I). Beide Werte  $\omega_0$  und  $\gamma$  hängen dabei vom speziellen Typ der betrachteten Atome oder Moleküle ab. Für die Auslenkung x(t) des Elektrons aus der Ruhelage verwenden wir den Lösungsansatz  $x(t) = x_0 \exp(i\omega t)$  und erhalten damit:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t) = \frac{-e}{m} E_0 \exp[i\,\omega t]$$
(2.33)

$$x(t) = \frac{-e}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} E(t)$$
(2.34)

Bei einer Teilchendichte N ergibt sich für die Polarisation P(t), d.h. für das Dipolmoment pro Volumeneinheit und für die Dielektrizitätskonstante:

Welche physikalische Bedeutung haben Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante?

$$P(t) = -ex(t)N = \frac{e^2N}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} E(t) = (\varepsilon(\omega) - 1)\varepsilon_0 E(t) \qquad (2.35)$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega}$$
  
Frequenzabhängigkeit  
der  
Dielektrizitätskonstante (2.36)

Wir haben in dieser Ableitung eine komplexe Schreibweise für das elektrische Feld und die Auslenkung des Elektrons gewählt. Damit vermeiden wir die Einführung eines Phasenfaktors  $\varphi$ , der bei einer reellen Rechnung erforderlich wird. Festzuhalten ist jedoch, daß die physikalische Meßgröße immer der Realteil der entsprechenden komplexwertigen Größe ist.

Besitzt das betrachtete System Atome verschiedener Typen, so können deren Einzelbeiträge zur Dielektrizitätskonstante aufsummiert werden. Für  $N_j$  Atome des Typs "j" pro Volumeneinheit, die eine Resonanzfrequenz  $\omega_{0j}$  und Dämpfung  $\gamma_j$  aufweisen, kann man dann schreiben:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_{j} \frac{N_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega}$$
(2.37)

#### 2.4.2 Der Brechungsindex

Für verdünnte Medien (z.B. Gase) kann man im nichtresonanten Fall immer erreichen, daß  $\varepsilon(\omega)$  sehr nahe bei eins liegt:  $\varepsilon(\omega) = 1 + \Delta \varepsilon$  mit  $\Delta \varepsilon \ll 1$ . In diesem Fall läßt sich der Brechungsindex  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  aus Gl. (2.36) einfach berechnen. Man verwendet dabei, daß auch *n* nahe bei eins liegt und erhält:

$$(\varepsilon - 1) = (n^2 - 1) = (n + 1)(n - 1) \cong 2(n - 1)$$
  
$$(n - 1) \cong \frac{1}{2} [\varepsilon(\omega) - 1] = \frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$
(2.38)

$$n_{\rm R} = 1 + \frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$
(2.39)

$$n_{\rm I} = \frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m} \frac{-\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$
(2.40)

Der Brechungsindex ist nun ebenfalls eine komplexe Größe mit Realteil  $n_{\rm R}$ und Imaginärteil  $n_{\rm I}$ . Sein Frequenzverlauf ist in Bild 2.5 dargestellt: Der Realteil  $n_{\rm R}$  des Brechungsindexes startet bei kleinen Frequenzen  $\omega \to 0$  bei  $n_0 = 1 + e^2 N/2\varepsilon_0 m \omega_0^2$ , steigt dann kontinuierlich an. Nur in der unmittelbaren Nähe der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  nimmt  $n_{\rm R}$  ab. Bei hohen Frequenzen  $\omega \gg \omega_0$  nähert sich  $n_{\rm R}$  von kleinen Werten her dem Wert n = 1 (siehe Bild

Für große Frequenzen  $(\omega \rightarrow \infty)$  gilt immer:  $n(\omega) = 1$ 



**Bild 2.5:** Frequenzabhängigkeit des Brechungsindexes: Gezeigt ist der Frequenzverlauf für den Realteil  $n_{\rm R}$  und den Imaginärteil  $n_{\rm I}$  des Brechungsindexes. In der Darstellung wurde die Abkürzung  $\rho = e^2 N/(2\epsilon_0 m)$  verwendet.

2.5a). Für den hier betrachteten Fall ist der Imaginärteil  $n_{\rm I}$  immer negativ<sup>3</sup>. Im allgemeinen ist  $n_{\rm I}$  sehr klein und nur in der Nähe der Resonanzfrequenz merklich von Null verschieden. Sein Frequenzverlauf ist der einer Lorentz-Kurve (siehe Bild 2.5b).

#### 2.4.3 Die Absorption von Licht

Die Auswirkungen eines komplexen Brechungsindexes kann man am besten erkennen, wenn man die Ausbreitung einer ebenen Welle E(t, z) in z-Richtung durch ein Medium mit Brechungsindex  $n = n_{\rm R} + in_{\rm I}$  berechnet. Wir verwenden dabei die Größe des Wellenvektors k gemäß Gl. (2.9),  $k = n\omega/c$ , und setzen ihn in den Ansatz ebener Wellen ein:

$$E(z,t) = E_0 \exp[i\omega t - ikz]$$

$$= E_0 \exp[i\omega t - i\frac{\omega n_{\rm R}}{c}z + \frac{\omega n_{\rm I}}{c}z]$$

$$= E_0 \exp\left[\frac{\omega n_{\rm I}}{c}z\right] \exp\left[i\omega t - i\frac{\omega n_{\rm R}}{c}z\right]$$
(2.41)

 $n_{\rm I} < 0$  ergibt Absorption von Licht  $n_{\rm I} > 0$  ergibt Verstärkung von Licht Das elektrische Feld E(z,t) besitzt dann einen schnell oszillierenden Anteil, dessen Wellenlänge im Medium durch den Realteil  $n_{\rm R}$  des Brechungsindexes bestimmt ist. Die Amplitude der Welle (unterstrichen) erhält jedoch über den Imaginärteil des Brechungsindexes eine z-Abhängigkeit: Für den im allgemeinen realisierten Fall  $n_{\rm I} < 0$  (siehe Gl. (2.40)) nimmt die Feldstärke mit zunehmender Schichttiefe des Mediums exponentiell ab, d.h. der Ima-

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> In der Literatur wird für den komplexen Brechungsindex auch die Schreibweise  $n = n_{\rm R}(1-i\kappa)$  verwendet. In diesem Fall ist  $\kappa$  im allgemeinen eine positive Größe,  $\kappa = -n_{\rm I}/n_{\rm R}$ .

ginärteil des Brechungsindexes bewirkt eine Absorption des Lichtes. Für die Ortsabhängigkeit der Lichtintensität berechnet man:

$$I(z) = I(0) \exp\left[\frac{2\omega n_{\rm I} z}{c}\right]$$
  
= I(0) exp[-az] (2.42)

Wir haben hier den Extinktionskoeffizient a eingeführt, für den nach Gl. (2.40) gilt:

$$a = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m c} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$
 Extinktionskoeffizient (2.43)

Im betrachteten Modellsystem und in allen Systemen, die sich im thermischen Gleichgewicht befinden, ist  $n_{\rm I}$  stets negativ. Man erhält dann immer eine Abnahme der Lichtintensität mit zunehmender Schichttiefe. Unter speziellen Nichtgleichgewichtsbedingungen, wie sie z.B. im aktiven Medium eines Lasers realisierbar sind, kann  $n_{\rm I}$  auch positiv werden. In diesem Fall erhält man ein Anwachsen der Lichtintensität mit zunehmender Schichttiefe, d.h. das Licht wird im Medium verstärkt.

In der praktischen Anwendung werden im Zusammenhang mit der Absorption von Licht unterschiedliche Begriffe verwendet: Die *Durchlässigkeit* oder die *Transmission* T einer Probe ist:  $T = I(z)/I(0) = \exp[-az]$ .

Um die Eigenschaften einzelner Atome aus denen einer makroskopischen Probe herauszuheben, zieht man die Teilchendichte N im Ausdruck für den Extinktionskoeffizienten heraus und faßt den Rest als Absorptionsquerschnitt  $\sigma$  zusammen:

$$I(z) = I(0) \exp[-\sigma N z] \tag{2.44}$$

Für Anwendungen in der Chemie verwendet man häufig die Konzentration C der Probe in Einheiten von Mol/Liter. Dabei wird entweder der molare Extinktionskoeffizient  $\alpha$  oder der molare Absorptionskoeffizient  $\varepsilon$  verwendet:

$$I(z) = I(0) \exp[-\alpha Cz] = I(0) \cdot 10^{-\varepsilon Cz}$$
(2.45)

Für das Produkt  $\varepsilon Cz$  ist auch der Ausdruck "optische Dichte" gebräuchlich. In der Lichtübertragung durch Glasfasern wird auch der Begriff der Dämpfung  $\beta$  in Einheiten von dB/km verwendet. Hier ist z in Einheiten von 10 km einzusetzen:

$$I(z) = I(0) \cdot 10^{-\beta z} \tag{2.46}$$

Wie müßte ein Modellsystem gestaltet sein, damit Lichtverstärkung anstelle von Absorption auftritt?



**Bild 2.6:** Transmissionsspektrum und optische Dichte von Farbstofflösungen (Rhodamin 6G) für drei verschiedene Schichtdicken.

Farbstoffe: Moleküle, bei denen die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  im Sichtbaren liegt

Als Beispiel für die Absorption von Licht ist in Bild 2.6 die Wellenabhängigkeit der Transmission eines absorbierenden Farbstoffes (Rhodamin 6 G in Äthanol) für verschiedene Schichttiefen dargestellt. Da die Absorption, d.h.  $n_1$  stark wellenlängenabhängig ist, erhält man eine unterschiedlich schnelle Abnahme der Lichtintensität mit der Schichttiefe. Für  $\lambda = 650$  nm tritt praktisch keine Absorption auf. Im Bereich von 530 nm ist die Transmission für die größeren Schichtdicken sehr klein. Aufgrund des exponentiellen Zusammenhangs zwischen Transmission und dem Produkt az aus Extinktionskoeffizient und Schichttiefe ändert der Transmissionsverlauf mit zunehmender Schichttiefe seine Form (siehe Bild 2.6a). Trägt man jedoch den Logarithmus der Transmission auf, so erhält man die schichttiefenunabhängige Form des Verlaufs von a (Bild 2.6b). Bei der Wellenlänge von 530 nm ist die Absorption maximal. Hier kann man die Extinktion a zu  $a_{\text{max}} = 1.5 \cdot 10^3 \,\text{m}^{-1}$  bestimmen. Daraus läßt sich der Imaginärteil des Brechungsindexes berechnen: Wir erhalten  $n_{\rm I} = -\frac{a\lambda}{4\pi} = -6.2 \cdot 10^{-5}$ , d.h. der Absolutwert des Imaginärteil des Brechungsindexes ist sehr klein, obwohl die Farbstofflösung bereits eine sehr intensive Farbe besitzt.

#### 2.4.4 Die Dispersion von dichten Medien

Bisher hatten wir angenommen, daß der Brechungsindex bzw. die Dielektrizitätskonstante einen Wert nahe bei eins besitzt. Für diesen Fall hatten wir den Frequenzverlauf der Dielektrizitätskonstante gemäß Gl. (2.37) errechnet. Berücksichtigt man über die Clausius-Mosotti-Beziehung (siehe Physik II) explizit die Auswirkungen eines dichten Mediums, so erhält man nach geeigneten Umformungen denselben funktionellen Verlauf von  $\varepsilon(\omega)$  bzw.  $n^2(\omega)$  wie in Gl. (2.37). Für Frequenzen weitab der Resonanzen, für die man die Auswirkungen der Dämpfung vernachlässigen kann, ergibt sich:

$$n^{2}(\omega) = 1 + \sum_{j} \frac{\varrho_{j}}{\tilde{\omega}_{0j}^{2} - \omega^{2}}$$
(2.47)

Der wesentliche Unterschied zu Gl. (2.37) besteht dabei darin, daß anstelle der echten Resonanzfrequenzen  $\omega_{0j}$  verschobene Frequenzen  $\tilde{\omega}_{0j}$  treten. Zur Vereinfachung der Schreibweise wurden die weiteren Materialparameter im Term  $\varrho_j$  zusammengefaßt. Mit Hilfe der Beziehung (2.47) lassen sich verschiedene Inter- und Extrapolationsformeln für den Brechungsindex aufstellen, die sich darin unterscheiden, wie im Detail Gl. (2.47) umgeformt wurde und wie die verschiedenen Glieder zusammengefaßt wurden. Häufig wird dabei der Ansatz nach Sellmeier verwendet, bei dem man oft bereits mit dem ersten Glied der Summe ausreichend gute Näherungswerte erhält.



Frequenz

**Bild 2.7:** Schematische Darstellung des Frequenzverlaufs des Brechungsindexes: Die Resonanzen im Infrarot-Bereich sind durch Schwingungen der Moleküle, die im Ultraviolettbereich durch elektronische Bewegungen bestimmt. Nur in Nähe der Resonanzfrequenzen im schraftierten Bereich findet man anomale Dispersion,  $dn/\nu < 0$ . In diesen Bereichen tritt gleichzeitig Absorption auf.

Normale und anomale Dispersion

Diskutieren Sie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Falle anomaler Dispersion Die freien Konstanten A,  $B_i$  und  $C_i$  werden dabei mit Hilfe von Meßwerten  $n(\lambda)$  berechnet. Für nichtabsorbierende Materialien im sichtbaren Spektralbereich reicht es dabei häufig aus, nur ein Glied der Summe von Gl. (2.48) zu berücksichtigen. In Bild 2.7 ist der Frequenzverlauf des Realteils des Brechungsindexes für den Fall verschiedener Resonanzfrequenzen  $\omega_i$ schematisch wiedergegeben: Man findet gemäß Gl. (2.48), daß über weite Frequenzbereiche der Brechungsindex mit der Frequenz zunimmt. Diese Bereiche mit  $\frac{dn}{d\omega} > 0$  oder  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$  bezeichnet man als Bereiche normaler Dispersion. Nur nahe an den Resonanzfrequenzen, wenn der Imaginärteil des Brechungsindexes von null verschieden ist, gilt  $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ . In diesen Bereichen "anomaler Dispersion" werden die elektromagnetischen Wellen absorbiert (siehe Bild 2.5b). Für transparente Medien gilt, daß die Dispersion im sichtbaren Spektralbereich ganz wesentlich von einer elektronischen Resonanz im ultravioletten Spektralbereich bestimmt ist. Dies bewirkt, daß die Dispersion verschiedener transparenter Medien im Sichtbaren einen qualitativ sehr ähnlichen Wellenlängenverlauf besitzt. In Bild 2.8 ist als Beispiel die Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindexes für verschiedene optische Gläser dargestellt. Der Brechungsindex ist immer größer als eins. Außerdem nimmt n mit steigender Wellenlänge ab (normale Dispersion). Für viele Anwendungen werden Glasarten mit unterschiedlichen Brechungsindizes und Dispersion benötigt (siehe Kap. 3). Die Kunst der "Glasmacher" besteht nun darin, die Zusammensetzung der Gläser so zu variieren, daß transparente Gläser mit den gewünschten Brechungsindizes und speziellen Dispersionseigenschaften entstehen.

Es soll noch kurz auf den praktischen Aspekt der Tabellierung von  $n(\lambda)$ für die einzelnen Glassorten eingegangen werden. In der Regel bestimmt



**Bild 2.8:** Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindexes für verschiedene optische Gläser. Im Sichtbaren findet man immer normale Dispersion  $dn/d\lambda < 0$ .